Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose
Clemens Nollau

WS 2025/26
01.12.2025
Blatt 08

Übungen zu „Analysis I und Mathematik für Physiker I“

Aufgabe 27.

(a) Stellen Sie die Dezimalzahlen 13 und 24 im 7-er-System dar und addieren und multiplizieren sie sie schriftlich.

(b) Stellen Sie den Bruch $\frac{1}{7}$ als Dezimalbruch und als 12-adischen Bruch dar. (Hinweis: Verwenden Sie als Ziffern im 12-adischen System für die Dezimalzahlen 10 und 11 die Buchstaben a und b.)

Aufgabe 28.

(a) (Cauchy-Kriterium) Zeigen Sie, dass eine Reihe (reeller Zahlen) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann konvergiert, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $m > n \geq n_0$ gilt.

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_n \right| < \varepsilon.$$

(b) Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt *absolut konvergent*, wenn die Reihe ihrer Absolutbeträge $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert. Zeigen Sie: Ist eine Reihe absolut konvergent, so ist sie auch konvergent.

Aufgabe 29 (Fortsetzung der Konstruktion der Reellen Zahlen). Sei $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ der Körper der Reellen Zahlen (vgl. Aufgabe 25). Wir setzen nun

$$P = \{x = [(a_n)] \in \mathbb{R} : \exists \varepsilon \in \mathbb{Q}, \varepsilon > 0 \, \exists \, n_0 \in \mathbb{N} \, \forall \, n \geq n_0 : a_n \geq \varepsilon\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $P \subseteq \mathbb{R}$ eine Anordnung auf $\mathbb{R}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}, P)$ archimedisch ist.

(c) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}, P)$ vollständig ist. (Anleitung: Nach Konstruktion ist jedes $x \in \mathbb{R}$ Grenzwert einer rationalen Folge (r_n) in $\mathbb{R}$. Ist nun (x_n) eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$, so wähle man zunächst $r_n \in \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ mit $|x_n - r_n| < \frac{1}{n}$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann zeige man, dass auch (r_n) eine Cauchy-Folge ist und schließlich, dass (x_n) gegen $x = [(r_n)]$ konvergiert.)

(Anmerkung: Damit ist die Konstruktion von $(\mathbb{R}, +, \cdot, P)$ als ein archimedisch und vollständig angeordneter Körper abgeschlossen.)

Aufgabe 30 (Präsenzaufgabe). Sei $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von abgeschlossenen Intervallen $I_n = [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}$ (mit $a_n < b_n$, für alle $n \in \mathbb{N}$). Man nennt (I_n) eine *Intervallschachtelung*, falls folgendes gilt:

(i) $I_{n+1} \subseteq I_n$, also $a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n$, für alle $n \in \mathbb{N}$;

(ii) $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$.

Ein $x \in \mathbb{R}$ heißt *Kern von* (I_n), falls $x \in I_n$ ist, für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Jede Intervallschachtelung (I_n) in $\mathbb{R}$ hat einen Kern.

Abgabe: Bis Montag, den 08.12.2025 um 11.15 Uhr