Sphärische Geometrie

PROSEMINAR HYPERBOLISCHE GEOMETRIE

PROF. DR. RODERICH TUMULKA

5. SITZUNG (11.11.2024)

WS 2024/25

CEYDA KILIC

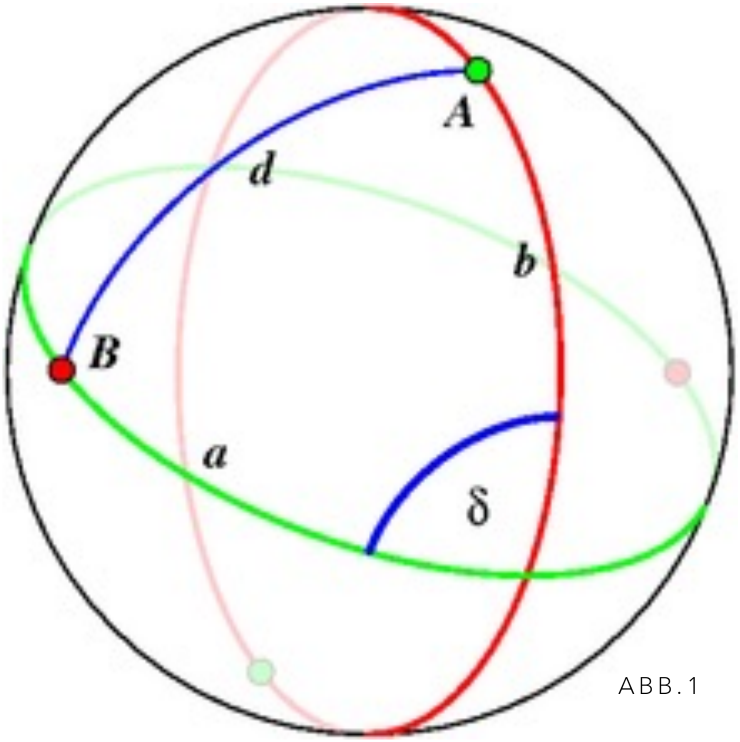


ABB.1

Motivation – Sphärische Geometrie und ihre Anwendung

- Navigation
- Berechnung der kürzesten Flugstrecke
- Astronomie: Bestimmung der Positionen und Bewegungen himmlischer Körper
- Kartografie: Erstellung von Globen & Landkarten

Gliederung

I. Die Sphäre

- sphärischer Abstand
- Tangentenvektor
- Zerlegungslemma
- Dreiecksungleichung
- Geodätischen Kurve

II. Isometrien der Sphäre

III. Kartografie

- Stereografische Projektion
- Beweis „Stereographische Projektion ist winkeltreu“

Definition 3.1 sphärischer Abstand

Sei F eukl. Raum mit $\dim F = n+1$.

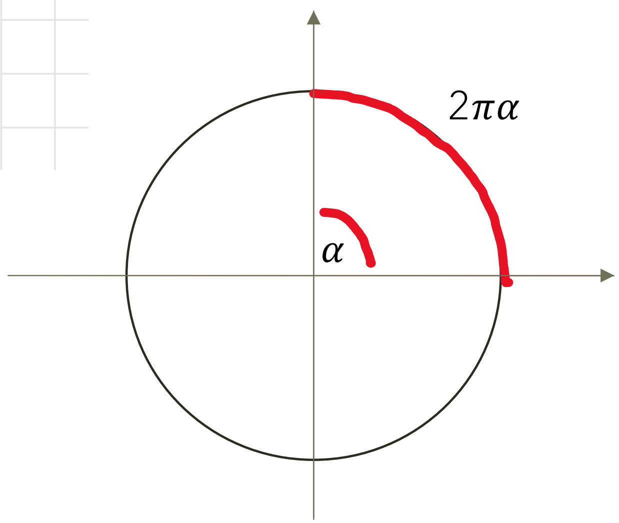
Sei $S^n := \{x \in F \mid \|x\| = 1\}$ die Einheitssphäre.

Wegen Cauchy-Schwarz gilt für $P, Q \in S^n$ $\quad |\langle P,Q \rangle| \leq \|P\| \cdot \|Q\| = 1$

d.h. $\langle P,Q \rangle \in [-1,1]$

Der sphärische Abstand $d(P,Q)$ zw. zwei Punkten $P,Q \in S^n$ wird definiert mit

$$\boxed{\cos d(P,Q) = \langle P,Q \rangle}$$



Herleitung:

Seien $\vec{x}, \vec{y} \in R^2$ dann gilt: $< \vec{x}, \vec{y} > = \cos\alpha \, * \, |\vec{x}| * |\vec{y}|$

→Auf dem Einheitskreis in R^2 gilt: $< \vec{x}, \vec{y} > = \cos\alpha$

$d: S^n \to \mathbb{R}$, $d(P,Q) \mapsto \arccos \langle P,Q \rangle$ heißt <u>sphär. Abstand</u>:

① $d(P,Q) = 0 \iff P = Q$ (Definitheit)

② $d(P,Q) = d(Q,P)$ (Symmetrie)

③ $d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$ $A,B,C \in S^n$ (Δ-Ungl.)

Definition 3.2

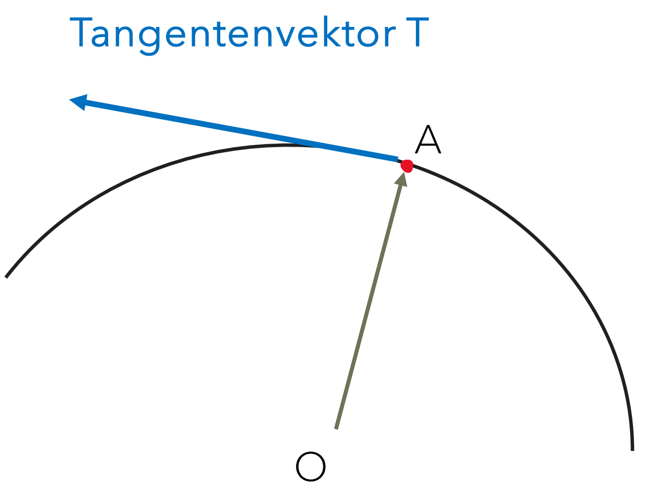
Einen Vektor $T \in F$ nennt man Tangentenvektor zu einem Punkt $A \in S^n$ wenn

$$\langle A, T \rangle = 0 \text{ gilt}$$

T heißt normierter Tangentenvektor wenn zusätzlich

$$\|T\| = 1 \text{ gilt.}$$

Die Menge $T_A(S^n) = \{ x \in F \mid \langle x, A \rangle = 0 \}$ nennt man Tangentialraum an S^n im Punkt A.



Beweis Dreiecksungleichung

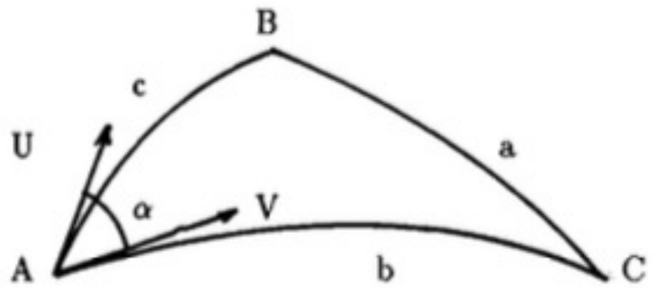
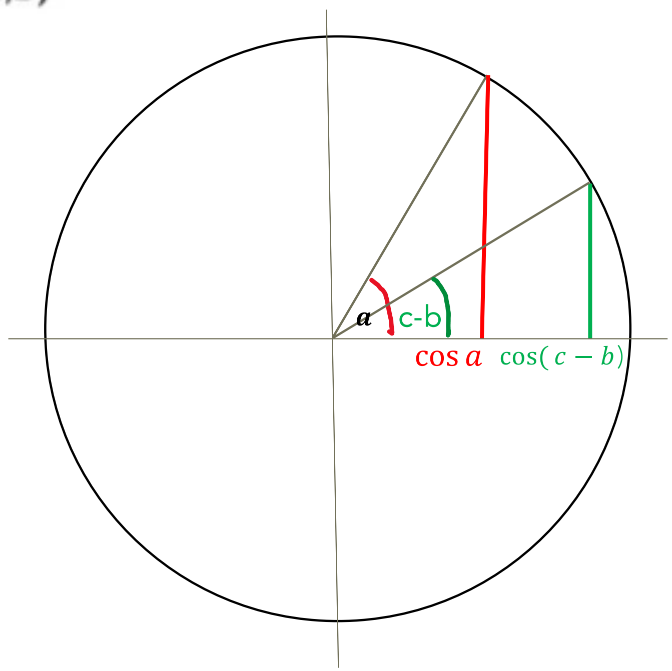


Abb. 2

a = d(B,C)

b = d(A,C)

c = d(A,B)



Kosinussatz:

$$\boxed{\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha}$$

Additionstheoreme:

$$\begin{aligned} \sin(x \pm y) &= \sin(x) \cdot \cos(y) \pm \cos(x) \cdot \sin(y), \\ \cos(x \pm y) &= \cos(x) \cdot \cos(y) \mp \sin(x) \cdot \sin(y), \end{aligned}$$

Abb. 3

Zerlegungslemma 3.3

Seien $A, B \in S^n$.

Es $\exists u \in S^n$ mit $\langle u, A \rangle = 0$ und $\|u\| = 1$ sodass

$$\boxed{B = A \cos d(A,B) + u \sin d(A,B)}$$

Wiederholung Definition geodätische Kurve

$Sei\ \gamma: \mathbb{R} \to S^n$ geodätische Kurve $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \forall c \in \mathbb{R}\ \exists U_c\ offene\ Umgebung\ von\ c \\ s.d.\ \gamma I_{U_c}\ abstandserhaltend \end{cases}$

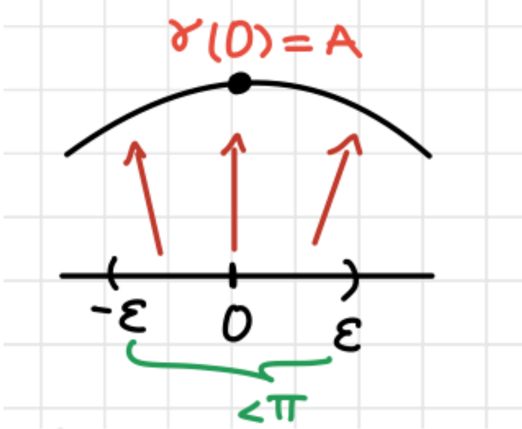
Proposition 3.8

Jede geodätische Kurve $\gamma: \mathbb{R} \to S^n$
kann in der Form

$$\gamma(t) = A\cos t + T\sin t \qquad t \in \mathbb{R}$$

geschrieben werden, wobei $A \in S^n$, $T \in F$ und $\langle A, T \rangle = 0$ $\|T\| = 1$

Beweisidee:



① $\gamma : \mathbb{R} \to S^n$ bel. geodätische Kurve um den Punkt A

o.B.d.A sei $\gamma(0) = A$

und

$J := (-\varepsilon, \varepsilon)$ offene Umgebung

$\overset{3.3.}{\Longrightarrow}$ $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)\ \exists T \in T_A(S^n)$:

$$\gamma(t) = A \cos \underbrace{d(\gamma(t), \gamma(0))}_{\substack{\text{da } \gamma \text{ auf } J \\ \text{abstandserhaltend} \\ = d_{\mathbb{R}}(t,0) \\ = |t|}} + T \sin \underbrace{d(\gamma(t), \gamma(0))}_{d_{\mathbb{R}}(t,0) = |t|}$$

$\Longrightarrow$ γ stetig diffbar mit $\gamma'(0) = \pm T$

$\Longrightarrow$ $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$: $\gamma(t) = A \cos t + T \sin t$

② $\theta : \mathbb{R} \to S^n$ geod. Kurve

Betrachte die Menge $\{ t \in \mathbb{R} \mid \theta(t) = \gamma(t), \theta'(t) = \gamma'(t) \}$

③ z.z. Die Menge $\{ t \in \mathbb{R} \mid \theta(t) = \gamma(t), \theta'(t) = \gamma'(t) \}$ abgeschlossen & offen

$\Rightarrow$ Die Menge ist ganz $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow \gamma = \theta$

$\Rightarrow$ Beh. $\square$

Isometrien auf der Sphäre

Definition (orthogonale Transformation)

sei F ein eukl. Raum mit $\dim F = n+1$. Die Gruppe der orthogonalen Transformationen $O(F)$ ist die Menge aller linearen Abb. $\theta: F \to F$ für die gilt:

$$\forall x, y \in F: \langle x, y \rangle = \langle \theta(x), \theta(y) \rangle$$

Orthogonale Transformation

$\Uparrow \qquad \Downarrow$ induziert

Isometrie auf der Sphäre

Gilt auch die Rückrichtung?

Wird jede Isometrie auf der Sphäre durch eine orthogonale Transformation des umgebenen euklidischen Raums induziert?

--> Ziel dieses Kapitels ist zu zeigen, dass die Rückrichtung auch gilt!

Lemma 3.10

Seien $A_1, \dots, A_p$ und $B_1, \dots, B_p$ Folge von Punkten in S^n sodass

$$d(A_i, A_j) = d(B_i, B_j) \qquad \forall i,j = 1, \dots, p$$

$\exists$ eine Isometrie Θ, die aus höchstens p Hyperebenen Reflexionen besteht, wobei

$$\boxed{\Theta(A_i) = B_i} \qquad i = 1, \dots, p$$

Definition (sphärischer Simplex)

Ein sphärischer Simplex ist im n+1 dim. Raum $\exists$ eine Folge von Punkten $A_0, \dots, A_n \in S^n$, die linear unabhängig sind.

Theorem 3.11

Jede Isometrie β der Sphäre S^n wird induziert durch eine orth. Transformation des umgebenen eukl. Raums.

Kartografie

= Wissenschaft von den geografischen Karten

- Unmöglich Erdoberfläche korrekt auf einer platten Karte darzustellen

➔ Kartenprojektion

- Verschiedene Arten von Projektionen:

1. **Wo** wird die Lichtquelle platziert?
2. **Wie** wird das Papier um die Erde "gewickelt"? (überhaupt gewickelt?)
3. **An welcher Stelle** berührt das Papier die Erde berührt oder auch nicht?

Stereografische Projektion

Ausgangslage: Einheitskugel

$$S^2 := \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 : u^2+v^2+w^2 = 1\}$$

Nordpol der Kugel $N(0|0|1)$
Südpol der Kugel $S(0|0|-1)$
P liegt auf der Kugel $P(x,y,z)$
$\bar{P}$ liegt auf der Ebene $P(x,y,0)$

Projektion definieren:

① Geradengleichung aufstellen

$$g: \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\vec{OS}} + t \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z+1 \end{pmatrix}}_{\vec{SP}} \qquad t \in \mathbb{R}$$

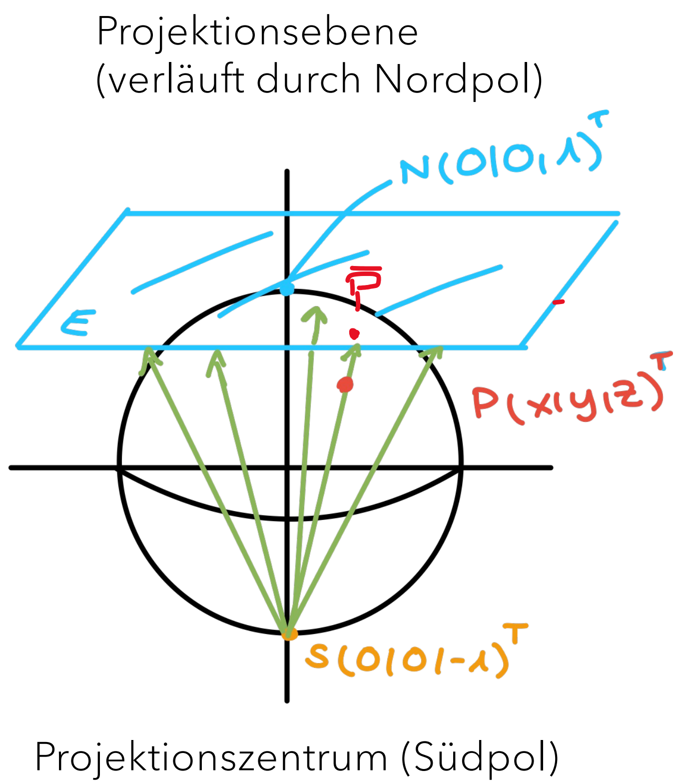
② Schnittpunkt der Gerade g mit Tangentialebene im Punkt N bestimmen

$$\Rightarrow f: \mathbb{R}^3 \setminus \{0|0|-1\} \to \mathbb{R}^2$$
$$f(x,y,z) = \left(\frac{x}{z+1}, \frac{y}{z+1}\right)$$

Umkehrabbildung:

$$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0|0|-1\}$$

$$F(x,y) = \left(\frac{4x}{4+x^2+x^2}, \frac{4y}{4+x^2+y^2}, \frac{4-x^2-y^2}{4+x^2+y^2}\right)^T$$



Die stereografische Projektion ist winkeltreu

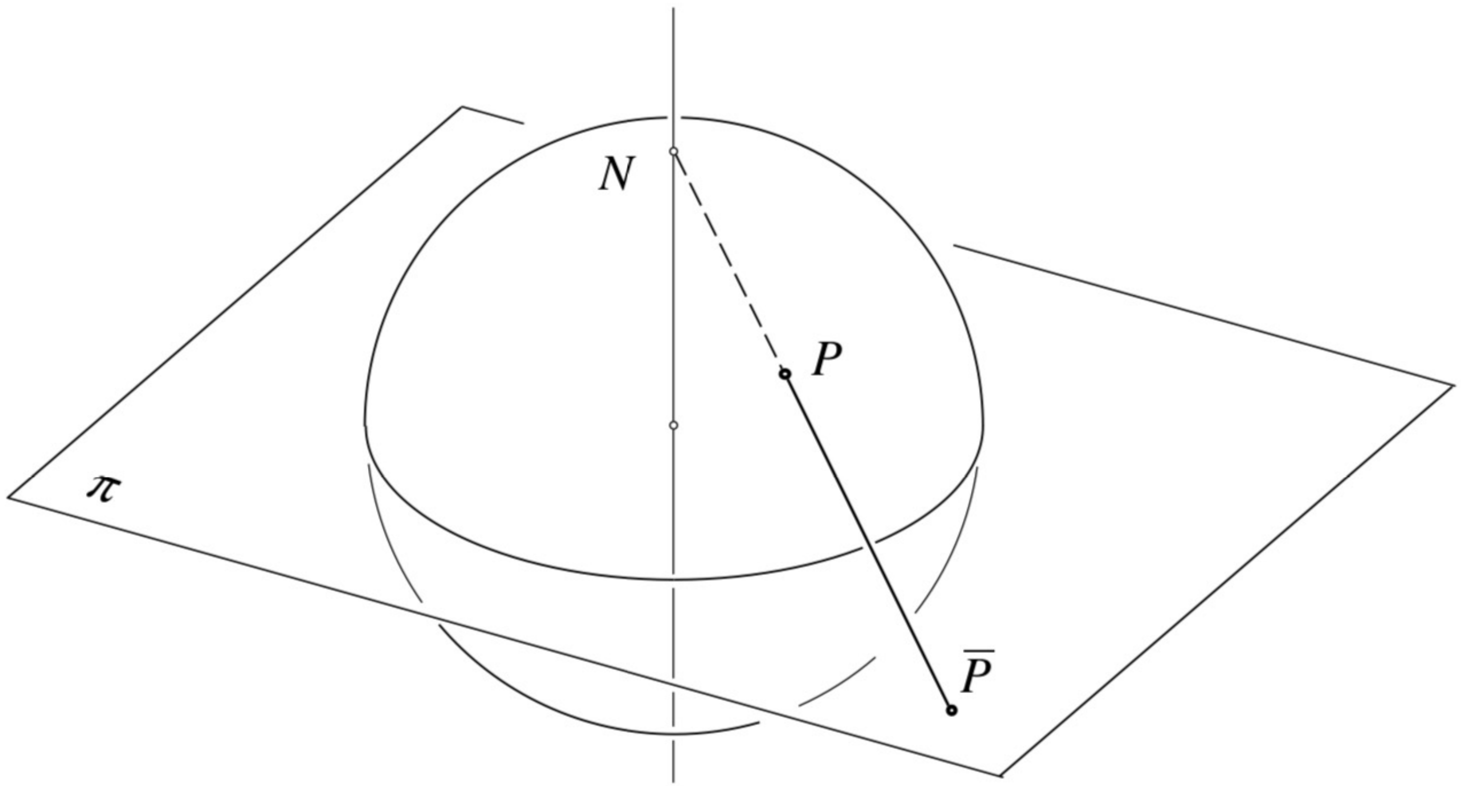


Abb. 4

Beweis: „Die stereografische Projektion ist winkeltreu“

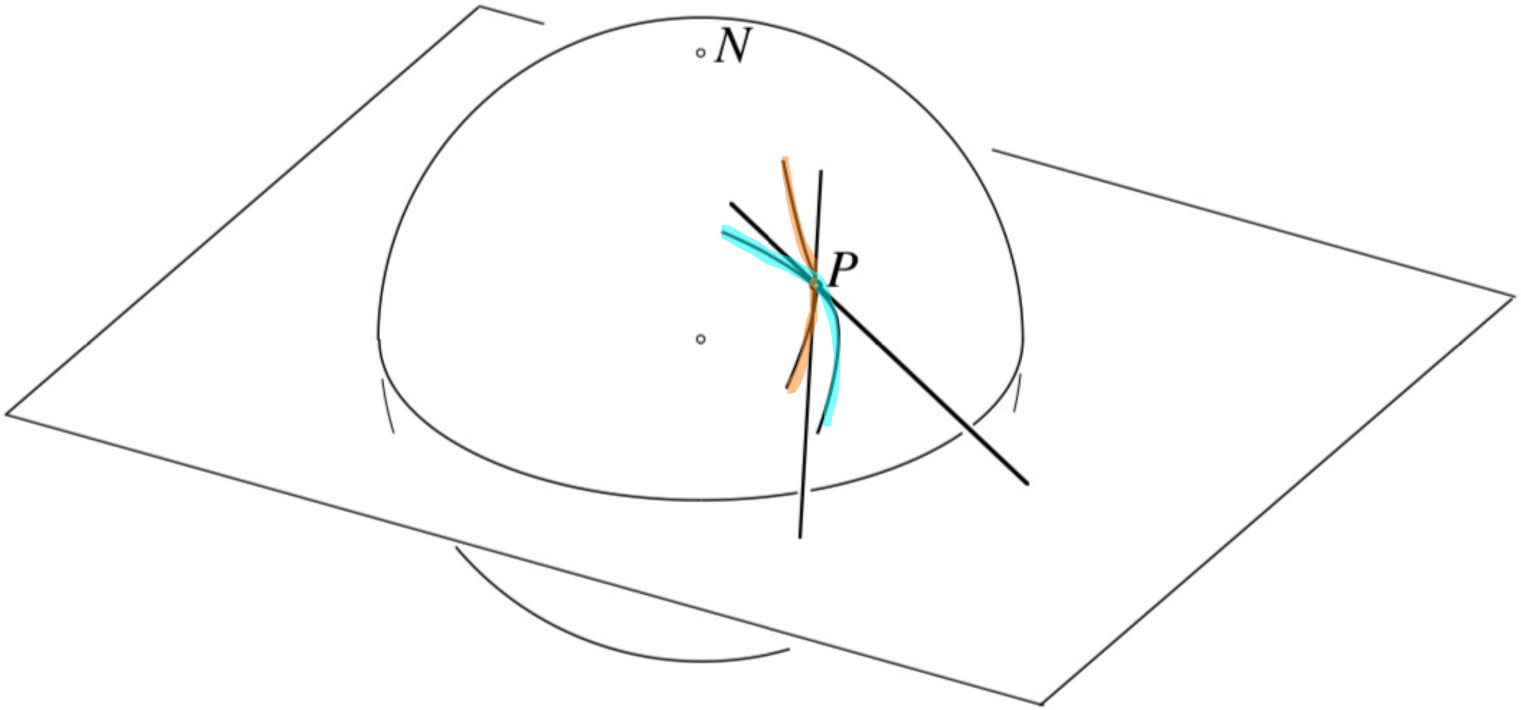


Abb. 5

Schnittwinkel zweier Kurven auf der Kugeloberfläche

Beweis: „Die stereografische Projektion ist winkeltreu“

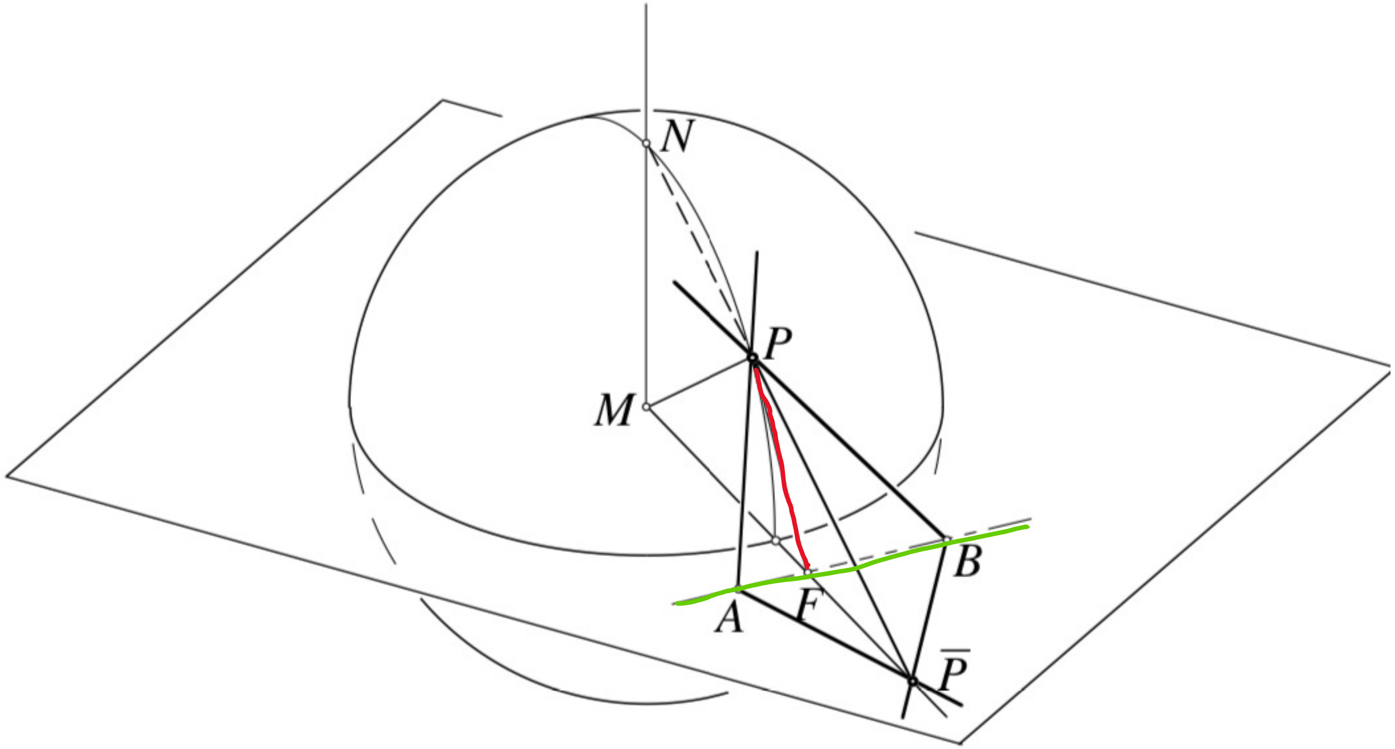


Abb. 6

Nachweis der Konformität

Beweis: „Die stereografische Projektion ist winkeltreu“

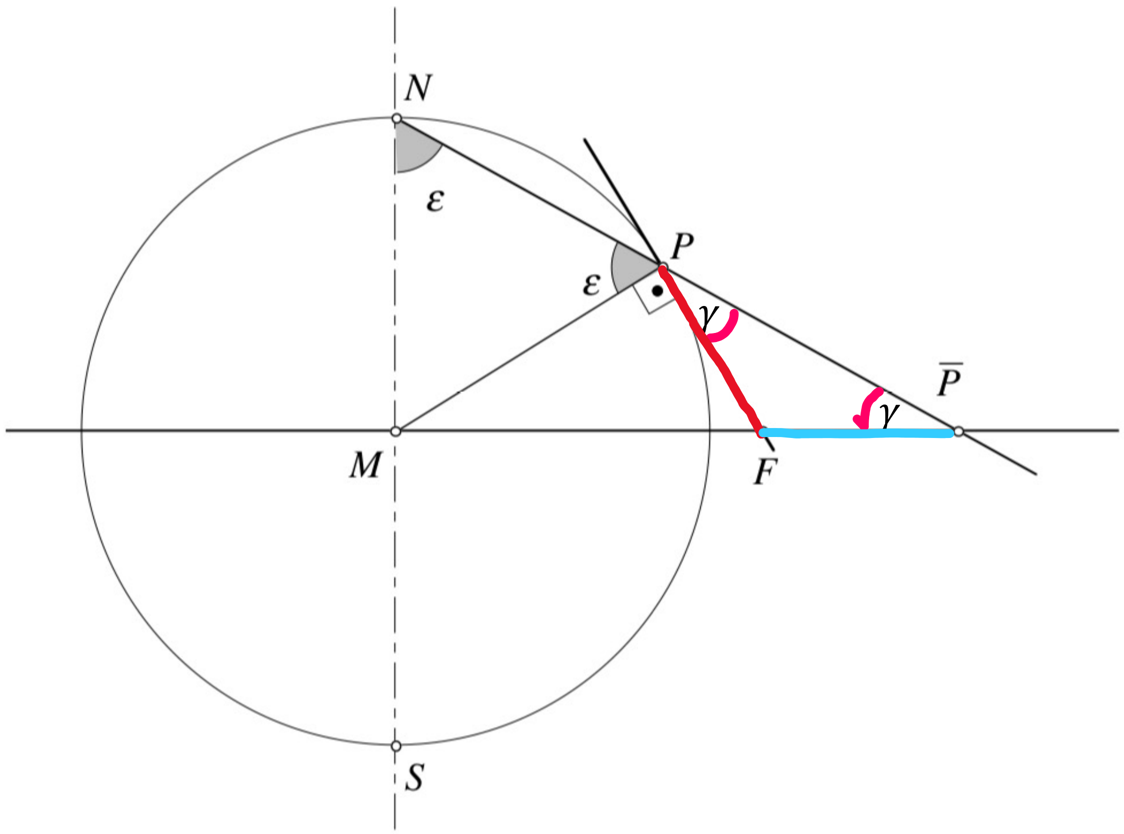
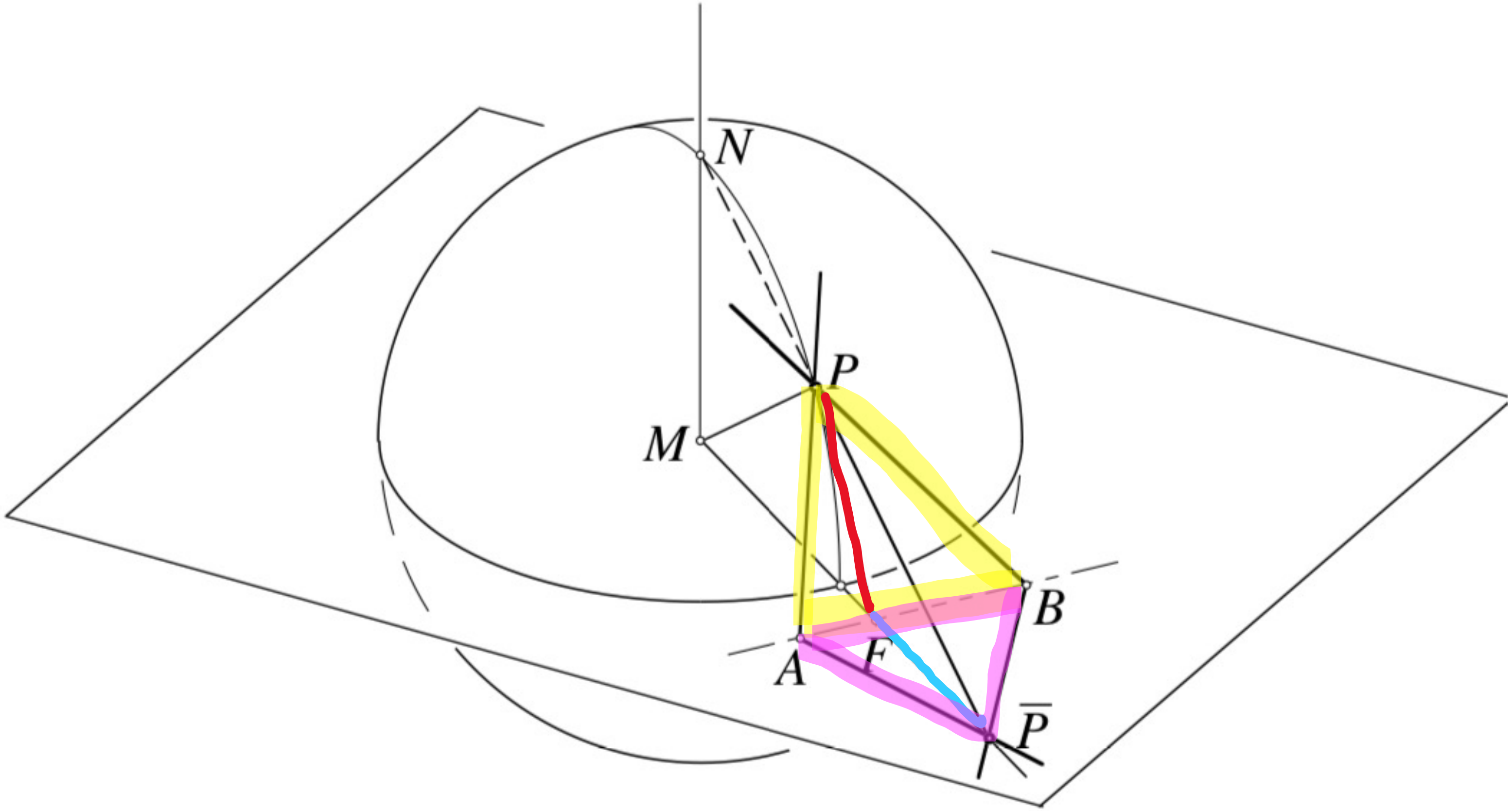


Abb. 7

Achsenschnitt durch *P*

Beweis: „Die stereografische Projektion ist winkeltreu“



Nachweis der Konformität

Tafelaufschrieb

III. Sphäre

Definition 3.1 Sphärischer Abstand

Sei F eukl. Raum mit $\dim F = n+1$.
Sei $S^n = \{x \in F \mid \|x\| = 1\}$ die Einheitssphäre.
Wegen Cauchy-Schwarz gilt für $P,Q \in S^n$ $|\langle P,Q\rangle| \leq \|P\| \cdot \|Q\| = 1$
d.h. $\langle P,Q\rangle \in [-1,1]$

Der sphärische Abstand $d(P,Q)$ zw. zwei Punkten $P,Q \in S^n$ wird definiert mit

$$\boxed{\cos d(P,Q) = \langle P,Q\rangle}$$

$d: S^n \to \mathbb{R}$, $d(P,Q) \mapsto \arccos \langle P,Q\rangle$ heißt sphär. Abstand:

① $d(P,Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$ (Definitheit)

② $d(P,Q) = d(Q,P)$ (Symmetrie)

③ $d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$ $A,B,C \in S^n$ (Δ-Ungl.)

Beweis:

① z.z. $d(P,Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$

„$\Rightarrow$" Sei $P = Q$ dann gilt
$\cos d(P,P) = \langle P,P\rangle = 1$
$\Rightarrow d(P,P) = 0$

„$\Leftarrow$" Fall 1: P und Q linear unabh.
$\underset{\text{C.S.}}{\Rightarrow} |\langle P,Q\rangle| < \|P\| \cdot \|Q\| = 1$
$\Rightarrow \langle P,Q\rangle \in (-1,1)$
$\Rightarrow \cos d(P,Q) \in (-1,1)$
$\Rightarrow d(P,Q) \neq 0$

Fall 2: P und Q linear abhängig d.h. $P = \lambda Q$ $\lambda \neq 1$

Es gilt: $1 = \|P\| = \|\lambda Q\| = |\lambda| \cdot \|Q\| = |\lambda| \cdot 1$
$\Rightarrow |\lambda| = 1$
$\Rightarrow \lambda = -1$, da $\lambda \neq 1$

Setze $\lambda = -1$ in $P = \lambda Q$, dann folgt:
$P = -Q$
Dann gilt: $\langle P,Q\rangle = \langle -Q,Q\rangle = \langle -Q,Q\rangle$
$= -1$
$= \cos d(-Q,Q)$
$\Rightarrow d(-Q,Q) = \pi$

② Symmetrie klar

③ Δ-Ungl. (siehe 3.6)

Definition 3.2

Einen Vektor $T \in F$ nennt man Tangentenvektor zu einem Punkt $A \in S^n$ wenn

$\langle A,T\rangle = 0$ gilt

T heißt normierter Tangentenvektor wenn zusätzlich

$\|T\| = 1$ gilt.

Die Menge $T_A(S^n) = \{x \in F \mid \langle x,A\rangle = 0\}$ nennt man Tangentialraum an S^n im Punkt A.

Lemma 3.3

Seien $A, B \in S^n$.
Es $\exists U \in S^n$ mit $\langle U, A\rangle = 0$ und $\|U\| = 1$ sodass

$$\boxed{B = A \cos d(A,B) + U \sin d(A,B)}$$

Beweis:

Seien A, B linear unabh. und $U \in \mathrm{span}(A,B) \cap T_A(S^n)$
Dann gilt:

$$U = \lambda \cdot A + \mu \cdot B \qquad \text{mit } \mu \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad U = \lambda \cdot A + \mu \cdot B \quad | -\lambda A$$
$$\Leftrightarrow \quad U - \lambda A = \mu \cdot B \quad | : \mu$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{U - \lambda A}{\mu} = B$$

$$\Leftrightarrow \frac{U}{\mu} - \frac{\lambda A}{\mu} = B$$

$$\Rightarrow xA + yU = B$$

$x = -\frac{\lambda}{\mu}$
und
$y = \frac{1}{\mu}$

Es gilt: $1 = \langle B, B\rangle$

$$= \langle xA + yU, xA + yU\rangle$$

$$= \langle xA, xA\rangle + 2\langle xA, yU\rangle + \langle yU, yU\rangle$$

$$= x^2 \langle A, A\rangle + 2xy\langle A, U\rangle + y^2\langle U, U\rangle$$
$$= x^2 + y^2$$

$\Rightarrow 1 = x^2 + y^2$

$\Rightarrow$ Vektor $\binom{x}{y}$ liegt auf dem Einheitskreis in $\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow \exists \alpha \in [-\pi, \pi]$ sodass $\binom{x}{y} = \binom{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

Setze $x = \cos\alpha$ und $y = \sin\alpha$ in B ein:

$$B = xA + yU$$
$$= \cos\alpha\, A + \sin\alpha\, U \quad ; \alpha \in [-\pi, \pi]$$

Führe Substitution $(\alpha, U) \mapsto (-\alpha, -U)$ durch, dann gilt

$$B = xA + yU$$
$$= \cos -\alpha A + \sin -\alpha \cdot (-U)$$
$$= \cos\alpha A + (-\sin\alpha) \cdot (-U)$$
$$= \cos\alpha\, A + \sin\alpha \cdot U \qquad \text{mit } \underline{\alpha \in [0, \pi]}$$

Weiterhin gilt:

$$\underbrace{\cos d(A,B)}_{\in [0,\pi]} = \langle A, B\rangle = \langle A, A\cos\alpha + U \sin\alpha\rangle$$

$$= \underbrace{\langle A, A\rangle}_{=1} \cos\alpha + \underbrace{\langle A, U\rangle}_{=0} \sin\alpha$$

$$= \cos\alpha$$

$\Rightarrow \cos d(A,B) = \cos\alpha$

$\Rightarrow d(A,B) = \alpha$ eindeutig
$\uparrow$
Da cos injektiv im Intervall $[0,\pi]$

$\Rightarrow B = A\cos d(A,B) + U \sin d(A,B)$

Fall 2: A und B linear abhängig

1. $A = B$

$\Rightarrow d(A,B) = 0$
Definitheit

Setze $d(A,B)$ in B:

$$\underline{\underline{B}} = A\cos d(A,B) + U \sin d(A,B)$$

$$\overset{d(A,B)=0}{=} A \cos 0 + U \sin 0$$

$$= A \cdot 1 + U \cdot 0$$

$$\underline{\underline{= A}}$$

$\Rightarrow A = B$

2. $A = -B$

$\Rightarrow d(A,B) = \pi$

Setze in B ein:

$$B = A \cos d(A,B) + U \sin d(A,B)$$

$$= A \cos \pi + U \sin \pi$$

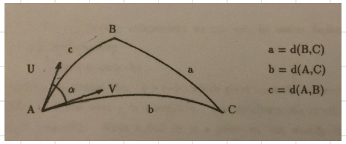
$$= A \cdot (-1) + U \cdot 0$$

$$= -A$$

$\Rightarrow \underline{\underline{A = -B}}$

$\square$

3.6 (Beweis Δ-Ungl.)



③ Δ - Ungleichung:

$A, B, C \in S^n$

Dann gilt: $d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$

Wenn $A, B, C \in S^n$ lin. unabh., dann gilt die scharfe Δ-Ungl.

Beweis:

Fall 1: A, B, C lin. unabh., $a, b, c \in (0, \pi)$

d.h. z.z. $c < a + b$

Es gilt $\cos\alpha < 1$.

Wegen Lemma 3.5 (siehe unten) gilt:

$$\cos a = \cos c \cos b + \sin b \sin c \underbrace{\cos\alpha}_{<1}$$

$$< \cos c \cos b + \sin b \sin c$$

$$\overset{(*)}{=} \cos(c-b)$$

$\Rightarrow \cos a < \cos(c-b)$

Fallunterscheidung: (1) $c - b > 0$

$$\cos a < \cos(c-b)$$

$$\Rightarrow a > c - b$$

(*) Additionstheorem:

$\cos(c-b)$

$= \cos c \cos b + \sin b \sin c$

② $c-b < 0$

Es gilt: $c-b < 0 < a$

$\Rightarrow c-b < a \quad |+b$
$\Rightarrow c < a+b$

$\square$

Fall 2: A, B, C linear abhängig

Lemma 3.5 gilt auch für $\alpha \in [0, \pi]$

Schritte analog nur mit $\cos\alpha \leq 1$.

Theorem 3.11

Jede Isometrie β der Sphäre S^n wird induziert durch eine orth. Transformation des umgebenen eukl. Raums.

Beweis:

Sei $A_0, .., A_n$ linear unabh. in F
Definiere $\beta(A_i) =: B_i \quad i = 1, .., p$
Des Weiteren gilt: $d(A_i, A_j) = d(B_i, B_j) \quad \forall i = 1, ..., p$,
da β eine Isometrie auf der Sphäre.
Nach Lemma 3.10 gilt: $\exists$ Isometrie Θ, die aus höchstens p Hyperebenen Reflexionen besteht, wobei $\Theta(A_i) = B_i \quad i = 1, .., p$
Daraus folgt $\Theta(A_i) = \beta(A_i) \quad i = 1, ..., p$

Es muss gezeigt werden $\Theta = \beta$:
$\Leftrightarrow \underbrace{\beta^{-1} \circ \Theta}_{:= \gamma} = id$

Wir wissen: $\gamma(A_i) = A_i \quad i = 1, .., n$

Beweis durch Widerspruch:
Angenommen $\gamma := \beta^{-1} \circ \Theta \neq id$ d.h. $\gamma(P) = P \; \forall P \in F$
Weiterhin gilt:
- Jede orth. Transformation Θ ist eine sphär. Isometrie.
- Nach Vor. ist β eine Isometrie auf der Sphäre

$\Rightarrow \gamma := \beta^{-1} \circ \Theta$ ist eine Isometrie auf der Sphäre

$\rightarrow d(\gamma(P), A_i) = d(\gamma(P), \gamma(A_i))$
$= d(P, A_i)$
$\uparrow$
γ Isometrie

Daraus folgt: $A_i \in K := \{ x \in F \mid d(\gamma(P), x) = d(P, x) \}$

$$= \{ x \in F \mid \langle \gamma(P) - P, x \rangle = 0 \} \quad \forall i \in \{0, \dots, n\}$$

$\Rightarrow$ $\gamma(P) - P$ ist Normalenvektor der Ebene K und nicht der Nullvektor, da $\gamma(P) \neq P$

$\Rightarrow$ K ist eine Hyperebene

$\Rightarrow$ K hat dim n, da K Hyperebene und nicht $\geq n+1$ $\lightning$ Widerspruch

Somit muss gelten: $\beta^{-1} \circ \theta = id$
$\Rightarrow \beta = \theta$

$\square$

Lemma 3.5 Kosinussatz

Sei ΔABC ein geodätisches Dreieck.
$A, B, C \in S^n$ linear unabhängig in F.

Seien $a = d(B,C)$, $b = d(A,C)$, $c = d(A,B)$ und $B = A\cos c + U \sin c$ mit $\langle U, A\rangle = 0$ & $\|U\| = 1$
$C = A \cos b + U \sin b$ $\quad \langle V, A \rangle = 0$ & $\|V\| = 1$

$\sphericalangle A = \alpha \quad \cos\alpha = \langle U, V \rangle \quad \alpha \in (0, \pi)$

Dann gilt folg. Gleichung:

$$\boxed{\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin \cos \alpha}$$

<u>Beweis</u>:

<u>Schritt 1</u>: z.z.
$$\begin{vmatrix} \langle A,A\rangle & \langle B,A\rangle \\ \langle A,C\rangle & \langle B,C\rangle \end{vmatrix} = \sin c \sin b \begin{vmatrix} \langle A,A\rangle & \langle U,A\rangle \\ \langle A,V\rangle & \langle U,V\rangle \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \langle A,A\rangle & \langle B,A\rangle \\ \langle A,C\rangle & \langle B,C\rangle \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{setze} \\ B = A\cos c + U\sin c \\ \text{ein}}}{=} \begin{vmatrix} \langle A,A\rangle & \langle A\cos c + U \sin c, A\rangle \\ \langle A,C\rangle & \langle A\cos c + U\sin c, C\rangle \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \langle A,A\rangle & \langle A,A\rangle \cos c + \langle U,A\rangle \sin c \\ \langle A,C\rangle & \langle A,C\rangle \cos c + \langle U,C\rangle \sin c \end{vmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} \langle A,A\rangle & \langle A,A\rangle \\ \langle A,C\rangle & \langle A,C\rangle \end{vmatrix}}_{=0} \cos c + \begin{vmatrix} \langle A,A\rangle & \langle U,A\rangle \\ \langle A,C\rangle & \langle A,C\rangle \end{vmatrix} \sin c$$

Setze
$c = A\cos b + V\sin b$ ein

$$= \begin{vmatrix} \langle A,A\rangle & \langle U,A\rangle \\ \langle A, A\cos b + V\sin b\rangle & \langle A, A\cos b + V\sin b\rangle \end{vmatrix} \sin c$$

$$= \begin{vmatrix} \langle A,A\rangle & \langle U,A\rangle \\ \langle A,A\rangle\cos b + \langle A,V\rangle\sin b & \langle U,A\rangle\cos b + \langle U,V\rangle\sin b \end{vmatrix} \sin c$$

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} \langle A,A\rangle & \langle U,A\rangle \\ \langle A,A\rangle & \langle U,A\rangle \end{vmatrix}}_{=0} \cos b + \begin{vmatrix} \langle A,A\rangle & \langle U,A\rangle \\ \langle A,V\rangle & \langle U,V\rangle \end{vmatrix} \sin b \sin c$$

$$= \begin{vmatrix} \langle A,A\rangle & \langle U,A\rangle \\ \langle A,V\rangle & \langle U,V\rangle \end{vmatrix} \sin b \sin c$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \langle A,A\rangle & \langle B,A\rangle \\ \langle A,C\rangle & \langle B,C\rangle \end{vmatrix} \overset{(*)}{=} \sin c \sin b \begin{vmatrix} \langle A,A\rangle & \langle U,A\rangle \\ \langle A,V\rangle & \langle U,V\rangle \end{vmatrix}$$

<u>Schritt 2:</u> Berechne $\begin{vmatrix} \langle A,A\rangle & \langle B,A\rangle \\ \langle A,C\rangle & \langle B,C\rangle \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} \langle A,A\rangle & \langle B,A\rangle \\ \langle A,C\rangle & \langle B,C\rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \langle B,A\rangle \\ \langle A,C\rangle & \langle B,C\rangle \end{vmatrix}$$

$$= \langle B,C\rangle - \langle A,C\rangle \cdot \langle B,A\rangle$$

$$= \cos d(B,C) - \cos d(A,C) \cdot \cos d(B,A)$$

$$= \cos a - \cos b \cdot \cos c$$

<u>Schritt 3:</u> Berechne $\sin c \sin b \begin{vmatrix} \langle A,A\rangle & \langle U,A\rangle \\ \langle A,V\rangle & \langle U,V\rangle \end{vmatrix}$

$$\sin c \sin b \begin{vmatrix} \langle A,A\rangle & \langle U,A\rangle \\ \langle A,V\rangle & \langle U,V\rangle \end{vmatrix} = \sin c \sin b \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos\alpha \end{vmatrix}$$

$$= \sin c \sin b \cdot \cos\alpha$$

(*)

$$\Rightarrow \cos a - \cos b \cdot \cos c = \sin c \sin b \cdot \cos\alpha \quad | + \cos b \cdot \cos a$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\cos a = \cos b \cos c + \sin c \sin b \cos\alpha}$$

$\square$

Quellen

Bär, C. (2010). *Elementare Differentialgeometrie*.(2.Auflage). De Gruyter.

Iversen, B. (1992). *Hyperbolic Geometry*. Cambridge University Press.

Jung, T. (o.D.). *Was ist eine Kartenprojektion?. Eine kurze Einführung*. Kartenprojektionen vergleichen. https://kartenprojektionen.de/map-projection-explained.php [09.11.2024].

StudySmarter. (o.D.). *Sphärische Geometrie.* StudySmarter. https://www.studysmarter.de/studium/mathematik-studium/geometrie-studium/sphaerische-geometrie/ [09.11.2024].

Walser, H. (2002). *Geometrie*. ETH Zürich.

Abbildungen:

Abb.1: https://de.wikipedia.org/wiki/Sphärische_Geometrie

Abb. 2: Iversen, B. (1992). Hyperbolic Geometry. Cambridge University Press.

Abb.3: https://lp.uni-goettingen.de/get/text/6352

Abb. 4- 7: Walser, H. (2002). *Geometrie*. ETH Zürich.