

Funktionen

Fkt: Jedem Element aus D wird genau ein Element aus Z zugeordnet.

Grenzwert + Stetigkeit

Der linksseitige Limes einer Funktion f bei Annäherung an $a \in D$ ist der Wert, an den sich $f(x)$ nähert, wenn x sich von links an a nähert.

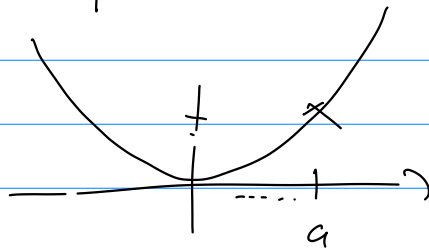
Soll eindeutig sein!

Der rechtsseitige Limes wird analog definiert

Schreibweise: $\lim_{\substack{x \rightarrow a-0 \\ x \nearrow a}} f(x) = b \quad (\text{linksseitig})$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a+0 \\ x \searrow a}} f(x) = b \quad (\text{rechtsseitig})$$

Bsp: a) $f(x) = x^2$

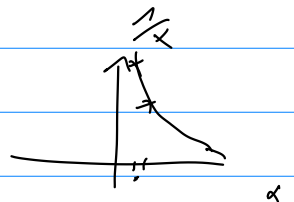
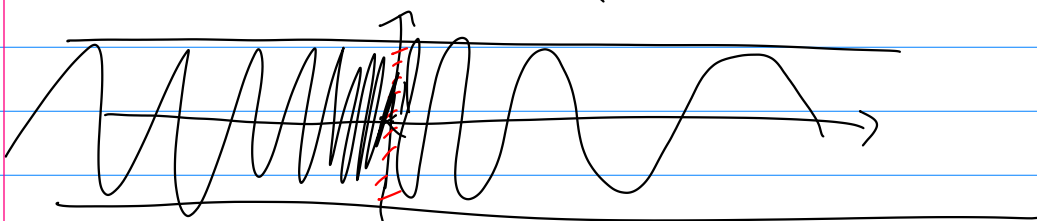


$$\lim_{x \nearrow a} f(x) = a^2$$

$$\lim_{x \searrow a} f(x) = a^2$$

b) $f(x) = \sin \frac{1}{x}$

$$a = 0$$



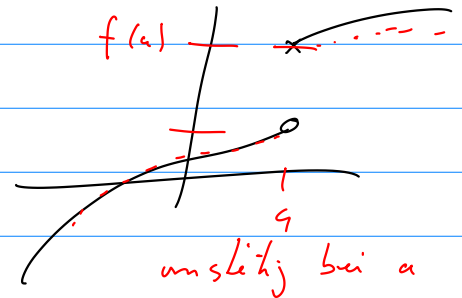
Der $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ existiert nicht. Die Funktion nähert sich in gewissem Sinne den ganzen Intervall $[-1, 1]$ an, nicht einem eindeutig festgelegten Wert!

Falls linksseitiges und rechtsseitiges Limes existieren und gleich sind, nennt man den Wert auch Limes der Funktion bei a

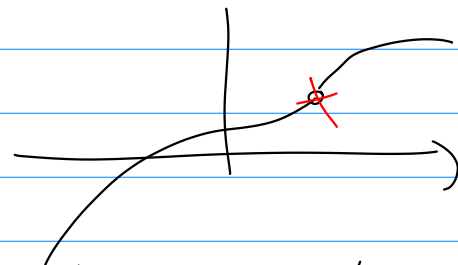
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad ; (\Leftrightarrow) \quad \lim_{x \nearrow a} f(x) = \lim_{x \searrow a} f(x) = b$$

Eine Funktion heißt stetig an der Stelle a , falls

$$\lim_{x \nearrow a} f(x) = \lim_{x \searrow a} f(x) = f(a)$$



Sei $f : D \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$



Falls $\lim_{x \nearrow a} f(x) = \lim_{x \searrow a} f(x)$ ist, so nennt man f stetig fortsetzbar.

Bsp: $f(x) = \frac{1}{\frac{1}{x}}$

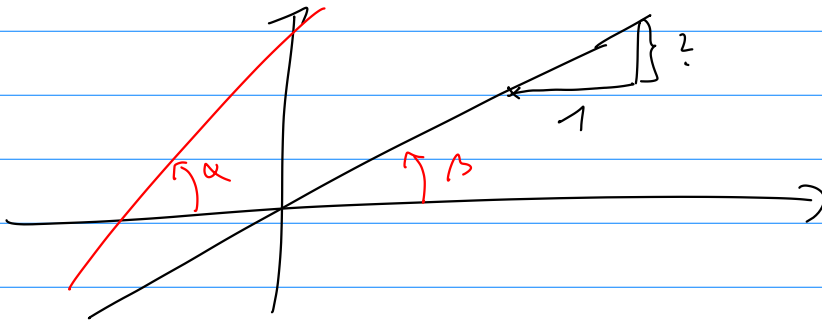
$$D_{\max} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Stetige Fortsetzung: $g(x) = x$ $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

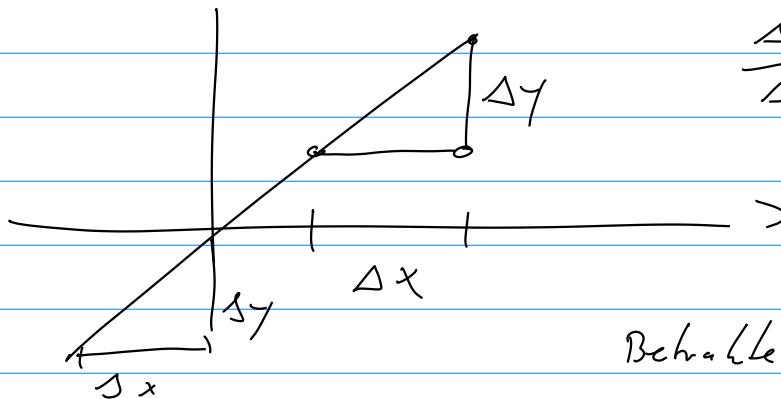
$$\forall x \neq 0 \text{ ist } \frac{1}{\frac{1}{x}} = 1 \cdot \frac{x}{1} = x$$

Steigung

Wie misst man von Funktionen die Steigung bestimmen.
Zunächst lineare Funktionen:



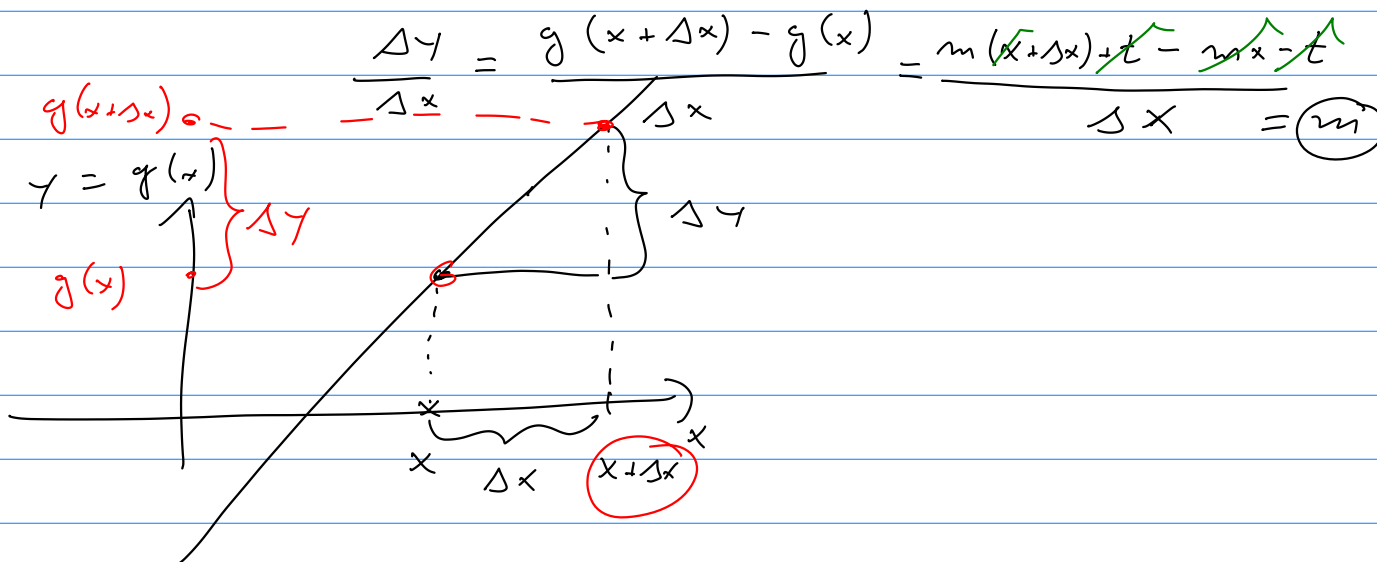
Es gibt mehrere Möglichkeiten über die Steigung zu sprechen. Aus vielerlei Gründen ist die Angabe des Verhältnisses aus y -Änderung zu x -Änderung sinnvoll.



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m$$

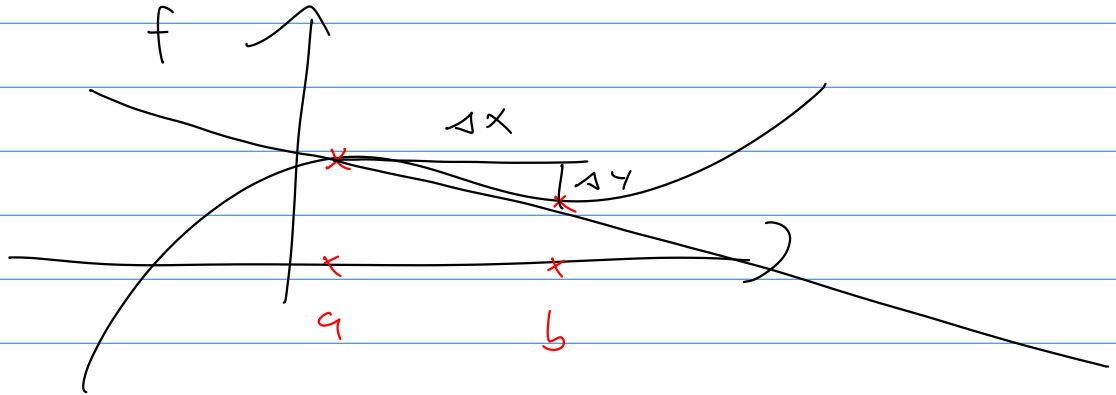
$$y = \underline{m}x + \underline{t} = g(x)$$

Behalte $g(x)$ und $g(x+\Delta x)$



Sekantensteigung

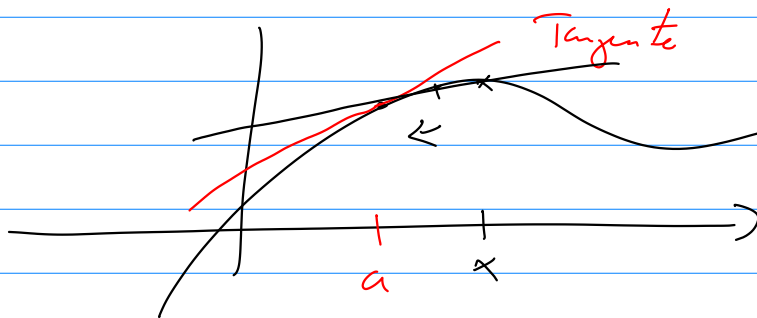
Für allgemeine Funktionen lässt sich die Sekantensteigung durch zwei Punkte mittels $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ bestimmen



Gegeben a und b erhält man für die Sekantensteigung

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \left(= \frac{f(a) - f(b)}{a - b} \right)$$

Tangentensteigung



Frage: Was ist die Steigung der Tangente?

Idee: Wir bestimmen die Sekantensteigung zu a und x. Dann lassen wir x gegen a wandern, also bilden den Limes dieses Ausdrucks für $x \rightarrow a$.

Tangentensteigung: $m = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\Delta y^{(x,a)}}{\Delta x^{(x,a)}}$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Uns beschäftigt also die Frage, ob dieser Limes existiert.

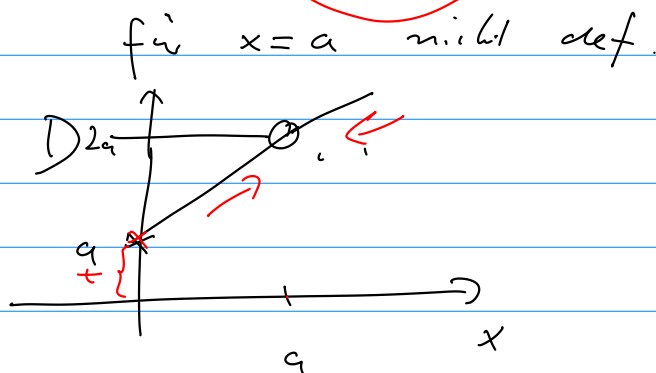
Bsp. $f(x) = x^2$

Wir betrachten den Ausdruck

$$\frac{x^2 - a^2}{x - a} = 1$$

$$\frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{(x+a)(x-a)}{x-a}$$

für $x \neq a$ $= x + a$



$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 2a$$

Definition: Falls der Limes $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existiert,

so nennt man f an der Stelle a differenzierbar (ableitbar). Der Wert, den der $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

ergibt nennt man Ableitung von f an der Stelle a .

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Für $f(x) = x^2$

gilt

$$f'(a) = 2a$$

$$f'(x) = 2x$$

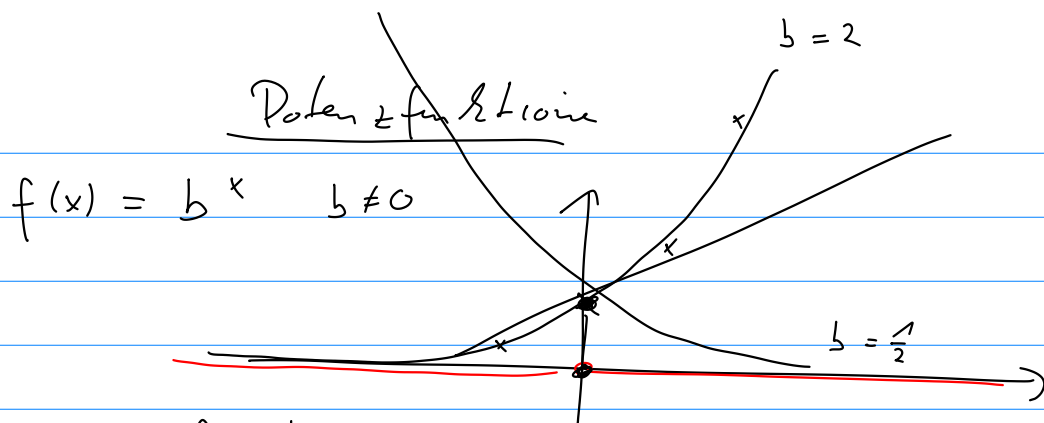
Bsp: $f(x) = x^n$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = (*)$$

Teleskop: $(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \dots + a^{n-1}) \cdot (x - a) = x^n - a^n$

$$\Rightarrow \frac{x^n - a^n}{x - a} = x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \dots + a^{n-1}$$

$$(*) = \lim_{x \rightarrow a} x^{n-1} + x^{n-2}a + \dots + a^{n-1} = n \cdot a^{n-1}$$



Jener Wert für b , bei dem die Steigung an der Stelle $a=0$ genau 1 ergibt, nennt man Eulersche Zahl e .

Für $e^x = f$ gilt per Definition $f'(0) = 1$

Für $a \neq 0$ ist die Ableitung:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x - e^a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} e^a \left(\frac{e^{x-a} - 1}{x - a} \right) =$$

$$\textcircled{e^a} \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^{x-a} - 1}{x - a} = e^a \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} \quad (h = x - a)$$

$$= e^a \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - e^0}{h - 0} = e^a \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0}}_{f'(0) := 1}$$

Für alle Potenzfunktion gilt: $(b^x)' = (b^x)'|_0 \cdot b^x$

Falls $f(x) = b^x$ ist gilt: $f'(x) = f'(0) \cdot b^x$

Ableitungsregeln:

Summationsregel: $f(x) = g(x) + h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x)$

z.B.: $f(x) = x^2 + 3x \quad f'(x) = 2x + 3$

Warum? $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) + h(x) - (g(a) + h(a))}{x - a} =$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} + \frac{h(x) - h(a)}{x - a}$$

$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$
 $g'(a) \qquad \qquad h'(a)$

Multiplikationsregel: Falls $f(x) = b \cdot g(x)$ (für $b \in \mathbb{R}$)
so ist $f'(x) = b \cdot g'(x)$

$$g(x) = 5x^2 \Rightarrow g'(x) = 10x$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{b \cdot g(x) - b \cdot g(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} b \underbrace{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}}_{\rightarrow g'(a)} = b \cdot g'(a)$$

Produktregel: Sei $f(x) = g(x) \cdot h(x)$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) \cdot h(x) - g(a) \cdot h(a)}{x - a} =$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cancel{g(x)} \cdot h(x) - \cancel{g(x)} \cdot h(a) + g(x) \cdot \cancel{h(a)} - g(a) \cdot \cancel{h(a)}}{x - a}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) \underbrace{\left(\frac{h(x) - h(a)}{x - a} \right)}_{\downarrow h'(a)} + h(a) \underbrace{\left(\frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right)}_{\downarrow g'(a)} = g(a)h'(a) + h(a)g'(a)$$

Bsp : $f(x) = x^2 \cdot e^x$

$$f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 e^x$$