Vorkurs Mathematik

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 5

Aufgabe 1: Gegeben sei die partielle Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = \frac{xe^{-6x}}{(x-1)^2}$. Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich der Funktion, sowie das Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs.

Bestimmen Sie alle lokalen Extrema sowie, falls existent, das globale Maximum und Minimum der Funktion.

Aufgabe 2: Bestimmen Sie die folgenden Integrale

$$\int_0^x t^2 \cos t dt \qquad x \geq 0$$
$$\int_1^x t \ln t dt \qquad x \geq 1$$
$$\int_0^x \frac{e^t}{1+e^t} dt \qquad x \geq 0$$

Aufgabe 3: Zeigen Sie: Falls $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ so ist $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$. Zeigen Sie, dass die Umkehrung im allgemeinen nicht gilt.

Aufgabe 4: Gegeben seien die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ durch

$$f(x) = [0, 1 + x[\text{ und } g(x) = [-e^x, e^x] \ .$$

Wie in der Vorlesung bezeichnet hier $\mathcal{P}$ die Potenzmenge und $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$, $]a, b[$. abgeschlossenes, halboffenes etc. Intervall.

Zeigen Sie, dass $f \subset g$.

Sei $h : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ gegeben durch $h = g \backslash f$ (d.h. g ohne f). Bestimmen Sie die von h beschriebene Fläche im Bereich $x \in [0, 1]$ d.h. die Fläche der Menge

$$\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^2; (x, y) \in \mathcal{M} :\Leftrightarrow x \in [0, 1] \text{ und } y \in h(x) \ .$$