Der Satz von Sylvester

Susanna Siegel

I.3 Sylvester types

Grundlage: quadratische Formen Q über $\mathbb{R}$.

3.1 Definition: Positiv / negativ definit

Eine quadratische Form Q heißt...

- positiv definit $:\Leftrightarrow \forall e \in E$ mit $e \neq 0$ gilt: $Q(e) > 0$
- negativ definit $:\Leftrightarrow \forall e \in E$ mit $e \neq 0$ gilt: $Q(e) < 0$

3.2 Definition: Euklidischer Vektorraum

E heißt euklidischer Vektorraum $:\Leftrightarrow$

E ist ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum mit einer positiv definiten quadratischen Form Q.

3.3 Definition: Orthonormalbasis

Sei E ein $\mathbb{R}$-VR mit $\dim(E) = n$ und einer quadratischen Form Q.

$e_1, \dots, e_n$ ist eine Orthonormalbasis $:\Leftrightarrow$

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{wenn } i \neq j \\ -1, 0, 1 & \text{wenn } i = j \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Orthogonalität der Vektoren

$\hookrightarrow -1$ möglich, da die QF nicht immer positiv definit sein muss

Beispiel: $\langle e_i, e_j \rangle = -1$ im Lorentz-Raum

Vorteil einer ONB für eine quadratische Form

$\Rightarrow$ QF hat eine einfache Struktur in ONB $\Rightarrow$ Die symmetrische Matrix hat die Gestalt einer Diagonalmatrix.

$\Rightarrow Q(v) = \lambda_1 v_1^2 + \dots + \lambda_n v_n^2$

3.4 Proposition

Für jede quadratische Form Q auf dem $\mathbb{R}$-VR E mit $\dim(E) = n$

existiert eine solche Orthonormalbasis.

$\Rightarrow$ In jedem reellen VR findet man also so eine spezielle Basis, in der die quadratische Form einfach dargestellt werden kann.

Beweis durch Induktion über $n = \dim(E)$:

IA: $n = 1$: • $\dim(E) = 1 \Rightarrow$ Sei e_1 der Basisvektor von E (Jeder Vektor in E ist ein Vielfaches von e_1)

Fall 1: • Sei $Q(v) = \langle v, v \rangle = 0 \quad \forall v \in E$.

$\rightarrow$ Auch $Q(e_1) = \langle e_1, e_1 \rangle = 0$

$\Rightarrow$ Die Basis ist orthonormal

Fall 2: Sei $Q(e) \neq 0 \quad \forall e \in E$. $\Rightarrow Q(e_1) \neq 0$. Sei $e_1 := \lambda^{-1} e$

Betrachte $Q(e_1) = Q(\lambda^{-1} e) = (\lambda^{-1})^2 \cdot Q(e)$

Sei $Q(e) := \varepsilon \lambda^2$ mit $\varepsilon = \pm 1$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ $\Rightarrow Q(e_1) = (\lambda^{-1})^2 \cdot \varepsilon \lambda^2 = \varepsilon = \pm 1$

$\Rightarrow \exists$ ONB $\{e_1\}$ für $n = 1$

IV: Ang. für jede quadratische Form (E, Q) über $\mathbb{R}$ mit $\dim(E) = n-1$ existiert eine ONB

IS. $n-1 \mapsto n$: Ziel: IV für einen $n-1$-dimensionalen Unterraum anwenden

Fall 1: $Q(v) = 0 \quad \forall v \in E \Rightarrow$ Jede Basis von E ist orthonormal

Fall 2: Sei $Q(e) \neq 0 \quad \forall e \in E$, $Q(e) = \varepsilon \lambda^2$, $\varepsilon = \pm 1$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $e_1 = \lambda^{-1} e$.

$$Q(e_1) = Q(\lambda^{-1} \cdot e) = (\lambda^{-1})^2 \cdot Q(e) = (\lambda^{-1})^2 \varepsilon \lambda^2 = \frac{\cancel{\lambda^2}}{\cancel{\lambda^2}} \varepsilon = \varepsilon$$

$\Rightarrow Q(e_1) = \pm 1$, da $\varepsilon = \pm 1$

Betrachte den Komplementraum $(\mathbb{R} e_1)^\perp$: (Raum, in dem jeder Vektor orthogonal zu e_1 ist)

$\Rightarrow \dim((\mathbb{R} e_1)^\perp) = n-1 \overset{IV}{\Rightarrow}$ Für $(\mathbb{R} e_1)^\perp$ existiert eine ONB $\underbrace{\{e_2, \ldots, e_n\}}_{n-1\text{-Vektoren}}$

$\rightarrow e_2, \ldots, e_n$ sind alle orthogonal zueinander & orthogonal zu e_1

$\Rightarrow \{e_1\} \cup \{e_2, \ldots, e_n\} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ ist eine ONB von E $\Rightarrow$ Beh.

3.5 Dimensionsformel

Sei E ein endlich-dimensionaler Vektorraum, U, V Unterräume von E.

Es gilt: $\dim(U+V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V)$

Beweis: Sei folgende lin. Abb. gegeben:

$$f: \underbrace{U \oplus V}_{\text{direkte Summe der beiden UVR}} \to E \quad \text{mit } \underbrace{f(u,v) = u - v}_{\text{2 Vektoren werden auf ihre Differenz abgebildet}} \quad \forall u \in U, v \in V$$

Ziel: Dimensionsformel auf diese Abb. anwenden

1) Kern & Bild der Abbildung

- Ker f:
  - $\{(u,v) \in U \oplus V \mid f(u,v) = u - v = 0\} \Rightarrow u = v$
  - $u = v \iff$ (i) u, v sind gleich
    (ii) $u \in U$ und $u \in V \Rightarrow u \in U \cap V \Rightarrow v \in U \cap V$

  $\Rightarrow \ker f = \{(u,v) \in U \oplus V \mid u, v \in U \cap V\} \Rightarrow \ker f \overset{\sim}{\Rightarrow} U \cap V$

- Bild f:
  - $\operatorname{Im} f = \{(u,v) \in U \oplus V \mid f(u,v) = u - v\} \Rightarrow$ Beh: $\operatorname{Im} f = U \oplus V$

  (i) zz: $\operatorname{Im} f \subseteq U + V$
  - Sei $x = u - v \in \operatorname{Im} f$ bel.

  $\Rightarrow x = u - v = \underbrace{(u+0)}_{u \in U} + \underbrace{(-v+0)}_{-v \in V} \Rightarrow x \in U+V \Rightarrow \operatorname{Im} f \subseteq U+V$

  (ii) zz: $\operatorname{Im} f \supseteq U+V$
  - Sei $x \in U+V$ bel. $\Rightarrow \exists u' \in U, v' \in V: x = u' + v'$

  $\Rightarrow x = u' + v' = (u'+v') = \underbrace{u'}_{\in U} - \underbrace{(-v')}_{\in V} \Rightarrow x \in \operatorname{Im} f \Rightarrow U+V \subseteq \operatorname{Im} f$ $\qquad \Rightarrow \operatorname{Im} f = U+V$

2) Anwendung der Dimensionsformel auf die Abbildung:

Für $f: U \oplus V \to E$ gilt: $\dim(U \oplus V) \overset{\text{Dimform. für eine lineare Abb.}}{=} \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{Im} f) \overset{\text{Bew. 1)}}{=} \dim(U \cap V) + \dim(U+V)$

$= \dim(U) + \dim(V)$

$\Rightarrow \dim(U) + \dim(V) = \dim(U \cap V) + \dim(U+V)$

■

3.6 Satz von Sylvester

Sei $e_1, \dots, e_n$ eine ONB für die quadratische Form (E, Q) über $\mathbb{R}$.

Sei
- $p = \#\{ i \mid \langle e_i, e_i \rangle = -1 \}$ ⇒ Anzahl der Basisvektoren, für die das Skalarprodukt -1 ist
- $q = \#\{ i \mid \langle e_i, e_i \rangle = +1 \}$ ⇒ Anzahl der Basisvekt., für die das Skalarp. $+1$ ist

Dann gilt: p und q sind unabhängig von der Wahl der ONB

⇒ p, q entsprechen der Anzahl der Eigenwerte $-1, +1$

⇒ Durch geeignete Basiswahl kann die quadratische Form in eine Diagonalform gebracht werden, auf deren Hauptdiagonale $+1, -1, 0$ stehen. Die Anzahl wird durch die Wahl der ONB nicht verändert.

⇒ Trägheitssatz von Sylvester

→ Satz garantiert: Jede QF auf reellem VR kann diagonalisiert werden

Beweis:

Sei $B = e_1, \dots, e_n$ eine ONB der QF.

Sei $E_- = \operatorname{span}\{ e_i \in B \mid \langle e_i, e_i \rangle = -1, 0 \}$

Sei F ein beliebiger euklidischer Untervektorraum von E.

1) Orthogonalität von F und E_-

Es gilt: $F \cap E_- = 0$ nach Konstruktion (*)

2) Dimensionsformel

$$\dim(F + E_-) = \dim(F) + \dim(E_-) - \underbrace{\dim(F \cap E_-)}_{=0} \quad (*)$$

3) Zshg mit Gesamtdimension

- $F + E_-$ ist UR von E & $\dim(E) = n$

$$\Rightarrow \dim(F + E_-) \leq \dim(E) = n$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} \dim(F) + \dim(E_-) \leq n$$

- Es gilt: $\dim(E_-) = n - q$

$$\dim(F) + n - q \leq n \iff \dim(F) \leq q$$

$\Rightarrow \sup\{\dim(F) \mid \text{euklidisch } F \subseteq E\} = q$

$\Rightarrow$ q unabhängig von der Wahl der ONB

4) noch zz: p ist auch unabh. von der ONB (analoge Argumentation)

- gleiches Schema anwenden auf $(E, -Q)$
- Q durch $-Q$ ersetzen $\Rightarrow \dim(F)$ in $(E,-Q)$ durch p bestimmt

$\Rightarrow$ p ist unabh. von ONB

Notation:

- Man sagt: Die quadratische Form (E,Q) hat den Sylvestertyp $(-p, q)$
- Zudem gilt: Zwischen zwei quadratischen Formen (E,Q) und (F,R) des gleichen Sylvestertyps und $\dim(E) = \dim(F)$ existiert ein Isomorphismus

3.7 Discriminant inequality

Sei (E,Q) eine nicht singuläre quadratische Form vom Sylvestertyp $(-s, r)$ und sei $e_1, \dots, e_n$ eine bel. Basis des eukl. Raums E.

Dann gilt: $$\operatorname{sgn} \det_{ij} \overbrace{\underbrace{\langle e_i, e_j \rangle}_{\text{enthält die inneren Produkte der Basisvektoren}}}^{\text{Gram-Matrix}} = (-1)^s$$

$\Rightarrow$ Das Vorzeichen der Determinante der Gram-Matrix ist nur von der Anzahl s der negativen Eigenwerte im Sylvestertyp abhängig. Es ist unabhängig von der Basiswahl, da s nach dem Satz von Sylvester unabhängig von der Basiswahl ist.

Beweis: Sei $f_1, \dots, f_n$ eine 2. Basis von E, B eine Übergangsmatrix.

$\Rightarrow$ Vektoren von Basis 2 als Linearkombination von Vektoren von Basis 1 darstellen:

$$f_i = \sum_r B_{ir} e_r \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Einträge der Übergangsmatrix B

2) Bilinearform in neuer Basis

$$\langle f_i, f_j \rangle = \langle \sum_r B_{ir} e_r, \sum_s B_{js} e_s \rangle \overset{\text{Linearität}}{=} \sum_r \sum_s B_{ir} B_{js} \langle e_r, e_s \rangle$$
$$= \sum_{r,s} B_{ir} \langle e_r, e_s \rangle B^T_{js}$$

3) Determinante bestimmen

$$\det_{ij}\left(\langle f_i, f_j\rangle\right) = \det\left(B \cdot \langle e_r, e_s\rangle \cdot B^T\right)$$

Det. bei Produkt von Matrizen

$$= \det(B) \cdot \det_{r,s}\left(\langle e_r, e_s\rangle\right) \cdot \det\left(B^T\right)$$

$\det(B^T) = \det(B)$

$$= \det(B) \cdot \det_{r,s}\left(\langle e_r, e_s\rangle\right) \cdot \det(B)$$

$$= (\det(B))^2 \cdot \det_{i,j}\left(\langle e_i, e_j\rangle\right)$$

4) Signum bestimmen

$$\operatorname{sgn}\left(\det_{i,j} \langle f_i, f_j\rangle\right) = \operatorname{sgn}\left(\underbrace{(\det(B))^2}_{\geq 0} \cdot \det_{i,j}\left(\langle e_i, e_j\rangle\right)\right) = \operatorname{sgn}\left(\det_{i,j}\left(\langle e_i, e_j\rangle\right)\right) = \overbrace{1^r}^{\text{verändert das VZ nicht}} \cdot (-1)^s = (-1)^s$$

$\Rightarrow$ keinen Einfluss auf das VZ

Gram-Matrix ist symmetrisch $\Rightarrow$ det = Produkt der EW

38 Definition: Sylvestertyp einer symmetrischen Matrix

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix.

Q nennt man **Sylvestertyp der symmetrischen Matrix A**:

$$Q\left(\sum x_i e_i\right) = \sum_{r,s} a_{r,s} x_r x_s$$

$\Longrightarrow$ Konstruktion von Q aus den Einträgen der Matrix A & den Basisvektoren $e_1, \dots, e_n$ des Vektorraums E.

Bestimmung des Sylvestertyps

Der Sylvestertyp Q der symmetrischen Matrix A kann über die Determinante der Hauptminoren $A_1, \dots, A_n$ bestimmt werden.

$\Rightarrow$ Betrachte also $\det A_1, \dots, \det A_n$

A : $n \times n$ – Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ **Hauptminor A_1**: Matrix, die durch Streichen der letzten $n-1$ Zeilen & Spalten entsteht

$\Rightarrow A_1 = (a_{11})$

$\Rightarrow$ **Hauptminor A_2**: Die letzten $n-2$ Zeilen & Spalten von A streichen

$$\Rightarrow A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ **Hauptminor A_3** : 3×3 – Matrix

Lemma 3.9 : Definitheit der Matrix A

Sei A eine symmetrische $n \times n$-Matrix über $\mathbb{R}$.

Es gilt: A ist positiv definit $\iff$ $\det(A_1), \dots, \det(A_n) > 0$, d.h. .

Alle Hauptminoren sind strikt positiv

Beweis:
- Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det(A_i) \neq 0 \ \forall i = 1,..,n$ $\Rightarrow$ alle Hauptminoren $\neq 0$
- Sei E_i der Unterraum von E, der durch die Vektoren $e_1, \dots, e_i$ erzeugt wird.
- Ziel: Vorzeichen von A bestimmen

1) Nach VS: $\det A_i \neq 0 \ \forall i = 1,..,n \quad \Rightarrow \quad E_i \neq 0$

2) Wähle einen Vektor $f_i \in E_i$ wobei $f_i \neq 0 \ \wedge \ f_i \perp E_{i-1}$

$\Rightarrow$ Fazit: Basis 1 : $\{e_1, \dots, e_i\}$
Basis 2 : $\{e_1, \dots, e_{i-1}, f_i\}$

Bestimmung der Gram-Matrizen

$$G_1 = \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \langle e_1, e_2 \rangle & \cdots & \langle e_1, e_i \rangle \\ \langle e_2, e_1 \rangle & \langle e_2, e_2 \rangle & \cdots & \langle e_2, e_i \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle e_i, e_1 \rangle & \langle e_i, e_2 \rangle & \cdots & \langle e_i, e_i \rangle \end{pmatrix}$$

$$G_2 = \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \langle e_1, e_2 \rangle & \cdots & \langle e_1, e_{i-1} \rangle & \langle e_1, f_i \rangle \\ \langle e_2, e_1 \rangle & \langle e_2, e_2 \rangle & \cdots & \langle e_2, e_{i-1} \rangle & \langle e_2, f_i \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \langle e_{i-1}, e_1 \rangle & \langle e_{i-1}, e_2 \rangle & \cdots & \langle e_{i-1}, e_{i-1} \rangle & \langle e_{i-1}, f_i \rangle \\ \langle f_i, e_1 \rangle & \langle f_i, e_2 \rangle & \cdots & \langle f_i, e_{i-1} \rangle & \langle f_i, f_i \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \langle e_1, e_2 \rangle & \cdots & \langle e_1, e_{i-1} \rangle & 0 \\ \langle e_2, e_1 \rangle & \langle e_2, e_2 \rangle & \cdots & \langle e_2, e_{i-1} \rangle & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \langle e_{i-1}, e_1 \rangle & \langle e_{i-1}, e_2 \rangle & \cdots & \langle e_{i-1}, e_{i-1} \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \langle f_i, f_i \rangle \end{pmatrix}$$

f_i orthogonal zu E_{i-1} gewählt
$\Rightarrow$ Skalarprodukte sind 0

Vorzeichen von G_1 und G_2

$\Rightarrow e_1, \dots, e_{i-1} \in G_1$ und $\in G_2$

$\Rightarrow \operatorname{sgn}(G_1) = \operatorname{sgn}(G_2)$

$\Rightarrow \operatorname{sgn} \det A_i = \operatorname{sgn} \langle f_i, f_i \rangle \cdot \operatorname{sgn} \det A_{i-1}$

$\Rightarrow \langle f_i, f_i \rangle$ ist $> 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$

$\Rightarrow$ Matrix A positiv definit

$\blacksquare$

I.4: Euclidean vector spaces

Grundlage: Sei E ein euklidischer VR (Def. von vorhin) $\Rightarrow$ QF ermöglicht Längen- & Winkelberechnung

I.4.1 Längen & Winkel

4.1 Definition: Länge eines Vektors

Sei $e \in E$ ein bel. Vektor. Die Länge von e ist definiert als: $|e| = \sqrt{<e,e>}$

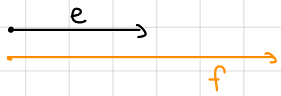
Bsp. im $\mathbb{R}^3$: $\vec{a} := \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad |a| = \sqrt{<a,a>} = \sqrt{1^2+5^2+3^2} = \sqrt{35} \approx 5{,}92$

4.2 Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Für Vektoren $e,f \in E$ gilt: $\underbrace{|<e,f>| \leq |e| \cdot |f|}_{< \text{ bei lin. unabh. Vektoren}}$

Beweis: Seien $e,f \in E$ beliebig.

Fall 1: Seien e,f linear abhängig

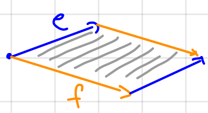


zz: $|<e,f>| = |e| \cdot |f|$

- Lin. abh. $\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda > 0$: $e \overset{*}{=} \lambda f$
- $<e,f> \overset{*}{=} <\lambda f, f> = \lambda \cdot <f,f> = \lambda \cdot |f|^2$
- $|e| = |\lambda f| = \sqrt{<\lambda f, \lambda f>} = \sqrt{\lambda^2 <f,f>} = \lambda \cdot |f|$
- Überprüfe die Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$|<e,f>| = \lambda \cdot |f|^2 = \lambda \cdot |f| \cdot |f| = |e| \cdot |f| \qquad \Rightarrow |<e,f>| = |e| \cdot |f|$$

Fall 2: Seien e,f linear unabhängig.



zz: $|<e,f>| < |e| \cdot |f|$

- unabh. $\Rightarrow e,f$ spannen eine euklidische Ebene im $\mathbb{R}^2$ auf, die durch folgende Matrix beschrieben werden kann

$$G = \underbrace{\begin{pmatrix} <e,e> & <e,f> \\ <f,e> & <f,f> \end{pmatrix}}_{\text{Gram-Matrix}} \qquad \Rightarrow \det(G) = <e,e> \cdot <f,f> - <e,f>^2$$

$$\overset{3.5}{\Rightarrow} \operatorname{sgn} \det(G) = (-1)^s \overset{*}{=} (-1)^0 = 1$$

* $s=0$, weil: eukl. Raum hat pos. def. Struktur $\Rightarrow$ EW der Gram-Matrix positiv $\Rightarrow$ keine neg. EW $\Rightarrow s=0$

$$\Longrightarrow 0 < \det(G), \text{ also } 0 < \langle e,e\rangle \cdot \langle f,f\rangle - \langle e,f\rangle^2$$

$$\Longleftrightarrow \langle e,f\rangle^2 < \langle e,e\rangle \cdot \langle f,f\rangle$$

$$\Longleftrightarrow |\langle e,f\rangle| < \sqrt{\langle e,e\rangle} \cdot \sqrt{\langle f,f\rangle}$$

$$\Longleftrightarrow |\langle e,f\rangle| < |e| \cdot |f|$$

4.3 Dreiecksungleichung

Für zwei beliebige Vektoren $e, f \in E$ gilt: $|e+f| \leq |e| + |f|$

Im Fall der linearen Unabhängigkeit von e,f gilt: $|e+f| < |e| + |f|$

Beweis:

- $|e+f|^2 \overset{\text{Def.}}{=} \langle e+f, e+f\rangle = \langle e,e\rangle + 2 \cdot \langle e,f\rangle + \langle f,f\rangle = |e|^2 + 2 \cdot \langle e,f\rangle + |f|^2$

  Abschätzen mit CSU: CSU: $|\langle e,f\rangle| \leq |e|\,|f|$

  $$|e|^2 + 2 \cdot \langle e,f\rangle + |f|^2 \leq |e|^2 + |f|^2 + 2 \cdot |e| \cdot |f| \overset{\text{bin. For.}}{=} (|e| + |f|)^2$$

  $$\Longrightarrow |e+f|^2 \leq (|e| + |f|)^2 \overset{\sqrt{\dots}}{\Longleftrightarrow} |e+f| \leq |e| + |f|$$

4.4. Definition: Winkel zwischen Vektoren

Seien $e, f \in E$ mit $e \neq 0$, $f \neq 0$.

Der Winkel $\angle(e,f)$ zwischen e,f kann berechnet werden durch:

$$\cos\angle(e,f) = \frac{\langle e,f\rangle}{|e| \cdot |f|} \qquad \text{mit } \angle(e,f) \in [0, \pi]$$

I.4.2: ORTHOGONALE TRANSFORMATIONEN & SPIEGELUNGEN

4.5. Definition: orthogonale Gruppe

$O(n)$ heißt orthogonale Gruppe und bezeichnet die Menge aller

$n \times n$ – Matrizen A über $\mathbb{R}$ für die gilt: $\underbrace{A^{-1} = A^T}_{\text{orthogonale Matrizen}}$

Eigenschaften orthogonaler Matrizen / Transformationen

Orthogonale Matrizen erhalten Längen & Winkel und es gilt: $\det(A) = \pm 1$

Bsp für eine orthogonale Transformation

Eine Spiegelung τ in einer linearen Hyperebene ist eine orth. Transf.

↳ Spiegelung an der x-Achse im $\mathbb{R}^2$

Spiegelung an x-Achse im $\mathbb{R}^2$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

→ orthogonal, weil: $A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = id$

4.6 Spiegelungsformel

Sei τ eine Spiegelung in einer linearen Hyperebene H.

Sei $n \in E$ ein Einheitsnormalenvektor.

Dann gilt: $\underbrace{\tau(x)}_{\text{Spiegelung von Vektor } x \text{ an Hyperebene } H} = x - 2 \cdot \underbrace{\langle x, n \rangle \cdot n}_{\text{Projektion von } x \text{ in Richtung des Normalenvektors } n}$ mit $x \in E$

4.7 Satz

Sei E ein euklidischer VR, $\dim(E) = n$ Dann gilt:

Jede orthogonale Transformation σ von E kann als Produkt von

höchstens n Spiegelungen an Hyperebenen dargestellt werden.

Beweis durch vollständige Induktion über $\dim(E) = n$.

IA: $n=1$: $\dim(E)=1 \Rightarrow \forall v \in E$ gilt: $v = \lambda e_1$ e_1 Basisvektor, $\lambda \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ orthog. Transf. $\sigma \,\hat{=}\,$ Identität oder 1 Spiegelung $\rightarrow$ Bed. erfüllt

IV: Ang. jede orthog. Transf. σ einer Hyperebene ($n-1$-dim Unterraum) kann als Produkt von höchstens $n-1$ Spiegelungen geschrieben werden.

IS: Sei e_1 Einheitsvektor $\Rightarrow |e_1| = 1$

Sei $F := \{ v \in \mathbb{R}^n \mid \langle v, e_1 \rangle = 0 \}$ alle Vektoren, die orthogonal zu e_1 sind $\Rightarrow \dim(F) = n-1$

Fall 1: $\sigma(e_1) = e_1$: e_1 wird unter σ nicht verändert $\Rightarrow \sigma$ stabilisiert F, also: $\sigma(F) = F$

$\Rightarrow \sigma$ wirkt nur auf F und $\dim(F) = n-1$

$\Rightarrow$ IV: $\sigma = \tau_1 \cdot \ldots \cdot \tau_{n-1}$ mit τ_i Spiegelungen $\forall i = 1, \ldots, n-1$

Fall 2: $\sigma(e_1) \neq e_1$: $\exists$ Spiegelung τ, die e_1 auf $\sigma(e_1)$ abbildet $\rightarrow \tau(e_1) = \sigma(e_1)$

Eigenschaft von τ: stabilisiert F, d.h. $\tau(F) = F$

$\Rightarrow \sigma \circ \tau$ ist eine orthogon. Transf., die e_1 fixiert & wirkt also nur auf F

$\overset{IV}{\Rightarrow} \sigma \circ \tau$ lässt sich als Produkt von $n-1$ Spiegelungen schreiben

$\Rightarrow \sigma = \tau_1 \cdot \ldots \cdot \tau_n$, da τ selbst eine Spiegelung ist

I.4.3: Rotationen

4.8 Definition: Rotation

Eine Rotation ist eine orthogonale Transformation σ von E mit $\det(\sigma) = 1$.

4.9 Drehung in der euklidischen Ebene

- Sei E die euklidische Ebene $\Rightarrow \dim(E) = 2$ & σ eine orthogonale Transformation.
- Seien i, j eine ONB von E $\Rightarrow i \perp j \;\wedge\; |i| = |j| = 1$
- Dann: $\sigma(i)$ beschreibt eine Drehung des Vektors i um Winkel θ:

$$\sigma(i) = i \cdot \cos(\theta) + j \cdot \sin(\theta) \qquad \text{mit } \theta \in \mathbb{R}$$

Abbildung des 2. Basisvektors j

VS: $i \perp j \implies \sigma(i) \perp \sigma(j)$ $\implies$ Frage ist also: Welche Vektoren sind orthogonal zu $\sigma(i) = i \cdot \cos(\theta) + j \cdot \sin(\theta)$?

Lösung: (1) $\sigma(j) = -i \cdot \sin(\theta) + j \cdot \cos(\theta)$

(2) $\sigma(j) = i \cdot \sin(\theta) - j \cdot \cos(\theta)$

Matrixdarstellung & Determinante

1) $A_1 = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \implies \det(A_1) = (\cos(\theta))^2 + (\sin(\theta))^2 = 1 \implies$ Drehung

2) $A_2 = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \implies \det(A_2) = -(\cos(\theta))^2 - (\sin(\theta))^2 = -1 \implies$ Spiegelung

Anwendung der Additionstheoreme auf die Rotationsmatrix 1)

Add. theoreme: $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$

Mit den Additionstheoremen folgt: $\to$ Grund: Bei der Verkettung von Rotationsmatrizen müssen sich die Drehwinkel addieren

$\exists$ Isomorphismus $\phi: \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \longrightarrow SO(E)$ mit

Gruppe aller Winkel modulo 2π | Gruppe aller Drehungen / Rotationen

$$\theta \longmapsto \phi(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$\implies$ Für jeden Winkel gibt es genau eine Rotationsmatrix (genau 1 wegen Bijektivität)

Gruppenoperation: Hintereinanderausführung von Rotationen

I.4.4: SPEZIELLE ORTHOGONALE GRUPPE

4.10 Definition: Spezielle orthogonale Gruppe

$SO(E) := \{ \sigma \in O(E) \mid \overbrace{\det(\sigma) = 1}^{\hat{=}\,\text{Drehung}} \}$ ist die spezielle orthogonale Gruppe.

Zudem gilt: $[O(E) : SO(E)] = 2$

4.11 Satz: Transitive Operation von SO(E) auf der Sphäre

Sei $S(E) := \{ e \in E \mid |e| = 1 \}$ die Sphäre

Es gilt: Die Gruppe $SO(E)$ operiert transitiv auf $S(E)$ für $\dim(E) \geq 2$, d.h.:

$\Rightarrow$ Einheitsvektoren können nur durch Drehungen aufeinander abgebildet werden

$\Rightarrow$ Für $\dim(E) \geq 2$, da ab dann eine Ebene existiert, in der beide Vektoren liegen
$\Rightarrow$ Drehung in der Ebene kann konstruiert werden

I.4.5.: Wichtige Sätze:

4.12: Proposition von Euler

$\rightarrow$ Unterscheidet 2 Arten von orthogonalen Transformationen

Jede orthogonale Transformation σ im $\mathbb{R}^3$ ist entweder eine Rotation oder eine Kombination aus einer Rotation & einer Spiegelung.

Fall 1: Rotation $\Rightarrow \det(\sigma) = 1$

- Es gilt: (i) $\exists$ Linie L, die von der Rotation σ fixiert wird $\Rightarrow \underbrace{\sigma(l) = l}_{\text{alle Punkte auf } L \text{ durch die Rotation unverändert}} \quad \forall l \in L$

  (ii) $L^\perp$ ist die Ebene, die senkrecht zu L steht
  $\Rightarrow$ Wirkung von σ auf $L^\perp$ ist eine Rotation
  $\rightarrow$ In $L^\perp$ wird um einen Winkel rotiert

  $\}$ σ fixiert die Achse L und dreht die Punkte in der senkrechten Ebene um diese Achse

Fall 2: Rotation & Spiegelung $\Rightarrow \det(\sigma) = -1$

- Es gilt: (i) ρ ist eine Rotation um die feste Achse L

  (ii) τ ist eine Spiegelung in der Ebene $L^\perp$, die die Punkte an dieser Ebene spiegelt

  $\}$ Rotation um eine feste Achse L + eine Spiegelung in der zu L orthogonal stehenden Ebene $L^\perp$

Beweis: 1) Charakteristisches Polynom von σ

$$\chi(t) = \det(It - \sigma)$$

2) Eigenwerte λ von $\chi(t)$

- Sei e ein Eigenvektor von σ mit Eigenwert λ, d.h. $e \neq 0$, $\sigma(e) = \lambda e$
- Es gilt dann auch. $|\sigma(e)| = |\lambda| \cdot |e|$

$\Rightarrow$ Bei einer orthogonalen Transf. wird die Norm durch ein Skalar nicht verändert $\Rightarrow$ $|\sigma(e)| = |e|$

$\Rightarrow |\lambda| = 1 \quad \Rightarrow \lambda = 1$ oder $\lambda = -1$

Fall 1: $\det(\sigma) = 1$: 1) $\chi(0) = \det(I \cdot 0 - \sigma) = \det(-\sigma) = -\det(\sigma) = -1$

2) $t \to \infty \Rightarrow \chi(t) \to \infty$

$\overset{1),2)}{\Rightarrow}$ Im Intervall $(0, \infty)$ muss mind. 1 NST existieren

$\Rightarrow$ 1 ist ein Eigenwert $\Rightarrow \exists$ Eigenvektor $e \neq 0 : \sigma(e) = e$ ⊛

- Betrachte eine Linie L mit EW 1, die durch e & den Ursprung verläuft

⊛ $\Rightarrow e$ ist invariant unter $\sigma \Rightarrow L$ auch invariant $\Rightarrow \sigma$ fixiert L

$\Rightarrow \sigma$ wirkt auf $L^{\perp}$ wie eine Rotation mit det 1

Fall 2: $\det(\sigma) = -1$ 1) $\chi(0) = \det(I \cdot 0 - \sigma) = \det(-\sigma) = -\det(\sigma) = -(-1) = +1$

2) $t \to -\infty \Rightarrow \chi(t) \to -\infty$

$\Rightarrow$ ZWS: mind. 1 NST in $(-\infty, 0)$ $\Rightarrow -1$ ist eine Wurzel / ein EW von $\chi(t)$

$\Rightarrow \exists$ Eigenvektor $e \neq 0$ mit $\sigma(e) = -e$

$\Rightarrow \exists$ Linie L mit EW -1 & σ wirkt auf $L^{\perp}$ wie eine Transf. mit $\det = 1$

$\Rightarrow$ Kombination aus Drehung & Spiegelung

∎

4.13 Lemma

Sei E ein VR, $\dim(E) < \infty$, $\sigma: E \to E$ ein Endomorphismus

Dann gilt: Es gibt einen Unterraum $R \subset E$ mit $\dim(R) = 1$ oder $\dim(R) = 2$, der stabil unter σ ist.

4.14 Satz: Zerlegung eines euklidischen Vektorraums

Sei E ein euklidischer Vektorraum mit $\dim(E) = n$ & σ eine orthogonale Transformation von E. Dann gilt:

E kann in eine orthogonale Summe von Geraden (= 1-dimensionale Unterräume) & Ebenen (= 2-dim. UR) zerlegt werden, die stabil unter σ sind.

Beweis:

Induktion über $\dim(E) = n$

IA: $n = 1$ $\Rightarrow \dim(E) = 1$

$\Rightarrow$ Transformation $\triangleq$ Identität (bei EW 1) oder Spiegelung (bei EW -1)

$\Rightarrow$ E selbst als 1-dim. Raum ist eine unter σ stabile Zerlegung

IV: Angenommen der eukl. VR E mit $\dim(E) = n-1$ kann in eine orthogonale Summe von 1- oder 2-dimensionalen Unterräumen zerlegt werden.

IS: Lemma 4.13 $\Rightarrow$ $\exists$ Unterraum $R \leq E$ mit $\dim(R) = 1$ oder 2, der stabil unter σ ist
$\Rightarrow$ d.h. $\sigma(R) \leq R$

Sei $R^\perp$ der orthogonale Komplementraum von R

$\Rightarrow R^\perp$ unter σ stabil, d.h. $\sigma(R^\perp) \leq R^\perp$

Da $R^\perp \oplus R = E$ $\Rightarrow$ $\dim(R^\perp) = \dim(E) - \dim(R) = \begin{matrix} n-1 \\ n-2 \end{matrix}$ oder

$\Rightarrow$ IV gilt für $R^\perp$ $\Rightarrow$ $R^\perp$ kann als orthog. Summe von 1-oder 2-dimensionalen UVR zerlegt werden

$\Rightarrow$ IV gilt auch für E, da $E = R \oplus R^\perp$ $\wedge$ R & $R^\perp$ stabil unter σ sind $\Rightarrow$ Beh.

$\blacksquare$