Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose
Clemens Nollau

WS 2025/26
24.11.2025
Blatt 07

Übungen zu „Analysis I und Mathematik für Physiker I“

Aufgabe 24.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$ die so genannte *arithmetisch-geometrische Ungleichung* gilt:

$$ab \leq \left(\frac{1}{2}(a+b)\right)^2,$$

und Gleichheit nur gilt, wenn $a = b$ ist.

(b) Wir betrachten die *Babylonische Zahlenfolge* (a_n), gegeben durch

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{2}{a_n}).$$

Zeigen Sie:

(i) $a_n^2 > 2$, für alle $n \in \mathbb{N}$;

(ii) (a_n) ist *streng monoton fallend*, d.h.: $a_{n+1} < a_n$, für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 25 (Konstruktion der Reellen Zahlen aus den Rationalen Zahlen). Wir setzen für diese Aufgabe den angeordneten Körper der rationalen Zahlen $(\mathbb{Q}, +, \cdot, P_{\mathbb{Q}})$ als bekannt voraus (vgl. Aufgabe 18). Jetzt betrachten wir zunächst den *kommutativen Ring (mit Eins)* $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}} = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{Q},\ \forall n \in \mathbb{N}\}$ der rationalen Folgen mit ihrer gliedweisen Addition und Multiplikation

$$(a_n) + (b_n) := (a_n + b_n), \quad (a_n) \cdot (b_n) := (a_n b_n).$$

(a) Zeigen Sie nun zunächst, dass die Teilmenge $R := \{(a_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} : (a_n) \text{ ist eine Cauchy-Folge}\}$ ein *Unterring von* $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ ist, d.h.: $0 = (0) \in R$, $1 = (1) \in R$ und sind (a_n) und (b_n) in R, so auch $(b_n) - (a_n)$ und $(a_n) \cdot (b_n)$.

(b) Nun betrachten wir die Teilmenge (welche ein so genanntes *Ideal in R* ist) der (rationalen) *Nullfolgen*,

$$I := \{(a_n) \in R : (a_n) \text{ ist Nullfolge}\}$$

und betrachten dann die Äquivalenzrelation auf R, die durch $(a_n) \sim (b_n) :\Leftrightarrow (b_n) - (a_n) \in I$ gegeben ist. Den *Quotientenring* $\mathbb{R} := R/I := R/\sim$ mit den induzierten Strukturen

$$[(a_n)] + [(b_n)] := [(a_n) + (b_n)], \quad [(a_n)] \cdot [(b_n)] := [(a_n) \cdot (b_n)]$$

bezeichnen wir mit den *Reellen Zahlen*. Zeigen Sie, dass diese Verknüpfungen wohldefiniert sind, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ zu einem Körper machen und $\iota\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, wo $\iota(r)$ die konstante Folge $(r)_{n\in\mathbb{N}}$ sei, zu einem *Körperhomomorphismus*.

(Anmerkung: Diese Aufgabe wird demnächst mit der Angabe einer Anordnung P auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt, die dann $(\mathbb{R}, P)$ zu einem archimedisch und vollständig angeordneten Körper macht.)

Aufgabe 26 (Präsenzaufgabe). Ordnen Sie die folgenden Folgen nach Ihrem Wachstum und begründen bzw. beweisen Sie:

(a)

$$a_n = n^k \text{ (für ein } k \in \mathbb{N}), \quad b_n = q^n \text{ (mit } q > 1), \quad c_n = n^n, \quad d_n = n!$$

(b)

$$a_n = (n!)!, \quad b_n = (n^n)!, \quad c_n = n^{n!}, \quad d_n = (n!)^n$$

Abgabe: Bis Montag, den 01.12.2025 um 11.15 Uhr