Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose
Clemens Nollau

WS 2025/26
15.12.2025
Blatt 10

Übungen zu „Analysis I und Mathematik für Physiker I“

Aufgabe 35.

(a) (Wurzelkriterium) Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen. Es existiere ein $q < 1$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q.$$

Zeigen Sie, dass dann die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert.

(b) Zeigen Sie die Konvergenz der folgenden beiden Reihen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}(1 + \frac{1}{n})^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty}(3 + (-1)^n)^{-n}.$$

Aufgabe 36 (Fixpunktsatz). Sei $f\colon [-1,1] \to [-1,1]$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass f einen *Fixpunkt* haben muss (d.h. ein $\xi \in [-1,1]$ mit $f(\xi) = \xi$). (Hinweis: Betrachten Sie die Funktion h mit $h(x) = f(x) - x$.)

Aufgabe 37. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ heißt *Lipschitz-stetig*, wenn es ein $L \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $x_1, x_2 \in I$ gilt:

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq L|x_2 - x_1|.$$

Zeigen Sie, dass eine Lipschitz-stetige Funktion gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 38 (Präsenzaufgabe). Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{falls } x = \frac{p}{q} \text{ mit teilerfremden } p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \text{ und } q \in \mathbb{N} \text{ ist} \\ 1 & \text{falls } x = 0 \text{ ist} \\ 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ ist} \end{cases}$$

Bestimmen Sie alle Punkte in $\mathbb{R}$, in denen f stetig ist und begründen Sie.

Abgabe: Bis Montag, den 22.12.2025 um 11.15 Uhr