Universität Tübingen, Fachbereich Mathematik
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 23/24

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler∗innen

Übungsblatt 12 (Abgabe am 19.01.2024)

Aufgabe 61 (8 Punkte)
Bestimmen Sie die Polardarstellung der folgenden Punkte (x, y) aus $\mathbb{R}^2$:

a) $(4, 4)$ b) $(-1, \sqrt{3}\,)$ c) $(3, -3)$ d) $(-\sqrt{3}, -1)$

Aufgabe 62 (4+4+4 = 12 Zusatzpunkte)
Die Lösungsmenge des folgenden LGS ist eine Ebene E_1 im $\mathbb{R}^3$,

$$2x_1 + 2 + 2x_3 = 4x_2\,.$$

a) Geben Sie eine Parameterdarstellung sowie die Hessesche Normalform von E_1 an. Welchen Abstand hat die Ebene vom Ursprung?

Die Ebene E_2 im $\mathbb{R}^3$ ist gegeben als

$$E_2 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

b) Geben Sie die Hessesche Normalform von E_2 an.
c) Bestimmen Sie die Schnittmenge von E_2 und E_1.

Aufgabe 63 (8 Punkte)
Geben Sie die folgenden Punkte (x, y, z) aus $\mathbb{R}^3$ in Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) an:

e) $(\pi, 0, 0)$ f) $(0, 0, -4)$ g) $(0, 1, -1)$ h) $(1, 1, -\sqrt{2}\,)$

Aufgabe 64 (10 Zusatzpunkte)
Zeigen Sie: Die Einheitsvektoren für Kugelkoordinaten,

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix},$$

bilden (an jedem Punkt) (a) eine ONB des $\mathbb{R}^3$ und (b) ein Rechtssystem (in der angegebenen Reihenfolge). Berechnen Sie außerdem (c) die Geschwindigkeit in Kugelkoordinaten, d.h. berechnen Sie $\dot{\vec{x}}$ für

$$\vec{x}(t) = r(t) \begin{pmatrix} \sin(\theta(t))\,\cos(\phi(t)) \\ \sin(\theta(t))\,\sin(\phi(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{pmatrix},$$

und drücken Sie das Ergebnis als Linearkombination von $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ und $\vec{e}_\phi$ aus.

Aufgabe 65 (8 Punkte)

Sei $t \in [0, 2\pi]$. Berechnen Sie für die folgenden Kurven die Geschwindigkeit $\dot{\vec{x}}(t)$ und zeichnen Sie die Kurven.

$$\text{a)} \quad \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} (4\pi - t)\cos t \\ (4\pi - t)\sin t \end{pmatrix} \qquad\qquad \text{b)} \quad \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(3t) \\ \sin(3t) \\ t \end{pmatrix}$$

Aufgabe 66 (10 Punkte)

Berechnen Sie – falls möglich – für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

a) AA^T, b) A^TA, c) AA^TB, d) A^TAB,
e) B^TAA^T, f) A^2, g) A^TAA^TA.

Hinweis: Assoziativität, d.h. $(AB)C = A(BC)$, ist hilfreich.

Aufgabe 67 (8 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 04.02.2024 auf `www.khanacademy.org` die Skills

- *Matrix elements*,
- *Matrix equations: scalar multiplication*,
- *Multiply matrices* und
- *Divide complex numbers*.

Hinweise: Siehe Aufgabe 12 (Blatt 2).