Universität Tübingen, Fachbereich Mathematik
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 25/26

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler$*$innen

Übungsblatt 12 (Besprechung in den Übungsgruppen vom 19. bis 22.01.26)

Aufgabe 63 (10 Punkte)
Berechnen Sie – falls möglich – für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) AA^T, b) $A^T A$, c) $AA^T B$, d) $A^T AB$,
e) $B^T AA^T$, f) A^2, g) $A^T AA^T A$.

Hinweis: Assoziativität, d.h. $(AB)C = A(BC)$, ist hilfreich.

Aufgabe 64 (10 Punkte)
Sei

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie B^{-1}.
b) Bestimmen Sie mithilfe von B^{-1} die Lösungen $\vec{x}$ und X von

$$B\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad BX = C\,.$$

Wie hätten Sie $\vec{x}$ oder X berechnen können, ohne zunächst B^{-1} zu bestimmen?

Aufgabe 65 (4+6 = 10 Punkte)
Seien $\alpha, b \in \mathbb{R}$ mit $b \neq 0$, und sei $A(b, \alpha) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ definiert durch

$$A(b, \alpha) = b \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie $A(b_1, \alpha_1) \cdot A(b_2, \alpha_2)$.
b) Bestimmen Sie $B_n := \big(A(b, \alpha)\big)^n$, $\det(B_n)$ sowie $(B_n)^{-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 66
Sinnvolle Khan-Übungen sind z.B.:

- *Matrix elements*,
- *Multiply matrices by scalars*,
- *Matrix equations: scalar multiplication*,
- *Multiply matrices* und
- *Inverse of a* 3×3 *matrix*,
- *Use matrices to represent systems of equations* und
- *Divide complex numbers*.

HINWEISE: Siehe Aufgabe 12 (Blatt 2).