

Übungen zu „Analysis I und Mathematik für Physiker I“

Aufgabe 39. Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Zeigen Sie, dass f genau dann integrierbar ist, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen $\varphi, \psi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi \leq f \leq \psi$ gibt, so dass gilt:

$$\int_a^b (\psi - \varphi)(x) dx < \varepsilon.$$

Aufgabe 40. Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion. Sei weiter $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die sich an höchstens endlich vielen Stellen $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ ($n \in \mathbb{N}_0$) von f unterscheidet. Zeigen Sie, dass auch g integrierbar ist und es gilt:

$$\int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Aufgabe 41. Sei $f: [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ eine stetige Funktion mit $\int_a^b f(x) dx = 0$. Zeigen Sie, dass dann schon $f = 0$ sein muss.

Aufgabe 42 (Präsenzaufgabe). Zeigen Sie, dass die Funktion $\text{sqrt}: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$, gleichmäßig stetig ist.

Abgabe: Bis Montag, den 12.01.2026 um 11.15 Uhr