Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose
Clemens Nollau

WS 2025/26
19.01.2026
Blatt 13

Übungen zu „Analysis I und Mathematik für Physiker I“

Aufgabe 47. Zeigen Sie, dass die Quadratwurzelfunktion $f = \mathrm{sqrt}\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$, differenzierbar ist und es gilt:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Aufgabe 48. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f' = \text{const}$. Zeigen Sie, dass f affin-linear ist.

Aufgabe 49. In dieser Aufgabe betrachten wir Differenzierbarkeit von Funktionen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ auch in den Randpunkten a und b mit der gleichen Definition wie für die inneren Punkte $x \in (a,b)$. Sei also $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeigen Sie:

(a) Hat f in a ein lokales Minimum, so gilt: $f'(a) \geq 0$. Und hat f in b ein lokales Minimum, so gilt: $f'(b) \leq 0$.

(b) (*Satz von Darboux*) Ist $f'(a) < 0$ und $f'(b) > 0$, so existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$. (Vorsicht: f' braucht i.a. nicht stetig zu sein.)

Aufgabe 50 (Präsenzaufgabe). Für $x > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ setzt man $x^{-n} := \frac{1}{x^n}$, und für $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ (mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$) setzt man $x^r := \sqrt[q]{x^p}$.

(a) Zeigen Sie, dass x^r wohldefiniert ist.

(b) Zeigen Sie die folgenden Potenzgesetze für alle $x > 0$, $r, s \in \mathbb{Q}$:

$$x^{r+s} = x^r \cdot x^s, \quad (x^r)^s = x^{rs}.$$

(Hinweis: Machen Sie das vielleicht schrittweise zunächst für $r, s \in \mathbb{N}$, dann für $r, s \in \mathbb{Z}$ und schließlich für $r, s \in \mathbb{Q}$.)

Abgabe: Bis Montag, den 26.01.2026 um 11.15 Uhr