Universität Tübingen, Fachbereich Mathematik
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 23/24

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler∗innen

Klausur am 09.02.2024

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie stets Ihren Rechenweg und vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich. Ergebnisse ohne Rechenweg/Zwischenschritte/Begründung liefern keine Punkte.**

Es sind maximal 100 Punkte erreichbar, 84 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 42 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfsmittel: Ein handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (3+5 = 8 Punkte)

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie A^2, A^3 und A^4.

b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion: $A^{2n+1} = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n \\ 2^n & -2^n \end{pmatrix} \ \forall\, n \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 2 (3+3+3+3+3+3 = 18 Punkte)

Bestimmen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte, oder begründen Sie ggf., warum diese nicht existieren.

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^4 - 4x^2 + x\cos x}{3x^2 - x^4 + 2}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^4 - 4x^2 + x\cos x}{3x^2 - x^4 + 2}$ c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{3\cos^2(x)}{2 - 2\sin x}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^6 - n^3} - n^3\right)$ e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{\log 3}{n}\right)^{2n}$ f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\big(\cos(x) - \exp(-x^2)\big)^2}{x\sin^3(x)}$

Aufgabe 3 (4+4+4+4 = 16 Punkte)

Berechnen Sie (d.h. das Ergebnis soll kein Summenzeichen mehr enthalten):

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{23} 2^{n-24}$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{9} \binom{10}{n+1} 2^{n+1}$ c) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{9}\sum_{n=\nu}^{9} \frac{n!}{\nu!(n-\nu)!}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{2023} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

Aufgabe 4 (4+4+4 = 12 Punkte)

Bestimmen Sie die Taylorreihen von

a) $\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$ und b) $\dfrac{\sin(x)}{1-x^2}$ um null, sowie die Taylorreihe von

c) $\dfrac{1}{x-23}$ um $x_0 = 24$, und geben Sie an, wo die Reihen konvergieren.

Aufgabe 5 (3+4 = 7 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ sei $g(x) = \log\big(1 + (\mathrm{e}^x)^n\big)$

a) Berechnen Sie $g'(x)$.

b) Bestimmen Sie $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{7x}}{1+\mathrm{e}^{7x}}\,\mathrm{d}x\,.$

Aufgabe 6 (2+1+4+4 = 11 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \frac{(1-x)\mathrm{e}^x}{1-\mathrm{e}^x}\,.$$

a) Für $x \to \infty$ hat f die schiefe Asymptote $y = x - 1$ (müssen Sie nicht zeigen). Finden Sie alle weiteren Asymptoten von f.

b) Bestimmen Sie alle Nullstellen von f.

c) Berechnen Sie $f'(x)$.

d) Geben Sie möglichst große Intervalle $A, B \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 \in B$ an, so dass $f : A \to B$ bijektiv ist. Bestimmen Sie ${f^{-1}}'(0)$.

Aufgabe 7 (10 Punkte)

Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $U = \operatorname{span}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ bezüglich des kanonischen Skalarprodukts auf $\mathbb{R}^4$, wobei

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Aufgabe 8 (6 Punkte)

Berechnen Sie

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 3 & -7 & 0 & \pi \\ 1 & 2 & 11 & 1/2 & 3 \\ 0 & 0 & \pi & -5 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & \pi & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2\pi & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 9 (8+4 = 12 Punkte)

Sei $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

a) Berechnen Sie A^{-1}.

b) Sei X eine Matrix, für die gilt $XA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie X.