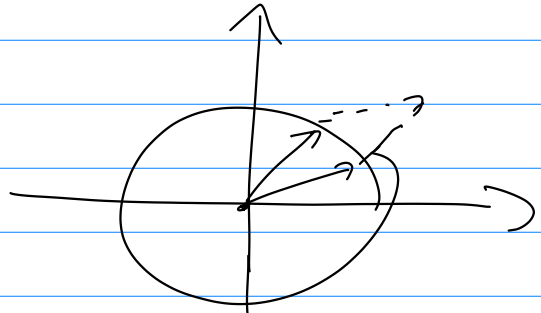


Untervektorräume

Ein Untervektorraum ist eine Teilmenge eines Vektorraums, die selbst in Bezug auf $+$ und $\cdot$ aus dem Vektorraum, ein Vektorraum.

Bsp: a) Ebenen und Geraden durch den Ursprung

b) Einheitskreis im $\mathbb{R}^2$
ist kein Untervektorraum.



Für ein UVR $\overset{U}{\text{ist zu prüfen,}}$

ob für alle $\vec{w}, \vec{v} \in U$ auch

$$\vec{v} + \vec{w} \in U$$

$$\alpha \vec{v} \in U \text{ für alle } \alpha \in \mathbb{R}$$

Es lassen sich auch Ebenen und Geraden, die nicht den Ursprung enthalten, einfach beschreiben:

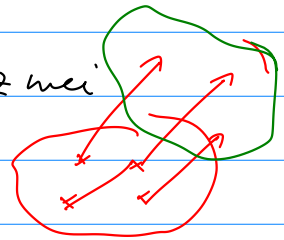
a) Gerade durch Ursprung (UVR), ein Basisvektor $\vec{r}$
(auch Richtungsvektor genannt)

$$g = \{ \lambda \vec{r} \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R} \}$$

b) Ebene, die den Ursprung enthält (UVR), zwei Basisvektoren $\vec{r}, \vec{s}$.

$$E = \{ \lambda \vec{r} + \mu \vec{s} \text{ mit } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$$

$$\sum_{j=1}^2 x_j \vec{b}_j$$

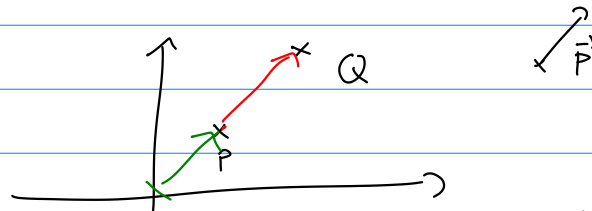
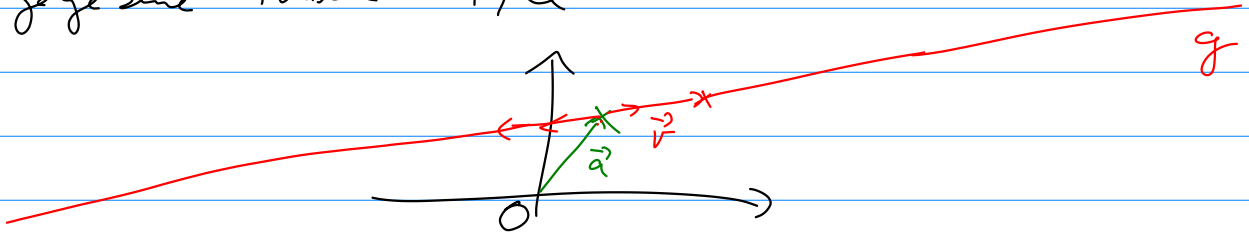


c) Affine Gerade oder allgemeine Gerade: Man verschiebt eine Gerade durch den Ursprung, indem man die Verschiebung wählt, die $\vec{0}$ auf $\vec{a}$ abbildet, wobei $\vec{a}$ ein beliebiger Punkt auf der 'neuen' Geraden ist:

$$g = \{ \lambda \vec{r} + \vec{a} \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R} \}$$

d) Affine Ebene: $E = \{ \lambda \vec{r} + \mu \vec{s} + \vec{a} \text{ mit } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$

Wie finde ich diese Gleichungen? z.B. Gerade durch zwei gegebene Punkte P, Q ?



Eine mögliche Wahl für $\vec{a}$ ist $\vec{p}$ (der Vektor $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$)

Eine " " für $\vec{r}$ ist $\overrightarrow{PQ}$

Eine Ebene wird durch 3 Punkte $\overset{P, Q, T}{\text{beschrieben}}$, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden. Falls dies nicht der Fall ist: Wähle $\vec{a} = \vec{p}$ oder $\vec{a} = \vec{q}$ oder $\vec{a} = \vec{t}$
wähle z.B. $\vec{r} = \overrightarrow{PQ}$ $\vec{s} = \overrightarrow{PT}$

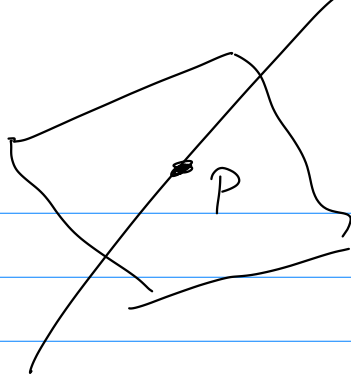
Achtung: Falls P, Q, T auf einer Geraden liegen, sind $\vec{r}, \vec{s}$ linear abhängig und spannen nur eine Gerade auf.

Durchschnitt: Man kann Geraden und Ebenen schneiden und erhält $\emptyset$ oder Punkte, Geraden je nach Situation.

Bsp: Sei $E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} ; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$E \cap g$ Möglichkeiten: $E \cap g = \emptyset$ oder $\{P\}$ oder g



$$P \in g \quad \text{und} \quad P \in E$$

$$\Rightarrow \vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \bar{\tau} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \bar{\lambda} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \bar{\mu} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Es gilt, $\bar{\tau}$ oder $\bar{\lambda}$ und $\bar{\mu}$ zu bestimmen!

Also:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \bar{\tau} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \bar{\lambda} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \bar{\mu} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{I: } \bar{\tau} &= 1 + \bar{\lambda} + \bar{\mu} & \Rightarrow \text{I': } \bar{\lambda} &= 1 + \bar{\lambda} + \bar{\mu} \quad | -\bar{\lambda} \\ \text{II: } \bar{\tau} &= \bar{\lambda} & & \\ \text{III: } \bar{\tau} &= -2 & - \bar{\mu} & \Rightarrow \text{III': } \bar{\lambda} = -2 & - \bar{\mu} \end{aligned}$$

$$\text{I' } \Rightarrow \bar{\mu} = -1 =$$

$$\text{III' } \Rightarrow \bar{\lambda} = -1 = \bar{\tau}$$

$$\Rightarrow E \cap g = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Bem: Die Schnittmenge ist g oder $\emptyset$ falls k_i drei Richtungsvektoren (einer von g zwei von E) linear unabhängig sind!

Lineare Abbildungen, Matrizen

Seien V, W Vektorräume. Eine Abbildung $f: V \rightarrow W$ heißt linear, falls:

$$f(\vec{v}) + f(\vec{w}) = f(\vec{v} + \vec{w})$$

$$f(\alpha \vec{v}) = \alpha f(\vec{v})$$

Bsp:

$$\int_a^b f(t) \, dt \rightarrow \mathbb{R} \quad \Bigg| \quad \int_a^b \cdot \, dt : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$$

↑
Funktion

Die Möglichkeiten abzubilden sind durch Linearität stark eingeschränkt.

Die lineare Abbildung ist eindeutig bestimmt, wenn man die Bilder aller Basisvektoren kennt.

Bsp: $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ Basis: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Es reicht anzugeben, wo $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ hin abgebildet werden
so dass man f komplett kennt.

z.B. $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Frage was ist $f\left(\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}\right) = f\left(-4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 9 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) =$
 $= -4 \cdot f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + 5 f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + 9 f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = -4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 9 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \end{pmatrix}$

Durchführung: $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ steht für die lineare Abbildung,
mit $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Bilder der Basisvektoren.
Dieses Objekt nennt man Matrix.

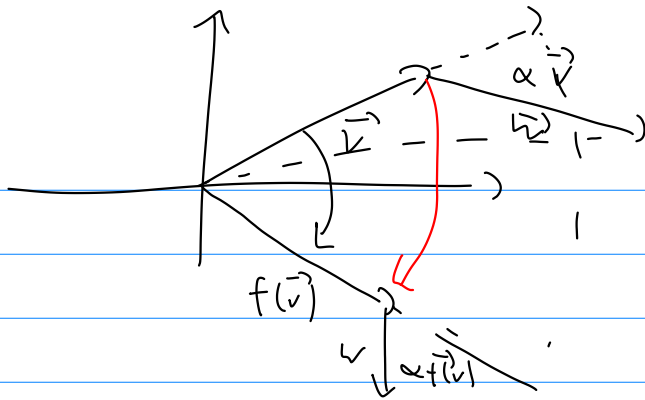
$$f\left(\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot (-4) + 1 \cdot 5 + 3 \cdot 9 \\ 1 \cdot (-4) + 2 \cdot 5 + 4 \cdot 9 \end{pmatrix}$$

Eine Matrix wird durch die Zeilen & Spalten Rechenregel
mit einem Spaltenvektor multipliziert

Man erhält einen Vektor, dessen Dimension der Zeilenanzahl der Matrix entspricht

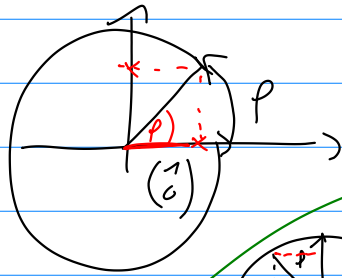
Bsp: Drehmatrix im $\mathbb{R}^2$

Drehpunkt: Ursprung
Drehwinkel: φ



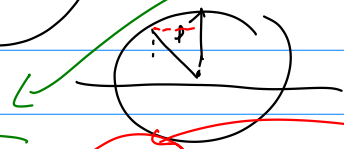
Drehung ist linear,
also durch Matrix
beschreiben

Wir suchen die Bilder von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

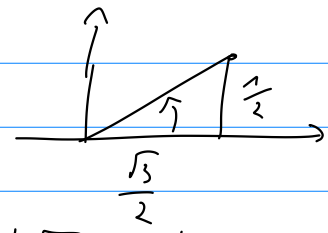
$$\begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$



$$D_{30^\circ} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$D_{30^\circ} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \\ \frac{1}{2} + \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

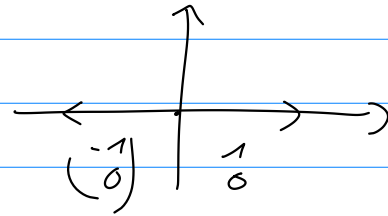
Wenn man zwei lineare Abbildungen hintereinander ausführt
ist die entsprechende Matrix gleich dem Zeilen $\times$ Spalten-
Produkt der beiden Matrizen der einzelnen Abbildungen:

lineare Abbildungen f, g mit Matrizen F und G
die Matrix, die $f \circ g$ beschreibt ist einfach $F \cdot G$

Achtung Reihenfolge! Matrixprodukt ist nicht
kommutativ.

Bsp: erst drehen um 30° , dann spiegeln an der y -Achse

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$S \cdot \begin{pmatrix} \mathbb{D}_{30^\circ} & \downarrow \\ & v \end{pmatrix} = \underbrace{(S \mathbb{D}^T)}_{\text{gesuchte Matrix}} \cdot v$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} & \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} & 0 \cdot (-\frac{1}{2}) + 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Matrizen sind auch beim Lösen von linearen Gleichungssystemen hilfreich.

$$\begin{array}{l} \text{I: } 2x + 3y - 5z = 1 \quad | \cdot \frac{1}{2} \\ \text{II: } x + \frac{3}{2}y - \frac{5}{2}z = \frac{1}{2} \\ \text{III: } x + y = 3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Erkennt: Zeilen multiplizieren
Zeilen addieren oder subtrahieren
Reihenfolge ändern

Ziel: Umformungen so verwenden, bis Dreiecksmatrix hat

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & | & 1 \\ 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & | & 1 \\ \boxed{1} & 0 & -1 & | & 0 \\ \boxed{0} & 1 & 1 & | & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & | & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & | & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & | & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{+\frac{2}{3} \cdot II} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & | & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & | & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{1} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & | & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & | & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & | & \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

bedeutet $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow z = \frac{4}{3} \quad \text{usw}$$