

Vortrag Reguläre Flächen und Riemann-Metriken

PS Hyperbolische Geometrie

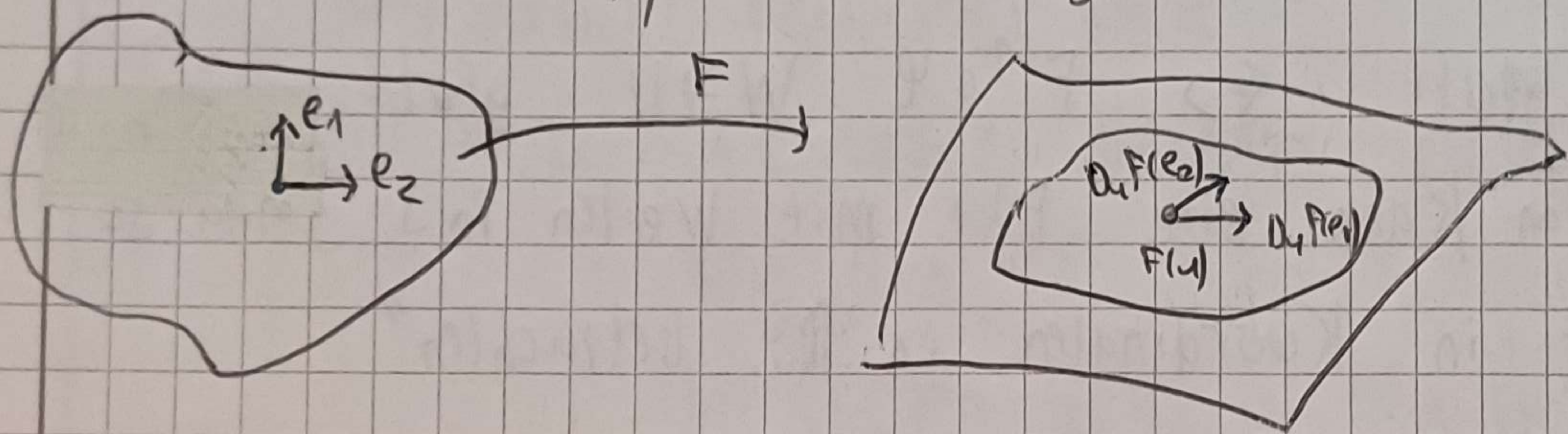
* Def 1.1: Sei $S \subset \mathbb{R}^3$, wir nennen S reguläre Fläche, falls
 $\forall p \in S: \exists V \ni p$ offen und $U \subset \mathbb{R}^2$ offen
und $F: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ glatt:

(i) $F(U) = S \cap V$ und $F: U \rightarrow S \cap V$ ist

Homöomorphismus (bii + stetig + F^{-1} stetig)

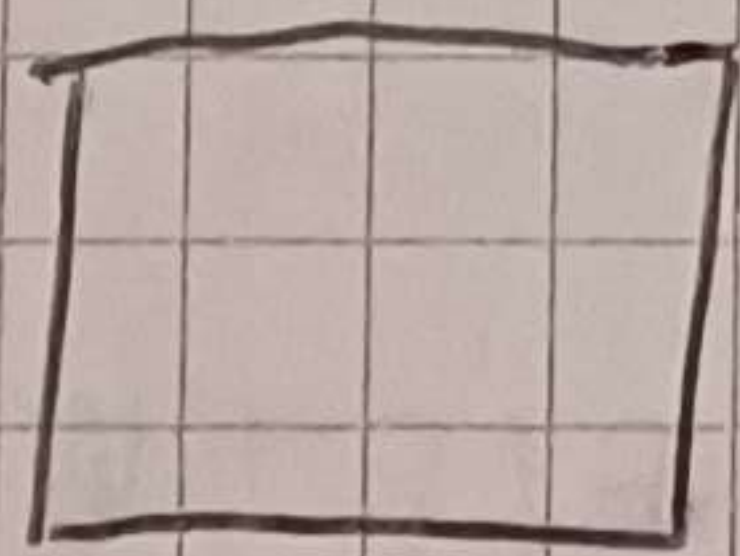
(ii) $D_u F$ hat Rang 2 $\forall u \in U$

Anschaulich bedeutet (i), dass S höchstens 2-dim aussieht und (ii), dass S genau 2-dim aussieht.



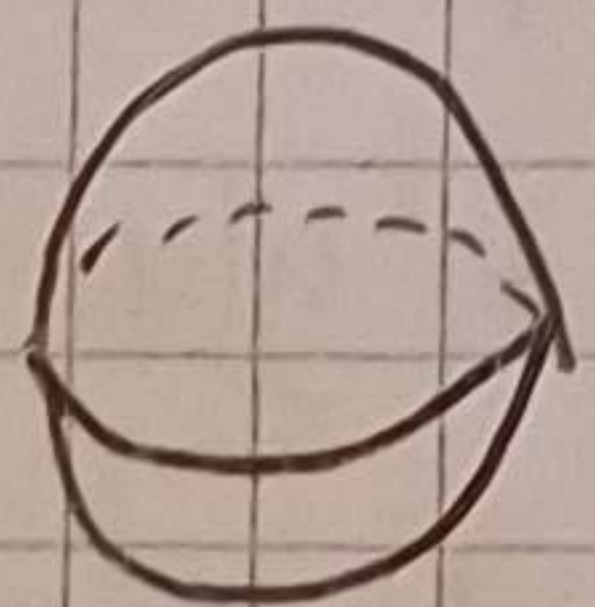
Das Tripel (U, F, U) nennt man lokale Parametrisierung.

Bsp 1.2: 1) Affine Ebenen in $\mathbb{R}^3$ $\{p + u_1 X + u_2 Y\}$



2) Funktionsgraphen (glatt)

3)



$\mathbb{R}^3$ für $z \geq 0$: Graph von $\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$

4) Ellipsoide, Drehtori

Prop 1.3: $F: V \rightarrow \mathbb{R}^3$ $V \subset \mathbb{R}^3$ offen glatt mit $\nabla F \neq 0$, dann:

$S := \{ (x, y, z) \mid F(x, y, z) = 0 \}$ ist reg Fläche

Beweis: $\nabla F \neq 0$ (impl. Pkt) $\Rightarrow \exists U \ni (x_0, y_0)$ und

$g: U \rightarrow \mathbb{R}: S \cap V = \{ (x, y, g(x, y)) \}$

und $F: (x, y) \mapsto (x, y, g(x, y))$ ist lok Parametr.

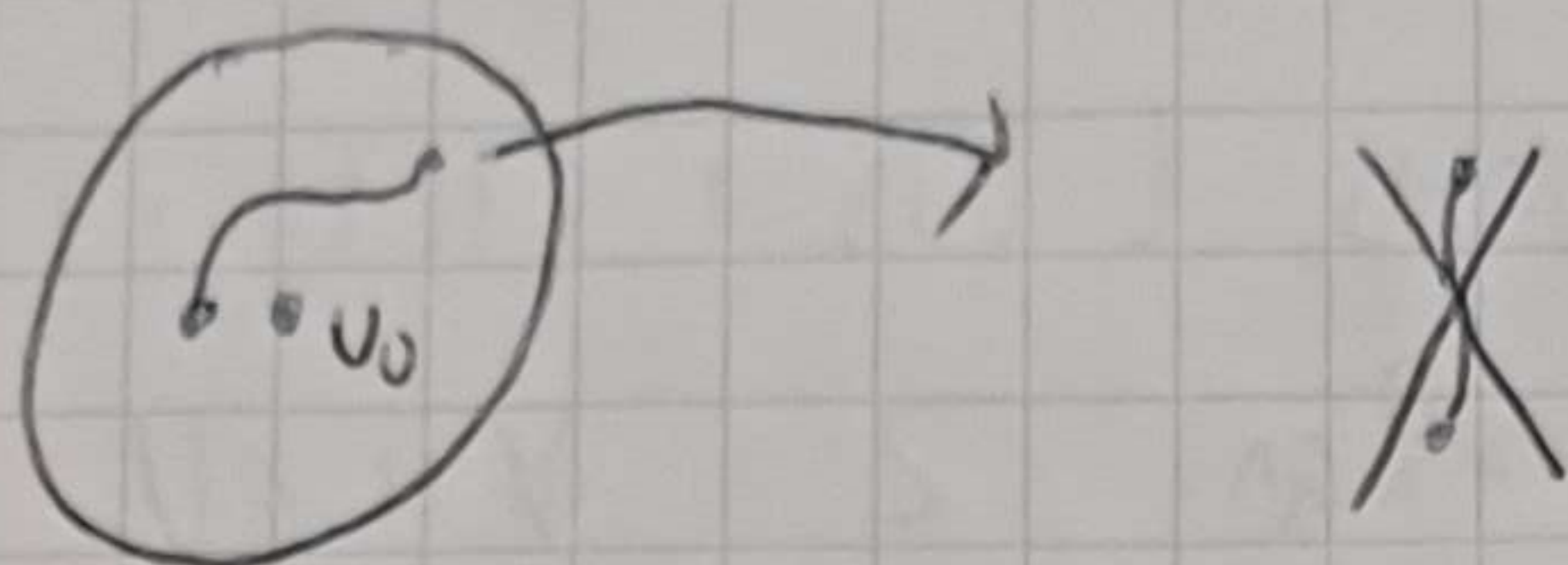
Bsp 1.4: Ein Kegel: $\{x^2 + y^2 = z^2\}$



Ist nach der Vorherigen

Prop eine reg Fläche, wenn man $(0,0,0)$ ausnimmt, wenn man aber $(0,0,0)$ zulässt, ist es keine mehr:

Das Objekt ist eindim in $(0,0,0)$:



* Prop 1.5: S reg Fläche, (U, F, V) Parametr, $\psi: W \rightarrow \mathbb{R}^3$, $W \subset \mathbb{R}^n$ mit $\psi(W) \subset S \cap V$, dann:

ψ glatt $\Leftrightarrow F^{-1} \circ \psi: W \rightarrow U$ glatt

„Man kann eine Pkt mit Werten in S genau so gut in Koordinaten in $\mathbb{R}^2$ betrachten“

Beweis: „ $\Leftarrow$ “ klar da $\psi = F \circ F^{-1} \circ \psi$

„ $\Rightarrow$ “ Definiere $G: U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3: G(u_1, u_2, t) = (x(u_1, u_2), y(u_1, u_2), z(u_1, u_2) + t)$
 $\in \frac{\partial(x,y)}{\partial(u_1, u_2)}$ invertierbar

$$\Rightarrow D(F^{-1}(\psi(p)), 0) G = \begin{pmatrix} \partial F(F^{-1}(\psi(p))) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(3, \mathbb{R})$$

UMS
 $\leadsto$ offene Umgebungen $U_1, V_1: G|_{U_1}: U_1 \rightarrow V_1$

Diffeomorphismus (bis + glatt + G^{-1} glatt)

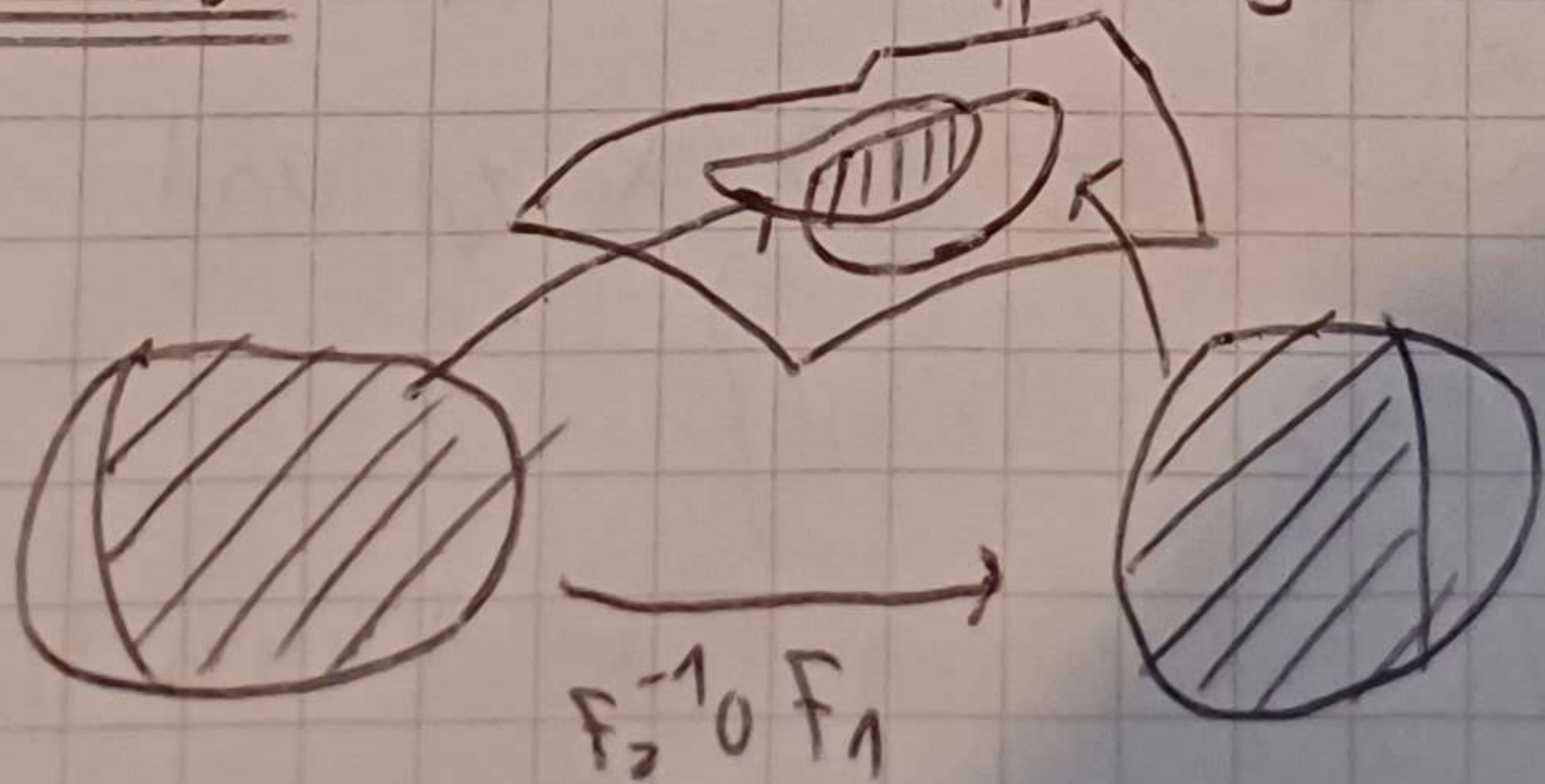
Setze nun $W_1 = \psi^{-1}(V_1)$ und wir erhalten für

$$p' \in W_1: G^{-1} \circ \psi(p') = (F^{-1} \circ \psi(p'), 0)$$

$\Rightarrow F^{-1} \circ \psi$ glatt

qed

* Kor 1.6: Für $V_1 \cap V_2$ ist $F_2^{-1} \circ F_1$ glatt



$\leadsto$ reg Flächen sind 2-dim Mannigfaltigkeiten

* Prop 1.7: Sei S reg Fläche, $f: S \rightarrow \mathbb{R}^n$, $p \in S$, dann sind äquivalent:

- (i) $\exists V \ni p$ offen und eine Fortsetzung $\tilde{f}$ auf V , die glatt um p ist
- (ii) $\exists$ lok. Parametr. (U, F, V) mit $p \in V: f \circ F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist glatt um $F^{-1}(p)$
- (iii) $\forall$ lok. Parametr. (U, F, V) mit $p \in V: f \circ F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist glatt um $F^{-1}(p)$

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (iii), da $f \circ F = \tilde{f} \circ F$ glatt ist

(iii) $\Rightarrow$ (i) trivialer Weise

(ii) $\Rightarrow$ (i) Betrachte wieder $G(u_1, u_2, t)$ wie im Bew von 1.5

Wir setzen $g(u_1, u_2, t) = f \circ F(u_1, u_2) = f \circ G(u_1, u_2, 0)$

und $\tilde{f} = g \circ G^{-1}$ ist damit glatt qed

Def 1.8: 1) Er füllt f die 3 äquivalenten Bedingungen aus 1.7, nennen wir f glatt nahe p

2) Seien S_1, S_2 reg Flächen, $f: S_1 \rightarrow S_2$ heißt glatt nahe p , falls $\exists (U_1, F_1, V_1), (U_2, F_2, V_2)$ um p bzw $f(p)$:
 $F_2^{-1} \circ f \circ F_1$ glatt um $F_1^{-1}(p)$ ist
Also wenn f ausgedrückt in Koordinaten glatt ist

3) $f: S_1 \rightarrow S_2$ heißt Diffeomorphismus, falls f bijektiv ist und f^{-1} auch glatt ist.
Existiert ein solches f , heißen S_1 und S_2 diffeomorph

Bsp 1.9: 1) $S = \{ (x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \}$ und die Sphäre S^2 sind diffeomorph durch
 $f: S \rightarrow S^2: (x, y, z) \mapsto (\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c})$

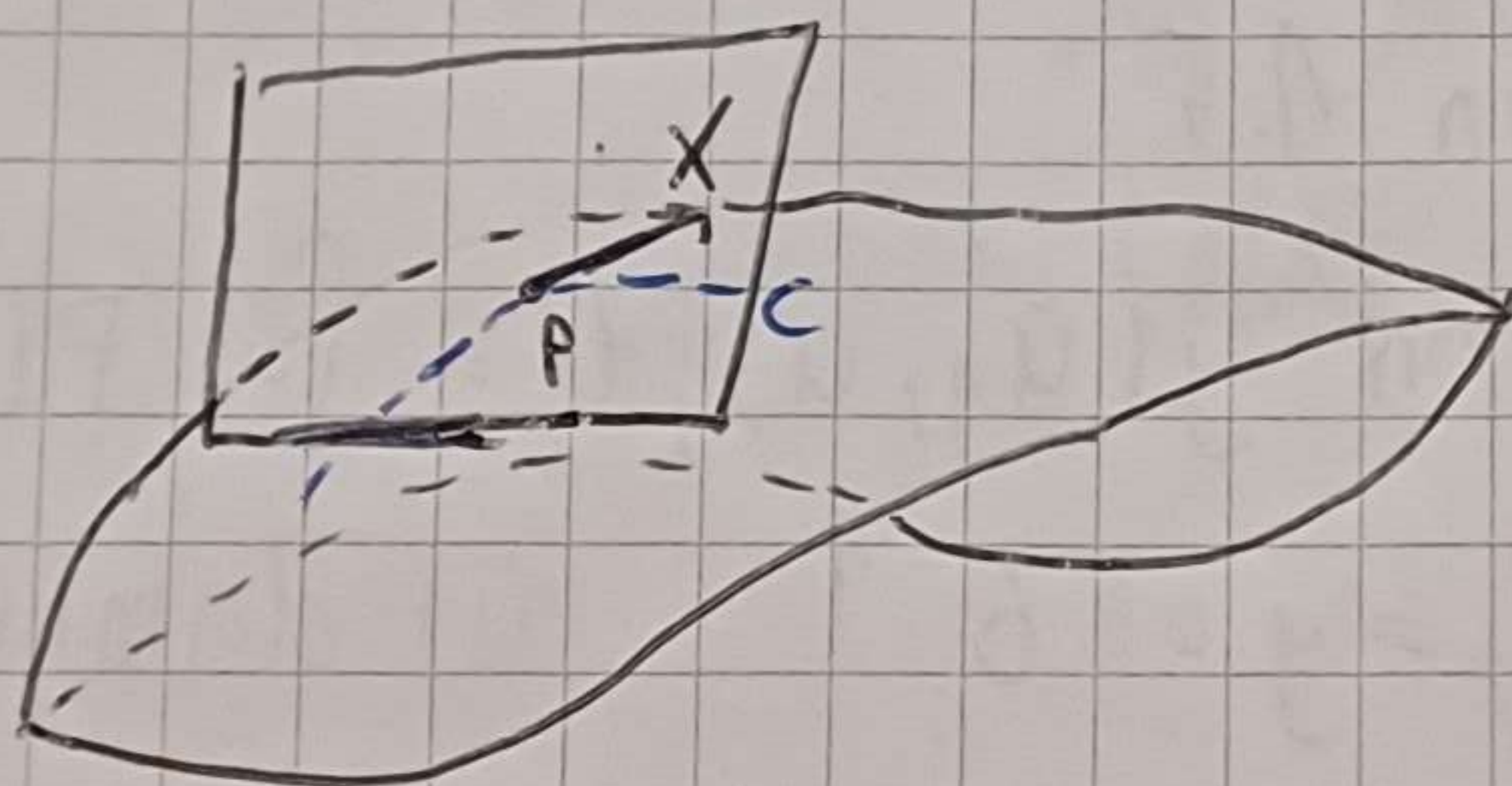
2) Der Graph einer glatten Fkt $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und der x, y -Ebene sind off. diffeomorph

2 Die Tangentialebene

* Def 2.1: Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ reg. Fläche, $p \in S$

$$T_p S = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \varepsilon > 0 \text{ und glatte parametr. Kurve } c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S \text{ mit } c(0) = p \text{ und } \dot{c}(0) = X \right\}$$

heißt die Tangentialebene von S in p



* Prp 2.2: Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ reg. Fläche, $p \in S$, (U, F, V) lok. Parametr. von S um p , $u_0 := F^{-1}(p) \in U$

Dann:

$$T_p S = \text{Im } D_{u_0} F$$

Die Tangentialvektoren zeigen also genau die Richtung an, in die S sich windet, wenn man sich in U bewegt.

Beweis: „ $\supset$ “ Sei $X = D_{u_0} F \cdot Y$, setze $c(t) = F(u_0 + tY)$

und damit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = D_{u_0} F \cdot Y = X$

„ $\subset$ “ Evtl. nach Verkleinerung verläuft c ganz in V

Gemäß 1.5 ist $u := F^{-1} \circ c$ glatte parametr. Kurve

Setze $Y = \dot{u}(0) \in \mathbb{R}^2$: $D_{u_0} F \cdot Y = \frac{d}{dt} F \circ u \big|_{t=0} = \frac{d}{dt} c \big|_{t=0} = X$
 qed

* Bsp 2.3: Für die Sphäre gilt:

$$T_p S = \langle p \rangle^\perp, \text{ da } \text{bspw für}$$

$$F: (x,y) \mapsto (x,y, \sqrt{1-(x^2+y^2)}) \text{ ist}$$

$$D_{(x,y)} F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{-x}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}} & \frac{-y}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}} \end{pmatrix}$$

Also stehen $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)$ und $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$ orthogonal auf $(x,y, F(x,y))$

Wir sehen, dass stets gilt: $T_p S = \langle \frac{\partial F}{\partial u_1}(F^{-1}(p)), \frac{\partial F}{\partial u_2}(F^{-1}(p)) \rangle$

Def 2.4: S_1, S_2 reg Flächen, $f: S_1 \rightarrow S_2$ glatt, $p \in S_1$

$$d_p f: T_p S_1 \rightarrow T_{f(p)} S_2$$

ist definiert durch:

Für $X \in T_p S_1$ finden c mit $c(0)=X$ und $c'(0)=p$ und dann:

$$d_p f(X) = \frac{d}{dt} (f \circ c) \big|_{t=0} \in T_{f(p)} S_2$$

Prop 2.5: $d_p f$ ist wohldefiniert und eine lineare Abb

Beweis: Sei $\tilde{f}$ die glatte Fortsetzung von f aus 1.7

$$\text{Dann ist } \frac{d}{dt} f \circ c \big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \tilde{f} \circ c \big|_{t=0} = D_p \tilde{f} \cdot X$$

Und für 2 unterschiedliche $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2$ gilt:

$$\tilde{f}_1 \circ f = \tilde{f}_2 \circ f \Rightarrow D \tilde{f}_1 \circ f(u) = (D_p \tilde{f}_1 \cdot DF(u)) = (D_p \tilde{f}_2 \cdot DF(u))$$

$$\Rightarrow D_p \tilde{f}_1 \text{ und } D_p \tilde{f}_2 \text{ stimmen auf } \frac{\partial F}{\partial u_1} \text{ und } \frac{\partial F}{\partial u_2}$$

$$\text{und damit auch auf } T_p S = \langle \frac{\partial F}{\partial u_1}, \frac{\partial F}{\partial u_2} \rangle \text{ überein.}$$

$\rightarrow$ Unabhängigkeit von c und linear qed

Hier war es praktisch für den Beweis, dass reg Flächen

stets im $\mathbb{R}^3$ eingebettet sind.

Def 2.6: Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reg Fläche, ein Vektorfeld auf S ist eine Abb

$$V: S \rightarrow \mathbb{R}^3: V(p) \in T_p S \quad \forall p \in S$$

Je nach Eigenschaften von V spricht man von stetigen, diffbaren, glatten, ... Vektorfeldern

Def 2.7: Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ reg Fläche, ein Normalenfeld auf S ist eine Abb

$$N: S \rightarrow \mathbb{R}^3: N(p) \perp T_p S \quad \forall p \in S$$

Falls zusätzlich $\|N(p)\|=1$ gilt, heißt N Einheitsnormalenfeld.

Wieder können N bekannte Eigenschaften zugeschrieben werden.

3 Riemannsche Metriken

Wir wollen Geometrie auf regulären Flächen betreiben. Dabei wollen wir diese nicht von außen (also im $\mathbb{R}^3$) betrachten, sondern aus der 2-dimensionalen Perspektive. Dafür ist es sehr praktisch, Längen und Winkel zwischen Tangentialvektoren definieren zu können. Man spricht von innerer Geometrie

* Def 3.1: $S \subset \mathbb{R}^3$ reg Fläche. Eine Riemannsche Metrik g auf S ordnet jedem Punkt $p \in S$ ein eukl Skalarprodukt auf $T_p S$ zu, sodass:

$$\forall (U, F, V):$$

$$g_{ij}: U \rightarrow \mathbb{R}: u \mapsto g_{F(u)} \left(\frac{\partial F}{\partial u_i}(u), \frac{\partial F}{\partial u_j}(u) \right)$$

glatt sind, dh dass die Abb auf die Gramsche Matrix bzgl der Basis $\frac{\partial F}{\partial u_1}(u), \frac{\partial F}{\partial u_2}(u)$ von $T_{F(u)} S$ und $g_{F(u)}$ glatt ist.

Beachte jedoch, dass eine Riemannsche Metrik auf S keine Metrik auf S im Sinne der metr. Räume ist.

* Def 3.2: Die erste Fundamentalform ordnet jedem Punkt einer regulären Flächen die Einschränkung des Standardskalarprodukts auf dessen Tangentialebene zu, also

$$g_{ij}(u) = \left\langle \frac{\partial F}{\partial u_i}(u), \frac{\partial F}{\partial u_j}(u) \right\rangle$$

Es handelt sich um eine Verkettung von glatten Abb und damit um eine Riemannsche Metrik.

Sie wird unser Haupt-Beispiel sein

* Lem 3.3: Sei g eine Riemannsche Metrik auf S und (U, F, U) , $(\tilde{U}, \tilde{F}, \tilde{U})$ zwei Parametrisierungen mit g_{ij} und $\tilde{g}_{ij}$. Sei $\varphi := \tilde{F}^{-1} \circ F$, dann:

$$(g_{ij}(u))_{ij} = (D_u \varphi)^T \cdot (\tilde{g}_{kl}(\varphi(u)))_{kl} \cdot (D_u \varphi)$$

Beweis: Sei $p = F(u) = \tilde{F}(\varphi(u))$

Dann:

$$\begin{aligned} g_{ij}(u) &= g_p \left(\frac{\partial F}{\partial u_i}(u), \frac{\partial F}{\partial u_j}(u) \right) = g_p \left(\frac{\partial \tilde{F} \circ \varphi}{\partial u_i}(u), \frac{\partial \tilde{F} \circ \varphi}{\partial u_j}(u) \right) \\ &= g_p \left(\sum_k \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{u}_k}(\varphi(u)) \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial u_i}(u), \sum_l \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{u}_l}(\varphi(u)) \cdot \frac{\partial \varphi_l}{\partial u_j}(u) \right) \\ &= \sum_{kl} \frac{\partial p^k}{\partial u_i}(u) \frac{\partial \varphi^l}{\partial u_j}(u) \cdot \tilde{g}_{kl}(\varphi(u)) \end{aligned}$$

In Matrix Schreibweise ergibt sich die Beh

ged

Bsp 3.4: Sei $\{p_0 + u_1 X + u_2 Y\}$ eine affine Ebene

aufgespannt von X und Y , dann ergibt sich direkt, dass für die erste Fundamentalf orm gilt:

$$g_{11}(u) = \langle X, X \rangle \quad g_{12}(u) = g_{21}(u) = \langle X, Y \rangle$$

und $g_{22}(u) = \langle Y, Y \rangle \quad \forall u \in U$

* Def 3.5: Wir definieren für eine Riemannsche g auf S :

$$\Gamma_{ij}^k := \frac{1}{2} \sum_{m=1}^2 \left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_m} \right) g^{mk}$$

die Christoffel-Symbole, wobei g^{mk} den m - k -ten Eintrag der Inversen zu $(g_{ij})_{ij}$ bezeichnet.

Und für Vektorfelder $V = \sum_i v^i \frac{\partial F}{\partial u_i}$ $W = \sum_j w^j \frac{\partial F}{\partial u_j}$

$$\nabla_W V(F(u)) := \sum_k \left(d_u V^k \left(\frac{w^1(u)}{w^2(u)} \right) + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(u) v^i(u) w^j(u) \right) \frac{\partial F}{\partial u_k}(u)$$

die kovariante Ableitung von V nach W .

* Bsp 3.6: Für die erste Fundamentalf orm definieren wir zuerst die kovariante Ableitung eines Vektorfeldes längs einer Kurve:

$$\frac{\nabla}{dt} V(t) := \Pi_{c(t)} (\dot{V}(t)) \triangleq \nabla_{\dot{c}} V(F^{-1}(c(t)))$$

mit $\Pi_p(X) = X - \langle X, N(p) \rangle N(p)$, wobei $N(p)$ ein normierter Normalenvektor an $\bar{T}_p S$ ist.

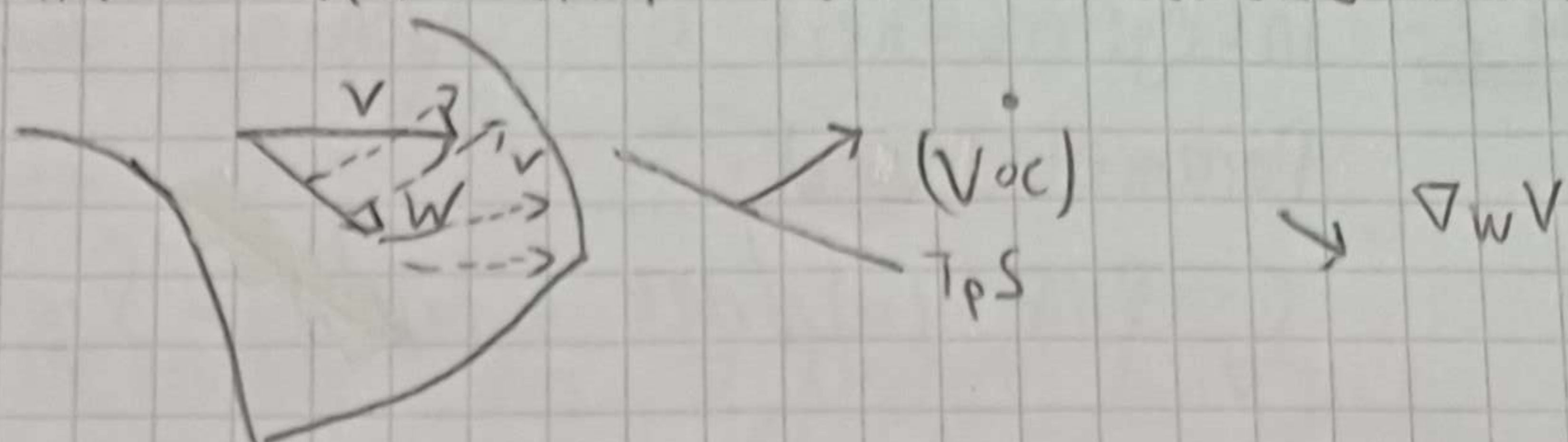
Mit V ist also auch $\frac{\nabla}{dt} V(t)$ ein Vektorfeld an S längs c

Setzt definieren wir

$$\nabla_W V := \frac{\nabla}{dt} (V \circ c)(t) \quad \text{für } c \text{ mit}$$

$c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = W(p)$

Es lässt sich nachrechnen, dass dies genau mit oben definiertem übereinstimmt.



Wir nehmen also den Teil der Ableitung, der tangential an die Fläche liegt.

Def 3.7: Sei v ein Vektorfeld auf S , $p \in S$
 $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ glatt, dann heißt
 $\partial_v f: S \rightarrow \mathbb{R}: p \mapsto d_p f(v(p)) = \langle \nabla \tilde{f}(p), v(p) \rangle$
 Richtungsableitung von f nach v

Bsp 3.8: Da die erste Fundamentalform nicht ausgearbeitet ist, existiert $\forall p \in S$ genau ein
 $v(p) \in T_p S: d_p f(X) = \langle v(p), X \rangle \quad \forall X \in T_p S$
 Dies nennt man das Gradientenvektorfeld,
 da dann natürlich gilt: $v(p) = \nabla \tilde{f}(p)$
 Die Richtungsableitung nach diesem ist stets
 ≥ 0 , der Gradient gibt die Richtung des
 stärksten Anstiegs an

4 Flächeninhalt

* Def 4.1: Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ reg Fläche, (U, F, V) lok. Parametr.
 $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f|_{S-V} \equiv 0$, g Riemann-Metrik
 auf S , dann heißt f integrierbar, falls die Fkt:
 $U \rightarrow \mathbb{R}: u \mapsto f(F(u)) \cdot \sqrt{\det(g_{ij}(u))}$
 integrierbar ist und wir setzen
 $\int_S f dA = \int_U f(F(u)) \sqrt{\det g_{ij}(u)} du$

$dA = \sqrt{\det(g_{ij}(u))} du$ heißt Flächenelement.

* Lem 4.2: Integrierbarkeit ist unabhängig von der lokalen Parametr. und:

$$\int_U f \circ F(u) \sqrt{\det g_{ij}(u)} du = \int_{\tilde{U}} f \circ F(u) \sqrt{\det \tilde{g}_{ij}(u)} d\tilde{u}$$

Beweis: Nach 3.3 gilt: $(g_{ij}) = (D\varphi)^T (\tilde{g}_{ij} \circ \varphi) (D\varphi)$
Also: $\det g_{ij} = \det (\tilde{g}_{ij} \circ \varphi) (\det D\varphi)^2$
und somit $\sqrt{\det g_{ij}} = \sqrt{\det \tilde{g}_{ij} \circ \varphi} \det D\varphi$
und der Rest folgt mit der Transformationsformel, da φ Diffeomorphismus ist.
qed

Bsp 4.3: Sei S die x - y -Ebene dann ergibt sich mit den zwei Parametrisierungen

$$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3: (x, y) \mapsto (x, y, 0) \quad \text{und}$$

$$\tilde{F}: (0, \infty) \times (0, 2\pi) : (r, \varphi) \mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi, 0)$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x) dx = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cdot r dr d\varphi$$

die bekannte Integration durch Polarkoordinaten.

* Def 4.4: Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ reg Fläche, $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ heißt integrierbar, falls $f = f_1 + \dots + f_k$, wobei die f_i jeweils außerhalb von Koordinatenumgebungen verschwinden. Wir setzen:

$$\int_S f dA = \sum_{i=1}^k \int_S f_i dA$$

* Def 4.5: Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ reg Fläche, falls $f \equiv 1$ integrierbar ist so ist der Flächeninhalt von S :

$$A[S] := \int_S dA$$

Bsp 4.6: 1) Die x - y -Ebene hat keinen endlichen Flächeninhalt, da

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy = \infty$$

2) Betrachte den Zylinder der Höhe z mit Radius 1 und die erste Fundamentalform:

$S = S^1 \times (0, z)$ mit der Parameter:

$$F: (0, 2\pi) \times (0, z) \rightarrow S: (\varphi, r) \mapsto (\sin \varphi, \cos \varphi, r)$$

$$\text{Dann ist } g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

und somit:

$$A[S] = \int_0^{2\pi} \int_0^z 1 \cdot r \, dr \, d\varphi = \int_0^{2\pi} z = 4\pi$$

5 Geodätische

Wir wollen uns nun mithilfe riemannscher Metriken den Längen von Kurven in regulären Flächen widmen und insbesondere die kürzeste Verbindungsstrecke zwischen zwei Punkten in einer regulären Fläche erforschen.

* Def 5.1: Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ reg Fläche mit Riemannscher Metrik g und $c: I \rightarrow S$ parametr. Kurve. Die Länge von c ist definiert durch:

$$L[c] := \int_I \sqrt{g_{c(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t))} \, dt$$

Def 5.2: Die Energie der Kurve ist definiert als:

$$E[c] := \frac{1}{2} \int_I g_{c(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t)) \, dt$$

Bem 5.3: Im Fall der ersten Fundamentalform entspricht dies natürlich unserer bisherigen Definition:

$$\frac{1}{2} \int_1 \| \dot{c}(t) \|^2 dt$$

Ansonsten besteht kein Zusammenhang.

Lem 5.4: Sei (S, g) reg Fläche + Riemann-Metrik, $c: [a, b] \rightarrow S$ parametr. Kurve, dann:

$$L[c]^2 \leq 2(b-a) E[c]$$

und Gleichheit gilt, wenn

$$g_{c(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t)) = \text{const.}$$

Beweis: Setze $f(t) = \sqrt{g_{c(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t))}$ und beachte das Skalarprodukt $\langle f, g \rangle = \int_a^b f \cdot g \, dt$ auf den stetigen

Funktionen von $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt:

$$\begin{aligned} L[c]^2 &= \left(\int_a^b f(t) \cdot 1 \, dt \right)^2 \\ &\leq \int_a^b f^2(t) \, dt \int_a^b 1 \, dt = 2 \cdot E[c] \cdot (b-a) \end{aligned}$$

und Gleichheit gilt genau dann wenn 1 und f lin. abh., d.h. $f = \text{const.}$

Wir können festhalten, dass c minimale Energie genau dann hat, wenn sie minimale Länge hat

und $g_{c(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t)) = \text{const.}$

Im Fall der ersten Fundamentalform heißt das, dass der Geschwindigkeitsvektor an die Kurve konstante Norm hat.

Satz 5.5: Seien S reg Fläche mit Riemann-Metrik g und $p, q \in S$. Ist $c: [a, b] \rightarrow S$ eine Verbindungskurve von p nach q mit minimaler Energie, so gilt:

$$\frac{\nabla}{dt} \dot{c}(t) = 0 \quad \forall t \in [a, b]$$

Die kovariante Ableitung von $\dot{c}$ entlang c ist 0.

Anschaulich bedeutet das, dass der tangentielle Anteil vom Geschwindigkeitsvektor konstant ist. Die Kurve wechselt nicht „innerhalb der Fläche“ die Richtung.

Beweis: Der Beweis ist sehr langwierig. Deswegen wird an dieser Stelle auf Par 5.189-192 verwiesen.

* Def 5.6: Sei S reg Fläche, I Intervall, $c: I \rightarrow S$ heißt Geodätische, falls

$$\frac{\nabla}{dt} \dot{c}(t) = 0 \quad \forall t \in I$$

Bsp 5.7: Betrachte die Sphäre mit der ersten Fundamentalform:

Die Breitenkreise sind $c(t) = (\cos(t)\cos(\theta), \sin(t)\cos(\theta), \sin(\theta))$ und damit:

$$\ddot{c}(t) = (-\cos(\theta)\cos(t), -\cos(\theta)\sin(t), 0)$$

Dieser steht nur genau dann senkrecht auf $T_{c(t)}S^2$, wenn $\theta = 0$.

$$\Rightarrow \frac{\nabla}{dt} \dot{c}(t) = 0 \Leftrightarrow \theta = 0 \Leftrightarrow c \text{ ist der Äquator}$$

Lem 5.8: Für eine Geodätische gilt:

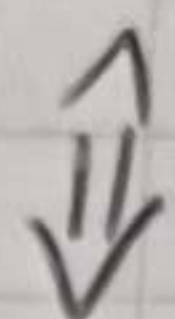
$g_{c(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t))$ ist konstant

Beweis: Nach einer Differentiationsregel für Vektorfelder gilt:

$$\frac{d}{dt} g_{c(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t)) = g_{c(t)}\left(\frac{\nabla}{dt} \dot{c}(t), \dot{c}(t)\right) + g_{c(t)}\left(\dot{c}(t), \frac{\nabla}{dt} \dot{c}(t)\right) = 0$$

Wir wissen also:

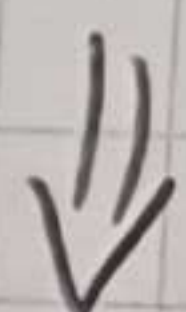
energieminimierend



* Längenminimierend $+ g_{c(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t)) = \text{const.}$



Geodätische



$g_{c(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t))$

Die Umkehrungen gelten jeweils nicht:

In der Sphäre gilt, dass alle Breitenkreise proportional zur Bogenlänge parametr. sind, aber außer dem Äquator ist keiner Geodätische. Für einen bel. Punkt auf dem Äquator ist natürlich die konstante Kurve die kürzeste Verbindungskurve, nicht der Äquator.

Bem 5.9: Geodätische sind durch die DGL

$$0 = \frac{\nabla}{dt} \dot{c}(t) \quad \text{gegeben.}$$

Nach der Theorie der DGL lässt sich diese lösen. Für ein $\dot{c}(t_0)$ ist die Lösung sogar eindeutig.

6. Anwendung auf die hyperbolische Ebene und S^2

* Def 6.1: Wir definieren die hyperbolische Ebene wie folgt:

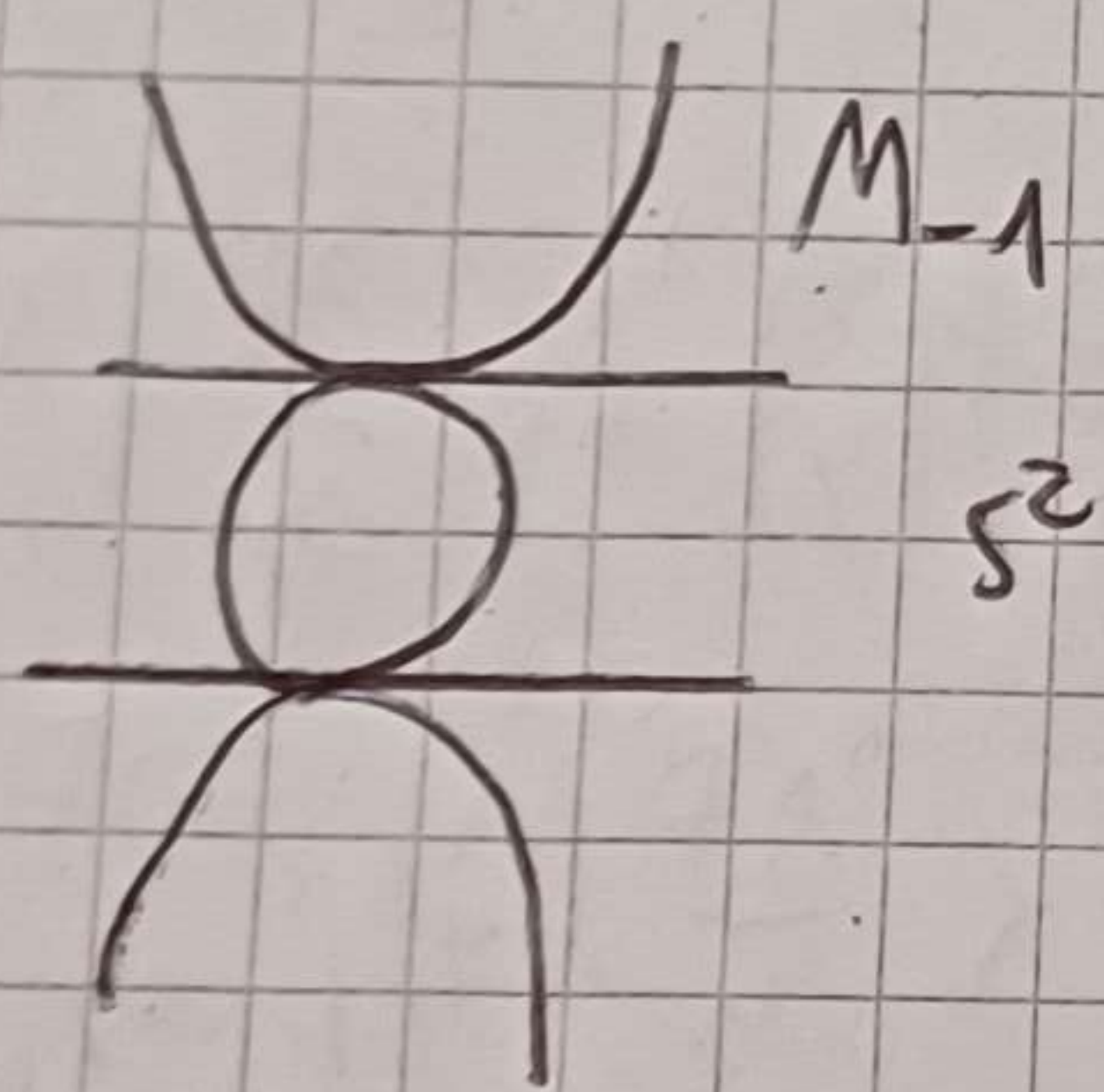
$$\hat{M}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid -x^2 - y^2 + z^2 = 1 \right\}$$

dies entspricht genau unserer bisherigen Definition einer Einheitskugel im Minkowski-Raum der dim 3, dh in einem Raum mit Sylvester-Typ $(-2, 1)$.

Bem 6.2: Wir können allgemeiner M_k definieren als:

$$M_k = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid k(x^2 + y^2) + z^2 = 1 \right\}$$

Dann ist M_0 die Vereinigung von $\{z=1\}$ und $\{z=-1\}$
und $M_1 = S^2$



Da wir im Folgenden der Übersichtlichkeit halber nur eine Schale betrachten wollen, definieren wir:

$$M_1 = \hat{M}_{-1} \cap \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0 \right\}$$

* Lem 6.3: Die einfachste Parametrisierung von M_1 ist:

$$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow M_1: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \left(x, y, \sqrt{1+x^2+y^2} \right)^T$$

und M_1 ist reg Fläche.

Bew: Dies folgt da $\sqrt{1+x^2+y^2}$ glatt ist und M_1 der Graph dieser ist

* Def 6.4: Auf der Tangentialebene von M_1 definieren wir die Einschränkung des sym Produkts:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \right\rangle_{-1} = xx' + yy' - zz'$$

* Lem 6.5: Bei eben definiertem handelt es sich um eine Riemannsche Metrik auf M_1

Bew: Da $\langle \cdot, \cdot \rangle_{-1}$ auf $\mathbb{R}^3$ nicht euklidisch ist, müssen wir zunächst beweisen, dass die Einschränkung auf die Tangentialebene tatsächlich euklidisch ist. Wir benutzen dafür die bereits angeführte Parametr. und berechnen:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ x \\ \sqrt{1+x^2+y^2} \end{pmatrix} \quad \frac{\partial F}{\partial y} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ y \\ \sqrt{1+x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

und dann:

$$\begin{aligned} & \left\langle \lambda \frac{\partial F}{\partial x} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mu \frac{\partial F}{\partial y} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \lambda \frac{\partial F}{\partial x} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mu \frac{\partial F}{\partial y} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle_{-1} \\ &= \lambda^2 \left\langle \frac{\partial F}{\partial x} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \frac{\partial F}{\partial x} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle_{-1} + 2\lambda\mu \left\langle \frac{\partial F}{\partial x} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \frac{\partial F}{\partial y} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle_{-1} + \mu^2 \left\langle \frac{\partial F}{\partial y} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \frac{\partial F}{\partial y} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle_{-1} \\ &= \lambda^2 \left(1 - \frac{x^2}{1+x^2+y^2} \right) + 2\lambda\mu \left(\frac{-xy}{1+x^2+y^2} \right) + \mu^2 \left(1 - \frac{y^2}{1+x^2+y^2} \right) \\ &= \frac{\lambda^2 + \mu^2 + \lambda^2 y^2 + \mu^2 x^2 - 2\lambda\mu}{1+\lambda^2+y^2} = \frac{\lambda^2 + \mu^2 + (\lambda y - \mu x)^2}{1+x^2+y^2} \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{und } = 0 \Leftrightarrow \lambda = \mu = 0$$

und diese Rechnung gilt unabhängig von x und y

Da dann gilt: $\frac{\partial F}{\partial u_i} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\partial F}{\partial x_i} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

offs als Verkettung glatter Abb. glatt ist und dies

mit Lem 3.3 sich auf alle Parameter ausweitet, handelt

es sich tatsächlich um eine Riemannsche Metrik.

qed

* Lem 6.6: Bezeichne $\langle \cdot, \cdot \rangle_\sim$ das umgebende Sym Produkt vom Sylvester-Typ $(-2, 1)$, dann ist $T_p M_1 = p^\perp$ in $\langle \cdot, \cdot \rangle_\sim$. Das heißt unsere bisherige Definition stimmt mit der allgemeinen für reg Flächen überein.

Bew:
$$\left\langle \frac{\partial F}{\partial x} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right), F \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \right\rangle_\sim = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ x \\ \sqrt{1+x^2+y^2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{1+x^2+y^2} \end{pmatrix} \right\rangle_\sim$$
$$= x - x \cdot \frac{\sqrt{1+x^2+y^2}}{\sqrt{1+x^2+y^2}} = 0$$

und eine analoge Rechnung für y liefert:

$p^\perp \supset T_p M_1$ und da die Dimensionen übereinstimmen gilt Gleichheit. qed

Wir wollen uns nun noch einmal genauer der Sphäre ausgestattet mit der ersten Fundamentalform widmen. Dafür führen wir zunächst das Konzept einer zurückgezogenen Riemannschen Metrik an:

Def 6.7: Sei $\phi: S_1 \rightarrow S_2$ ein Diffeomorphismus reg. Flächen, g eine Riemannsche Metrik auf S_2 :

$$(\phi^* g)_p (X, Y) := g_{\phi(p)} (d\phi(X), d\phi(Y))$$

$$\forall p \in S_1 \quad X, Y \in T_p S_1$$

Durch die Glattheit von ϕ folgt sehr schnell, dass

$\phi^* g$ tatsächlich Riemannsche Metrik ist.

Def 6.8: Für reg Flächen S_1 und S_2 mit Riemannschen Metriken g_1 und g_2 , dann heißt

$\phi: S_1 \rightarrow S_2$ glatt, lokale Isometrie, wenn:
 $g_2(d\phi(X), d\phi(Y)) = g_1(X, Y) \quad \forall p \in S_1 \quad X, Y \in T_p S_1$

Bem 6.9: ϕ^*g ist dann natürlich die eindeutige Riemannsche Metrik, sodass ϕ lokale Isometrie ist.

Lokale Isometrien erhalten natürlich alle Größen der inneren Geometrie, im Folgenden wollen wir uns andere Abbildungen anschauen, die diese ggf nur teilweise erhalten.

Es lässt sich zeigen, dass zwei Skalarprodukte auf $\mathbb{R}^2$ genau dann denselben Winkel definieren, wenn sie positive Vielfache voneinander sind. Deswegen.

* Def 6.10: Seien S, S' reg. Flächen mit Riemannschen Metriken g bzw. g' , $\phi: S \rightarrow S'$ lok. Diffeomorphismus hei. Pt Winkeltreu, falls: $\exists c: S \rightarrow \mathbb{R}^+$:

$$\phi^*g' = c \cdot g, \text{ dh.}$$

Der Winkel zwischen $d\phi(x)$ und $d\phi(y)$ ist der gleiche wie zwischen x und y

Wir werden im Folgenden Parametrisierungen der Sphäre betrachten, dabei betrachten wir $\mathbb{R}^2$ mit dem eukl. SP als reg. Fläche und können somit den Begriff der Winkeltreue übernehmen
 ϕ heißt Flächentreu, falls $dA = dA'$

Bsp 6.11: Wir werden uns nun einige (teilweise bereits bekannte) Karten der Sphäre anschauen und sie auf Winkel- bzw. Flächentreue überprüfen.

Dabei sei zuerst noch bemerkt, dass F genau dann Winkel- bzw. Flächentreu ist, wenn F^{-1} Winkel- bzw. Flächentreu ist.

* 1. Länge und Breite

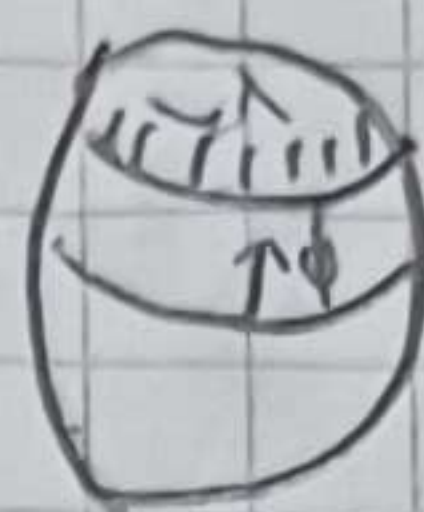
$$F: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3: \begin{pmatrix} \phi \\ \lambda \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \lambda \\ \cos \phi \sin \lambda \\ \sin \phi \end{pmatrix}$$

ϕ entspricht der Breite und λ der Länge

$$G = (g_{ij}(\phi, \lambda))_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 \phi \end{pmatrix} \neq c(\phi, \lambda) \cdot 1/2$$

$$\text{und } dA = \cos \phi \, d\phi \, d\lambda$$

$\Rightarrow$ weder Winkel noch flächentreu

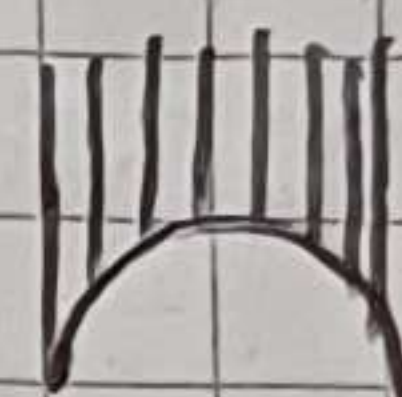


2. Orthographische Projektion

Die Sphäre (oder die Hälfte) wird auf die Tangentialebene in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ projiziert:

$$F: B_1(0) \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{1-x^2-y^2} \end{pmatrix}^T$$

$$G = \frac{1}{1-x^2-y^2} \begin{pmatrix} 1-y^2 & xy \\ xy & 1-x^2 \end{pmatrix}$$



$$\text{und } dA = (1-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}} \, dx \, dy$$

$\Rightarrow$ weder Winkel noch flächentreu

3. Stereographische Projektion

$$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{4+x^2+y^2} \begin{pmatrix} 4x \\ 4y \\ 4-x^2-y^2 \end{pmatrix}$$



$$G = \frac{16}{(4+x^2+y^2)^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

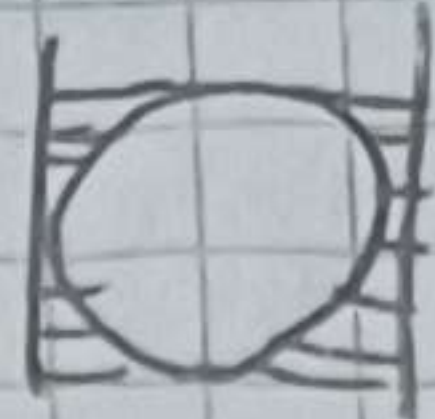
$$dA = \frac{16}{(4+x^2+y^2)^2} \, dx \, dy$$

$\Rightarrow$ Winkel aber nicht flächentreu

4. Zylinder-Projektion

$$F: (0, 2\pi) \times (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \mid x \geq 0 \right\}: \begin{pmatrix} \phi \\ \lambda \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{1-\lambda^2} \cos \phi \\ \sqrt{1-\lambda^2} \sin \phi \\ \lambda \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 1-h^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+h^2} \end{pmatrix}$$

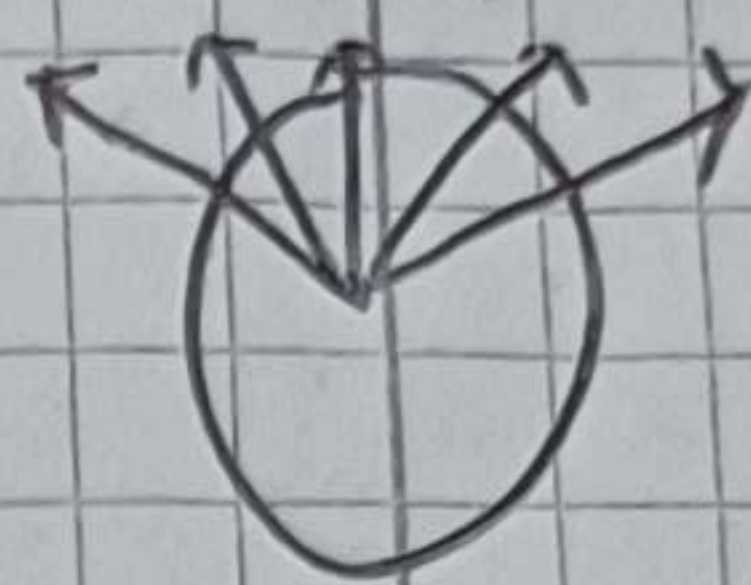


$$dA = 1 \, dd \, dh$$

$\Rightarrow$ Flächen aber nicht winkeltreu

5. Gnomonische Projektion

$$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \cap \{z > 0\}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$G = \begin{pmatrix} 1+y^2 & -xy \\ -xy & 1+x^2 \end{pmatrix}$$

$$dA = (1+x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} dx dy$$

$\Rightarrow$ weder Flächen- noch winkeltreu

Die gnomonische Projektion hat jedoch die angenehme Eigenschaft, dass sie Geraden auf Großkreise abbildet, was aus folgendem Grund interessant ist:

* Lem 6.12: Die Definition der Geodätischen mittels der riemannschen Metrik, der ersten Fundamentalform, auf der Sphäre stimmt mit unserer bisherigen überein

Bew: Wir wissen unsere bisherige Definition liefert genau Kurven

$$\text{der Form } \gamma(t) = A \cos t + T \sin t \quad T \in T_A S^2 \cap S^2$$

$$\Rightarrow \ddot{\gamma}(t) = -A \cos t - T \sin t = (-1) \gamma(t)$$

$$\Rightarrow \ddot{\gamma}(t) \perp T_{\gamma(t)} S^2$$

$$\Rightarrow \nabla \dot{\gamma}(t) = 0$$

Andersrum führt uns die Definition auf die DGL:

$$\ddot{\gamma}(t) = \lambda \gamma(t) \quad \text{und diese lässt sich mit Anfangs-}$$

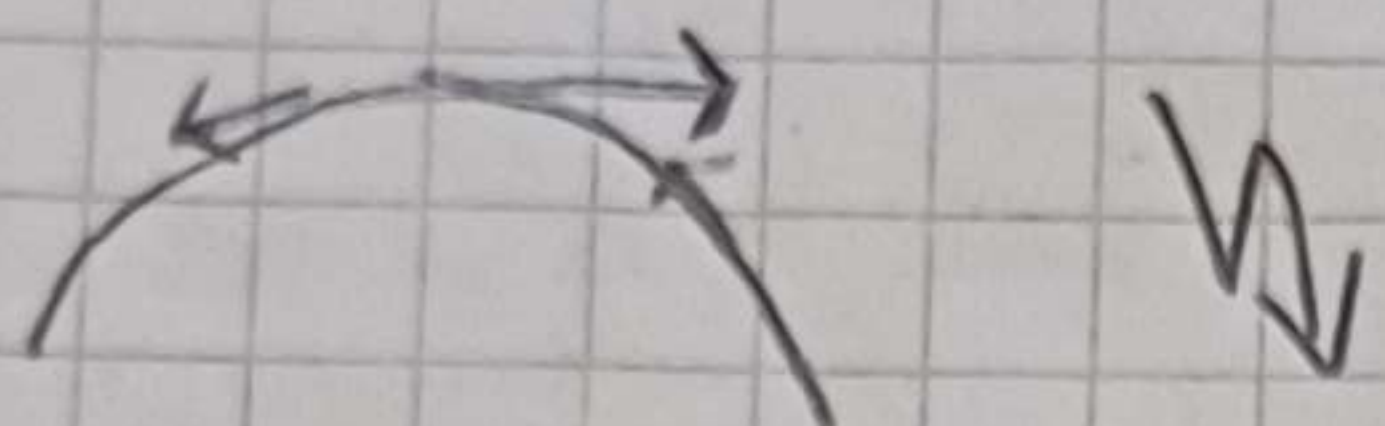
Wert eindeutig lösen als:

$$\gamma(t) = A \cos \sqrt{\lambda} t + T \sin \sqrt{\lambda} t$$

Der Fall $\lambda > 0$ kann ausgeschlossen werden, da sonst
 Folge:

$$\ddot{\gamma}(\gamma^{-1}(A)) = \lambda A \quad \lambda > 0$$

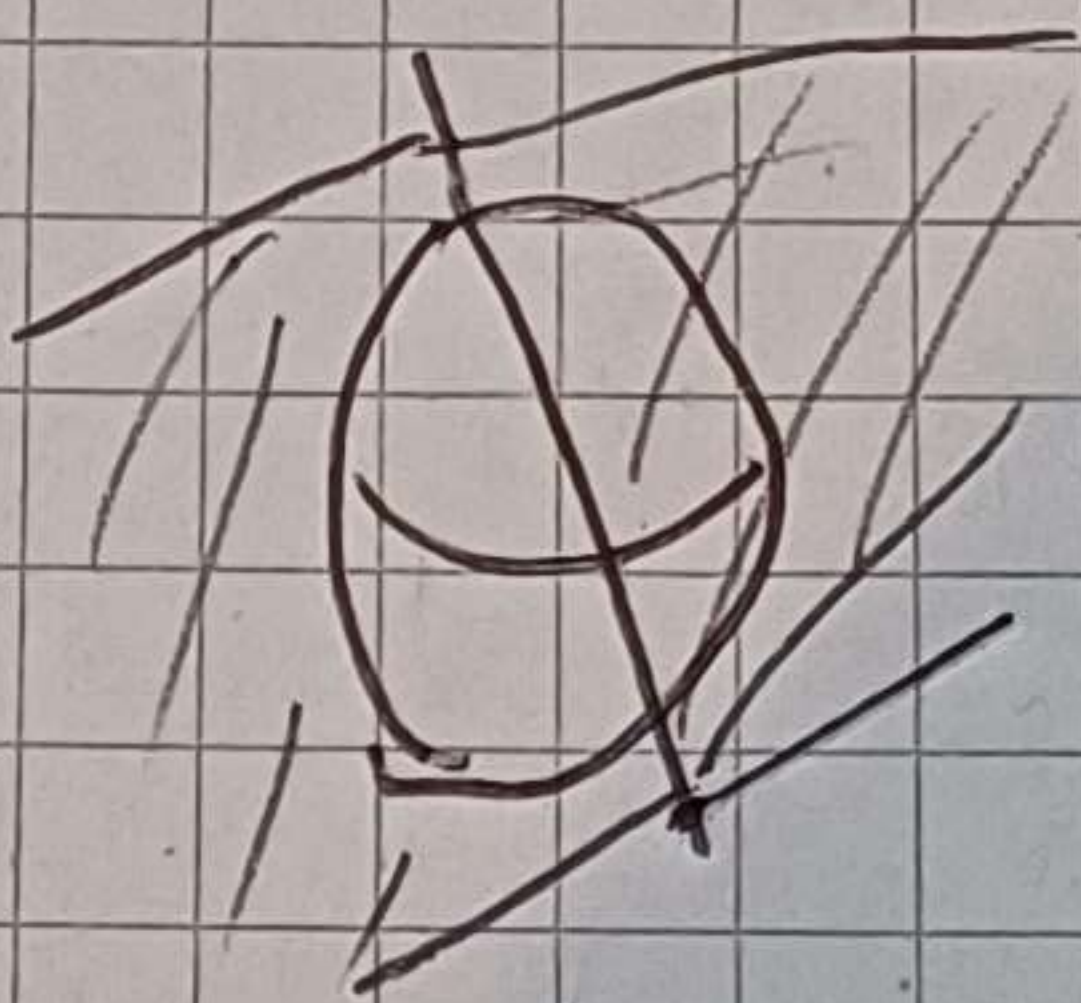
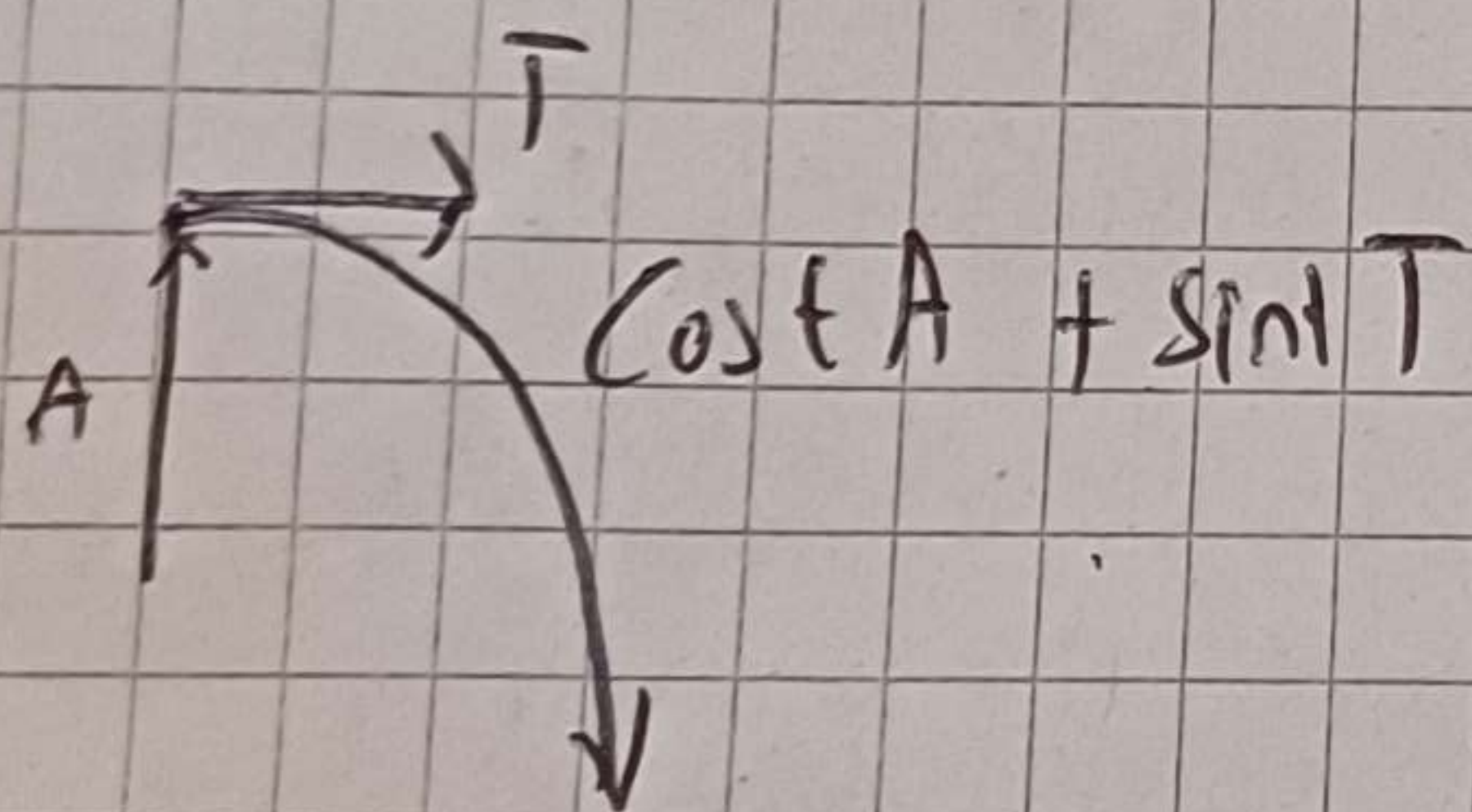
Und damit hätten für $t_0 = \gamma^{-1}(A)$ in einer kleinen
 Umgebung alle $\ddot{\gamma}(t)$ für $t < t_0$ neg.
 A-Koordinate und pos für $t > t_0$, das
 kann nicht sein, da S^2 das Maximum der
 A-Koordinate bei A hat und man A durch $\gamma(t) + (t_0 - t)\ddot{\gamma}(t)$
 annähern kann.



Beachte, dass es sich bei dem Ausschluss dieses
 Falles nicht um einen sauberen Beweis handelt.

qed

Bem 6.13: Die Geodätischen charakterisiert als $A \cos t + T \sin t$
 sind genau die Großkreise, dh die Schnitte von
 S^2 mit 2-dim UR:



Es lässt sich für die hyp Ebene auch
 zeigen, dass die Geodätischen entsprechend
 Hyperbeln (wieder Schnitte mit 2-dim UR)
 sind

