

Übungen zu Maß- und Integrationstheorie

Aufgabe 03. Sei X eine Menge sowie $A, B \in \mathfrak{P}(X)$ und $\mathfrak{M} := \{A, B\} \subseteq \mathfrak{P}(X)$.

- (a) Sei mindestens eine von den vier Mengen $A \cap B$, $A \cap B^c$, $A^c \cap B$, $A^c \cap B^c$ leer. Zeigen Sie, dass dann das von $\mathfrak{M}$ erzeugte Dynkin-System $\mathfrak{D}$ mit der von $\mathfrak{M}$ erzeugten σ -Algebra $\mathfrak{A}$ übereinstimmt, $\mathfrak{D} = \mathfrak{A}$. (Hinweis: Suchen Sie einen durchschnittsstabilen Erzeuger für $\mathfrak{D}$.)
- (b) Seien nun die Mengen $A \cap B$, $A \cap B^c$, $A^c \cap B$ und $A^c \cap B^c$ allesamt nicht-leer. Zeigen Sie, dass dann das von $\mathfrak{M}$ erzeugte Dynkin-System $\mathfrak{D}$ nicht mit der von $\mathfrak{M}$ erzeugten σ -Algebra $\mathfrak{A}$ übereinstimmt, $\mathfrak{D} \neq \mathfrak{A}$. (Hinweis: $\mathfrak{D}$ ist sehr klein.)
- (c) Geben Sie ein Dynkin-System an, welches keine σ -Algebra ist.

Aufgabe 04.

- (a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}$ und $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ gleichmächtig sind. (Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\mathbb{R}$ und $[0, 1)$ gleichmächtig sind und drücken Sie dann jedes $x \in [0, 1)$ durch seinen *Dualbruch* $0, a_1 a_2 \dots$ (mit $a_k \in \mathbb{F}_2$, $k \in \mathbb{N}$) aus.)
- (b)* Sei $\mathfrak{B}_n \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$ die Borel-Algebra ($n \in \mathbb{N}$). Zeigen Sie, dass $\mathfrak{B}_n$ gleichmächtig zu $\mathbb{R}$ ist und damit, dass $\mathfrak{B}_n \neq \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$ sein muss. *Hinweis:* Benutzen Sie die Sätze von *Schröder-Bernstein* und *Cantor* aus der Analysis-I.

Zu *: Diese Aufgabe ist schwer, weil dazu üblicherweise nicht-triviale Hilfsmittel aus der Mengenlehre verwendet werden (so genannte *Ordinalzahlen*). Holen Sie sich einen Tipp von Ihrem Tutor dafür.

Abgabe: Freitag, 30.10.2026, 8 Uhr