

Übungen zu Maß- und Integrationstheorie

Aufgabe 01.

- (a) Recherchieren Sie zunächst den sogenannten *Großen Umordnungssatz* für absolut konvergente Reihen, formulieren und erläutern Sie ihn.
- (b) Sei nun X eine abzählbare Menge (endlich oder unendlich) und $\varphi: X \rightarrow [0, \infty]$ eine beliebige Funktion (die wir als *Gewichtsfunktion* interpretieren). Zeigen Sie, dass durch $\mu_\varphi: \mathfrak{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$,

$$\mu_\varphi(A) = \sum_{x \in A} \varphi(x),$$

ein Maß auf $(X, \mathfrak{P}(X))$ definiert wird.

- (c) Sei X wieder abzählbar. Zeigen Sie, dass jedes Maß μ auf $(X, \mathfrak{P}(X))$ wie unter (b) zu Stande kommt und dass $\varphi: X \rightarrow [0, \infty]$ mit $\mu = \mu_\varphi$ eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 02 (Schrumpfungsformel).

- (a) Sei $\mathfrak{A}$ eine σ -Algebra auf einer Menge X und μ ein Maß auf $(X, \mathfrak{A})$. Zeigen Sie: Sind $A_k \in \mathfrak{A}$ ($k \in \mathbb{N}$) mit $A_k \supseteq A_{k+1}$, für alle $k \in \mathbb{N}$, und ist $\mu(A_1) < \infty$, so gilt für $A := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k$:

$$\mu(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k).$$

- (b) Sei μ das Zählmaß auf $\mathbb{N}$ sowie $A_k := \{n \in \mathbb{N} : n \geq k\}$ ($k \in \mathbb{N}$). Zeigen Sie, dass $A_k \supseteq A_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ist, die Schrumpfungsformel (a) für (A_k) aber nicht gilt.

Abgabe: Freitag, 23.10.2026, 8 Uhr