

Die reellen Zahlen

In der Menge der rationalen Zahlen ist z.B. $x^2 = 2$ nicht lösbar!

Widerspruchsannahme: Es gibt einen Bruch $\frac{p}{q}$ mit $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$

Wir nehmen an, der Bruch ist vollständig gekürzt, d.h. p und q haben keinen gemeinsamen Teiler außer 1.

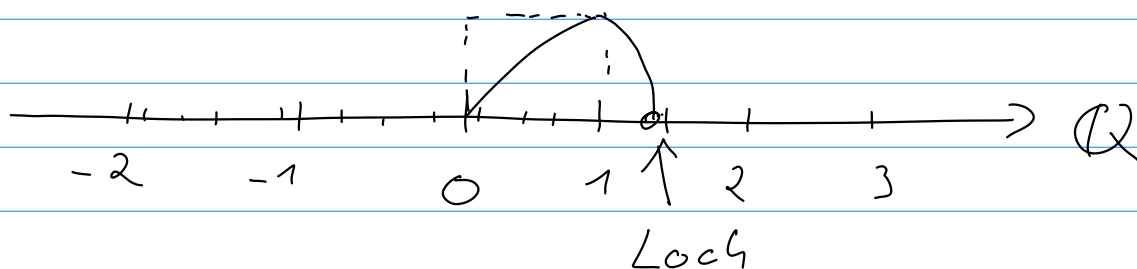
$$\text{Wenn } \left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2$$

$\Rightarrow p^2$ ist eine gerade Zahl.

$\Rightarrow p$ ist gerade, kann also als $p = 2r$ geschrieben werden, wobei r wieder natürliche Zahl ist.

$$\Rightarrow (2r)^2 = 2q^2 \Rightarrow 4r^2 = 2q^2 \Rightarrow 2r^2 = q^2$$

$\Rightarrow q^2$ ist gerade $\Rightarrow q$ ist gerade $\searrow$ zu p, q vollst. gekürzt.



Eine Möglichkeit, über $\sqrt{2}$ zu sprechen, ist die schrittweise Näherung von $\sqrt{2}$ durch geeignete Brüche. Häufig ist es hilfreich, sich von zwei Seiten zu nähern (Intervallschachtelung):

$\sqrt{2}$ liegt offenbar zwischen 1 und 2, da
 $1^2=1$ (zu klein) $2^2=4$ (zu groß)

$$\sqrt{2} \in [1; 2]$$

Probe die Mitte, also 1,5, aus
 $1,5^2=2,25$ ist zu groß

$$\Rightarrow \sqrt{2} \in [1; 1,5]$$

⋮

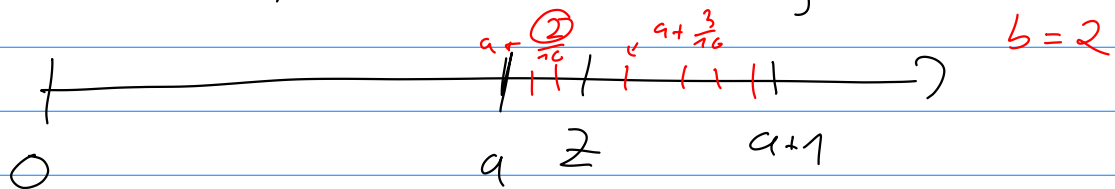
Durch die unendliche Folge von Intervallen wird $\sqrt{2}$ beschrieben.

Dezimalbrüche

Sowohl Brüche, als auch irrationale Zahlen (Zahlen aus $\mathbb{R}$ die keine Brüche sind) lassen sich mittels Dezimalentwicklung gut darstellen.

Sei z positiv: $z = a + \frac{b}{10} + \frac{c}{100} + \dots$

wobei $a \in \mathbb{N}_0$; b, c, d usw. $\in \{0, 1, \dots, 9\}$



Vorteil: Der Vergleich zweier Zahlen und dadurch die Angabe einer Zahl auf dem Zahlenstrahl, ist durch Dezimaldarstellung einfach möglich.

Satz: Jeder Bruch hat eine Dezimaldarstellung die abbricht oder periodisch ist.

Es gilt auch die Umkehrung: Falls die Dezimaldarstellung periodisch ist oder abbricht, beschreibt die Zahl einen Bruch.

Bsp: $\frac{3}{7}$

$30 : 7 = 0, \overline{428571}$
 $4 \times 7 = 28$
 20
 $2 \times 7 = 14$
 60
 $8 \times 7 = 56$
 40
 35
 50
 49
 10
 $+$
 30

Jeder Bruch hat eine natürliche Zahl n im Nenner.

Es gibt beim Dividieren als n mögliche Reste, nämlich $0, 1, \dots, n-1$

Beim Dividieren kommt irgendwann ein Rest ein zweites Mal vor und man kommt in eine Endlosschleife, außer der Rest wird Null $\Rightarrow$ bricht ab.

Dass jeder abbrechende Dezimalbruch ein Bruch beschreibt ist klar (endliche Summe von Brüchen)

Falls $x = a, b, c, \overline{def} = \frac{1}{100} \cdot \underbrace{abc, \overline{def}}_{abc + \frac{def}{999}}$

dazu: $0, \overline{13} \cdot 99 \stackrel{!}{=} 13$

$$\begin{aligned}
 0, \overline{13} \cdot (100 - 1) &= 13, \overline{131313} \dots \\
 - 0, \overline{131313} \dots & \\
 \hline
 &= 13, \overline{defdefdef} \dots \\
 - 0, \overline{defdefdef} \dots &= def
 \end{aligned}$$

Gleichungen und Ungleichungen

In jeder Gruppe ist die Gleichung $ax=b$ mit x auflösbar: $x = a^{-1} \circ b$

In "Körpern" also Mengen mit "schönen" $+$ und $\cdot$ -Verknüpfungen kann man das vielseitig nutzen:

$$\begin{array}{l} 2 \cdot (x-7) = 5 \\ (a' \circ \widetilde{x} = b) \end{array} \Rightarrow x-7 = \frac{1}{2} \cdot 5$$

$$x + (-7) = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow x = -(-7) + \frac{5}{2} = \frac{19}{2}$$

$$\begin{array}{l} 2 \cdot (x-7) = 5 \\ x-7 = \frac{5}{2} \end{array} \quad \begin{array}{l} | :2 \\ | +7 \end{array} \quad \begin{array}{l} \cdot \frac{1}{2} \\ - (-7) \end{array}$$

$$x = \frac{5}{2} + 7$$

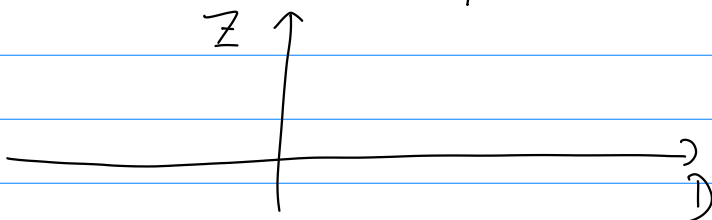
....

Wie sieht es mit Ausdrücken $f(x) = a$ aus?

Hier soll f eine Abbildungsvorschrift sein (Funktion)

$$\text{z.B. } f(x) = x^2 \quad f(x) = |x| \quad f(x) = e^x \dots$$

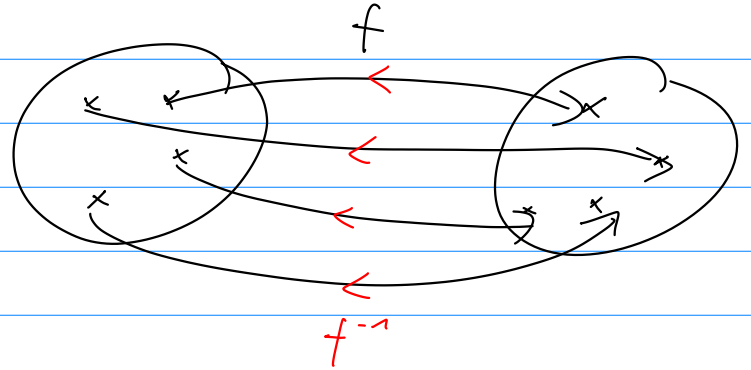
Das Auflösen nach x ist hier evtl. mit Hilfe einer Umkehrfunktion möglich, aber nicht jedes f besitzt eine solche und oft ist diese nicht "praktisch".



f ordnet genau einem Element der Definitionsmenge ein Element der Zielmenge zu.

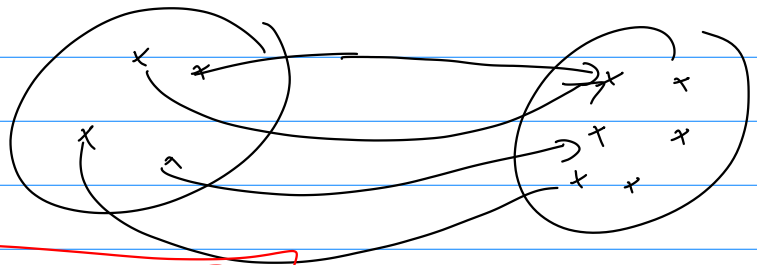
Falls es für jedes Element der Zielmenge Z genau ein Element der Definitionsmenge D gibt mit $f(d) = z$ so nennt man f umkehrbar.

$$f^{-1}(z) = d$$



Bsp : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ $f(x) = e^x$ ist umkehrbar.
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = e^x$ nicht umkehrbar.
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ $f(x) = x^2$ nicht umkehrbar

Falls wir ein Ausdruck $f(x) = a$ auflösen möchten, ist das für umkehrbare f unproblematisch: $x = f^{-1}(a)$



Bsp : $f(x) = x^2$ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$

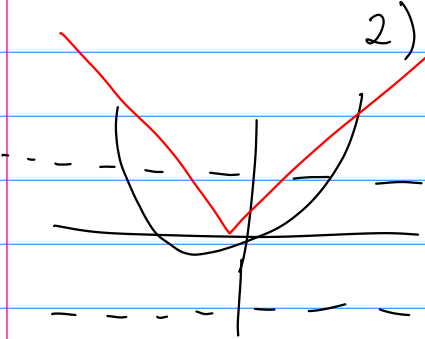
Es gibt zwei mögliche Probleme:

1) $x^2 = -3$ liegt nicht im Wertebereich von x^2

keine Lösung

2) $x^2 = 4$

$x = \pm 2$ Lösung nicht eindeutig.



$$|x| = -3$$

$$|x| = 4$$



$$x = \pm 4$$

Bsp : $f(x) = x^3$ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist umkehrbar.

$$x^3 = -2 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2}$$

* Falls $x = e^+$ Lunt es fur + Problem geben