Universität Tübingen, Fachbereich Mathematik
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 25/26

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler∗innen

Nachklausur am 14.04.2026

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie stets Ihren Rechenweg und vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich. Ergebnisse ohne Rechenweg/Zwischenschritte/Begründung liefern keine Punkte.**

Es sind maximal 100 Punkte erreichbar, 84 Punkte $\hat{=}$ 100% ($\hat{=}$ Note 1,0), 50% $\hat{=}$ 42 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\hat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfsmittel: Ein handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (3+5 = 8 Punkte)

Sei $a_1 = a_2 = 1$, und für $n \geq 3$ sei $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

a) Berechnen Sie a_3, a_4 und a_5.

b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion: $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^2 = a_n\, a_{n+1} \qquad \forall\, n \geq 1\,.$

Aufgabe 2 (3+3+3+3+3 = 15 Punkte)

Bestimmen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin^3(x^2)}{x^3(4x^4 - 3x^3)}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x\sin^2 x} - \sqrt{x^2 - 3x\cos^2 x}\right)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{x^2 - 4}{x^5 + 32}$ d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{13}{1-n}\right)^{2n}$ e) $\displaystyle\lim_{x\to \mathrm{e}/2} \frac{\cos(\pi x/\mathrm{e})}{\log\big(\log(2x)\big)}$

Aufgabe 3 (4+4+4+4 = 16 Punkte)

Berechnen Sie (d.h. das Ergebnis soll keine Summenzeichen mehr enthalten).

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{7}{8}\right)^n$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{7} \binom{8}{n+1} (-1)^n$ c) $\displaystyle\sum_{\mu=1}^{7} \sum_{\nu=\mu}^{7} \frac{7}{\nu}$ d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\nu!\,(n-\nu)!\,2^n}$

Aufgabe 4 (4+4+4 = 12 Punkte)

Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen.

a)* $\displaystyle f(x) = \log\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ b) $g(x) = x^3 \cdot 3^x$ c) $\displaystyle h(x) = \int_{x^2}^{x^3} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

Aufgabe 5 (4+4+4 = 12 Punkte)

Bestimmen Sie Taylorreihen der folgenden Funktionen (ggf. stetig fortgesetzt) und geben Sie an, wo diese konvergieren.

a) $\displaystyle\frac{1-x}{1+x^3}$ um null b) $\displaystyle\frac{1-\cos x}{x^2}$ um null c) $\displaystyle\frac{1}{x}$ um $x_0 = 26$

---

*Schreiben Sie Ihr Ergebnis als *einen* Bruch.

Aufgabe 6 (3+1 = 4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \dfrac{2x^2 + 12x + 9 - 2x|x|}{4x}$.

a) Bestimmen Sie alle Asymptoten.
b) Bestimmen Sie alle Nullstellen

Aufgabe 7 (2+4 = 6 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $x \mapsto 2x + \cos x$.

a) Ist f bijektiv? Begründen Sie Ihre Antwort!
b) Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion an der Stelle $2\pi - 1$, d.h. berechnen Sie ${f^{-1}}'(2\pi - 1)$.

Aufgabe 8 (6 Punkte)

Seien

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\operatorname{span}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ bezüglich des kanonischen Skalarprodukts auf $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 9 (6 Punkte)

Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, für die gilt $z^4 = -16$. Markieren Sie diese z in einem Diagramm der komplexen Ebene.

Hinweis: Die Polardarstellung $z = re^{i\phi}$, $r \in [0, \infty)$, $\phi \in [0, 2\pi)$, ist hilfreich.

Aufgabe 10 (6+2+2 = 10 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix},$$

a) Berechnen Sie A^{-1}.
b) Bestimmen Sie $\det(A)$.
c) Bestimmen Sie alle Lösungen $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$ von $A\vec{x} = \vec{b}$.

Aufgabe 11 (5 Punkte)

Bestimmen Sie alle Lösungen $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$ von $A\vec{x} = \vec{b}$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$