

Donnerstag und Freitag Übungen (9.10. + 10.10.)

$$N 14 \rightarrow H 2 C 14$$

H-Gebäude

$$N 15 \rightarrow N 16$$

Ungleichungen

z.B. Wir suchen alle Werte von $x \in \mathbb{R}$, so dass

$$x - 2 > 3$$

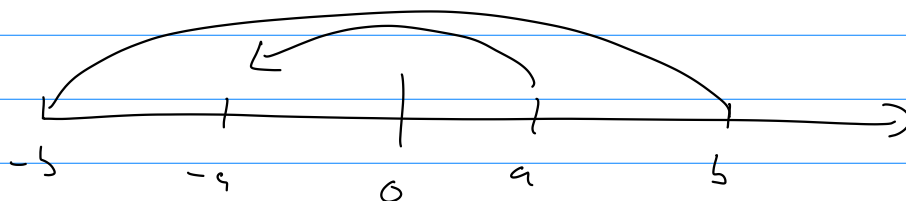
Addition + Subtraktion sind Äquivalenzumformungen, d.h. sie fñhren die Gleichung um wobei die Lösungsmenge bleibt.

$$x - 2 > 3 \quad | +2 \quad (\Leftrightarrow) \quad x > 3 + 2 \quad (\Leftrightarrow) \quad x > 5$$
$$\mathbb{L} = \{x : x > 5\} =]5, \infty[$$

Multiplikation mit positiven Faktoren, Division durch positive Ausdrñcke ebenso.

Ein negativ Faktor dreht das Zeichen der Ungleichung um

$$-x < 2 \quad | \cdot (-1) \quad (\Leftrightarrow) \quad x > -2$$



Monotonieverhalten

Eine Funktion heißt monoton steigend falls

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

Eine Funktion f heißt streng monoton steigend falls

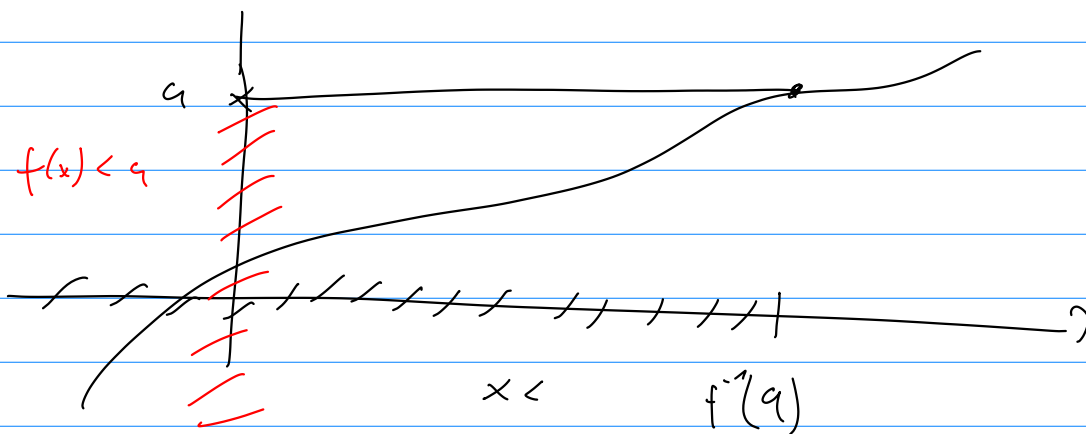
$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

(äquivalent zu $x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$)

(Streng) monoton fallend wird entsprechend definiert.

Bsp: Falls f streng monoton steigend, ist folgende Äquivalenz umformung möglich (falls f umkehrbar)

$$\begin{aligned} f(x) < a &\Leftrightarrow f(x) < f(f^{-1}(a)) \\ &\Leftrightarrow x < f^{-1}(a) \end{aligned}$$



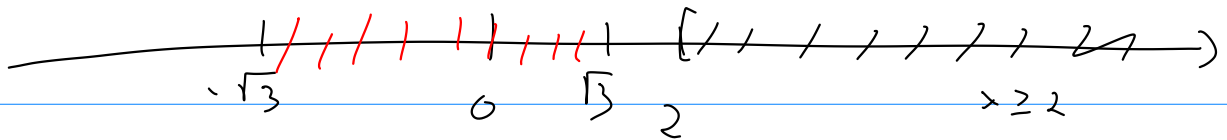
Bsp: $(2-x)^2 < 3$

Die quadratische Funktion ist auf $]-\infty, 0]$ streng monoton fallend, auf $[0, +\infty[$ streng monoton steigend.

Fallunterscheidung:

1. Fall: $(2-x) \leq 0 \Leftrightarrow -x \leq -2 \Leftrightarrow x \geq 2$

Damit auch $(2-x)^2 < 3$ erfüllt ist



$$(2-x)^2 < 3 \Leftrightarrow 2-x \in]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[\quad \mathbb{I}_1 = \emptyset$$

2. Fall: $(2-x) > 0$

$$\Leftrightarrow x < 2$$

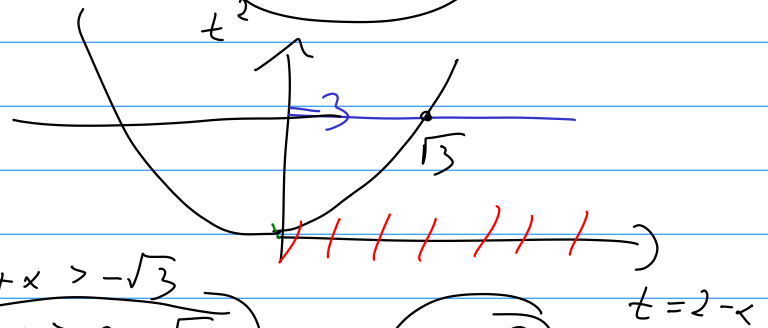
$$(2-x)^2 < 3$$

$$t < \sqrt{3}$$

$$(2-x) < \sqrt{3} \Rightarrow -2+x > -\sqrt{3}$$

$$x > 2 - \sqrt{3}$$

$$x < 2$$

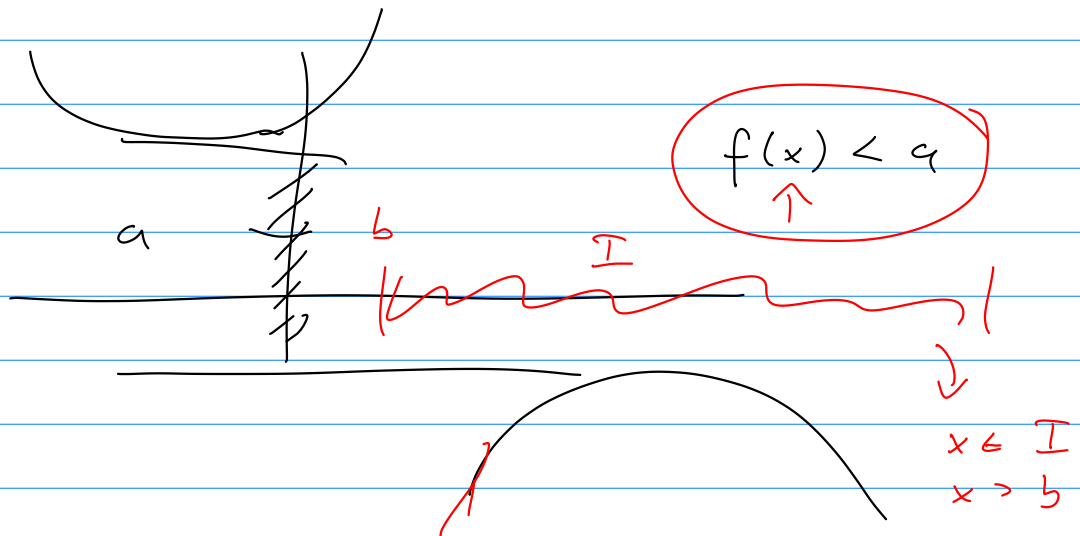


Andere Fall: $t > -\sqrt{3}; x \geq 2$

Bsp: $e^x > -2$

$\ln(-2)$ existiert nicht.

Da e^x immer positiv ist, ist dies immer erfüllt.



Summen, Produkte, Vollständige Induktion

Motivation: Eine Schildkröte läuft bei $x_0 = 0$ los.

Bei $t=1$ ist sie bei $x_1 = \frac{1}{2}$ angekommen

Bei $t=2$ bei $x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

usw, d.h. die Schildkröte halbiert weiterhin nach jedem Zeitschritt die Geschwindigkeit.

Zum Zeitpunkt t ist sie also bei:

$$\rightarrow x_t = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^t$$

Schreibweise:

$$\sum_{j=1}^t \left(\frac{1}{2}\right)^j$$

$\sum_{j=a}^b f(j)$ ist also folgendes: Man startet

mit j bei a und summiert die Werte $f(j)$ bis man bei $j=b$ angekommen. ($j \in \mathbb{Z}$)

Selbiges geht natürlich auch mit Produkten ($\prod$ statt $\sum$)

$$\prod_{j=1}^t 4+j = (4+1) \cdot (4+2) \dots \cdot (4+t)$$

Prinzip der vollständigen Induktion

Bei diesem Beweisprinzip geht es darum, Formeln (Aussagen) die von einer Variablen $n \in \mathbb{N}$ ab hängen für alle $n \in \mathbb{N}$ zu beweisen.

Bsp: $\sum_{j=1}^n j^2 = n(n+1)(2n+1) : 6$

$$n=1 \quad \sum_{j=1}^1 j^2 = 1^2 = 1$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 / 6 = 1 \quad \checkmark$$

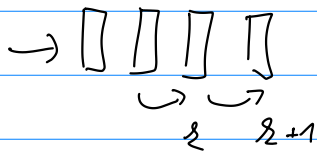
$$n=2 \quad \sum_{j=1}^2 j^2 = 1^2 + 2^2 = 5$$

$$2 \cdot 3 \cdot 5 / 6 = 5$$

Eine Möglichkeit, die Formel für alle $n \in \mathbb{N}$ nachzuweisen, ist die folgende:

- 1) Wir zeigen, dass die Formel für $n=1$ gilt.
- 2) Wir zeigen folgendes: Falls die Formel für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$ gilt, so gilt sie auch für $k+1$

⇒ Formel gilt für alle $n \in \mathbb{N}$



Vergleiche Darmiospiel

Zurück zu Formel: Wir führen Schritt 2 durch
(1 bereits erledigt)

(Induktions-)Annahme: "Stein k fällt" d.h. die Formel gilt für $n=k$:

$$\sum_{j=1}^k j^2 = k(k+1)(2k+1)/6 \quad \text{Annahme}$$

Es gilt zu zeigen dass dann "Stein $k+1$ fällt"
d.h. zu zeigen, dass die Formel für $k+1$ gilt

$$\text{z.z.} \quad \sum_{j=1}^{k+1} j^2 = (k+1)(k+1+1)(2(k+1)+1)/6$$

$$\sum_{j=1}^{k+1} j^2 = \sum_{j=1}^k j^2 + (k+1)^2 \quad \text{Annahme} \quad = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = (*)$$

$$\underbrace{1 + 4 + 9 + 16 + \dots + k^2}_{\sum_{j=1}^k j^2} + (k+1)^2$$

$$(*) = \frac{k(k+1)(2k+1) + (k+1)6(k+1)}{6} = \frac{k+1}{6} (k(2k+1) + 6(k+1)) =$$

$$= \frac{k+1}{6} [2k^2 + k + 6k + 6] = \frac{k+1}{6} [2k^2 + 7k + 6]$$

$$\checkmark \frac{k+1}{6} (k+1+1)(2(k+1)+1) = \frac{k+1}{6} (k+2)(2k+3) =$$

$$\frac{k+1}{6} [2k^2 + 4k + 3k + 6] = \frac{k+1}{6} [2k^2 + 7k + 6]$$

Bsp: $\sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2}$

$n = 100$ Trick von Gauß: $\underbrace{1}_{\text{blau}} + \underbrace{2}_{\text{rot}} + 3 + 4 + \dots + \underbrace{50}_{\text{grün}} + \underbrace{51}_{\text{grün}} + \dots + \underbrace{99}_{\text{rot}} + \underbrace{100}_{\text{blau}}$
 $= 50 \cdot 101 = \frac{100}{2} \cdot 101$

Induktionsbeweis: 2)

Annahme: $\sum_{j=1}^k j = \frac{k(k+1)}{2}$

z.z.: $\sum_{j=1}^{k+1} j = \frac{(k+1)(k+1+1)}{2}$

$$\sum_{j=1}^{k+1} j = \sum_{j=1}^k j + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2} = \frac{k+1}{2} (k+2) \quad \checkmark$$

1) $\sum_{j=1}^1 j \stackrel{?}{=} \frac{1(1+1)}{2} \quad \checkmark$

Bemerkung: Das Beweisprinzip lässt sich anpassen bzw. verallgemeinern, z.B. könnte man bei einer anderen Zahl beginnen z.B.

$$x+2 < 2^x \quad \text{für alle } x \in \{3, 4, \dots\}$$

Auch Induktion über mehrere Variablen ist möglich
z.B. 22. Eintrag im Pascal'schen Dreieck ist $\binom{n}{2}$

$$n=0 \rightarrow \begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \end{array}$$

Die geometrische Reihe

Zurück zu Schildkröte: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^t = \sum_{j=1}^t \left(\frac{1}{2}\right)^j$

Reihen der Form $\sum_{j=1}^t q^j$ nennt man geometrische Reihe.

Für geometrische Reihen gibt es einen Berechnungstrick:

"Teleskopsumme":

Berechne $(q + q^2 + q^3 + \dots + q^t) \cdot (1 - q) =$

$$(q - q^2) + q^2 - q^3 + q^3 - q^4 + \dots + q^t - q^{t+1} = q - q^{t+1}$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^t q^j = \frac{q - q^{t+1}}{1 - q} \quad (\text{falls } q \neq 1)$$

Für $q=1$ ist $\sum_{j=1}^t 1^j = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{t\text{-mal}} = t$

Für die Teilbarkeit gilt

$$x_t = \frac{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{t+1}}{1 - \frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{t+1}\right) \cdot 2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^t$$

Ähnlich lässt sich $\sum_{j=a}^b q^j$ für $a, b \in \mathbb{Z}$ berechnen.