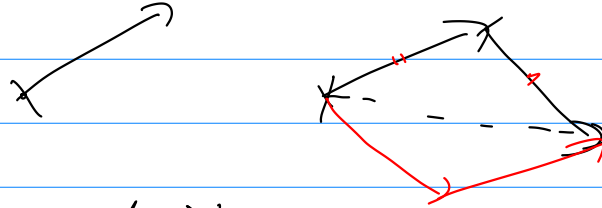


Vektorräume

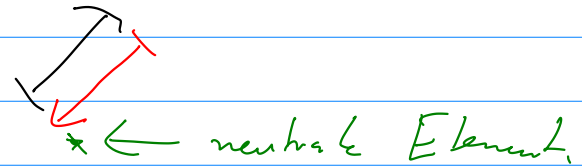
Gegeben sei die Menge von Pfeilen in der Ebene, wobei wir die Stelle, an der der Pfeil beginnt außer Acht lassen.



Zwei Pfeile werden addiert, indem man die Spitze des einen Pfeils mit dem Fuß des anderen zusammenlegt. Reihenfolge ist egal! (Parallelogrammregel)

Die Verknüpfung ("Addition" der Pfeile) besitzt ein neutrales Element, den Pfeil, bei dem Spitze = Fuß.

Für jeden Pfeil hat man ein inverses Element: Man vertauscht Fuß + Spitze



Man erhält also eine kommutative Gruppe.

Auf ganz natürliche Art definiert sich eine Multiplikation der Vektoren mit beliebigen reellen Zahlen:

"Ich führe die Verschiebung 3-mal aus"

Dabei handelt es sich um eine äußere Verknüpfung:

Input: Zahl, Pfeil

Output: Pfeil

Das neutrale Element aus dem Körper wirkt auch auf die Pfeile neutral: $1 \cdot \vec{p} = \vec{p}$

Es gelten weitere Gesetze:

$$a) \lambda \cdot (\mu \vec{p}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{p}$$

$$b) (\lambda + \mu) \vec{p} = \lambda \vec{p} + \mu \vec{p}$$

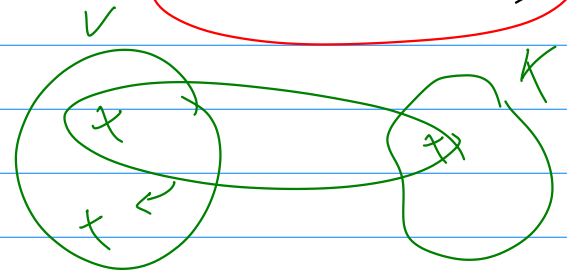
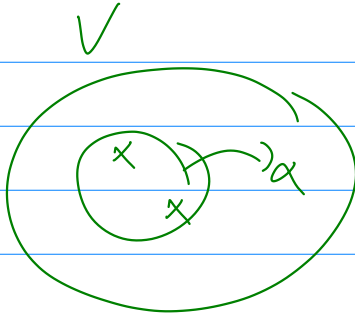
$$c) \lambda \cdot (\vec{p} + \vec{q}) = \lambda \vec{p} + \lambda \vec{q}$$

Assoziativgesetz

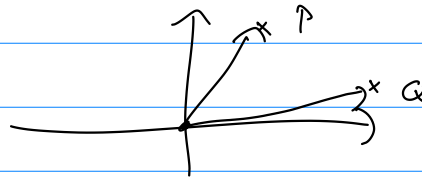
Distributivgesetz I

Distributivgesetz II

Definition: Sei K ein Körper. Eine Menge V zusammen mit einer (inneren) Verknüpfung $\oplus$ und einer äußeren Verknüpfung $\cdot$ heißt Vektorraum, falls all die obigen schönen Eigenschaften gelten.
(d.h. V mit $+$ ist kommutative Gruppe, 1 wirkt neutral, es gelten $A + DI + DII$)



Bsp: a) Die Ebene bzw. der Raum lassen sich ebenfalls als Vektorräume verstehen, : Für jeden Punkt in der Ebene betrachten wir den Pfeil mit Fuß im Ursprung und Spitze am Punkt (Ortsvektor)



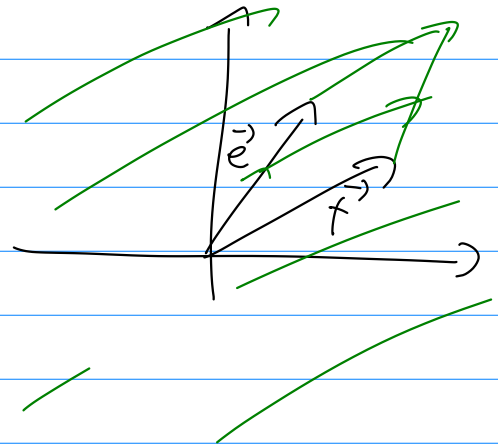
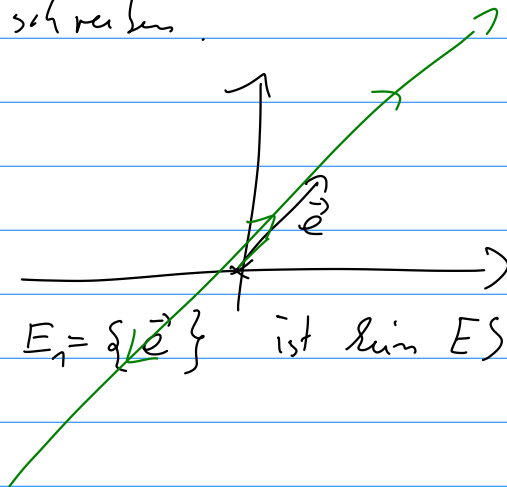
b) Die Menge aller Polynome ergibt mit der Addition von Polynomen und der Multiplikation mit Zahlen ein Vektorraum.

Erzeugendensystem

Eine Teilmenge E eines Vektorraumes V heißt Erzeugendensystem, wenn sich durch (endlich viele) Additionen und Multiplikation mit Skalaren der ganze Vektorraum V erzeugen lässt, d.h. jeder Vektor $\vec{v} \in V$ lässt sich schreiben als

$$\sum_{\vec{e}_i \in E} \lambda_i \vec{e}_i = \vec{v}$$

schreiben.



$E_2 = \{\vec{e}, \vec{f}\}$ mit $\vec{e} \neq \vec{f}$ erzeugt die ganze Ebene.

Ein minimales Erzeugendensystem, d.h. ein ES bei dem kein Vektor "unnötig" ist, nennt man Basis. Unnötig bedeutet hier, dass ein Rausschmeißen des Vektors nicht verhindert, dass die Menge E.S. bleibt.

Satz: Ein E.S. ist minimal, falls es linear unabhängig ist (und andersrum)

Wenn man eine Basis hat, lässt sich jeder Vektor auf eindeutige Weise durch Koordinaten angeben:

$$\vec{v} = \sum_{j=1}^n \lambda_j \vec{b}_j$$

falls $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$ Basis.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

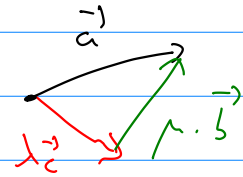
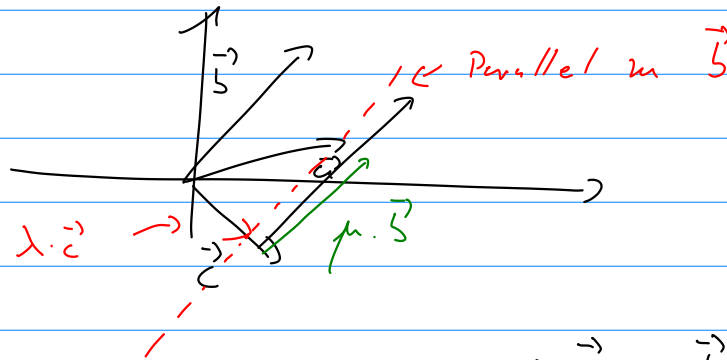
Eine Menge $M \subset V$ heißt linear unabhängig,

falls sich der Nullvektor nur auf triviale Art durch Elemente aus M kombinieren lässt.

$$\vec{0} = \sum_{j=1}^n 0 \cdot \vec{m}_j$$

$$M = \{\vec{m}_1, \dots, \vec{m}_n\}$$

Bsp:



$$1 \cdot \vec{a} - \mu \vec{b} - \lambda \vec{c} = \vec{0}$$

$\Rightarrow$ linear abhängig.

Bem: Wenn man eine Basis hat ist die Koordinatendarstellung eindeutig! Wäre $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_B$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}_B$ mit

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$$

so wäre $\vec{0} = \vec{v} - \vec{v} = \begin{pmatrix} a-d \\ b-e \\ c-f \end{pmatrix}_B =$

$$= (a-d)\vec{b}_1 + (b-e)\vec{b}_2 + (c-f)\vec{b}_3$$

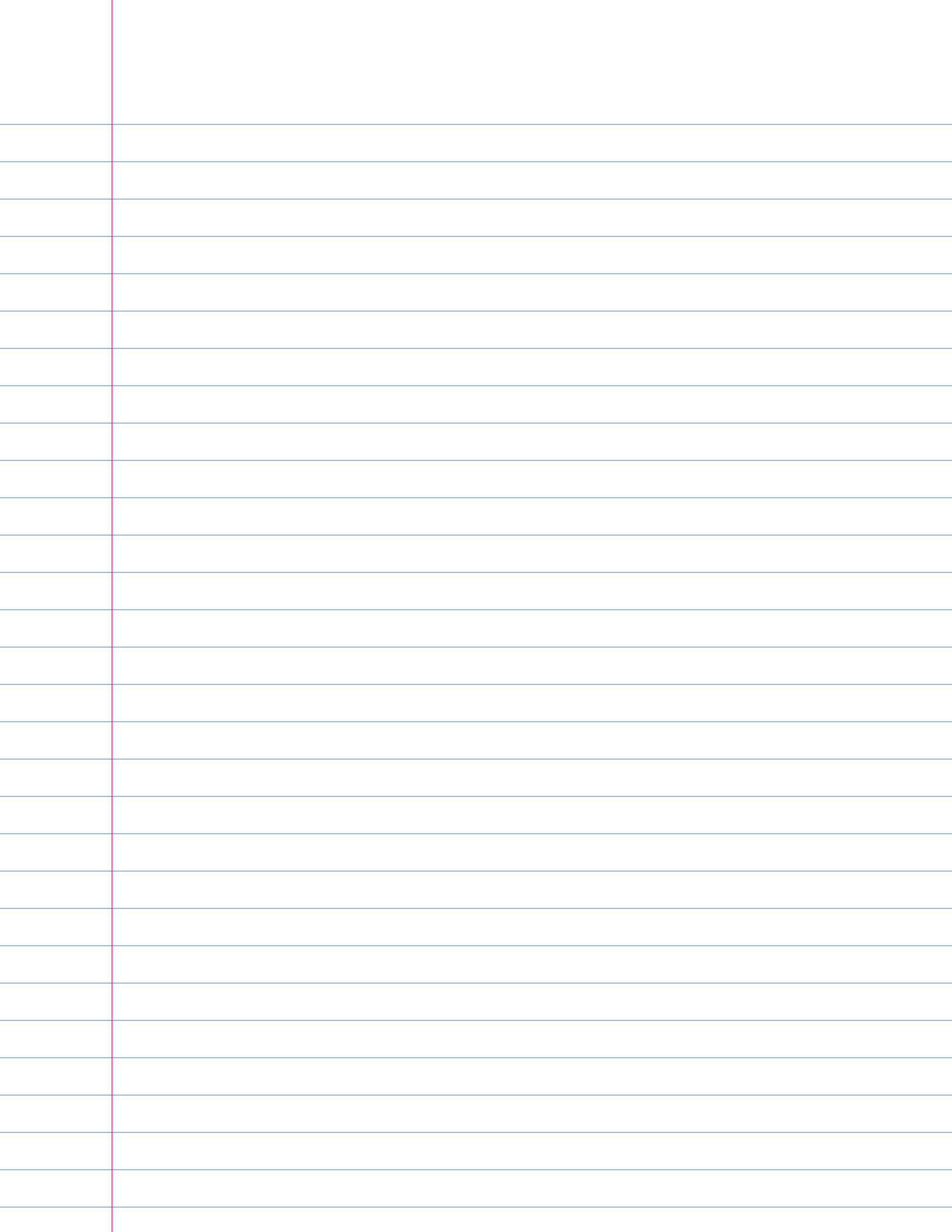
Für Basis

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ \text{red } 0 & \text{red } 0 & \text{red } 0 \end{matrix}$$

Wenn eine Basis festgelegt ist, sprechen wir über die Vektoren einfach durch Angabe des Spaltenvektors.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_B$$

Der Vektorraum wird also bei gegebener Basis mit dem $\mathbb{R}^n$ identifiziert.



Basiswechsel

Für jeden Vektorraum gibt es mehrere mögliche Basen.

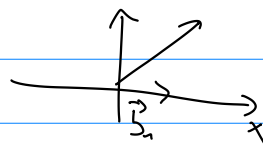
Jeder Vektor, hat je nach Basis, unterschiedliche Koordinaten.

Für gegebenes V hat jede Basis die selbe Zahl an Elementen.

Diese Anzahl an Basisvektoren nennt man Dimension.

Gegeben der dreidimensionale Raum mit kanonischer Basis:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_B$$



Länge 1, x-Richtung

$$b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B$$

hat Länge 1 in y-Richtung

$$b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B$$

" " " z-Richtung

Ab sofort nennen wir $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_B$ falls wir $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ schreiben.

Neutrale Basis: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \mathcal{C}$

Ist das in der Tat eine Basis?

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{I: } \lambda + \mu = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = -\mu$$

$$\text{II: } \lambda = 0$$

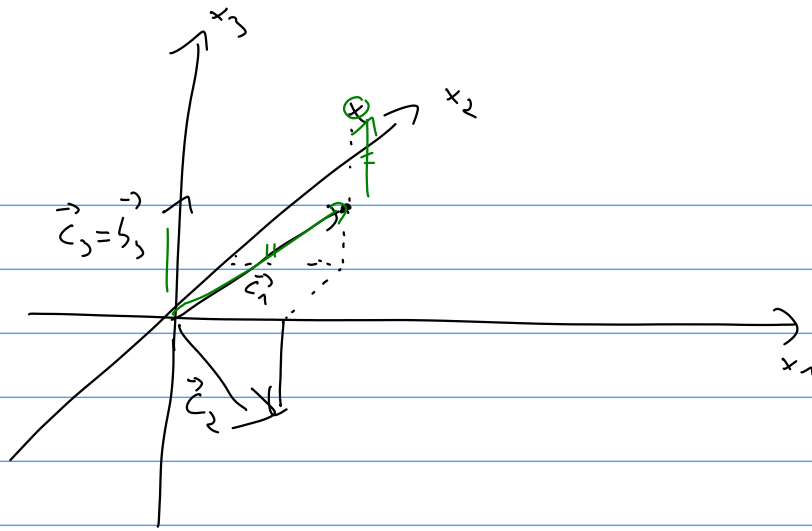
$$\Rightarrow \mu = 0$$

$$\text{III: } \lambda - \mu + \tau = 0$$

$$\Rightarrow \tau = 0$$

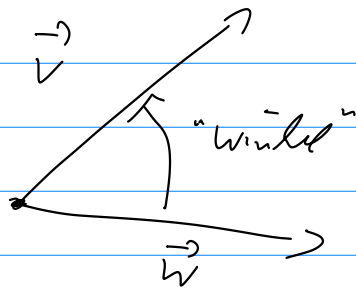
$\left. \begin{array}{l} \text{I: } \lambda + \mu = 0 \\ \text{II: } \lambda = 0 \\ \text{III: } \lambda - \mu + \tau = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{linear unabhängig}$

$$\text{Betrachte } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_B = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_C$$



Skalarprodukt und Kreuzprodukt

Gegeben sein zwei Vektoren $\vec{v}, \vec{w}$ in der Ebene oder Raum etc.



Wir müßten beschreiben, wie diese Vektoren zueinander stehen.

Definition: Im $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ ist das Skalarprodukt wie folgt definiert

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = a \cdot d + b \cdot e + c \cdot f$$

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

Bei gegebener Basis erhält man analoges ein Skalarprodukt auf dem VR:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_B \circ \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}_B = ad + be + cf$$

$$V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

Bemerkung: Achtung! Hängt von Basiswahl ab!

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_e$$

Was $\vec{v} \circ \vec{v}$ sein soll ist also unklar!

$$\text{Meine ich } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_B \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_B = 1 + 1 + 4 = \vec{v} \circ_B \vec{v}$$

$$\text{oder } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_e \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_e = 1 + 1 = \vec{v} \circ_e \vec{v}$$

In der Regel wählt man für B die kanonische Einheitsbasis.

Zwei Vektoren $\vec{v}, \vec{w}$ stehen senkrecht, falls $\vec{v} \circ \vec{w} = 0$
Aufeinander senkrecht stehende Vektoren sind immer linear unabhängig!

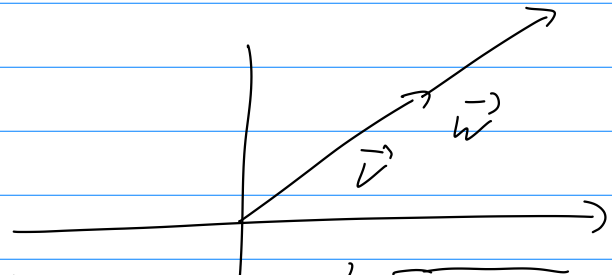
$$\text{Sei } \vec{v} \perp \vec{w}$$

$$\begin{aligned} \lambda \vec{v} + \mu \vec{w} &= \vec{0} & | \cdot \vec{w} \\ \lambda \underbrace{\vec{v} \circ \vec{w}}_{=0} + \mu \underbrace{\vec{w} \circ \vec{w}}_{\neq 0 \text{ falls } \vec{w} \neq \vec{0}} &= \vec{0} & \Rightarrow \mu = 0 \\ & & \lambda = 0 \end{aligned}$$

Bemerkung: Nach Satz des Pythagoras ist $\vec{w} \circ \vec{w}$ die Länge von $\vec{w}$ im Quadrat:
 $\vec{w} \circ \vec{w} = a^2 + b^2 + c^2$ falls $w = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Zwei Vektoren sind parallel, falls

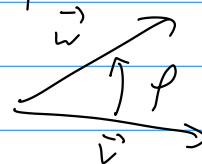
$$|\vec{v} \circ \vec{w}| = \sqrt{\vec{v} \circ \vec{v}} \cdot \sqrt{\vec{w} \circ \vec{w}}$$



$$\vec{v} = \lambda \vec{w}$$

$$\begin{aligned} |\vec{v} \circ \vec{w}| &= |\lambda| \cdot |\vec{w} \circ \vec{w}| \stackrel{?}{=} \sqrt{|\lambda|^2 \vec{w} \circ \vec{w}} \cdot \sqrt{\vec{w} \circ \vec{w}} \\ &= |\lambda| |\vec{w} \circ \vec{w}| \quad \checkmark \end{aligned}$$

Formel: $v \circ w = |v| \cdot |w| \cdot \cos \varphi$



Eigenschaften: $(\vec{v} + \vec{w}) \circ \vec{z} = \vec{v} \circ \vec{z} + \vec{w} \circ \vec{z}$

$$(\alpha \vec{v}) \circ \vec{z} = \alpha \vec{v} \circ \vec{z}$$

$$\vec{v} \circ \vec{w} = \vec{w} \circ \vec{v}$$

$$\vec{v} \circ \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$$

Kreuzprodukt

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

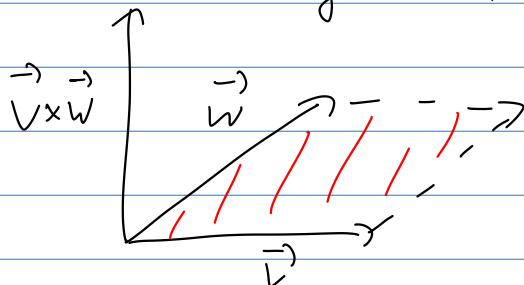
$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bf - ec \\ cd - af \\ ae - bd \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} \times \vec{v} = \vec{0}$$

Parallele Vektoren ergeben Null im Kreuzprodukt.

Das Kreuzprodukt $\vec{v} \times \vec{w}$ ergibt einen Vektor, der senkrecht auf $\vec{v}$ und $\vec{w}$ steht.

Die Länge des Vektors $\vec{v} \times \vec{w}$ ist gleich der Fläche des von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ gebildeten Parallelogramms.



Es gelten Rechenregeln: $\alpha(\vec{v} \times \vec{w}) = (\alpha \vec{v}) \times \vec{w}$ etc.
 $\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$