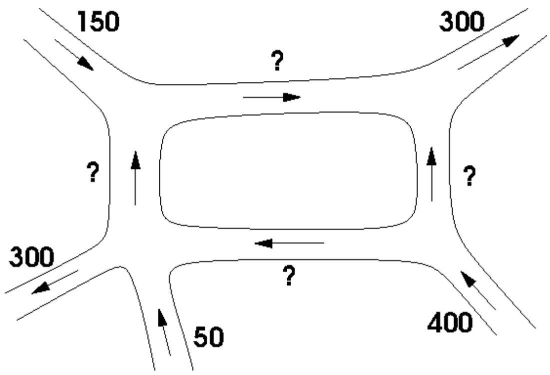
Universität Tübingen, Fachbereich Mathematik
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 25/26

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler∗innen

Übungsblatt 9 (Besprechung in den Übungsgruppen vom 15. bis 18.12.25)

Aufgabe 50
Rechts ist der Ausschnitt eines Stadtplans gezeigt, in dem nur Einbahnstraßen zu sehen sind. An jedem Straßenabschnitt wurde eingetragen, wieviele Autos dort während einer bestimmten Zeit entlang gefahren sind. Wir nehmen an, dass alle Autos ihre Fahrt außerhalb des Ausschnitts begonnen und beendet haben.



Was können Sie über die Anzahlen der Autos sagen, die die vier mit Fragezeichen markierten Staßen benutzten? Stellen Sie dazu ein lineares Gleichungssystem auf, bringen Sie dieses auf Zeilenstufenform und geben Sie die Lösungsmenge an. Geben Sie außerdem für jede, der vier Straßen die größt- und die kleinstmögliche Zahl an Autos an.

Hinweis: Zur besseren Vergleichbarkeit bezeichnen Sie bitte die Anzahl der Autos auf den vier Staßen im Uhrzeigersinn mit $x_1, \dots, x_4$ beginnend mit der unteren.

Aufgabe 51
Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Vektoren aus $\mathbb{R}^3$ linear abhängig?

$$\begin{pmatrix} \beta \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ \alpha \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 52
Seien U und V Unterräume des $\mathbb{R}^{10}$ mit $\dim U = 7$ und $\dim V = 4$ und Basen $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_7$ von U und $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_4$ von V. Welche Werte kann

$$\dim \operatorname{span}\left(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_7, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_4\right)$$

annehmen (mit Begründung)? Geben Sie für jeden Fall explizit ein Beispiel an!

Aufgabe 53
Geben Sie für alle Vektorräume aus Aufgabe 45 die Dimension und eine Basis an.

Aufgabe 54

Überprüfen Sie, ob durch $\langle\cdot,\cdot\rangle$ jeweils ein Skalarprodukt auf V definiert wird.

a) $V=\mathbb{R}^n$, $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\vec{a}\cdot\vec{b}=\sum_{j=1}^{n}a_jb_j$

b) $V=\mathbb{R}^3$, $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=a_1b_1+2a_2b_2+3a_3b_3$

c) $V=\mathbb{R}^2$, $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=a_1b_1-a_2b_2$

d) $V=\mathbb{R}^2$, $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=a_1b_1-a_1b_2-a_2b_1+a_2b_2$

e) $V=\mathbb{R}^3$, $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=a_1b_1+a_2b_2+2a_3b_3-a_2b_3-a_3b_2$

Hinweis: Die Eigenschaften (S1) und (S2) können Sie für alle Aufgabenteile gleichzeitig überprüfen, denn alle Abbildungen haben die Form $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\sum_j\sum_k\mu_{jk}a_jb_k$ mit $\mu_{kj}=\mu_{jk}$.

Aufgabe 55

Seien

$$\vec{a}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\ ,\ \vec{a}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\ ,\ \vec{a}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\ .$$

a) Verwenden Sie in diesem Aufgabenteil das kanonische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ und die zugehörige Norm.
Berechnen Sie die Normen $\|\vec{a}_j\|=|\vec{a}_j|$, $j=1,2,3$
und alle Skalarprodukte $\langle\vec{a}_j,\vec{a}_k\rangle=\vec{a}_j\cdot\vec{a}_k$, $j\neq k$.

b) Verwenden Sie in diesem Aufgabenteil das Skalarprodukt aus Aufgabe 54e und die zugehörige Norm.
Berechnen Sie die Normen $\|\vec{a}_j\|$, $j=1,2,3$
und alle Skalarprodukte $\langle\vec{a}_j,\vec{a}_k\rangle$, $j\neq k$.

Bemerkung: Die zu einem Skalarprodukt gehörende Norm (vornehm: die durch das Skalarprodukt induzierte Norm) definieren wir so:

$$\|\vec{a}\|:=\sqrt{\langle\vec{a},\vec{a}\rangle}\,.$$