

Übungen zu „Analysis I und Mathematik für Physiker I“

Aufgabe 43. Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion und $f_+: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ihr *positiver Anteil*, also $f_+(x) = f(x)$, falls $f(x) \geq 0$ und sonst $f_+(x) = 0$. Zeigen Sie, dass auch f_+ dann integrierbar ist. (Hinweis: Verwenden Sie das Kriterium für Integrierbarkeit von Aufgabe 39.)

Aufgabe 44. Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion und $\xi \in (a, b)$. Zeigen Sie, dass dann auch die Funktionen $f|_{[a, \xi]}$ und $f|_{[\xi, b]}$ integrierbar sind und es gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^\xi f(x) dx + \int_\xi^b f(x) dx.$$

(Hinweis: Überlegen Sie zunächst, warum die Aussage für Treppenfunktionen richtig ist und verwenden Sie dann wieder Aufgabe 39.)

Aufgabe 45. Zeigen Sie für jedes $b > 0$:

$$\int_0^b \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} \sqrt{b^3}.$$

(Hinweis: Verwenden Sie dazu zum Beispiel die *quadratische Progression* $x_k^{(r)} = \frac{bk^2}{r^2}$ ($k = 0, \dots, r$) mit den Zwischenstellen $\xi_k^{(r)} = x_k^{(r)}$, für alle $r \in \mathbb{N}$.)

Aufgabe 46 (Präsenzaufgabe). Zeigen Sie, dass für alle $b > 0$ gilt:

$$\int_1^b \frac{dx}{x^2} = 1 - \frac{1}{b}.$$

(Hinweis: Versuchen Sie hier mal die *geometrische Progression* $x_k^{(r)} = q_r^k$ ($k = 0, \dots, r$) mit $q_r := \sqrt[r]{b}$ und Zwischenstellen $\xi_k^{(r)} = x_{k-1}^{(r)}$, für alle $r \in \mathbb{N}$.)

Abgabe: Bis Montag, den 19.01.2026 um 11.15 Uhr