Universität Tübingen, Fachbereich Mathematik
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 23/24

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler∗innen

Übungsblatt 13 (Abgabe spätestens 26.01.2024, 8:00)

Aufgabe 68 (2+2 = 4 Zusatzpunkte)

Berechnen Sie die Inversen von

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 69 (5+7+4+4 = 20 Punkte)

Seien

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} , \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} , \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

a) Berechnen Sie $\det A$.
b) Berechnen Sie B^{-1} und $\det B$.
c) Bestimmen Sie $\det C$, $\det(C^{-1})$ und $\det(C^5)$.
d) Berechnen Sie mithilfe von B^{-1} die Lösungen $\vec{x}$ und X von

$$B\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad BX = C\,.$$

Wie hätten Sie $\vec{x}$ oder X berechnen können, ohne zunächst B^{-1} zu bestimmen?

Aufgabe 70 (10 Punkte)

Wir definieren die Potenz A^n einer quadratischen Matrix A durch

$$A^0 = I \text{ und } A^{n+1} = AA^n ,$$
$$\text{d.h.} \quad A^0 = I , \quad A^1 = A , \quad A^2 = AA , \quad A^3 = AAA , \; \ldots$$

Weiter definieren wir e^{Ax} für $x \in \mathbb{R}$ durch die bekannte Taylorreihe der e-Funktion, d.h. $e^{Ax} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} A^n$. Berechnen Sie e^{Ax} für $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Hinweise: (i) Berechnen Sie zunächst A^2, A^3 und A^4. Folgern Sie daraus, wie A^n aussieht.
(ii) Aus der Definition der Matrixaddition (komponentenweise) folgt

$$\sum_n \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_n a_n & \sum_n b_n \\ \sum_n c_n & \sum_n d_n \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 71 (10 Zusatzpunkte)

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x^2 + y^2 \neq 0$ und sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ x & y & 0 \end{pmatrix}. \qquad \text{Bestimmen Sie } A^{-1}.$$

Hinweis: Die Abkürzung $r^2 := x^2+y^2$ ist geschickt, und das Ergebnis lässt sich besonders hübsch in der Form $A^{-1} = \frac{1}{r^2}\big(\cdots\big)$ angeben.

Aufgabe 72 (4 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 04.02.2024 auf `www.khanacademy.org` die Skills

- *Inverse of a* 3×3 *matrix* und
- *Determinant of a* 3×3 *matrix.*

Hinweise: Siehe Aufgabe 12 (Blatt 2).