

QUADRATISCHE FORMEN

I) An anschaulicher Einstieg

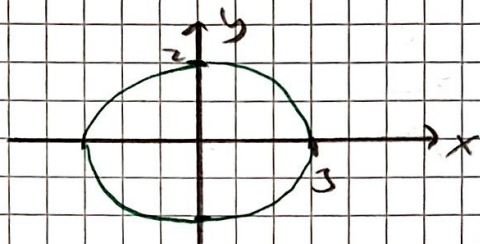
1.1 Hyperbeln, Ellipsen zeichnen

kurze weilen im $\mathbb{R}^2$ darstellen.

$$\bullet \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$y=0 \text{ liefert } x^2=9 \Leftrightarrow x=\pm 3$$

$$x=0 \text{ liefert } y^2=4 \Leftrightarrow y=\pm 2$$



$$\text{allg.: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{ist Ellipse}$$

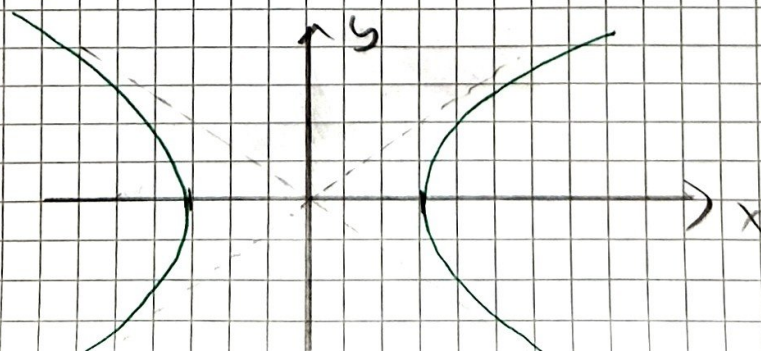
mit Halbachsen $|a|, |b|$.

$$\bullet \quad \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$$

$$y=0 \text{ liefert } x=\pm 3$$

$x=0$ liefert keine reellen Lösung.

$$\text{Asymptotik: } y = \pm 2\sqrt{\frac{x^2}{9} - 1} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \approx \pm \frac{2}{3}x$$



allg.: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ist Hyperbel
mit Asymptoten $y = \pm \frac{b}{a} x$.

• $5x^2 - 2xy + 5y^2 = 1$
→ unklar!

1.2 Def. Quadratische Formen (variabel)

$q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (hier oft $n=2$) heißt
quadr. Form, wenn $\forall \lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$:
 $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$

1.3 Folg. zu Matrizen

• $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = (x \ y) \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
• $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = (x \ y) \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
• $5x^2 - 2xy + 5y^2 = (x \ y) \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
 $= (x \ y) \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
 $= \dots$ (unendlich)

Festlegung: Matrix sei symmetrisch!

hier also $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

→ es entsteht eine Bijektion zwischen
symm. Mat. & quadr. Formen: $q_A(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$

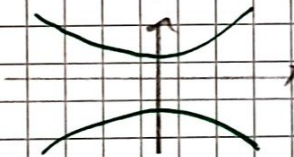
1.4 Kegelschnitte

Betrachte Diagonalform q_A mit diagonalen Matrix A :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Betrachte $q_A(x, y) = 1$:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 1$$

λ_1, λ_2	Skizze
$\lambda_1 > 0$ $\lambda_2 > 0$	 Ellipse
$\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 > 0$	 Parallele
$\lambda_1 < 0$ $\lambda_2 > 0$	 Hyperbel
(...)	analog

1.5 Einschub: Hauptsatz von Theorem

✓ symmetrischer $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $\exists$ orthogonale Matrix S (d.h. $S^T S = 1$), sodass $D_A := S^T \cdot A \cdot S$ diagonal ist.

Die Diagonalelemente von D_A sind die Eigenwerte von A , Spalten von S sind orthonormierte Eigenvektoren von A .

1.6 kommen zum Basiswechsel

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symm., $U = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ orthogonal. Außerdem

$$\vec{x} = \underbrace{\sum_{i=1}^n y_i \vec{u}_i}_{\vec{x} \text{ in Basis } U}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Dann: $q_A(\vec{x}) = q_B(\vec{y})$ mit $B = U^T A U$.

Beweis

Erkenne, dass $\vec{x} = U \vec{y}$. Dann:

$$\begin{aligned} q_A(\vec{x}) &= \vec{x}^T A \vec{x} = (U \vec{y})^T A (U \vec{y}) \\ &= \vec{y}^T \underbrace{U^T A U}_{=: B} \vec{y} = q_B(\vec{y}) \end{aligned}$$

□

Vorteil: Basiswechsel hilft evtl. beim Zeichnen!

1.7 Bsp: $5x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2 = 1$

$$\Leftrightarrow (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 1$$

Schneller zu zeichnen

→ diagonalisieren!

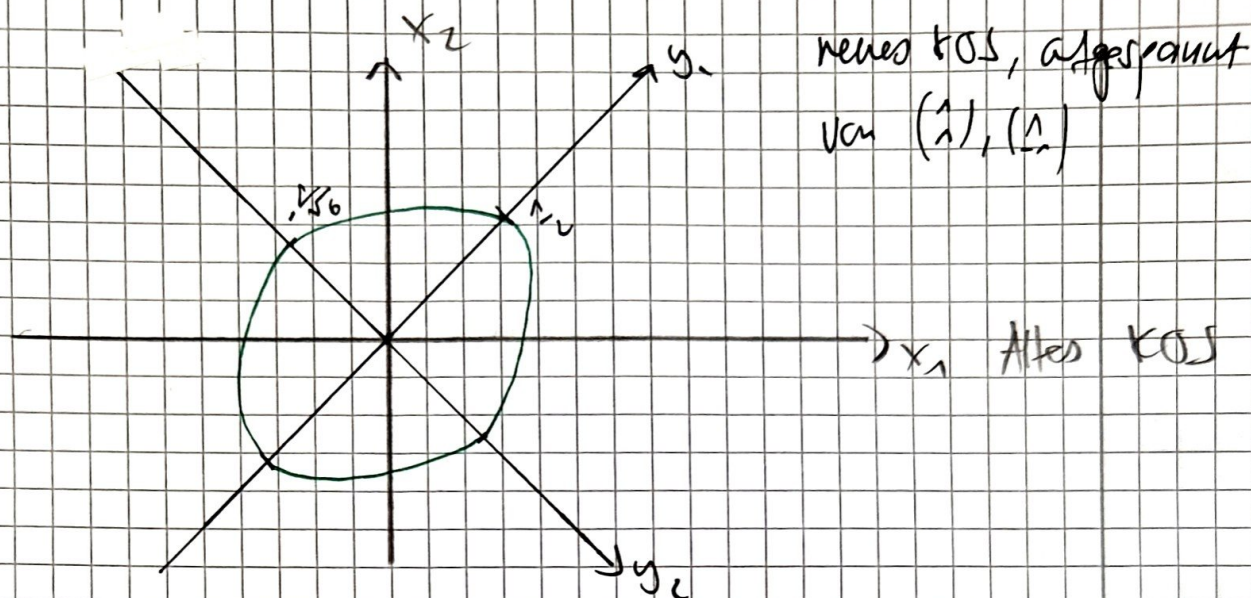
$\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ hat EW $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 6$, EV $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1.6 $\rightarrow S := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ Norm
↑ ↑ neue Basisvektoren

liefert $S^T A S = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

Also: $4y_1^2 + 6y_2^2 = 1$

$\Leftrightarrow \frac{y_1^2}{(\frac{1}{2})^2} + \frac{y_2^2}{(\frac{1}{\sqrt{6}})^2} = 1$



II) "Fachlicher" Zugang

2.1 Def. Quadratische Form (QF)

K Körper ($\text{char}(K) \neq 2$), E endlichdimensionaler Vektorraum über K .

Q heißt QF auf E , falls

- $Q(\lambda z) = \lambda^2 Q(z) \quad \forall \lambda \in K, z \in E$
- $\langle x, y \rangle := \frac{1}{2} (Q(x+y) - Q(x) - Q(y))$
(„Polarisation“) ist bilinear.

2.2 Prop

Die Polarisation liefert eine Bijektion zwischen QF's und symm. Bilinearformen (vgl. symm. Matrizen).

Beweisidee

Sei Q eine QF. Dann ist durch $\langle x, y \rangle$ die dazugehörige Bilinearform gegeben.

$$\begin{aligned}\text{Außerdem: } \langle z, z \rangle &= \frac{1}{2} (Q(z+z) - Q(z) - Q(z)) \\ &= \frac{1}{2} (4Q(z) - 2Q(z)) \\ &= Q(z).\end{aligned}$$

So kommt man von einer Bilinearform zurück zur QF. Insb. gilt:

$$\langle \lambda z, \lambda z \rangle = \lambda^2 \langle z, z \rangle \quad (\text{wegen Bilinearität}). \quad \square$$

$\rightarrow \langle z, z \rangle$ ist QF!

2.3 Def. (Norm)

$x \in E$, Q eine QF.

$Q(x)$ heißt dann oft Normquadrat von x .

2.4 Def. (Orthogonalität)

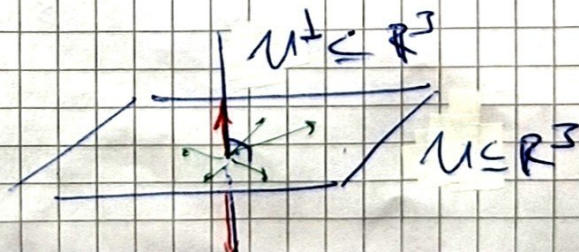
$x, y \in E$ heißen orthogonal $\Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0$

Unterräume $U, V \subseteq E$ heißen orthogonal genau dann, wenn $\langle u, v \rangle = 0 \quad \forall u \in U, v \in V$.

2.5 Def.

$U \subseteq E$ Unterraum. Dann ist der totale orthogonale Unterraum definiert als $U^\perp = \{e \in E \mid \forall x \in U: \langle e, x \rangle = 0\}$.

z.B.:



2.6 Def.

Sei Q eine QF über E .

Q heißt nicht-singulär genau dann, wenn $(\forall x \in E: \langle x, y \rangle = 0) \Rightarrow y = 0$.

oder: Q nicht-singulär $\Leftrightarrow E^\perp = 0$.

2.7 Satz

Sei E ein endlichdim. Vektorraum über K mit einer nicht-singulären QF Q .

Für jeden Unterraum $U \subseteq E$ gilt:

$$\dim U + \dim U^\perp = \dim E$$

2.8 Bsp.

Betrachte das $\mathbb{R}^3$ mit

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3, \text{ also}$$

$$Q(z) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 \quad (\text{"Normquadrat"})$$

$$\text{Setze } U := \left\{ a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\Rightarrow U^\perp = \left\{ c \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$\text{Offensichtlich: } \underbrace{\dim U}_{=2} + \underbrace{\dim U^\perp}_{=1} = \underbrace{\dim \mathbb{R}^3}_{=3}$$

Beweisidee zu 2.7 erst weglassen

- Betrachte Dualraum E^* von E (lineare Abbildungen $E \rightarrow K$) und teile, dass $\dim E = \dim E^*$.

Bsp. zu $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ gehört die Abbildung
 $q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$

• Definiere $g: E \rightarrow E^*: e \mapsto (x \mapsto \langle e, x \rangle).$

Stell fest, dass $\ker(g) = E^\perp.$

Q invertierbar $\Rightarrow \ker(g) = 0$
 $\Rightarrow g$ injektiv.

Zeige noch, dass g surjektiv.

• benutze dann noch die Dim.-formel,
 also $\dim E = \dim \operatorname{Im}(g) + \dim \ker(g)$
 für lineare Abb. $f: E \rightarrow F$
 zwischen endlichen VR E und F .

2.9 Def.

(E, φ) ein Paar aus VR und $\varphi \in F$,

(F, τ) ebenso.

$(E, \varphi) \cong (F, \tau)$ genau dann,

wenn $\exists \sigma: E \rightarrow F$ (Lin. Isomorphismus)

mit $\varphi = \tau \circ \sigma.$

Außerdem (orthogonale Gruppe):

$O(\varphi) = O(E) := \{\text{Automorphismen von } (E, \varphi)\}.$

2.10 Def.

Betrachte (E, φ) und sei $(e_1, \dots, e_n)$

eine Basis von E . Dann ist die

sym. Gram-Matrix G gegeben durch:

$G_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle \quad i, j = 1, \dots, n.$

2.11 Prop

Sei Q eine nicht-singuläre QF über E .

Dann hat $T \in O(Q)$ Determinante 1 oder -1.

Beweisidee

- zeige, dass die Gram-Matrix zu $Q \circ T$ gleich $A^T G A$ ist
(A ist Matrix von T)

• T erhält Gram-Matrix $\Rightarrow A^T G A = G$

$\Rightarrow \det A^T \cdot \det G \cdot \det A = \det G$

$\Rightarrow \det A^T \cdot \det A = 1$

$\Rightarrow (\det A)^2 = 1$

$\Rightarrow \det A = 1 \text{ oder } \det A = -1$

← denn:
orth. Transf.
erhalten
das
Skalarprodukt

2.12 Def.

Standard - QF im K^n :

$$Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2; x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in K^n$$

Die zugehörige orthogonale Gruppe heißt $O_n(K)$, die Untergruppe mit $\det = 1$ heißt $SO_n(K)$.

2.13 Bsp.

- $O_2(\mathbb{R})$: Drehungen / Spiegelungen im $\mathbb{R}^2$
- $SO_2(\mathbb{R})$: Drehungen im $\mathbb{R}^2$

2.14 Satz

Sei E ein $\mathbb{C}$ -Vektorraum mit $\dim E = n$,
 Q eine nicht-singuläre QT über E .
 $\Rightarrow \exists$ Basis $(e_1, \dots, e_n)$ für E mit
 $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \quad j = 1, \dots, n$.

Beweisidee

- $Q \neq 0$ offensichtlich (sonst $\langle x, y \rangle \equiv 0$)
 $\Rightarrow \exists v \in E : Q(v) \neq 0$.
 $\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C} : Q(v) = \lambda^2$.
 $\Leftrightarrow \frac{1}{\lambda^2} Q(v) = 1$
 $\Leftrightarrow Q(\lambda^{-1} \cdot v) = 1$
 $\Rightarrow \exists e \in E : Q(e) = \langle e, e \rangle = 1$,
also ein Vektor mit Norm 1
- Induktion über $\dim E$:
 e spannt linearen Unterraum K auf,
definiere $F := K^\perp \rightarrow$ eine F finden!
 $\hookrightarrow$ Induktion
 $\Rightarrow E = K \oplus F$
 $\Rightarrow$ ganzer Raum E wird aufgespannt

nicht zwingend notwendig!

III) Der Satz von Witt

3.1 Def.

E ein Vektorraum ($\dim E < \infty$), Q eine nicht-degenerierte QF.

- $n \in E$ nicht-isotrop $\Leftrightarrow Q(n) \neq 0$
- $n \in E$ nicht-isotrop definiert eine lineare Transformation T_n durch:

$$T_n(x) = x - 2 \frac{\langle x, n \rangle}{\langle n, n \rangle} \cdot n \quad (x \in E).$$

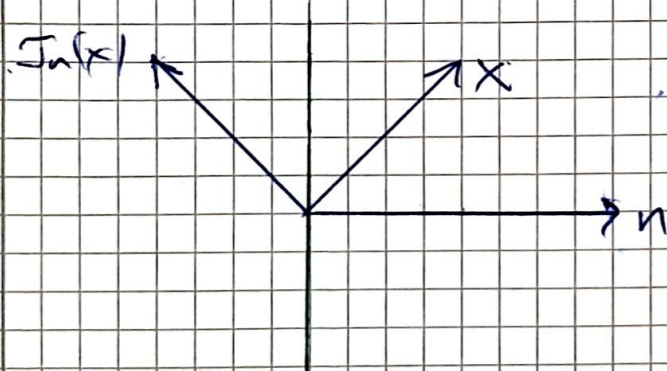
3.2 Bsp.

Wähle $E = \mathbb{R}^2$, $Q(x) = x_1^2 + x_2^2$.

$$x := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad n := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T_n(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \frac{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle}{\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \frac{2}{4} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$\Rightarrow T_n$ beschreibt Spiegelung von x an der Ebene orthogonal zu n .

$$\det(T_n) = -1.$$

3.3 Prop.

Sei φ eine QF über dem VR E .
 $\forall \lambda \in K^*$ operiert $O(\varphi)$ transitiv
auf $M := \{e \in E \mid \varphi(e) = \lambda\}$, d.h.
 $\forall x, y \in M \exists \sigma \in O(\varphi) : \sigma(x) = y$.

3.4 Bsp.

Betrachte $\mathbb{R}^2$ mit $\varphi(x) = x_1^2 + x_2^2$, $\lambda = 2$.
 $\Rightarrow M = \{\text{Vektoren mit Norm } \sqrt{2}\}$
 $\rightarrow$ können alle durch Drehungen / Spiegelungen
ineinander überführt werden!
 $\rightarrow$ Beweis von 3.3 im Nachtrag, Seite 7

3.5 Satz (Witt; ohne Beweis)

E ein VR, φ nicht-singuläre QF.
Jeder Isomorphismus $\sigma : (U, \varphi) \rightarrow (V, \varphi)$
mit Unterräumen $U, V \subseteq E$ kann erweitert
werden zu einer orthogonalen Trf. auf (E, φ) .

3.6 Bsp. (Witt)

$E = \mathbb{R}^3$, $U = V = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \cong \mathbb{R}^2$
(xy-Ebene)

Die Drehung $D_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ ist

eine Isometrie $U \rightarrow V$ & kann
erweitert werden zu einer Isometrie
über ganz E :

$$D_\alpha^* = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Drehung des Raum-Paarings um z -Achse!)

Beweis zu 3.7 (Nachtrag)

Sei $e, f \in E$ mit $\varphi(e) = \varphi(f) = 1 \neq 0$.

Man zeigt leicht: $\langle e-f, e+f \rangle = \langle e, e \rangle + \langle f, f \rangle = 0$
(da bilinear) $(\overbrace{\langle e, e \rangle}^{\varphi(e)} - \overbrace{\langle f, f \rangle}^{\varphi(f)})$

Außerdem: $\varphi(e+f) = 0$ und $\varphi(e-f) = 0$ geht nicht gleichzeitig, denn:

Angenommen, es wäre so. Dann:

$$\bullet \varphi(e+f) = \langle e+f, e+f \rangle = \langle e, e \rangle + 2\langle e, f \rangle + \langle f, f \rangle = 0$$

$$\bullet \varphi(e-f) = \langle e-f, e-f \rangle = \langle e, e \rangle - 2\langle e, f \rangle + \langle f, f \rangle = 0$$

Mit $\varphi(e) = \varphi(f) \Rightarrow \langle e, e \rangle = \langle f, f \rangle$ folgt:

$$\bullet 2\langle e, e \rangle + 2\langle e, f \rangle = 0$$

$$\bullet 2\langle e, e \rangle - 2\langle e, f \rangle = 0 \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} \bullet 2\langle e, e \rangle + 2\langle e, f \rangle = 0 \\ \bullet 2\langle e, e \rangle - 2\langle e, f \rangle = 0 \end{matrix}} \right\} \Rightarrow \langle e, e \rangle = 0$$

$\Rightarrow$ Widerspruch zur Annahme $\varphi(e) = 1 \neq 0$.

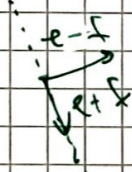
Fall 1: Sei $\varphi(e-f) \neq 0$ und $\varphi(e+f) = 0$.

Definiere σ : Spiegelung entlang $e-f$.

Man findet $\sigma(e-f) = f-e$, $\sigma(e+f) = e+f$

(graphisch: $\langle e-f, e+f \rangle = 0 \rightarrow$ orthogonal)

also:



Addition $\Rightarrow \sigma(e) = f$ ✓

Fall 2: analog (mit einer extra Spiegelung!)

□