Universität Tübingen, Fachbereich Mathematik
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 23/24

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler∗innen

Nachklausur am 16.04.2024

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie stets Ihren Rechenweg und vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich. Ergebnisse ohne Rechenweg/Zwischenschritte/Begründung liefern keine Punkte.**

Es sind maximal 100 Punkte erreichbar, 84 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 42 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfsmittel: Ein handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (3+5 = 8 Punkte)

Sei $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ und $A_{n+1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} A_n$ für $n \in \mathbb{N}$.

a) Berechnen Sie A_2, A_3 und A_4.

b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion: $A_{2n} = \begin{pmatrix} -2^n & 2^n \\ 2^n & 2^n \end{pmatrix}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2 (3+3+3+3+3+3 = 18 Punkte)

Bestimmen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte, oder begründen Sie ggf., warum diese nicht existieren.

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{3x^4 - 4x^2 + x\sin x}{2x^2 - x^4 + 2}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3x^4 - 4x^2 + x\sin x}{2x^2 - x^4 + 2}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{3 - 3\sin x}{2\cos^2(x)}$

d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n - \sqrt{n}} - \sqrt{n}\right)$ e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\log 2}{n}\right)^{3n}$ f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\big(2\sin(x) - \sin(2x)\big)^2}{\big(1 - \cos(x)\big)^3}$

Aufgabe 3 (4+4+4+4 = 16 Punkte)

Berechnen Sie (d.h. das Ergebnis soll kein Summenzeichen mehr enthalten):

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{23} 2^{n-24}$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{8} \binom{9}{n+1} 3^{n+1}$ c) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{11}\sum_{n=\nu}^{11} \frac{n!}{\nu!(n-\nu)!}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{2024} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

Aufgabe 4 (4+4+4 = 12 Punkte)

Bestimmen Sie die Taylorreihen von

a) $\dfrac{1-x}{1+x^2}$ und b) $\dfrac{\cos(x)}{1-x^2}$ um null, sowie die Taylorreihe von

c) $\dfrac{1}{x-24}$ um $x_0 = 23$, und geben Sie an, wo die Reihen konvergieren.

Aufgabe 5 (3+3 = 6 Punkte)

Sei $\alpha \in \mathbb{R}^+$ fest, $x \geq 1$ und $g(x) = \log\big(1 + \alpha \log x\big)$

a) Berechnen Sie $g'(x)$.

b) Bestimmen Sie $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{x + x\log x}$.

Aufgabe 6 (2+1+4+4 = 11 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \frac{1+x}{\mathrm{e}^x - 1}.$$

a) Für $x \to -\infty$ hat f die schiefe Asymptote $y = -x - 1$ (müssen Sie nicht zeigen). Finden Sie alle weiteren Asymptoten von f.

b) Bestimmen Sie alle Nullstellen von f.

c) Berechnen Sie $f'(x)$.

d) Geben Sie möglichst große Intervalle $A, B \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 \in B$ an, so dass $f : A \to B$ bijektiv ist. Bestimmen Sie $f^{-1\prime}(0)$.

Aufgabe 7 (4+5+4 = 13 Punkte)

Sei $\gamma \in \mathbb{R}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 9 \\ 2 & 4 & \gamma^2 - 22 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

a) Für welche Werte von γ ist A invertierbar?

b) Geben Sie für jeden Wert von γ an, wie viele Lösungen $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ das LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ jeweils hat.

c) Bestimmen Sie für $\gamma = 4$ alle Lösungen von $A\vec{x} = \vec{b}$.

Hinweis: Es ist sinnvoll, zunächst $A\vec{x} = \vec{b}$ für beliebiges γ auf Zeilenstufenform zu bringen.

Aufgabe 8 (6 Punkte)

Sei $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt, und sei $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ eine Orthonormalbasis bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Berechnen Sie $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Aufgabe 9 (3+3+4 = 10 Punkte)

Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen.

a) $\dfrac{44 + 4\mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}}$ b) $\exp\big(\mathrm{i}\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2}\log 8\big)$ c) $\left(\dfrac{\mathrm{i} - 1}{\sqrt{2}}\right)^{2024}$