

Zahlenbereiche

Natürliche Zahlen: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

Wenn man von "Zahlen" spricht hat man in der Regel neben der Menge auch eine Verknüpfung im Kopf!

Eine Verknüpfung ordnet zwei (oder mehr) Elementen der Menge ein Element aus der Menge zu.

z.B. Addition, Multiplikation, Potenzieren a^b .

Division oder Subtraktion werfen uns eventuell aus der Menge.
(mehr dazu später).

Für die Verknüpfungen gelten gewisse Rechenregeln (oder auch nicht) z.B. Kommutativgesetz, Assoziativgesetz etc.

Wir betrachten die Verknüpfung $\oplus$ genauer.

"Problem": Gleichungen $(a+x=b)$ lassen sich evtl. nicht nach x auflösen.

Lösung: Wir erweitern den Zahlenbereich zu $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$

Definition: Eine Menge G zusammen mit einer Verknüpfung $\circ$ heißt Gruppe: $\Leftrightarrow$

- a) Es gilt das Assoziativitätsgesetz
- b) Es gibt ein Element in G (nennen wir n) so dass $g \circ n = g$ für alle $g \in G$
- c) Für alle $g \in G$ gibt es ein g^{inv} so dass $g \circ g^{\text{inv}} = n$

Gruppen haben sehr interessante Eigenschaften ...

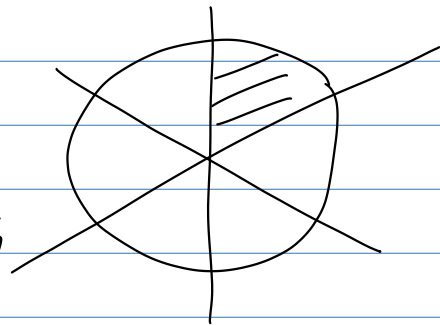
Die Menge der rationalen Zahlen

Wir erweitern $\mathbb{Z}$ so, dass sich auch Gleichungen der Form $ax = b$ lösen lassen. Für $a = 0$ ist dies ein Problem, ansonsten ist dies durch Erweiterung des Zahlenbereiches zu $\mathbb{Q} = \{\text{Brüche}\}$ möglich.

Die Menge der Brüche besteht aus

- 1) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$
- 2) Stammbrüche

Wir unterteilen das Ganze in mehrere (z.B. 6) gleich große Stücke.



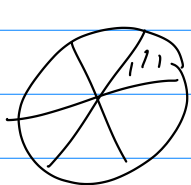
Schreibweise: Ein oder mehrere Ganze werden durch Elemente aus $\mathbb{N}$ repräsentiert.

Das Teil wird durch einen Stammbruch repräsentiert: $\frac{1}{6}$

- 3) Weiteren Brüchen: Man fügt mehrere identische Teile zusammen und erhält z.B. 3 Kuchenstücke, die jeweils $\frac{1}{6}$ des gesamten Kuchens ausmachen. Schreibweise: $\frac{3}{6}$

Man erkennt, dass dadurch eine Menge entsteht, in der sich dividieren, addieren, multiplizieren und subtrahieren lässt (solange man nicht durch 0 teilt).

Addieren:



$\frac{1}{6}$



Wir unterteilen das $\frac{1}{5}$ in 6 gleich große Stücke, und das $\frac{1}{6}$ in 5 gleich Stücke.

Dies ergibt ganz natürlich die Regeln für Addition und Subtraktion von Brüchen: Man sucht den Hauptnenner und addiert (subtrahiert) dann die Zähler.

Es ergibt sich auch in natürlicher Weise, dass der selbe Bruch auf verschiedene Arten dargestellt werden kann z. B. $\frac{3}{6}, \frac{1}{2}$ ("Erweitern + Kürzen").

Multiplikation von Brüchen: Natürliche Zahl mal Bruch ist klar:

$$5 \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{7} + \frac{3}{7} + \dots + \frac{3}{7} = \frac{15}{7}$$

Es ergibt sich: $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$

Was ergibt das Produkt eines Bruches mit Stammbruch?

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = a \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c} = a \cdot \frac{1}{b \cdot c}$$

Dadurch funktionieren die Rechenregeln in $\mathbb{Q}$ weiterhin.

$$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot 5 = \frac{1}{2} \quad \frac{1}{10} \cdot 5 = \text{Kreis mit Strich} = \frac{1}{2} \right)$$

"echter Bruch" · "echter Bruch"

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot c \cdot \frac{1}{d} = \frac{a \cdot c}{b} \cdot \frac{1}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Division:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

denn

$$\frac{a \cdot d}{b \cdot c} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \cdot c}{b \cdot c \cdot d} = \frac{a}{b}$$