

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler*innen

Übungsblatt 11 (Abgabe am 12.01.2024)

Aufgabe 56 (10 Zusatzpunkte)

Sei $f_n(x) = x^n$. Dann ist $V = \text{span}(f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$ ein Unterraum von $C(\mathbb{R})$ mit $\dim V = 6$. Sei $L : V \rightarrow V$ definiert durch $L(f) = f''$. Sind die Mengen

$$U_1 := \{f \in V \mid L(f) = 0\} \quad \text{und} \quad U_2 := \{g \in V \mid \exists f \in V \text{ mit } L(f) = g\}$$

Unterräume von V ? Geben Sie ggf. die Dimension und eine Basis an.

Aufgabe 57 (6 Punkte)

Seien $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ wie in Aufgabe 55 und $U = \text{span}(\vec{a}_2, \vec{a}_3) \subset \mathbb{R}^3$.

- Verwenden Sie in diesem Aufgabenteil das kanonische Skalarprodukt auf \mathbb{R}^3 und die zugehörige Norm.
Bestimmen Sie mithilfe von Gram-Schmidt eine ONB von U .
- Verwenden Sie in diesem Aufgabenteil das Skalarprodukt aus Aufgabe 54e und die zugehörige Norm.
Bestimmen Sie mithilfe von Gram-Schmidt eine ONB von U .

Aufgabe 58 (keine Abgabe)

Gilt $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ für beliebige $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 59 (4+4+2 = 10 Punkte)

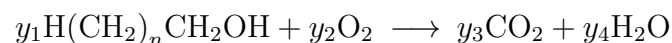
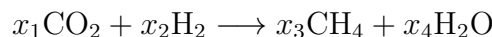
Seien $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ gegeben. Wir betrachten das LGS

$$x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + x_3 \vec{a}_3 = \vec{b} \quad \text{für } x_j \in \mathbb{R}, j = 1, 2, 3.$$

- Bilden Sie auf beiden Seiten der Gleichung das Kreuzprodukt mit \vec{a}_2 . Bilden Sie anschließend das Skalarprodukt des Ergebnisses mit \vec{a}_3 . Lösen Sie nun – wenn möglich – nach x_1 auf.
- Beschaffen Sie sich analoge Lösungsformeln für x_2 und x_3 .
- Welche Bedingung müssen die \vec{a}_j erfüllen, damit wir mithilfe der Formeln aus (a) und (b) wirklich die Lösung des LGS erhalten?

Aufgabe 60 (10 Zusatzpunkte)

Formulieren Sie für jede der chemischen Reaktionen



(für beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$) ein lineares Gleichungssystem für die Werte x_i bzw. y_j aus der Bedingung, dass auf beiden Seiten des Reaktionspfeils dieselbe Anzahl von H-, C- und O-Atomen stehen. Bestimmen Sie die jeweilige Lösungsmenge und darin die Teilmenge derjenigen Lösungen, bei denen alle x_i bzw. y_j positive ganze Zahlen sind.

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!