MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT DER UNIVERSITÄT TÜBINGEN

WiSe 2023/24

Vorkurs Mathematik

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 7

Aufgabe 1: Gegeben Seien die Mengen $U, V, W \subset \mathbb{R}^3$ durch
$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 4z \right\}$; $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 3y = z \right\}$
und $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 2z + 2 \right\}$.

Entscheiden sie, welche dieser Mengen ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ ist. Begründen Sie ihre Entscheidung.

Aufgabe 2: Gegeben sei die Menge $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

Zeigen Sie, dass es sich bei dieser Menge um ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$ handelt. Wählen Sie eine Teilmenge $\mathcal{B} \subset \mathcal{E}$, so dass $\mathcal{B}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist. Geben Sie ide Koordinaten eines beliebigen Vektors $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ in dieser Basis an.

Aufgabe 3: Gegeben Sei die Menge P aller Polynome $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Über die Addition von Funktionen und die Multiplikation mit reellen Zahlen sind zwei Verknüpfungen $+ : P \times P \to P$ und $\cdot : \mathbb{R} \times P \to P$ definiert. Zeigen Sie, dass $(P, +, \cdot)$ ein reeller Vektorraum ist.

Geben Sie eine Basis dieses Vektorraumes an.

Betrachten Sie nun die Verknüpfung $\langle \cdot, \cdot \rangle : P \times P \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Zeigen Sie, dass es sich hierbei um ein Skalarprodukt handelt. Überprüfen Sie, ob ihre oben geählte Basis eine Orthonormalbasis bezüglich dieses Skalarproduktes ist.

Aufgabe 4: Es sei die 2×2-Matrix $A = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ gegeben. Bestimmen Sie die Determinante dieser Matrix und zeigen Sie, dass der Vektor Ax immer die gleiche Länge wie x hat. Was für eine Abbildung beschreibt diese Matrix also?