Universität Tübingen, Fachbereich Mathematik

Dr. Stefan Keppeler

Wintersemester 25/26

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler∗innen

Übungsblatt 8 (Besprechung in den Übungsgruppen vom 08. bis 11.12.25)

Aufgabe 42
Berechnen Sie die Taylorreihen der folgenden Funktionen (ggf. stetig fortgesetzt) um null, und geben Sie an, wo diese konvergieren.

a) $\dfrac{1}{(1-x)(2-x)}$ b) $\dfrac{\sin x}{1+x^2}$

Aufgabe 43
Für welche $a \in \mathbb{R}$ hat die Funktion f_a definiert durch

$$f_a(x) = \frac{1 + x\sin(ax)}{1+x^2}$$

bei Null ein Maximum, für welche ein Minimum? Begründen Sie Ihre Antwort!

Hinweis: Berechnen Sie keine Ableitungen, verwenden Sie Taylorentwicklungen.

Aufgabe 44
Diskutieren Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 + |x|(x-2) + 2}{|x|}$$

für reelle x. Achten Sie dabei insbesondere auf den (maximalen) Definitionsbereich, stetige Fortsetzbarkeit, Asymptoten, Nullstellen sowie Hoch- und Tiefpunkte, und zeichnen Sie die den Graph der Funktion.

Aufgabe 45
Welche der folgenden Mengen M sind Vektorräume über $\mathbb{R}$?[1]

a) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_3 = 20x_1\,,\ x_1 - x_2 = x_3 \right\}$

b) $M = \{$Polynome vom Grad ≤ 4 mit reellen Koeffizienten
und Steigung 20 im Ursprung$\}$

c) $M = \{$Polynome vom Grad ≤ 4 mit reellen Koeffizienten
und einer Nullstelle bei 20$\}$

Aufgabe 46
Welche der folgenden Mengen M sind Vektorräume über K?

a) $M = \mathbb{C}^2$, $K = \mathbb{R}$ b) $M = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{C}$ c) $M = \mathbb{Q}$, $K = \mathbb{R}$.

---

[1] Überlegen Sie nur, ob aus $\vec{x}, \vec{y} \in M$ folgt, dass auch $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \in M\ \forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Die Rechenregeln bekommen wir geschenkt. (Warum?)

Aufgabe 47
Die Menge aller stetigen Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$, genannt $C([a, b])$, ist ein Vektorraum über den reellen Zahlen. Für $x \in [-\pi, \pi]$ sei $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = \sin x$, $f_3(x) = \cos x$ und $f_4(x) = \sin^2(\frac{x}{2})$. Zeigen Sie:

a) f_1, f_3, f_4 sind linear abhängig in $C([-\pi, \pi])$.
b) f_1, f_2, f_3 sind linear unabhängig in $C([-\pi, \pi])$.

Aufgabe 48
Entscheiden Sie, ob die folgenden Vektoren aus $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig sind, und stellen Sie – falls möglich – den Vektor $\vec{b} = \left(\begin{smallmatrix}1\\5\\4\end{smallmatrix}\right)$ als Linearkombination dieser Vektoren dar.

a) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\9\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\\4\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}1\\8\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\3\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

Aufgabe 49
Sinnvolle Khan-Übungen sind z.B.:

- *Graphically add & subtract vectors*,
- *Combined vector operations*,
- *Number of solutions to a system of equations algebraically* und
- *Systems of equations word problems*.

HINWEISE: Siehe Aufgabe 12 (Blatt 2).