

Übungen zu „Analysis I und Mathematik für Physiker I“

Aufgabe 55. Zeigen Sie, dass eine differenzierbare Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann die *Differentialgleichung* $f' = f$ erfüllt, wenn es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f(x) = c \exp(x)$. (Betrachten Sie die Funktion $x \mapsto \exp(-x)f(x)$.)

Aufgabe 56. Wir definieren die *hyperbolischen Funktionen* $\cosh, \sinh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad \sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$$

(a) Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\cosh'(x) = \sinh(x), \quad \sinh'(x) = \cosh(x).$$

(b) Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

und beweisen Sie damit, dass eine zweimal differenzierbare Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann die Differentialgleichung $f'' = f$ erfüllt, wenn es $a, b \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(x) = a \cosh(x) + b \sinh(x).$$

(Hinweis: Betrachten Sie die Funktionen $f \cosh - f' \sinh$ und $f \sinh - f' \cosh$.)

(c) Zeigen Sie die beiden folgenden *Funktionalgleichungen* für \cosh und \sinh (für alle $x \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} \cosh(x+y) &= \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y) \\ \sinh(x+y) &= \cosh(x)\sinh(y) + \sinh(x)\cosh(y). \end{aligned}$$

Aufgabe 57. Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$ (in Termen von *elementaren Funktionen*, wozu wir ab sofort auch die hyperbolischen Funktionen zählen). (Hinweis: Substituieren Sie zunächst $x = \sinh(t)$ und wenden Sie anschließend noch eine partielle Integration an.)

Aufgabe 58 (Präsenzaufgabe). Führen Sie eine *Kurvendiskussion* der Funktion $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^x$ durch (asymptotisches Verhalten, lokale Extrema, Wendepunkte, Graph).

Abgabe: Keine mehr, nur noch, wenn Sie für die Klausurzulassung Punkte brauchen