Universität Tübingen, Fachbereich Mathematik
Dr. Stefan Keppeler

Wintersemester 25/26

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler*innen

Klausur am 11.02.2026

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie stets Ihren Rechenweg und vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich. Ergebnisse ohne Rechenweg/Zwischenschritte/Begründung liefern keine Punkte.**

Es sind maximal 100 Punkte erreichbar, 84 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 42 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfsmittel: Ein handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (3+5 = 8 Punkte)
Sei $a_1 = a_2 = 1$, und für $n \geq 3$ sei $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

a) Berechnen Sie a_3, a_4 und a_5.

b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion: $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = a_{n+2} - 1 \qquad \forall\, n \geq 1\,.$

Aufgabe 2 (3+3+3+3+3 = 15 Punkte)
Bestimmen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte, oder begründen Sie ggf., warum diese nicht existieren.

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{(x^2-2)\sin^2(x) + (x^2+6)\cos^2(x)}{5x^2 - x + 3}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^4 - 2x^2} - \sqrt{x^4 + 6x^2}\right)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(x^2-2)\sin^2(x) + (x^2+6)\cos^2(x)}{5x^2 - x + 3}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 1/3} \frac{\sin(3\pi x)}{\log(3x)}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin^5(2x)}{x^3(4x^4 - 2x^2)}$

Aufgabe 3 (4+4+4+4 = 16 Punkte)
Berechnen Sie (d.h. das Ergebnis soll keine Summenzeichen mehr enthalten).

a) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{2026} \cos(\pi\nu)$

b) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} 7^{n-k}$

c) $\displaystyle\sum_{\mu=0}^{n}\sum_{\nu=\mu}^{n} \frac{\nu\, 2^\mu}{2^{\nu+1} - 1}$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{n} \frac{x^n}{\nu!(n-\nu)!}$

Aufgabe 4 (4+4+4 = 12 Punkte)
Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen.

a)* $\displaystyle f(x) = \log\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)$

b) $g(x) = x^2 \cdot 2^x$

c) $\displaystyle h(x) = \int_x^{x^2} \cos(t^2)\,\mathrm{d}t$

---

*Schreiben Sie Ihr Ergebnis als *einen* Bruch.

Aufgabe 5 (4+4+4 = 12 Punkte)

Bestimmen Sie die Taylorreihen von

a) $\dfrac{1+x^3}{1-x^3}$ und b) $\dfrac{x}{x^2-4}$ um null, sowie die Taylorreihe von

c) $\cos x$ um $x_0 = \frac{\pi}{2}$, und geben Sie an, wo die Reihen konvergieren.

Aufgabe 6 (3+1 = 4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + \frac{1}{2} - x|x|}{2x}$.

a) Bestimmen Sie alle Asymptoten.
b) Bestimmen Sie alle Nullstellen

Aufgabe 7 (6 Punkte)

Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to f(D)$ bijektiv mit $f'(x) = [f(x)]^2 + 26$. Bestimmen Sie ${f^{-1}}'(x)$.

Aufgabe 8 (6 Punkte)

Seien

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\operatorname{span}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ bezüglich des kanonischen Skalarprodukts auf $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 9 (6 Punkte)

Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, für die gilt $z^4 = -9$. Markieren Sie diese z in einem Diagramm der komplexen Ebene.

Hinweis: Die Polardarstellung $z = re^{i\phi}$, $r \in [0, \infty)$, $\phi \in [0, 2\pi)$, ist hilfreich.

Aufgabe 10 (6+2+2 = 10 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

a) Berechnen Sie A^{-1}.
b) Bestimmen Sie $\det(A)$.
c) Bestimmen Sie alle Lösungen $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$ von $A\vec{x} = \vec{b}$.

Aufgabe 11 (5 Punkte)

Bestimmen Sie alle Lösungen $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$ von $A\vec{x} = \vec{b}$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$