Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose
Clemens Nollau

WS 2025/26
08.12.2025
Blatt 09

Übungen zu „Analysis I und Mathematik für Physiker I“

Aufgabe 31.

(a) (Majorantenkriterium) Seien (a_n) und (b_n) reelle Zahlenfolgen mit $b_n \geq 0$ sowie $|a_n| \leq b_n$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.

(b) Zeigen Sie die Konvergenz von $\sum \frac{1}{n^3}$.

Aufgabe 32. Wir betrachten die Folgen (x_n) und (y_n) mit

$$x_n = (1 + \frac{1}{n})^n \quad \text{und} \quad y_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}.$$

(a) Zeigen Sie, dass (x_n) streng monoton wachsend und (y_n) streng monoton fallend ist. (Hinweis: Verwenden Sie Bernoullis Ungleichung.)

(b) Zeigen Sie, dass (x_n) und (y_n) konvergent sind und den gleichen Grenzwert haben. (Anmerkung: Später werden wir feststellen, dass dieser gerade die Eulersche Zahl $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ ist.)

Aufgabe 33.

(a) (Quotientenkriterium) Sei (a_n) eine reelle Zahlenfolge mit $a_n \neq 0$, für alle $n \in \mathbb{N}$, es sei $0 < q < 1$ und es gebe ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q.$$

Zeigen Sie, dass dann die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert. (Hinweis: *Majorisieren* Sie $\sum a_n$ mit der Geometrischen Reihe und verwenden Sie das Majorantenkriterium.)

(b) Zeigen Sie mit dem Quotientenkriterium (erneut), dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ konvergiert.

Aufgabe 34 (Präsenzaufgabe). Verwenden Sie Majoranten- und Quotientenkriterium, um die Konvergenz folgender Reihen zu zeigen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \text{ für } k \in \mathbb{N} \text{ mit } k > 1, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n}.$$

Abgabe: Bis Montag, den 15.12.2025 um 11.15 Uhr