

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler*innen

Nachklausur am 15.04.2025

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie stets Ihren Rechenweg und vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich. Ergebnisse ohne Rechenweg/Zwischenschritte/Begründung liefern keine Punkte.**

Es sind maximal 100 Punkte erreichbar, 84 Punkte $\hat{=}$ 100% ($\hat{=}$ Note 1,0), 50% $\hat{=}$ 42 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\hat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfsmittel: Ein handbeschriebenes Blatt (DIN A4).

Bearbeitungszeit: 120 Minuten.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1

(3+6 = 9 Punkte)

Sei $a_1 = a_2 = 1$ und $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \forall n \geq 3$. Sei weiter

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Berechnen Sie a_3, a_4, a_5, a_6 und a_7 .
- Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

$$A^n = \begin{pmatrix} a_{n+1} & a_n \\ a_n & a_{n-1} \end{pmatrix} \quad \forall n \geq 2.$$

Aufgabe 2

(3+3+3+3+3 = 15 Punkte)

Bestimmen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte, oder begründen Sie ggf., warum diese nicht existieren.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + 1) \sin^2(x) + (x^2 - 1) \cos^2(x)}{3 + x - 2x^2} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^6 + 3x^3} - \sqrt{x^6 - 2x^3} \right) \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 1) \sin^2(x) + (x^2 - 1) \cos^2(x)}{3 + x - 2x^2} & \text{d) } \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{\log(2x)}{\cos(\pi x)} \quad \text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^7(x)}{x^3(x^4 - 2x^5)} \end{array}$$

Aufgabe 3

(4+4+4 = 12 Punkte)

Berechnen Sie (d.h. das Ergebnis soll keine Summenzeichen mehr enthalten):

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \sum_{\nu=0}^{100} \sin\left(\frac{2\nu+1}{2}\pi\right) & \text{b) } \sum_{k=3}^n 2^{n+k} & \text{c) } \sum_{\mu=0}^n \sum_{\nu=\mu}^n \frac{\nu 5^\mu}{5^{\nu+1} - 1} \end{array}$$

Aufgabe 4

(4+4+4 = 12 Punkte)

Bestimmen Sie die Taylorreihen von

- $\frac{3}{9+x^4}$ und $\frac{1-e^{-x^2}}{x}$ (stetig fortgesetzt bei $x=0$) um null, sowie von
- e^{-5x} um $x_0=2$ und geben Sie an, wo die Reihen konvergieren.

Aufgabe 5

(2+4+6+3 = 15 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$.

- Wo ist f stetig fortsetzbar und wie?
- Bestimmen Sie alle (senkrechten, waagerechten und schiefen) Asymptoten.
- Bestimmen Sie alle Hoch- und Tiefpunkte.
- Zeichnen Sie den Graph der Funktion.

Aufgabe 6

(6 Punkte)

Für welche $a \in \mathbb{R}$ hat die Funktion $f_a : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$f_a(x) = \frac{\cos(x)}{1 - ax^2},$$

bei $x = 0$ eine Maximalstelle, für welche eine Minimalstelle?

HINWEIS: Bestimmen Sie die ersten Terme der Taylorentwicklung um null – Sie müssen dazu nicht ableiten!

Aufgabe 7

(4+2+2+6+2+6 = 22 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4) \quad \text{und} \quad \vec{a}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

d.h. die Vektoren $\vec{a}_j \in \mathbb{R}^4$, $j = 1, \dots, 4$, bilden die Spalten der Matrix A .

- Berechnen Sie $\det(A)$.
- Sind die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ linear abhängig oder linear unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort in einem Satz.
- Sind die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4, \vec{a}_5$ linear abhängig oder linear unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort in einem Satz.
- Berechnen Sie A^{-1} .
- Bestimmen Sie alle Lösungen von $A\vec{x} = \vec{a}_5$.
- Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\text{span}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_5)$ bezüglich des kanonischen Skalarprodukts auf \mathbb{R}^4 .

Aufgabe 8

(3+1+2+3 = 9 Punkte)

Sei

$$M = \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid A \cdot A^T = I\}$$

- Zeigen Sie: Aus $A, B \in M$ folgt $A \cdot B \in M$.
- Gilt $I \in M$? Begründen Sie Ihre Antwort.
- Sei $A \in M$. Ist A dann invertierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.
- Zeigen Sie: Aus $A \in M$ folgt $A^{-1} \in M$.