

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler*innen

Problemklausur am 10.12.2025

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie stets Ihren Rechenweg und vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich. Ergebnisse ohne Rechenweg/Zwischen-schritte/Begründung liefern keine Punkte.**

Es sind maximal 50 Punkte erreichbar, 42 Punkte $\hat{=}$ 100% ($\hat{=}$ Note 1,0), 50% $\hat{=}$ 21 Punkte wären hinreichend zum Bestehen ($\hat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfsmittel: Ein handbeschriebenes Blatt (DIN A4).

Bearbeitungszeit: 60 Minuten.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1

(6 Punkte)

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

$$\sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\nu(\nu+1)} = \frac{n}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Aufgabe 2

(3+3+3+3+3 = 15 Punkte)

Bestimmen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)^2}{(1 - \cos x)^3}$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 - x \sin^2 x} - \sqrt{x^2 + x \cos^2 x} \right)$

c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^5 + 32}{x^2 - 4}$ d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{25}{26 - n} \right)^{2n}$ e) $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\log(\log x)}{\sin(\pi x/e)}$

Aufgabe 3

(4+4+4 = 12 Punkte)

Berechnen Sie (d.h. das Ergebnis soll kein Summenzeichen mehr enthalten):

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{25}{26} \right)^n$ b) $\sum_{n=0}^{25} \binom{26}{n+1} (-1)^n$ c) $\sum_{\mu=1}^{25} \sum_{\nu=\mu}^{25} \frac{25}{\nu}$

Aufgabe 4

(4+4+4 = 12 Punkte)

Bestimmen Sie Taylorreihen der folgenden Funktionen (ggf. stetig fortgesetzt) und geben Sie an, wo diese konvergieren.

a) $\frac{1}{2+4x}$ um null b) $\frac{\sin x - x}{x^3}$ um null c) $\frac{1}{1+x}$ um $x_0 = 25$

Aufgabe 5

(5 Punkte)

Die Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow [2, \infty)$, definiert durch $x \mapsto \cos x + \cosh x$, ist bijektiv. Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion an der Stelle $\cosh \pi - 1$, d.h. berechnen Sie $f^{-1}'(\cosh \pi - 1)$.