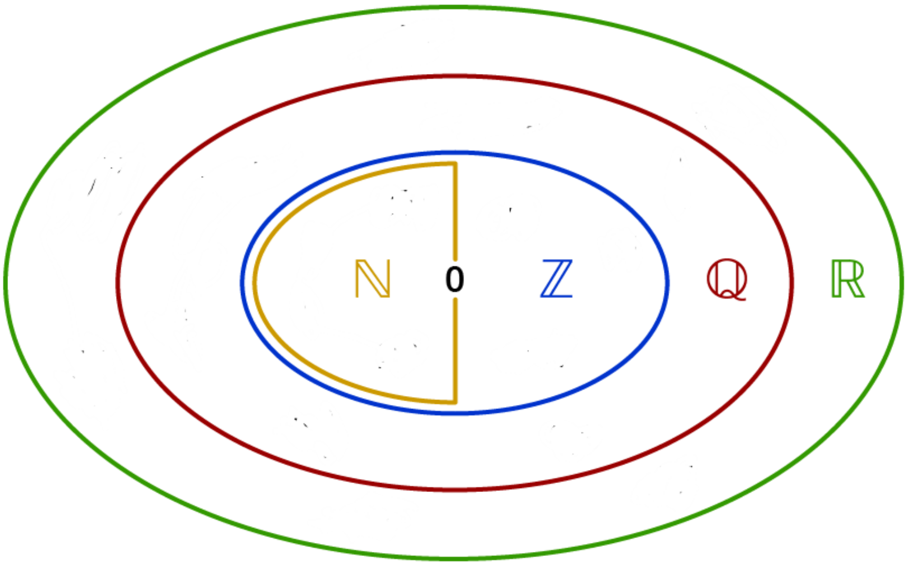
Vorkurs Mathematik für Naturwissenschaftler

Manuela Feistl

12. Oktober 2023

Kapitel 1

Zahlenbereiche



$\mathbb{N}$ Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \cdots, n, n + 1 \cdots\}$ enthält alle Nachfolger der 0 bis unendlich.
$\mathbb{N}$ ist bezüglich der Addition und Multiplikation abgeschlossen.

$\mathbb{Z}$ Die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$ erhält man indem man den Zahlenbereich der natürlichen Zahlen mit den additiven Inversen erweitert.
$\mathbb{Z}$ ist bezüglich der Addition, der Multiplikation und der Subtraktion abgeschlossen.

$\mathbb{Q}$ Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus 0\}$ erhält man indem man den Zahlenbereich der ganzen Zahlen um alle Brüche und Dezimalzahlen, die sich als Bruch darstellen lassen, erweitert.
$\mathbb{Q}$ ist bezüglich der Addition, Subtaktion, Multiplikation und der Division abgeschlossen.
<u>Satz:</u> Die rationalen Zahlen sind genau jene Zahlen mit periodischer Dezimaldarstellung.
<u>Beispiele:</u>

- $\frac{1}{2} = 0.5 = 0.5000\ldots = 0.5\overline{0}$

- $\frac{1}{3} = 0.333\ldots = 0.3\overline{3} = 0.\overline{3}$
- $\frac{1}{6} = 0.1666\ldots = 0.16\overline{6} = 0.1\overline{6}$
- $\frac{12}{7} = 1.714285714285\ldots = 1.\overline{714285}$

Die Zahl $2.\overline{35}$ stellt den Bruch $\frac{233}{99}$ dar. Dazu sei $x = 2.\overline{35}$, dann gilt $100x = 235.\overline{35}$ und $99x = 100x - x = 235.\overline{35} - 2.\overline{35} = 233$, woraus $x = \frac{233}{99}$ folgt.
Satz: Ist n eine natürliche Zahl, welche nicht durch 2 und nicht durch 5 teilbar ist, dann hat n ein Vielfaches der Form $999\ldots 9$.
Beispiel:
Die Zahl 7 hat das Vielfache 999999. Dazu sei $x = \frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$.
Wegen $1000000x = 142857.\overline{142857}$ folgt

$$999999x = 1000000x - x = 142857.\overline{142857} - \frac{1}{7} = 142857$$

und $x = \frac{142857}{999999}$, zusammen mit $x = \frac{1}{7}$ ergibt das $142857 \times 7 = 999999$.

$\mathbb{R}$ Die Menge der reellen Zahlen sind die um die irrationalen Zahlen (Zahlen die sich nicht als ganzzahliger Bruch darstellen lassen) erweiterten rationalen Zahlen.
$\mathbb{R}$ ist ebenfalls bezüglich aller 4 Grundrechnungsarten abgeschlossen. Die Zahl $\sqrt{2}$ ist ein Element von $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Angenommen, $\sqrt{2}$ wäre eine rationale Zahl, dann hätte $\sqrt{2}$ eine Darstellung als gekürzter Bruch $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{N}$ und $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$. Damit würde $b \cdot \sqrt{2} = a$ und $b^2 \cdot 2 = a^2$ folgen. Also müsste a^2 durch 2 teilbar sein, und damit auch a. Das würde bedeuten, dass a^2 sogar durch 4 teilbar wäre. Damit wäre aber b^2 durch 2 teilbar, und damit auch b. Das wäre ein Widerspruch zu $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$.

Weitere wichtige Zahlenmengen:

$\mathbb{P}$ Eine ganze Zahl $p \geq 2$, welche nur durch sich selbst und durch 1 teilbar ist, heißt prim oder Primzahl.
Die ersten Primzahlen lauten: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...
Satz: Jede natürliche Zahl n hat eine Primfaktorzerlegung: $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \ldots p_k^{e_k}$, wobei $p_1, p_2, \ldots, p_k$ aufsteigend geordnete Primzahlen sind und $e_1, e_2, \ldots, e_k$ natürliche Zahlen sind.
Beispiel:

- $60 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1$.
- $126 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 7^1$.
- $61855248 = 2^4 \cdot 3^1 \cdot 7^3 \cdot 13^1 \cdot 17^2$.

Satz (Euklid): Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Beweis: Angenommen, es gäbe nur endlich viele. Dann könnte ich sie (im Prinzip) in eine Liste schreiben: $p_1, p_2, \ldots, p_N$. Nun betrachte ich die Zahl

$$M := p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_N + 1.$$

Keine der Primzahlen aus meiner Liste kann diese Zahl M teilen. Andererseits lässt sich M nicht als Produkt von Primzahlen schreiben (und ist dabei vielleicht selbst eine Primzahl). Also gibt es eine Primzahl, die nicht auf meiner Liste ist. Widerspruch! Also gibt es unendlich viele Primzahlen.
Anwendungsbeispiel von Primzahlen:
Der größte gemeinsame Teiler ggT$(a_1, \ldots, a_n)$ der ganzen Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ ist jene ganze Zahl $m \geq 0$, welche ein Teiler von $a_1, \ldots, a_n$ ist und welche selbst ein Vielfaches von jedem Teiler von $a_1, \ldots, a_n$ ist. Das kleinste gemeinsame Vielfache kgV$(a_1, \ldots, a_n)$ ist jene ganze Zahl $m \geq 0$, welche ein Vielfaches von $a_1, \ldots, a_n$ ist und welche selbst ein Teiler von jedem Vielfachen von $a_1, \ldots, a_n$ ist.

$\mathbb{T}$ Eine tanszendente Zahl ist eine Zahl, die nicht Nullstelle eines (vom Nullpolynom verschiedenen) Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten ist.
Beispiele:

- π
- e
- $2^{\sqrt{2}}$

Kapitel 2

Die wichtigsten Rechenregeln

Terme vereinfachen

Kommutativitätsgesetz

Terme, die additativ oder multiplikativ verknüpft sind, kann man vertauschen, also:

$$a + b = b + a$$
$$a \cdot b = b \cdot a$$

Beispiel:

$$5 + 4 = 4 + 5 = 9$$
$$(3 + 5) \cdot (4 - 2) = (-2 + 4) \cdot (5 + 3) = 16$$
$$(x + 5) \cdot (y - 3) = (5 + x) \cdot (-3 + y)$$

Assoziativgesetz

Bei der Addition und Multiplikation haben alle Reihenfolgen der Ausführung das selbe Ergebnis.

$$(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$$
$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$$

Beispiel:

$$(3 + 4) + 5 = 7 + 5 = 12 \text{ und } 3 + (4 + 5) = 3 + 9 = 12$$
$$(3 \cdot 4) \cdot 5 = 12 \cdot 5 = 60 \text{ und } 3 \cdot (4 \cdot 5) = 3 \cdot 20 = 60$$

Vorsicht: Dies gilt nicht generell, wenn Addition und Multiplikation in einem Term vorkommen:

$$(a + b) \cdot c \neq a + (b \cdot c)$$
$$(2 + 3) \cdot 4 = 24 \text{ aber } 2 + (3 \cdot 4) = 14$$

Distributivgesetz

Das Produkt aus einer Zahl und einer Summe ergibt das Gleiche wie die Summe aus dem Produkt dieser Zahl mit den einzelnen Summanden. Klammern werden ausmultipliziert, indem jeder einzelne Term in der Klammer mit dem Term außerhalb der Klammer multipliziert wird:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$
$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

Beispiel:

$$2 \cdot (3 + 4) = 2 \cdot 7 = 14 \text{ und } 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 6 + 8 = 14$$

Bruchrechnung

Erweitern

Ein Bruch $\frac{p}{q}$ wird erweitert, indem man Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl multipliziert. Der Wert des Bruches ändert sich dadurch nicht.

$$\frac{p}{q} = \frac{m \cdot p}{m \cdot q}$$

Beispiel:

$$\frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 4} = \frac{6}{8}$$

Kürzen

Haben Zähler und Nenner einen gemeinsamen Faktor, kann man den Bruch kürzen, indem man beide durch den Faktor teilt.

$$\frac{ap + ar}{aq} = \frac{a(p + r)}{aq} = \frac{p + r}{q}$$

Beispiel:

$$\frac{3x + 6}{9} = \frac{3 \cdot (x + 2)}{3 \cdot 3} = \frac{x + 2}{3}$$

Außerdem ist es manchmal nützlich, Brüche auseinaderzuziehen, wenn ein Summand im Zähler identisch ist.

$$\frac{p + r}{p} = 1 + \frac{r}{p}$$

Beispiel:

$$\frac{7 + x}{7} = 1 + \frac{x}{7}$$

Vorsicht:

$$\frac{p}{p + r} \neq 1 + \frac{p}{r}$$

Beispiel:

$$\frac{2}{2 + 3} = \frac{2}{5} \neq 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

Addieren

Zwei Brüche werden addiert, indem man beide durch Erweitern auf den gleichen Nenner bringt, und dann die Zähler addiert

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{db} = \frac{ad + cb}{db}$$

Beispiel:

$$\frac{3}{2} + \frac{4}{5} = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 5} + \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{15}{10} + \frac{8}{10} = \frac{23}{10}$$

Multiplizieren

Brüche werden multipliziert, indem man jeweils die Zähler und die Nenner miteinander multipliziert (und ggf. kürzt)

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Beispiel:

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 5} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

Dividieren und Doppelbrüche

Brüche werden dividiert indem man mit dem Kehrwert des Divisors multipliziert.

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Beispiel:

$$\frac{\frac{3}{2}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{2} : \frac{4}{5} = \frac{3}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{8}$$

Potenzen und Logarithmen

Die drei Grundlagen:

$$x^n = \prod_1^n x = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{\text{n mal}}$$

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{-1} = \frac{y}{x}$$

Insbesondere gilt $x^0 = 1$.

Rechenregeln Potenzen

- Gleiche Basis

$$x^p \cdot x^q = x^{p+q}$$
$$x^p : x^q = x^{p-q}$$
$$(x^p)^q = x^{p \cdot q}$$

Beispiel:

$$3^2 \cdot 3^4 = 3^{2+4} = 3^6$$
$$4^4 : 4^2 = 4^{4-2} = 4^2$$
$$\left(3^2\right)^4 = 3^{2 \cdot 4} = 3^8$$

- Gleicher Exponent

$$x^p \cdot y^p = (xy)^p$$
$$x^p + x^q = x^q\left(x^{p-q} + 1\right)$$

Beispiel:

$$2^3 \cdot 4^3 = (2 \cdot 4)^3$$
$$x^6 + x^4 = x^4\left(x^{6-4} + 1\right) = x^4\left(x^2 + 1\right)$$

Vorsicht: $x^p + y^p \neq (x + y)^p$! Der Term $x^p + y^p$ lässt sich allgemein nicht vereinfachen.

- Kombination
Aus den Grundlagen und den Rechenregeln lässt sich z.B. ableiten:

$$\sqrt[q]{x^p} = \left(x^p\right)^{\frac{1}{q}} = x^{p \cdot \frac{1}{q}} = x^{\frac{p}{q}}$$
$$\left(\frac{x}{y}\right)^{-p} = \left(\frac{x}{y}\right)^{-1 \cdot p} = \left(\left(\frac{x}{y}\right)^{-1}\right)^p = \left(\frac{y}{x}\right)^p = \frac{y^p}{x^p}$$

Beispiel:

$$\sqrt[5]{3^2} = 3^{\frac{2}{5}}$$
$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \frac{3^4}{2^4}$$

Logarithmus

Der Logarithmus $\log_b x$ von $x > 0$ zur Basis $b > 0$ ist jene Zahl a, welche eindeutig durch die Gleichung $b^a = x$ festgelegt wird. Es gilt also $\log_b x = a$.

Spezielle Basen:

- $b = 10$ (dekadischer Logarithmus)
- $b = 2$ (dyadischer Logarithmus)

- $b = e = 2.71828\ldots$ (natürlicher Logarithmus)

Rechenregeln:

- $\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$
- $\log_b(x : y) = \log_b x - \log_b y$
- $\log_b(x^a) = a \log_b x$
- $\log_b 1 = 0$ und $\log_b b = 1$

Um diese Rechenregeln für Logarithmen nachzuprüfen, können die Rechenregeln für Potenzen verwendet werden.
Zum Beispiel: Aus

$$xy = b^{\log_b(xy)} \quad \text{und} \quad xy = b^{\log_b x + \log_b y} = b^{\log_b x} b^{\log_b y}$$

folgt $\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$.
Oder aus

$$x^a = b^{\log_b(x^a)} \quad \text{und} \quad x^a = (b^{\log_b x})^a = b^{a \log_b x}$$

folgt $\log_b(x^a) = a \log_b x$.

Logarithmus und Exponentialfunktion

- Rechenregeln für Exponentialfunktionen (analog)

$$\begin{aligned} e^{\ln(x)} &= x \\ e^x \cdot e^y &= e^{x+y} \\ e^x : e^y &= e^{x-y} \\ (e^x)^a &= e^{xa} \end{aligned}$$

- Rechenregeln für den natürlichen Logarithmus (analog)

$$\begin{aligned} \ln(e^x) &= x \\ \ln(x) + \ln(y) &= \ln(xy) \\ \ln(x) - \ln(y) &= \ln\left(\frac{x}{y}\right) \\ \ln(x^a) &= a \cdot \ln(x) \end{aligned}$$

Die letzte Rechenregel ist vor allem zum Lösen von Gleichungen, bei denen x im Exponenten auftaucht, sehr hilfreich, wie wir später sehen werden.

Kapitel 3

Gleichungen, Ungleichungen und Gleichungssysteme

Gleichungen mit einer Unbekannten

Generell versucht man bei Gleichungen, die Werte (oder den Wert) einer Variablen (Unbekannter) herauszufinden, die die Gleichung löst. Dazu muss man im Regelfall die Gleichung durch Äquivalenzumformungen so „umbauen", dass die Unbekannte auf der einen Seite steht, und der Rest (im Idealfall eine Zahl) auf der anderen Seite. Dazu sind alle Operationen erlaubt, die die Aussage der Gleichung nicht verändern. Man kann z.B. Werte addieren oder subrahieren, die Gleichung mit Werten multiplizieren (außer mit 0), durch Werte Zeilen (außer duch 0), auf beiden Seiten den Logarithmus nehmen oder exponenzieren. Bei anderen Operationen muss man vorsichtig sein, z.B. beim Potenzieren bzw. Wurzel ziehen, da z.B. $5 \neq (-5)$ aber $5^2 = (-5)^2$.

Lineare Gleichungen

Einfachste Art von Gleichungen, bei denen die Unbekannte (x) nur in der ersten Potenz (also mit der Hochzahl 1) vorkommt. Die allgemeinste Form für eine solche Gleichung ist

$$ax + b = cx + d$$

(wobei wir $a \neq c$ annehmen). Diese kann man z.B. wie folgt lösen:

$$\begin{aligned}
ax + b &= cx + d \quad | -cx - b \\
\Leftrightarrow ax - cx &= d - b \\
\Leftrightarrow (a - c)x &= d - b \quad | : (a - c) \\
\Leftrightarrow x &= \frac{d - b}{a - c}
\end{aligned}$$

Dabei haben wir im ersten und dritten Schritt Äquivalenzumformungen angewendet und im zweiten und vierten Schritt lediglich das Distributivgesetz verwendet. Die Lösungsmenge Lineare Gleichungen lässt sich immer auf diese Weise bestimmen.

Lösungsmenge:

$$\mathbb{L} = \begin{cases} \left\{\frac{d-b}{a-c}\right\} & \text{falls } a-c \neq 0, \\ \varnothing & \text{falls } a-c = 0 \text{ und } d-b \neq 0, \\ \mathbb{R} & \text{falls } a-c = d-b = 0. \end{cases}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} & 5x + 2 = 4x + 3 \\ \Leftrightarrow\ & x = \frac{3-2}{5-4} = 1 \end{aligned}$$

Quadratische Gleichung

Hier kommt x nur in der ersten und zweiten Potenz vor (also mit der Hochzahl 1 und 2). Zum Lösen solcher Gleichungen sind die binomischen Formeln von zentraler Bedeutung. Binomische Formeln:

1. $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
2. $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
3. $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$

Mit Hilfe dieser lässt sich auch die allgemeine Lösungsformel herleiten, die ihr aus der Schule als Mitternachtsformel kennt.
Gesucht ist die Lösungsmenge von $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a \neq 0$.
Lösungsmenge:

$$\mathbb{L} = \begin{cases} \left\{\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\} & \text{falls } b^2 - 4ac \geq 0, \\ \varnothing & \text{falls } b^2 - 4ac < 0 \end{cases}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} & 3x^2 + 9x + 5 = -1 \\ \Leftrightarrow\ & 3x^2 + 9x + 6 = 0 \\ \Rightarrow\ & a = 3, b = 9, c = 6 \\ \Rightarrow\ & x_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6}}{2 \cdot 3} \\ \Rightarrow\ & x_1 = -1,\ x_2 = -2 \end{aligned}$$

Gleichungen mit Beträgen

Gesucht ist die Lösungsmenge von $|1 - |x-2|| = 2$. Dazu verwenden wir Fallunterscheidungen, denn

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{falls } x-2 \geq 0,\ \text{d.h. } x \geq 2, \\ -(x-2) & \text{falls } x-2 < 0,\ \text{d.h. } x < 2. \end{cases}$$

1. Fall: $x \geq 2$:

$$
\begin{aligned}
|1-|x-2|| = |1-(x-2)| = |3-x| \\
= \begin{cases} 3-x & \text{falls } 3-x \geq 0, \text{ d.h. } x \leq 3, \\ -(3-x) & \text{falls } 3-x < 0, \text{ d.h. } x > 3. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Fall 1.1: $x \leq 3$, also $x \in [2,3]$:
$3 - x = 2 \Rightarrow x = 1/2 \notin [2,3]$ (keine Lösungen).
Fall 1.2: $x > 3$:
$-(3-x) = 2 \Rightarrow x = 5$. Also ist $x = 5$ eine Lösung.

2. Fall: $x < 2$:

$$
\begin{aligned}
|1-|x-2|| = |1+(x-2)| = |x-1| \\
= \begin{cases} x-1 & \text{falls } x-1 \geq 0, \text{ d.h. } x \geq 1, \\ -(x-1) & \text{falls } x-1 < 0, \text{ d.h. } x < 1. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Fall 2.1: $x \geq 1$, also $x \in [1;2)$:
$x - 1 = 2 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \in [1;2)$. In diesem Fall gibt es keine Lösungen.
Fall 2.2: $x < 1$:
$-x + 1 = 2 \Rightarrow x = -1 < 1$. Also ist $x = -1$ eine Lösung.
Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{-1, 5\}$.

Gleichungen mit höheren Potenzen

Gleichungen höherer Potenzen (also Gleichungen, in denen Terme mit x^3, x^4 etc. auftauchen), lassen sich generell nicht ohne weiteres lösen, wenn man nicht mehr Informationen hat, z.B. Nullstellen kennt, so dass man eine Polynomdivision durchführen kann. Dies geht über die Inhalte des Kurses hinaus.

Wurzelgleichungen

$$
\begin{aligned}
\sqrt[n]{ax+b} &= c \mid (\cdot)^n, \text{ Ann: } c \geq 0 \\
\Leftrightarrow ax+b &= c^n \mid -b \\
\Leftrightarrow ax &= c^n - b \mid :a \\
\Leftrightarrow x &= \frac{c^n - b}{a}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{x+d} = e + fx \mid (\cdot)^2, \text{ Ann: } e + fx \geq 0 \\
\Leftrightarrow &x + d = (e+fx)^2 = e^2 + 2efx + f^2x^2 \mid -x-d \\
\Leftrightarrow &f^2x^2 + (2ef-1)x + e^2 - d = 0
\end{aligned}
$$

Beispiel:
Gesucht ist die Lösungsmenge von $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} = 2$.

Durch Quadrieren erhalten wir:

$$\begin{aligned}
(\sqrt{x+1})^2 + 2\sqrt{x+1}\sqrt{x-1} + (\sqrt{x-1})^2 &= 4\\
x+1+2\sqrt{x^2-1}+x-1 &= 4\\
2x+2\sqrt{x^2-1} &= 4\\
x+\sqrt{x^2-1} &= 2\\
x^2+2x\sqrt{x^2-1}+x^2-1 &= 4\\
2x^2+2x\sqrt{x^2-1}-5 &= 0\\
\sqrt{x^2-1} &= \frac{5-2x^2}{2x} \qquad |\,()^2\\
x^2-1 &= \frac{25-20x^2+4x^4}{4x^2}\\
4x^2(x^2-1) &= 25-20x^2+4x^4\\
4x^4-16x^2-25 &= 0
\end{aligned}$$

Dies ist eine quadratische Gleichung in x^2. Die Lösungen dieser Gleichung sind $x^2 = \frac{8\pm\sqrt{104}}{4}$. Da wir nach x auflösen wollen, nehmen wir nur die positiven Lösungen und berechnen die Quadratwurzeln:

$$x^2 = \frac{8+\sqrt{104}}{4} \quad \text{und} \quad x^2 = \frac{8-\sqrt{104}}{4}.$$

Somit ergibt sich: $x = \pm\frac{\sqrt{8+\sqrt{104}}}{2}$.

Quadratische Ungleichungen

Gesucht sind Zahlen x mit $x^2 \leq 4$, das heißt $x^2 - 4 \leq 0$.
Betrachten wir die quadratische Gleichung $x^2 - 4 = 0$. Diese hat die Lösungen $x = -2$ und $x = 2$. Daraus folgt: $x^2 - 4 = (x-2)(x+2) = (x-2)(-x-2)$. Wir suchen nun die Zahlen x mit $(x-2)(-x-2) \leq 0$.

- 1. Fall: $x - 2 \geq 0$ und $-x-2 \leq 0$. Dann gilt $x \geq 2$ und $x \leq -2$, was ein Widerspruch ist.

- 2. Fall: $x - 2 \leq 0$ und $-x-2 \geq 0$. Dann gilt $x \leq 2$ und $x \geq -2$, also $-2 \leq x \leq 2$.

Insgesamt erhalten wir: $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 \leq 0\} = [-2, 2]$.

Exponentialgleichung

$$\begin{aligned}
a^x &= b \ |\ln()\\
\Leftrightarrow x\ln(a) &= \ln(b)\\
\Leftrightarrow x &= \frac{\ln(b)}{\ln(a)}
\end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned}
a^x &= b \ |\log_a()\\
\Leftrightarrow \ x &= \log_a(b)
\end{aligned}$$

Logarithmusgleichung

$$\ln(x) = f \quad | \, e^{()}$$
$$\Leftrightarrow x = e^{f}$$

Gleichungen mit mehreren Unbekannten

Wir betrachten zunächst Gleichungen mit zwei Unbekannten x und y. Um eine eindeutige Lösung zu haben braucht man immer zwei Gleichungen. Ein Gleichungssystem hat also die Form

$$f(x, y) = a$$
$$g(x, y) = b$$

Allgemein geht man in vier Schritten vor:

1. Zuerst versucht man, eine der Gleichungen nach einer Variblen z.B. y aufzulösen. (Die Lösung y wird in der Regel noch von der anderen Variablen abhängen.)

2. Dann setzt man die Lösung für y in die andere Gleichung ein. In dieser Gleichung steht dann nur noch eine Varibale (x).

3. Diese Gleichung löst man dann wie eine Gleichung mit einer Unbekannten und erhält eine Lösung für x.

4. Diesen Wert setzt man dann in die im ersten Schrittt berechnete Gleichung für y ein und hat eine Lösung für y.

$$I \; 3x = 8 + 2y$$
$$II \; 5x + 4y = 22$$

$$3x = 8 + 2y \implies x = \frac{8 + 2y}{3}$$

$$5\left(\frac{8 + 2y}{3}\right) + 4y = 22$$

$$\frac{40 + 10y}{3} + 4y = 22$$

$$\frac{40 + 10y + 12y}{3} = 22$$

$$22y = 22 \cdot 3 - 40$$

$$22y = 46$$

$$y = \frac{46}{22} = \frac{23}{11}$$

$$x = \frac{8 + 2\left(\frac{23}{11}\right)}{3}$$

Es ist auch möglich das Additionsverfahren anzuwenden. Nun sollst du herausfinden, was x und y ist. Mit dem Additionsverfahren kannst du die Gleichungen so umformen, dass bei der Addition der Gleichungen x oder y verschwindet. Es funktioniert wie folgt:

1. Überlege dir, welche Variable du entfernen möchtest.
2. Multipliziere die Gleichungen mit Zahlen, sodass sich eine Variable gegenseitig aufhebt.
3. Addiere beide Gleichungen zusammen. Du erhältst damit eine neue Gleichung, die die gewählte Variable nicht mehr enthält.
4. Berechne die andere Variable.

Beispiel: Gegeben sind die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \mathrm{I}\ 2x + 3y &= 12 \\ \mathrm{II}\ 4x - 2y &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{I}\ 4x + 6y &= 24 \\ \mathrm{II}\ -4x + 2y &= -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{I} + \mathrm{II}\ (4x + 6y) + (-4x + 2y) &= 24 - 6 \\ 8y &= 18 \end{aligned}$$

$$y = \frac{18}{8} = \frac{9}{4}$$

$$2x + 3\left(\frac{9}{4}\right) = 12$$

$$2x + \frac{27}{4} = 12 \implies 2x = 12 - \frac{27}{4} \implies x = \frac{1}{2}$$

Die Lösung des Systems ist $x = \frac{1}{2}$ und $y = \frac{9}{4}$

Kapitel 4

Summen und Produkte

Die Schreibweisen $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ und $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \cdots \cdot a_n$ werden rasch unübersichtlich und mühsam. Als Alternativen gibt es das Summenzeichen Σ, vom griechischen Großbuchstaben Σ, und das Produktzeichen Π, vom griechischen Großbuchstaben Π:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n; \quad \prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \cdots \cdot a_n.$$

Allgemeiner:

$$\sum_{k=r}^{s} a_k = a_r + a_{r+1} + \cdots + a_s;$$

wobei

- a_k der k-te Summand der Summe ist,
- k der Laufindex der Summe ist,
- r die untere Grenze der Summe ist,
- s die obere Grenze der Summe ist.

Analog für das Produkt:

$$\prod_{k=r}^{s} a_k = a_r \cdot a_{r+1} \cdot \cdots \cdot a_s;$$

wobei

- a_k der k-te Faktor des Produkts ist,
- ... siehe Summe.

Beispiel:

$$\sum_{k=3}^{6} (2k+1) = 7 + 9 + 11 + 13; \quad \prod_{k=-2}^{2} (k^2+1) = 5 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5.$$

Rechenregeln:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=r}^{s}(ca_k) &= c\sum_{k=r}^{s} a_k,\\
\sum_{k=r}^{s}(a_k+b_k) &= \sum_{k=r}^{s} a_k + \sum_{k=r}^{s} b_k,\\
\sum_{k=r}^{t} a_k &= \sum_{k=r}^{s} a_k + \sum_{k=s+1}^{t} a_k,\\
\prod_{k=r}^{s}(ca_k) &= c^{s-r+1}\prod_{k=r}^{s} a_k,\\
\prod_{k=r}^{s}(a_k\cdot b_k) &= \prod_{k=r}^{s} a_k \cdot \prod_{k=r}^{s} b_k,\\
\prod_{k=r}^{t} a_k &= \prod_{k=r}^{s} a_k \cdot \prod_{k=s+1}^{t} a_k.
\end{aligned}$$

Laufindex verschieben:

Häufig ist es hilfreich den Laufindex zu verschieben (z.B. beim Zusammenfassen mehrerer Summen).

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \sum_{k=1}^{4} a_k = \sum_{k=0}^{3} a_{k+1} = \sum_{k=2}^{5} a_{k-1} = \dots$$

Werte von Summen ermitteln:

Teleskop-Summe

Beispiel 1: Es lässt sich zeigen, dass der Wert der folgenden Summe 1 ist.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$$

Umschreiben liefert:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

Für die Partialsummen gilt

$$s_n = (1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) + (\frac{1}{3}-\frac{1}{4}) + \dots + (\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$$

Durch Grenzwertbildung sieht man, dass der Wert der unendlichen Summe 1 ist.
Beispiel 2:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^2-k^2\right) &= \sum_{k=1}^{n}(k+1)^2-\sum_{k=1}^{n}k^2\\ &= \sum_{k=2}^{n+1}k^2-\sum_{k=1}^{n}k^2\\ &= \left(\sum_{k=2}^{n}k^2+(n+1)^2\right)-\left(1+\sum_{k=2}^{n}k^2\right)\\ &= (n+1)^2-1\\ &= n^2+2n+1-1\\ &= n^2+2n.\end{aligned}$$

Geometrische Summe:

$$\sum_{k=0}^{n}a^k = a^0+a^1+\cdots+a^n = ???$$

Wir betrachten

$$\begin{aligned}(a-1)\sum_{k=0}^{n}a^k &= a\sum_{k=0}^{n}a^k-\sum_{k=0}^{n}a^k\\ &= \sum_{k=0}^{n}a^{k+1}-\sum_{k=0}^{n}a^k\\ &= \sum_{k=1}^{n+1}a^k-\sum_{k=0}^{n}a^k\\ &= \left(\sum_{k=1}^{n}a^k+a^{n+1}\right))-\left(1+\sum_{k=1}^{n}a^k\right)\\ &= a^{n+1}-1.\end{aligned}$$

Also gilt

$$\sum_{k=0}^{n}a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}.$$

Kleiner Gauß:

$$\sum_{k=1}^{n}k = 1+2+\cdots+n = ???$$

Gauß-Trick:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & + & 2 & + & \cdots & + & (n-1) & + & n & & \\ n & + & (n-1) & + & \cdots & + & 2 & + & 1 & & \\ \hline (n+1) & + & (n+1) & + & \cdots & + & (n+1) & + & (n+1) & = & n\cdot(n+1) \end{array}$$

$$\sum_{k=1}^{n}k = \frac{n\cdot(n+1)}{2}.$$

Fakultät:

(Für $n \in \mathbb{N}$)

$$0! = 1 \quad \text{und} \quad n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1 = \prod_{k=1}^{n} k.$$

Binomialkoeffizient:

(Für $n \in \mathbb{N}$, $0 \le k \le n$)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Pascal'sche Regel:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \text{und} \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Pascal'sches Dreieck:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0}=1 & & & & \\
 & & & \binom{1}{0}=1 & & \binom{1}{1}=1 & & & \\
 & & \binom{2}{0}=1 & & \binom{2}{1}=2 & & \binom{2}{2}=1 & & \\
 & \binom{3}{0}=1 & & \binom{3}{1}=3 & & \binom{3}{2}=3 & & \binom{3}{3}=1 & \\
\binom{4}{0}=1 & & \binom{4}{1}=4 & & \binom{4}{2}=6 & & \binom{4}{3}=4 & & \binom{4}{4}=1
\end{array}$$

Binomische Formel:

$$\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1 \cdot a^0 \cdot b^0, \\
(a+b)^1 &= 1 \cdot a^1 \cdot b^0 + 1 \cdot a^0 \cdot b^1, \\
(a+b)^2 &= 1 \cdot a^2 \cdot b^0 + 2 \cdot a^1 \cdot b^1 + 1 \cdot a^0 \cdot b^2, \\
(a+b)^3 &= 1 \cdot a^3 \cdot b^0 + 3 \cdot a^2 \cdot b^1 + 3 \cdot a^1 \cdot b^2 + 1 \cdot a^0 \cdot b^3, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Allgemein:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \dots + \binom{n}{n} a^0 b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Das Prinzip der vollständigen Induktion

Auf $\mathbb{N}$ betrachten wir die Operationen $+$ und $\cdot$ und die Relation $\le$.
Die Relation $\le$ ist eine Ordnungsrelation, genauer eine Totalordnung: Für alle $m, n, p \in \mathbb{N}$ gilt nämlich:

(a) $m \le m$ (Reflexivität)

(b) Aus $m \le n$ und $n \le m$ folgt $m = n$ (Antisymmetrie)

(c) Aus $m \le n$ und $n \le p$ folgt $m \le p$ (Transitivität)

(d) $m \le n$ oder $n \le m$ (Totalität)

Jede natürliche Zahl n hat einen eindeutigen Nachfolger, nämlich $n+1$. Zwischen n und $n+1$ liegen keine weiteren natürlichen Zahlen.
Es gibt eine kleinste natürliche Zahl, nämlich die 1.
Die Menge $\mathbb{N}$ ist induktiv geordnet: Ist $M \subseteq \mathbb{N}$ eine Teilmenge von $\mathbb{N}$ mit den Eigenschaften

(a) $1 \in M$

(b) Für jedes $n \in M$ gilt: $n+1 \in M$

Dann gilt $M = \mathbb{N}$.

Vollständige Induktion: Prinzip

In der Regel benutzt man diese Eigenschaft in Form des Prinzips der vollständigen Induktion:
Ist $A(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Aussage und haben wir gezeigt:

(a) $A(1)$ ist wahr.

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: Wenn $A(n)$ wahr ist, dann ist auch $A(n+1)$ wahr.

Dann gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Vollständige Induktion: Beispiel

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Beweis: Wir zeigen dies per vollständiger Induktion.
Induktionsanfang (für $n = 1$): Es gilt

$$\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1(1+1)}{2},$$

also gilt die Behauptung für $n = 1$.
Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$ und es gelte

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{(Induktionsvoraussetzung, kurz I.V.).}$$

Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) \overset{IV}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Also gilt die Behauptung auch für $n+1$.
Mittels vollständiger Induktion folgt die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis der Binomischen Formel:

- Induktionsanfang für $n = 0$:

$$(a+b)^0 = 1 = 1 \cdot a^0 \cdot b^0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^{0-k} b^k.$$

- Induktionsschritt: $A(n)$ ist die Gleichheit $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$;
  $A(n+1)$ ist die Gleichheit $(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k$:
  Damit:

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b) \cdot (a+b)^n \\
&= (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^k + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) a^{n-k+1} b^k + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n-k+1} b^k + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k.
\end{aligned}$$

Beweis einer Teilbarkeitsformel

Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $n^2 + n$ gerade.

- Induktionsanfang für $n = 1$:

$$1^2 + 1 = 2$$

  2 ist gerade.

- Induktionsvoraussetzung $n^2 + n$ ist gerade für ein $n \in \mathbb{N}$ fest aber beliebig

- Induktionsschritt: Damit ist

$$(n+1)^2 + (n+1) = n^2 + 2n + 1 = \underbrace{n^2 + n}_{\text{gerade nach IV}} + \underbrace{2n + 2}_{istgerade}$$

  eine gerade Zahl

Kapitel 5

Funktionen

Eine Funktion oder Abbildung ist eine Beziehung zwischen zwei Mengen, die jedem Element der einen Menge (Funktionsargument, unabhängige Variable, x-Wert, Urwert) genau ein Element der anderen Menge (Funktionswert, abhängige Variable, y-Wert, Zielwert) zuordnet. So ordnet zum Beispiel die Funktion

$$f(x) = x^2$$

jedem beliebigen Urwert x als Zielwert das Quadrat seines Wertes zu, also z.B. dem Urwert 3 den Zielwert 9.
Die Funktion

$$f(x) = 5$$

ordnet jedem beliebigen Urwert den Zielwert 5 zu, ist also konstant.
Die Funktion

$$f(x, y) = x + y$$

ordnet einem Paar von Urwerten x,y als Zielwert die Summe der beiden Urwerte zu, also z.B. dem Paar (3,4) den Zielwert 7.

Steigung einer Funktion

Die Steigung einer Funktion zwischen zwei Punkten sagt, grob gesprochen, wie „steil “die Funktion zwischen den Punkten ist, also um wie viel die Funktion relativ steigt, wenn der Urwert x auf y steigt, insgesamt also

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Beispiel: Sei $f(x) = 2x$. Wenn der Urwert um einen Schritt steigt, also z.B. von 3 nach 4, steigt der Fuktionswert von 6 nach 8 also um 2 Schritte. Die Funktion hat also zwischen 3 und 4 die Steigung 2. Im Allgemeinen wird die Steigung von der Stelle abhängen, an der die Funktion betrachtet wird, und von der Größe der Schritte, die man wählt.
Aufgabe: Berechne und vergleiche die mittlere Steigung der Funktion $f(x) = x^2$ zwischen

- 2 und 3
- 4 und 5
- 2 und 2,1
- 2 und 2,01

Lässt man den Abstand zwischen x und y gegen 0 laufen, bildet also den Grenzwert $\frac{df(x_0)}{dx} := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, kommt man zur Steigung im Punkt x_0, der sogenannten

Ableitung

Die Ableitung bestimmt die Steigung der Tangente in einem Punkt des Funktionsgraphen einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Beispiel: Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ und es sei $x_0 \in \mathbb{R}$.
Die Steigung der Sekante = $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = x + x_0$.
Die Steigung der Tangente sollte sich durch das Einsetzen von $x = x_0$ ergeben: Steigung der Tangente = $x_0 + x_0 = 2x_0$.

Definition der Ableitung

Die Ableitung $f'(x_0)$ oder $\frac{df}{dx}(x_0)$ an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ ist

$$f'(x_0) = \lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0},$$

sofern der Grenzwert für beliebige Folgen $(x_n)_{n \geq 1}$ mit $x_n \to x_0$ und $x_n \neq x_0$ existiert und immer das selbe Ergebnis liefert. In diesem Fall heißt f in x_0 differenzierbar.

Höhere Ableitungen

$$f^{(n)}(x_0); \quad f^{(n)}(x_0); \quad \ldots; \quad f^{(n)}(x_0)$$

beziehungsweise

$$\frac{d^n f}{dx^n}(x_0); \quad \frac{d^n f}{dx^n}(x_0); \quad \ldots; \quad \frac{d^n f}{dx^n}(x_0)$$

und $f^{(1)}(x_0) = \frac{d^1 f}{dx^1}(x_0) = f(x_0)$.

Rechenregeln

Es seien f und g differenzierbare Funktionen und es seien $a, b \in \mathbb{R}$, dann gilt:

Linearität: $(af + bg)' = af' + bg'$.
Produktregel: $(fg)' = f'g + fg'$.
Quotientenregel: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.
Kettenregel: $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$.

Ableitungen von speziellen Funktionen

$$(x^r)' = rx^{r-1} \quad \text{für } r \neq 0.$$
$$(e^x)' = e^x \quad \text{und} \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$
$$(\sin x)' = \cos x \quad \text{und} \quad (\cos x)' = -\sin x.$$

Beispiele:

$$(3x^3 + 4x^4)' = 3(x^3)' + 4(x^4)' = 9x^2 + 16x^3.$$
$$\left(\sqrt{x^2+1}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$
$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$
$$(e^{\cos x})' = e^{\cos x} \cdot (-\sin x) = -e^{\cos x} \sin x.$$
$$(x^x)' = (e^{\ln x^x})' = e^{\ln x^x}(\ln x + x \cdot \frac{1}{x}) = x^x + x^x \ln x.$$

Berechnung von Extremwerten:

Ist f differenzierbar und ist x_0 ein lokales Extremum, dann gilt $f'(x_0) = 0$. Die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch! Beispiel: Für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3$ gilt $f'(0) = 0$, aber $x_0 = 0$ ist kein lokales Extremum.

Monotonie und Konvexität:

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

- Gilt $f'(x) \geq 0$ (beziehungsweise $f'(x) \leq 0$) für alle $x \in (a,b)$, dann ist f auf dem Intervall (a,b) monoton wachsend (beziehungsweise monoton fallend).
- Gilt $f''(x) \geq 0$ (beziehungsweise $f''(x) \leq 0$) für alle $x \in (a,b)$, dann ist f auf dem Intervall (a,b) konvex (beziehungsweise konkav).

Exkurs: Funktionen mehrer Variblen

Hier kommt es darauf an, „wonach"man ableitet, da zum Beispiel ein Unterschied zwischen

$$\frac{df(x,y)}{dx} = f_x$$

und

$$\frac{df(x,y)}{dy} = f_y$$

besteht. Der erste Term sagt aus, wie sich der Funktionswert ändert wenn man sich x marginal ändert, der zweite Term sagt aus, wie sich die Funktion ändert,

wenn sich y marginal ändert. Man bezeichnet die jeweiligen Ableitungen als partielle Ableitungen. Man betrachtet die Änderung der Funktion wenn man die x-Achse weitergeht. Die Bezeichnung $f'(x,y)$ wäre als nicht mehr eindeutig, „in welche Richtung man ableitet.“
Beispiel: Sei $f(x,y) = xy + x + y^2$. Dann sind die ersten Ableitungen

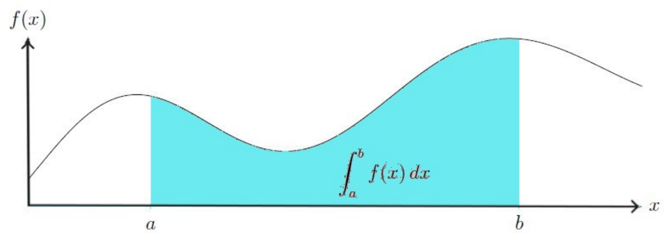
$$\frac{df(x,y)}{dx} = y + 1$$
$$\frac{df(x,y)}{dy} = x + 2y$$

und die zweiten Ableitungen

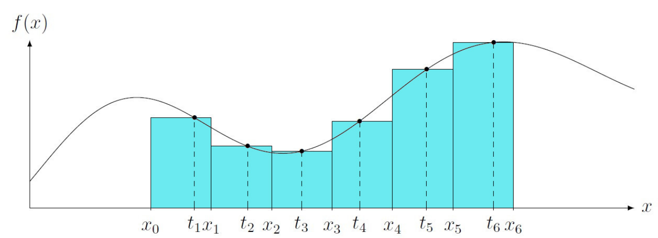
$$\frac{d^2f(x,y)}{dx^2} = 0$$
$$\frac{d^2f(x,y)}{dy^2} = 2$$
$$\frac{d^2f(x,y)}{dxdy} = 1$$
$$\frac{d^2f(x,y)}{dydx} = 1$$

Integration

Die Integralrechnung wird genutzt, um Flächeninhalte und Volumen zu berechnen. Eine Anwendung ist die Bestimmung der Fläche zwischen einer Funktion und der x-Achse. Dazu sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und es sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Definition mit Hilfe von Riemann-Summen: Der Flächeninhalt zwischen



Funktion und x-Achse wird mit Hilfe von schmalen Rechtecken approximiert. Dazu sei $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ eine Zerlegung von $[a,b]$ in n Teilintervalle. Außerdem sei $t_1 \in [x_0, x_1]$, $t_2 \in [x_1, x_2], \ldots, t_n \in [x_{n-1}, x_n]$.



Die Summe der Rechtecksflächeninhalte ist die Riemann-Summe

$$\sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Ist der Grenzübergang, bei dem die Zerlegung immer feiner wird, erlaubt, dann heißt der Grenzwert der Riemann-Summen das Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

von f auf dem Intervall $[a, b]$.

Stammfunktion:

Eine Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wenn $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Sind F_1 und F_2 zwei Stammfunktionen von f, dann gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ so, dass $F_2(x) = F_1(x) + c$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

- Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine reellwertige und stetige Funktion auf einem reelen Intervall I, so ist für jedes $t \in I$ und ist $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $F : I \to \mathbb{R}$ mit

$$F(t) = \int_t^a f(x)\,dx$$

  für alle $a \in \mathbb{R}$. F eine Stammfunktion von f.

- Ist F eine Stammfunktion der stetigen Funktion f, dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

  für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

Rechenregeln:

Es seien f und g stetige Funktionen und $\alpha, \beta, a, b \in \mathbb{R}$.

- Linearität:

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx;$$

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx;$$

- Partielle Integration:

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx;$$

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx;$$

- Substitution: Es sei $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$\int f(u(t))u'(t)\,dt = \int f(x)\,dx\Big|_{x=u(t)};$$

$$\int_a^b f(u(t))u'(t)\,dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x)\,dx.$$

Denn aufgrund der Kettenregel gilt

$$\int f(x)\,dx\Big|_{x=u(t)} = F(u(t)) + C = \int (F(u(t)))'\,dt = \int (F'(u(t))u'(t))\,dt,$$

wobei F eine Stammfunktion von f ist.

Integrale spezieller Funktionen:

Unter Verwendung des Hauptsatzes gilt folgendes:

- $\int x^r\,dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + C$ für $r \neq -1$.
- $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$.
- $\int e^x\,dx = e^x + C$.
- $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$.
- $\int \cos x\,dx = \sin x + C$.

Beispiele:

- $\int \ln x\,dx$: Mit Hilfe von partieller Integration gilt

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$$

$\big(f(x) = \ln x,\ f'(x) = \frac{1}{x},\ g(x) = x,\ g'(x) = 1\big)$

- $\int xe^x\,dx$: Mit Hilfe von partieller Integration gilt

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int 1 \cdot e^x\,dx = xe^x - e^x + C.$$

$(f(x) = x,\ f'(x) = 1,\ g'(x) = e^x,\ g(x) = e^x)$

- $\int \sqrt{2x+1}\,dx$: Mit Hilfe von Substitution gilt

$$\int \sqrt{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{u}\,du = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2} + C = \frac{1}{3}(2x+1)^{3/2} + C.$$

- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$: Wir suchen nach einer Substitution, so dass aus $\sqrt{1-x^2}$ ein Ausdruck der Form y entsteht. Also $y = \sqrt{1-x^2}$ und $x^2 + y^2 = 1$, was die Kreisgleichung für den Einheitskreis ist. Diesen Kreis können wir mit Hilfe von Kosinus und Sinus parametrisieren:

$$f(x,y) : x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow f(x,y) = (\cos\theta, \sin\theta) : \theta \in [0, 2\pi).$$

Daher verwenden wir die Substitution $x(\theta) = \cos\theta$:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} \cdot (-\cos\theta)\,d\theta = \int 1\,d\theta = \theta + C.$$

Jetzt müssen wir θ in Bezug auf x ausdrücken. Da $x = \cos\theta$, können wir $\theta = \arccos x$ schreiben. Wir erhalten:

$$\arccos x + C.$$

Vektoren

Ebene: $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$.
Raum: $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$.
Allgemein: $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ (n mal) $= \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$.

Vektoren

Ein Vektor ist ein mathematisches Objekt, das eine Parallelverschiebung in der Ebene oder im Raum beschreibt. Ein Vektor kann durch einen Pfeil dargestellt werden. Dabei beschreiben Pfeile, die gleich lang, parallel und gleich orientiert sind, denselben Vektor. In kartesischen Koordinaten werden Vektoren durch Zahlenpaare (in der Ebene) bzw. Zahlentripel (im Raum) dargestellt, die oft untereinander (als „Spaltenvektoren") geschrieben werden.

Zeilenvektor:

$(x_1, \ldots, x_n)$.

Spaltenvektor:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Länge eines Vektors:

(Satz von Pythagoras)

$$\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Rechnen mit Vektoren:

- **Addition:**
$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}.$$

- **Multiplikation mit einer Zahl (Skalar)** $\lambda \in \mathbb{R}$**:**
$$\lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \vdots \\ \lambda v_n \end{pmatrix}.$$

- **Skalarprodukt:**
$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} u_k v_k = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n.$$

Rechenregeln: Es seien $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

- $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.
- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.
- $(\lambda \vec{u}) = \lambda(\vec{u})$.
- $(\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}$.
- $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$.
- $\vec{u} \circ \vec{v} = \vec{v} \circ \vec{u}$.
- $(\lambda\vec{u}) \circ \vec{v} = \lambda(\vec{u} \circ \vec{v}) = \vec{u} \circ (\lambda\vec{v})$.
- $\vec{u} \circ (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \circ \vec{v} + \vec{u} \circ \vec{w}$.
- $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \circ \vec{u}$.
- $\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda| \|\vec{u}\|$.

Winkel zwischen $\vec{u}$ **und** $\vec{v}$**:**

Der zwischen den Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ eingeschlossene Winkel θ mit $\theta \in [0, 180^\circ]$ erfüllt
$$\vec{u} \circ \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos\theta.$$
Insbesondere gilt $\vec{u} \circ \vec{v} = 0$ genau dann, wenn $\theta = 90^\circ$ ist.

- Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$:
$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

  Eigenschaften: Es seien $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$.

- $\vec{u} \circ (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$ und $\vec{v} \circ (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$. Also steht $\vec{u} \times \vec{v}$ senkrecht auf $\vec{u}$ und $\vec{v}$.
- $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$.
- $\vec{u} \times \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- Die Länge des Ergebnisvektors des Kreuzprodukts entspricht dem Flächeninhalt des Parallelogramms, dass von den Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufgespannt wird.

Kapitel 6

Matrizen

Die Mensa Morgenstelle bietet bei einem Empfang zwei Suppen an: Eine Karottensuppe (KS) und eine Minestrone (MS). Uns interessieren der Verbrauch der Hauptgemüsebestandteile beider Suppen: Karotten und Kartoffeln.

Zutatenliste in kg pro Liter Suppe:

	Karottensuppe (KS)	Minestrone (MS)
Karotten	0,3 kg/L	0,15 kg/L
Kartoffeln	0,05 kg/L	0,1 kg/L

Wie viel Karotten und Kartoffeln muss die Mensa vorhalten, wenn x Liter Karottensuppe und y Liter Minestrone gekocht werden sollen?

Der Verbrauch an Karotten (c) beträgt $0,3x + 0,15y$ kg, und der Verbrauch an Kartoffeln (p) beträgt $0,05x + 0,1y$ kg.

$$\text{I}\ 0,3x + 0,15y = c$$
$$\text{II}\ 0,05x + 0,1y = p$$

Hierbei sind x und y die Liter Karottensuppe bzw. Minestrone, und die Abbildung f transformiert diese Mengen in die entsprechenden Mengen an Karotten und Kartoffeln. Die linke Seite der beiden Gleichungen kann man nach der Definition vom Skalarprodukt schreiben:

$$(0,3\ \ 0,15)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c$$

$$(0,05\ \ 0,11)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = p$$

Es fällt auf, dass der zweite Vektor in beiden Fällen der gleiche ist. Deshalb kann man die Schreibweise noch weiter verkürzen, indem man die jeweils ersten Vektoren und die der rechten Seite in einen Vektor zusammen fasst.

$$\begin{pmatrix} (0,3 & 0,15) \\ (0,05 & 0,1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ p \end{pmatrix}$$

Lässt man nun noch die überflüssligen Kammern weg, erhält man das Ursprüngliche Gleichungsystem in Matrixschreibweise.

$$\begin{pmatrix} 0,3 & 0,15 \\ 0,05 & 0,1 \end{pmatrix}$$

nennt man hierbei eine Matrix. Für uns ist eine Matrix ein rechteckiges Schema mit reellen Zahlen als Einträge, also etwa

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Dies ist eine $m \times n$-Matrix: m Zeilen, n Spalten.
Nummerierung der Einträge: Zeilennummer zuerst, Spaltennummer später! Man kann eine $m \times n$-Matrix A mit einem Spaltenvektor der Länge n multiplizieren: $A \cdot \mathbf{b}$ ist dann ein Spaltenvektor der Länge m und wird wie folgt berechnet:

$$A \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Die Berechnung erfolgt durch die Multiplikation jeder Zeile der Matrix A mit dem entsprechenden Element des Vektors $\mathbf{b}$ und die Addition der Ergebnisse. Das ergibt den Spaltenvektor:

$$\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} b_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} b_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} b_j \end{pmatrix}$$

Daher ist $A \cdot \mathbf{b}$ gleich:

$$\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} b_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} b_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} b_j \end{pmatrix}$$

Im Suppenbeispiel ist G die Gemüseverbrauchsmatrix:

$$G = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.15 \\ 0.05 & 0.1 \end{pmatrix}$$

und s = $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Das Produkt G·s ist dann der Vektor mit den benötigten Gemüsemengen.

Die Abbildung s $\mapsto G \cdot$ s ist die oben genannte Abbildung f, die den Vektor mit Suppenmengen auf den Vektor mit Gemüsemengen abgebildet:

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0,3x + 0,15y \\ 0,05x + 0,1y \end{pmatrix}$$

Diese Abbildung f ist linear:

Wenn sich die Suppenmengen vervielfachen, tun dies auch die Gemüsemengen entsprechend:

$$\forall c \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : f(c \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = c \cdot f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix})$$

Wenn sich die Suppenmengen addieren (zum Beispiel von zwei aufeinanderfolgenden Empfängen), tun dies auch die Gemüsemengen:

$$\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : f(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}) + f(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix})$$

Hierbei sind x und y die Liter Karottensuppe bzw. Minestrone, und f ist die Abbildung von Suppenmengen auf Gemüsemengen.
Man kann zeigen (siehe Lineare Algebra!): Das Multiplizieren mit einer $m \times n$-Matrix definiert eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$. Jede lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$ kann man als das Multiplizieren mit einer $m \times n$-Matrix darstellen.
Sind $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ $m \times n$-Matrizen (gleicher Größe!), dann setze

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) := (a_{ij} + b_{ij})$$

das heißt, wir definieren die Summe eintragsweise.
Ist $c \in \mathbb{R}$, so definieren wir

$$c \cdot A = c \cdot (a_{ij}) := (c \cdot a_{ij})$$

ebenfalls eintragsweise.
Die Rechengesetze für die Addition und skalare Multiplikation von Matrizen sind:

$$\begin{aligned} A + (B + C) &= (A + B) + C \quad \text{(Assoziativgesetz)} \\ A + B &= B + A \quad \text{(Kommutativgesetz)} \\ c \cdot (A + B) &= c \cdot A + c \cdot B \quad \text{(Distributivgesetz)} \\ (c + d) \cdot A &= c \cdot A + d \cdot A \quad \text{(Distributivgesetz)} \\ (c \cdot d) \cdot A &= c \cdot (d \cdot A) \quad \text{(Assoziativgesetz)} \end{aligned}$$

Achtung: Die Kommutativität $AB = BA$ gilt im allgemeinen nicht!!
Weiter im Beispiel: Die Mensa möchte den ökologischen Fußabdruck ihrer Suppen berechnen, insbesondere den CO2- und den Wasserverbrauch. Verbrauch pro kg Lebensmittel:

Karotten:	CO2 in kg: 2.0,	Wasser in Litern: 130
Kartoffeln:	CO2 in kg: 2.9,	Wasser in Litern: 210

Kann man von den Suppenmengen $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ direkt die Verbrauchsmengen bestimmen?
Gegeben sind die Matrizen:

$$G = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.15 \\ 0.05 & 0.1 \end{pmatrix}$$

und

$$V = \begin{pmatrix} 2.0 & 2.9 \\ 130 & 210 \end{pmatrix}$$

Was ist $V \cdot G$?

$$V \cdot G = \begin{pmatrix} 2.0 \cdot 0.3 + 2.9 \cdot 0.05 & 2.0 \cdot 0.15 + 2.9 \cdot 0.1 \\ 130 \cdot 0.3 + 210 \cdot 0.05 & 130 \cdot 0.15 + 210 \cdot 0.1 \end{pmatrix}$$

Das ergibt:

$$V \cdot G = \begin{pmatrix} 0.6 + 0.145 & 0.3 + 0.29 \\ 39 + 10.5 & 19.5 + 21 \end{pmatrix}$$

Und schließlich:

$$V \cdot G = \begin{pmatrix} 0.745 & 0.59 \\ 49.5 & 40.5 \end{pmatrix}$$

Die Werte 0.745 usw. geben den CO2-Verbrauch in kg pro Liter Karottensuppe an. Das Produkt $A \cdot B$ ist für eine $m \times n$-Matrix $A = (a_{ij})$ und eine $n \times p$-Matrix $B = (b_{jk})$ definiert als:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}b_{j1} & \sum_{j=1}^n a_{1j}b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^n a_{1j}b_{jp} \\ \sum_{j=1}^n a_{2j}b_{j1} & \sum_{j=1}^n a_{2j}b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^n a_{2j}b_{jp} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}b_{j1} & \sum_{j=1}^n a_{mj}b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^n a_{mj}b_{jp} \end{pmatrix}$$