Universität Tübingen, Fachbereich Mathematik
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 23/24

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler*innen

Übungsblatt 10 (Abgabe am 22.12.2023)

Aufgabe 51 (5 Zusatzpunkte)

Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Vektoren aus $\mathbb{R}^3$ linear abhängig?

$$\begin{pmatrix} \beta^2 \\ -1 \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 52 (keine Abgabe)

Seien U und V Unterräume des $\mathbb{R}^{10}$ mit $\dim U = 5$ und $\dim V = 6$ und Basen $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_5$ von U und $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_6$ von V. Welche Werte kann

$$\dim \operatorname{span}\left(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_5, \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_6\right)$$

annehmen (mit Begründung)? Geben Sie für jeden Fall explizit ein Beispiel an!

Aufgabe 53 (12 Zusatzpunkte)

Geben Sie für alle Vektorräume aus Aufgabe 46 die Dimension und eine Basis an.

Aufgabe 54 (14 Punkte)

Überprüfen Sie, ob durch $\langle \cdot, \cdot \rangle$ jeweils ein Skalarprodukt auf V definiert wird.

a) $V = \mathbb{R}^n$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j$

b) $V = \mathbb{R}^3$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 3a_1b_1 + 7a_2b_2 + 5a_3b_3$

c) $V = \mathbb{R}^2$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1b_1 - a_2b_2$

d) $V = \mathbb{R}^2$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2$

e) $V = \mathbb{R}^3$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1b_1 + 3a_2b_2 + a_3b_3 - a_2b_3 - a_3b_2$

Hinweis: Die Eigenschaften (S1) und (S2) können Sie für alle Aufgabenteile gleichzeitig überprüfen, denn alle Abbildungen haben die Form $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \sum_j \sum_k \mu_{jk} a_j b_k$ mit $\mu_{kj} = \mu_{jk}$.

Aufgabe 55 (12 Punkte)

Seien

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Verwenden Sie in diesem Aufgabenteil das kanonische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ und die zugehörige Norm.
Berechnen Sie die Normen $\|\vec{a}_j\| = |\vec{a}_j|$, $j = 1, 2, 3$
und alle Skalarprodukte $\langle \vec{a}_j, \vec{a}_k \rangle = \vec{a}_j \cdot \vec{a}_k$, $j \neq k$.

b) Verwenden Sie in diesem Aufgabenteil das Skalarprodukt aus Aufgabe 54e und die zugehörige Norm.
Berechnen Sie die Normen $\|\vec{a}_j\|$, $j = 1, 2, 3$
und alle Skalarprodukte $\langle \vec{a}_j, \vec{a}_k \rangle$, $j \neq k$.