1) Mengenlehre

a) Alle Äquivalenzrelation auf der Menge $\{1,2\}$

Lösung: $\{(1,1),(2,2)\}$

$\{(1,1),(2,2),(1,2),(2,1)\}$

b) Betrachte $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ mit der Relation $\sim$

$(m,n)\sim(m',n')$

$\iff \quad mn' = m'n$

Zeige, dass $\sim$ eine ÄR ist:

Lösung: (Reflexivität) Sei $(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

$mn = mn$ zeigt $(m,m)\sim(m,m)$

(Symmetrie) $(m,n)\sim(n',n') = 0$

$\Rightarrow mn' = m'n \qquad \Rightarrow m'n = mn'$

$\Rightarrow (m',n')\sim(m,n)$

(Transitivität) Gelte $(m,n)\sim(m',n')$ und $(m',n')\sim(m'',n'')$.

$\Rightarrow$ (i) $mn' = m'n \qquad |\cdot n''$

(ii) $m'n'' = m''n' \qquad |\cdot n$

$\Rightarrow$ (i) $mn'n'' = m'nn''$

(ii) $m'n''n = m''n'n$

$\Rightarrow mn'n'' = m'nn'' = m''n'n$ (Kürzen)

$\Rightarrow mn'' = m''n$ □

Äquivalenzklassen interpretieren ?

$\{x\in\mathbb{Q} \mid x>0\}$

c) Sei $a\in\mathbb{Z}$. Betrachte folgendende Abb.

$m_a: \mathbb{Z}\to\mathbb{Z},\ m_a(n) = an.$

Für welche a ist m_a injektiv? Lösung: $a\neq 0 \iff a$ ist injektiv

—ıı— surjektiv? $a=\pm 1 \iff a$ ist surjektiv

d) Zeigen Sie per Induktion

$$\sum_{n=1}^{N} F_n = F_{N+2}-1$$

$(F_1 = F_2 = 1,\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1})$

Beweis: (IA) $N=1$: $F_1 = 1 = 2-1 = F_3 - 1$

(IS) Gelte die Aussage für ein N.

$$\sum_{n=1}^{N+1} F_n = \sum_{n=1}^{N} F_n + F_{N+1} \overset{(IB)}{=} F_{N+2} - 1 + F_{N+1} = F_{N+3} - 1 = F_{(N+1)+2} - 1 \ ✓ □$$

2) Summen, Folgen & Reihen

a) Berechne $\sum_{k=1}^{5}\binom{5}{k}3^k$

$$= -1+\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}1^{n-k}3^k = -1+(1+3)^5$$

$$= -1+4^5 = 2^{10}-1$$

$$= (2^4)^2 2 - 1 = 16^2\cdot 2 - 1 = 511$$

b) Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^n+n}$ existiert und berechnen Sie den Grenzwert

Beweis: $a_n = \frac{2^n}{2^n+n}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n+n}{2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^n} + \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}$$

$= 1 + 0$ (aus Vorlesung bekannt)

Da dieser GW $\neq 0$ ist, folgt

$\lim_{n\to\infty} a_n = \left(\lim_{n\to\infty} a_n^{-1}\right)^{-1} = 1$ □

c) Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(2n)!} = 0$

Beweis: $(2n)! = \prod_{k=1}^{2n} k \geq \prod_{k=n}^{2n} k$

$\geq \prod_{k=n}^{2n} n = n^{n+1} \qquad |: (2n)! \quad |:n$

$$\underbrace{0}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} \leq \frac{n^n}{(2n)!} \leq \underbrace{\frac{1}{n}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$ □

d) Berechnen Sie $\sum_{n=N}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$

Lösung:

$$\sum_{n=N}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = -\sum_{n=0}^{N-1}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$= -\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^N}{1-\frac{2}{3}} + \frac{1}{1-\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^N}{1-\frac{2}{3}}$$

e) Beweisen Sie, dass $\sum_{n=1}^{\infty} n3^{-n}$ konvergiert

Lösung 1: $n \leq 1+n = 1+n \leq 2^n$ (Bernoulli-Unglg.)

(Majorantenkriterium) $n3^{-n} \leq 2^n 3^{-n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

Da $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ existiert,

Folgt auch, dass

$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} n\left(\frac{2}{3}\right)^n \leq \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ existiert.

Lösung 2: Quotientenkriterium

$a_n = n2^n$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n2^n}{(n+1)2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\frac{1}{2}$$

$= \frac{1}{2} < 1$ □

f) Konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2^n}$? $\rightsquigarrow$ Ja

Beweis: z.B Majorantenkriterium $\frac{1}{n+2^n} \leq \frac{1}{2^n}$ + geom. Reihe □

Ein Beispiel einer divergenten Reihe ist $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+n^{1/2}}$

Stetigkeit

a) Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Es gebe $L>0$, sodass $|f(x)-f(y)| \leq L|x-y| \quad \forall x,y\in\mathbb{R}$

Zeige, dass f stetig ist.

Beweis: Sei x fest und $\varepsilon>0$.

Wähle $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$. Dann gilt für alle y mit

$|x-y|<\delta$: $|f(x)-f(y)| \leq L|x-y| < L\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$ □

b) Zeige, dass $f(x) = \frac{1}{x}$ nicht gleichmäßig stetig auf $(0,\infty)$ ist.

Beweis: Wir müssen $\varepsilon>0$ finden, sodass für alle $\delta>0$ Zahlen $x,y\in(0,\infty)$ existieren mit $|x-y|<\delta$ und $|f(x)-f(y)| \geq \varepsilon$.

Wähle $\varepsilon = 1$. Sei $\delta>0$.* Wähle $\frac{\delta}{2} < x < \sqrt{\frac{\delta}{2}}$

*: Wir können $\delta<2$ annehmen, sodass $\frac{\delta}{2} < \sqrt{\frac{\delta}{2}}$

Dann gilt

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{\underbrace{x-\frac{\delta}{2}}_{>0}}\right| = \left|\frac{\frac{\delta}{2}}{x\left(x-\frac{\delta}{2}\right)}\right| \geq \frac{\frac{\delta}{2}}{x^2} \geq \frac{\frac{\delta}{2}}{\frac{\delta}{2}} = \varepsilon$$

und $\left|x - \left(x-\frac{\delta}{2}\right)\right| < \delta$ □

Ableitungen

a) $f(q) = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = (q^n+1)\cdot\frac{1}{q-1}$

$$f'(q) = \frac{(n+1)q^n}{q-1} - \frac{q^{n+1}-1}{(q-1)^2}$$

$$= \frac{(n+1)q^{n+1}-(n+1)q^n - q^{n+1}+1}{(q-1)^2}$$

$$= \frac{nq^{n+1}-(n+1)q^n+1}{(q-1)^2}$$

b) Zeigen Sie $\sum_{k=0}^{n-1} kq^{k-1} = \frac{nq^{n+1}-(n+1)q^n+1}{(q-1)^2}$

Beweis: $\sum_{k=1}^{n} kq^{k-1} = \left(\sum_{k=1}^{n} q^k\right)' = \left(\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\right)' = \frac{(n+1)q^{n+1}-nq^n+1}{(q-1)^2}$

c) $\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)' = \left(x+x^{\frac{1}{2}}\right)'\frac{1}{2}\left(x+x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}$

$$= \left(1+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)\frac{1}{2}\left(x+x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

d) (Benutzen Sie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung)

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ diff'bar und gelte $|f'(x)| \leq L \quad \forall x\in[a,b]$.

Zeigen Sie $\forall x,y\in[a,b]$:

$|f(x)-f(y)| \leq L|x-y|$

Beweis: Seien x,y mit $a\leq x<y\leq b$

Dann gilt $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(z)$

mit $z\in[x,y]$.

$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} = |f'(z)| \leq L \quad |\cdot|x-y|$

Die Unglg. folgt. □

Integration

a) $$\int_0^1\frac{x}{(x+1)^2}\,dx = \int_0^1 \underset{\text{diff.}}{x}\ \underset{\text{int.}}{\frac{1}{(x+1)^2}}\,dx$$

$$= \left[x\frac{-1}{(x+1)}\right]_0^1 - \int_0^1\frac{-1}{(x+1)}\,dx$$

$$= \frac{-1}{2} + \left[\log(x+1)\right]_0^1$$

$$= \frac{-1}{2} + \log(2)$$

b) Sei $x\in[0,1]$ $\qquad \frac{d}{dx}\int_x^1\sqrt{t+t^2}\,dt = ?$

Lösung: $\int_x^1\sqrt{t+t^2}\,dt = \int_0^1\sqrt{t+t^2}\,dt - \int_0^x\sqrt{t+t^2}\,dt$

$$\frac{d}{dx}\int_x^1\sqrt{t+t^2}\,dt = -\frac{d}{dx}\int_0^x\sqrt{t+t^2}\,dt$$

$$= -\sqrt{x+x^2}$$

b) Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2+(x+1)^2}{(x+1)^2(x-1)^2} = \frac{-4x}{(x+1)^2(x-1)^2}$$

$$\int_a^b\frac{-4x\,dx}{(x+1)^2(x-1)^2} = \int_a^b\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$$

$a,b>1$

$$= \left[\frac{-1}{x+1} + \frac{1}{x+1}\right]_a^b$$