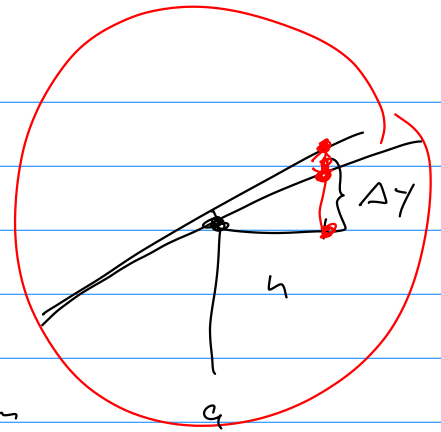
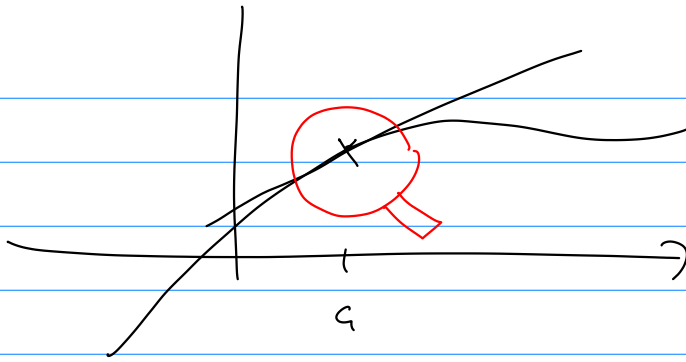




In einer kleinen Umgebung um a herum ist f in sehr guter Näherung gegeben durch:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

$$f(a+h) = f(a) + h \cdot f'(a)$$

$\frac{\Delta y}{h} \approx f'(a)$

Produktregel: $f = g \cdot j$

$$f(a+h) = g(a+h) \cdot j(a+h) \approx (g(a) + h \cdot g'(a)) \cdot (j(a) + h \cdot j'(a))$$

$$\approx g(a) \cdot j(a) + h \cdot g(a) \cdot j'(a) + h \cdot g'(a) \cdot j(a) + h^2 \cdot g'(a) \cdot j'(a)$$

Vernachlässigbar

$$\approx f(a) + h \cdot f'(a)$$

Kettenregel:

Sei $f(x) = g(j(x))$. Gesucht: $f'(x)$ als Ausdruck von j, j', g', j'

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(j(x)) - g(j(a))}{x - a} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{[g(j(x)) - g(j(a))] \cdot [j(x) - j(a)]}{[x - a] \cdot [j(x) - j(a)]} = g'(j(a)) \cdot j'(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(j(x)) - g(j(a))}{j(x) - j(a)} = \lim_{\substack{j(x) \rightarrow j(a) \\ y \rightarrow b}} \frac{g(y) - g(b)}{y - b} = g'(b) = g'(j(a))$$

$$j(a+h) \approx j(a) + h j'(a)$$

Lineare Approx: $f(a+h) = g(j(a+h)) \approx g(\underbrace{j(a)}_b + \underbrace{h j'(a)}_{\tilde{h}}) =$
 $= g(b + \tilde{h}) = g(b) + \tilde{h} g'(b) = \underbrace{g(j(a))}_{f(a)} + h \cdot \underbrace{j'(a) g'(j(a))}_{f'(a)}$

$$f(a+h) \approx f(a) + h f'(a)$$

Bsp: $f(x) = e^{x \sin(x)} = e^{+(x)}$
 Verkettung

$$+(x) = x \cdot \sin x$$

Produkt

$$NR: t'(x) = \sin x + x \cos(x)$$

Außere Funktion: e^x

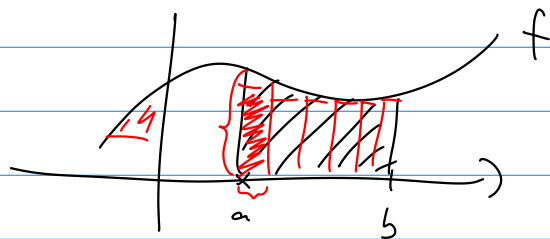
Innere Funktion: $+(x)$

$$f'(x) = e^{+(x)} \cdot t'(x) = e^{x \sin x} \cdot (\sin x + x \cos x)$$

Zum Thema Ableitung gibt es viele Anwendungen, z.B. Suche von Extrema ect.

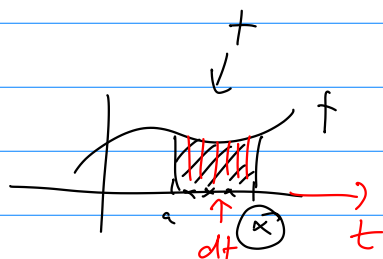
Integration

Gegeben eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Wir möchten die Fläche unter der Kurve zwischen a und b berechnen



Hauptsatz 2: Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

a) Sei $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, d.h. die Fläche unter f zwischen a und x .



Dann ist $F'(x) = f(x)$

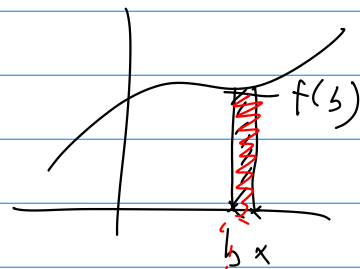
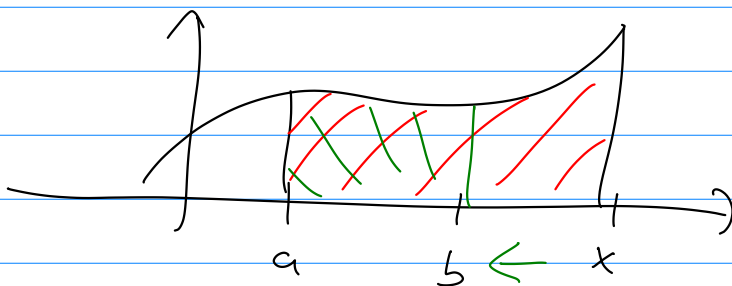
b) Falls G eine Stammfunktion von f ist, d.h.

$$G'(x) = f(x) \quad \text{dann ist}$$

$$F(x) = G(x) - G(a)$$

Begleitung für a): $F'(b) = \lim_{x \rightarrow b} \frac{F(x) - F(b)}{x - b} = \lim_{x \rightarrow b} \frac{\int_a^x f(t) dt - \int_a^b f(t) dt}{x - b}$

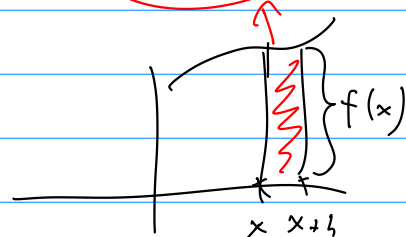
$$= \lim_{x \rightarrow b} \frac{\int_b^x f(t) dt}{x - b} = \lim_{x \rightarrow b} \frac{(x - b) \cdot f(b)}{x - b} = f(b)$$



Lineare Approx: $F(x+h) = F(x) + h \cdot F'(x)$

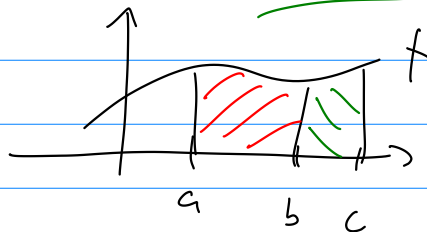
$$F(x+h) = \int_a^{x+h} f(t) dt = \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+h} f(t) dt$$

$$= F(x) + h \cdot f(x)$$



Berechnung von Integralen

Regel 1)
$$\int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt = \int_a^c f(t) dt$$



Wir definieren für $b < a$:
$$\int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt$$

 Dann gilt 1) allgemein.

2)
$$\int_a^a f(t) dt = 0$$
 folgt direkt aus 1.

Linearität
$$\left\{ \begin{array}{l} 3) \int_a^b c f(t) dt = c \int_a^b f(t) dt. \quad (\text{folgt aus Hauptsatz}) \\ 4) \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt = \int_a^b [f(t) + g(t)] dt \end{array} \right.$$

 (folgt aus Hauptsatz)

5) Substitutionsregel ("Umkehrung" der Kettenregel)

$$\int_a^b f'(g(x)) g'(x) dx = f(g(b)) - f(g(a))$$

bzw $\rightarrow \int_a^b h(g(x)) \cdot g'(x) dx = H(g(b)) - H(g(a))$

$$\boxed{H' = h}$$

Kettenregel:
$$\underbrace{[f(g(x))]}_{\substack{\text{d.h.} \\ \text{Beim Integrieren}}} = \underbrace{f'(g(x)) \cdot g'(x)}_{\substack{\text{gesucht} \\ \text{Integrand da zu}}}$$

Beim Integrieren

gesucht

gegeben

Bsp:
$$\int_0^1 e^{x^2} \cdot 2x dx = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{g(x)} \cdot g'(x) dx$$

$$g(x) = x^2 \Rightarrow g'(x) = 2x$$

$$h(x) = e^x \quad H = e^x$$

$$= \frac{1}{2} [e^{x^2}]_0^1 = \frac{1}{2} (e^1 - e^0) = \frac{1}{2} (e - 1)$$

Bsp:

$$\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{t}\right)}{t^2} dt = \int_{\pi}^{2\pi} \cos\left(\frac{2\pi}{t}\right) \cdot \frac{1}{t^2} dt$$

$$\int_a^b h(g(x)) g'(x) dx = [H(g(x))]_a^b$$

$$g(t) = \frac{2\pi}{t}$$

$$g'(t) = -\frac{2\pi}{t^2}$$

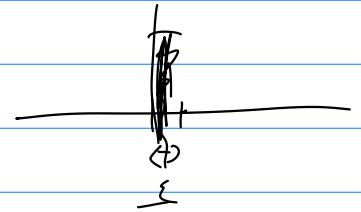
$$= -\frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \cos\left(\frac{2\pi}{t}\right) \cdot \frac{(-2\pi)}{t^2} dt =$$

$$h(x) = \cos(x)$$

$$H(x) = \sin(x)$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} h(g(t)) \cdot g'(t) dt = -\frac{1}{2\pi} [H(g(t))]_{\pi}^{2\pi}$$

$$= -\frac{\sin(1)}{2\pi} + \frac{\sin 2}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} (\sin 2 - \sin 1)$$



5) Auch die Produktregel lässt sich umdrehen.
Man erhält die sogenannte partielle Integration

$$\text{Produktregel: } [f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\text{bzw falls } f = H \quad \text{d.h. } f' = h$$

$$[f(x) \cdot g(x)]' = h(x) \cdot g(x) + H(x) \cdot g'(x)$$

$$\text{Part. Int: } \int_a^b h(x) \cdot g(x) + H(x) \cdot g'(x) dx = [H(x) \cdot g(x)]_a^b$$

$$\text{bzw: } \int_a^b h(x) \cdot g(x) dx = [H(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b H(x) g'(x) dx$$

$$\text{Bsp.: } \int_0^1 \underbrace{e^{x^2}}_{\text{}} \cdot x^3 dx = \int_0^1 \underbrace{x}_{\text{}} \cdot \underbrace{e^{x^2}}_{\text{}} \cdot \underbrace{x^2}_{\text{g}} dx = \textcircled{*}$$

Für $h = \underbrace{x \cdot e^{x^2}}_{\text{}}$ hatten wir oben eine Stfkt gefunden
nämlich $e^{x^2} \cdot \frac{1}{2} = H$

$$\textcircled{*} = \left[H(x) \cdot x^2 \right]_0^1 - \int_0^1 \underbrace{\frac{1}{2} e^{x^2}}_{\text{}} \cdot \underbrace{2x}_{\text{}} dx$$

Integral haben wir bereits
berechnet.

$$\left(\frac{1}{x} \right)' = -\frac{1}{x^2}$$

Quotientenregel:

$$\begin{aligned} \text{Betrachte } \left(\frac{n(x)}{z(x)} \right)' &= \left(n(x) \cdot \frac{1}{z(x)} \right)' = \left(n(x) \cdot t(x) \right)' = \\ &= n'(x) \cdot t(x) + n(x) \cdot t'(x) = \end{aligned}$$

$$t(x) = \frac{1}{z(x)}$$

$$t'(x) = -\frac{1}{z(x)^2} \cdot z'(x)$$

$$= \frac{n'(x)}{z(x)} - \frac{n(x) z'(x)}{z(x)^2} = \frac{n'(x) \cdot z(x) - n(x) z'(x)}{z(x)^2}$$