Universität Tübingen, Fachbereich Mathematik
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 23/24

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler∗innen

Übungsblatt 7 (Abgabe spätestens 01.12.2023, 8:00)

Aufgabe 33 (12 Punkte)
Wo sind die folgenden Funktionen differenzierbar? Bestimmen Sie dort die Ableitung.

$$f_1(x) = (23)^x\,, \qquad f_2(x) = \big(\log(x^5)\big)^2\,, \qquad f_3(x) = \log_{23}(x)\,, \qquad f_4(x) = x^x\,.$$

Aufgabe 34 (6 Zusatzpunkte)
Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$ sowie $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$. Hinweis: Die Regel von l'Hospital ist hilfreich.

Aufgabe 35 (16 Punkte)
In der Vorlesung wurde gezeigt, dass

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu \quad \forall\ |x| < 1\,.$$

Bestimmen Sie *damit* die Taylorreihen der folgenden Funktionen um Null, und geben Sie an, wo diese konvergieren.

a) $\dfrac{1}{23-x}$ b) $\dfrac{1}{1+x^5}$ c) $\dfrac{x^{23}}{1-x^3}$ d) $\dfrac{1+x}{1-x}$

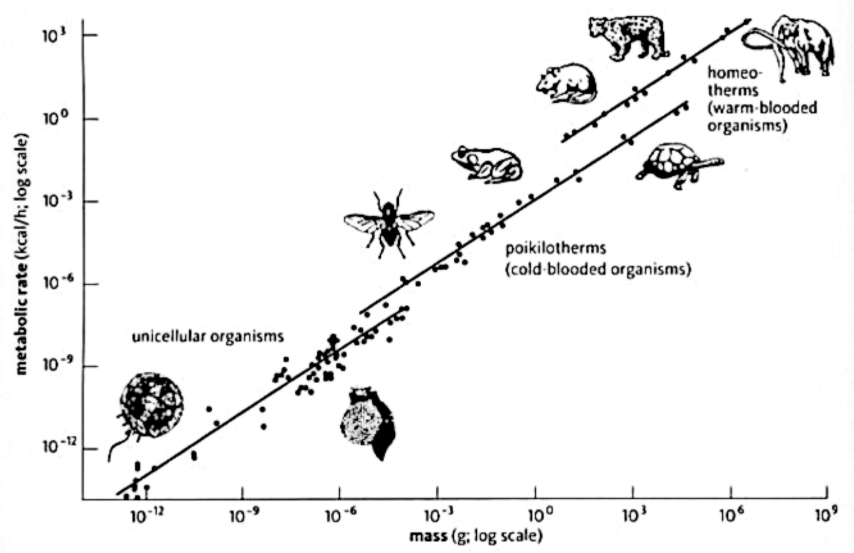
Hinweis: Sie müssen (und sollen) keine Ableitungen berechnen.

Aufgabe 36 (keine Abgabe)
Sei

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & ,\quad x \neq 0 \\ 0 & ,\quad x = 0 \end{cases}\,.$$

a) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ mit (i) $f(x) = 1$, (ii) $f(x) = -1$ und (iii) $f(x) = 0$.
b) Skizzieren Sie den Graph von f.
c) Ist f in Null stetig? Argumentieren Sie mit ε und δ, und verwenden Sie dabei Ihre Ergebnisse aus Teil a.

Aufgabe 37 (Kleibersches Gesetz) (3+3+3 = 9 Zusatzpunkte)



Im doppelt-logarithmischen Diagramm oben stellt eine Gerade den (idealisierten) Zusammenhang zwischen x (der Masse) und y (der Stoffwechselrate) für verschiedene Gruppen von Organismen dar. Bestimmen Sie für

a) Warmblüter (*Homoiotherme*),
b) Kaltblüter (*Poikilotherme*) und
c) Einzeller

jeweils eine Formel der Form $y = f(x)$, für die Funktion f, deren Graph diese Gerade ist. Geben Sie dabei kurz an, welche Zahlen(-paare) Sie aus dem Diagramm abgelesen haben, und wie Sie daraus die Parameter in Ihren Funktionen $f(x)$ bestimmt haben.

Aufgabe 38 (8 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 14.01.2024 auf `www.khanacademy.org` die Skills

- *Evaluate logarithms (advanced)*,
- *Properties of exponents (rational exponents)*,
- *Limits using trig identities* und
- *Limits at infinity of quotients with trig.*

HINWEISE: (i) Siehe Aufgabe 12 (Blatt 2).

$$\text{(ii) } \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}, \quad \csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}, \quad \cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}.$$