MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT
DER UNIVERSITÄT TÜBINGEN WiSe 2023/24

Vorkurs Mathematik

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 4

Aufgabe 1: Gegeben seien die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = 2^x$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $g(x) = x^2$.

Zeigen Sie, dass beide Funtionen nicht umkehrbar sind, die zu f gehörige Umkehrrelation jedoch eine partielle Funktion ergibt. Wie ist der maximale Definitionsbereich dieser partiellen Funktion.

Geben Sie für die Menge $A = [-1, 1]$ jeweils die Mengen $f^{-1}(A)$ und $g^{-1}(A)$ an.

Finden Sie eine Menge $M \subset \mathbb{R}$, so dass $g : M \to M$ durch $g(x) = x^2$ umkehrbar ist und bestimmen Sie die Umkehrfunktion.

Aufgabe 2: Sei f eine umkehrbare Funktion. Zeigen sie, dass auch f^{-1} umkehrbar ist und dass $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

Zeigen Sie, dass jede streng monotone Funktion umkehrbar ist, falls der Zielbereich gleich dem Wertebereich ist. Geben Sie je ein Beispiel einer nicht umkehrbaren Funktion an, die lediglich monoton wachsend mit $Z = W$ ist und einer nicht umkehrbaren Funktion die streng monoton wachsend ist.

Aufgabe 3: Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = \frac{e^{2x^2}}{2x^2+1}$.

Aufgabe 4: Bestimmen Sie mit Hilfe des Limes des Differenzenquotienten die Ableitung der Funktion $f(x) = x^3$.

Aufgabe 5: Beweisen Sie die Produktregel.