

Übungen zu Maß- und Integrationstheorie

Aufgabe 05. Sei K ein Körper. Ein 4-Tupel $(A, +, *, \cdot)$ heißt *eine (assoziative) K -Algebra*, wenn $+, *$ innere Verknüpfungen auf A sind, also $+, *: A \times A \rightarrow A$, und $\cdot$ eine äußere Verknüpfung auf A ist, also $\cdot: K \times A \rightarrow A$, so dass gilt: (i) $(A, +, *)$ ist ein Ring; (ii) $(A, +, \cdot)$ ist ein K -Vektorraum; (iii) $\lambda \cdot (x * y) = (\lambda \cdot x) * y = x * (\lambda \cdot y)$, für alle $\lambda \in K, x, y \in A$.

- (a) Sei $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ der Körper mit zwei Elementen und X eine beliebige Menge. Definieren Sie auf allen Abbildungen von X nach $\mathbb{F}_2$, $A := \text{Abb}(X, \mathbb{F}_2)$, in naheliegender Weise Verknüpfungen $(+, *, \cdot)$, mit denen $(A, +, *, \cdot)$ zu einer $\mathbb{F}_2$ -Algebra (mit Einselement) wird.
- (b) Wir definieren nun für jede Teilmenge $Y \subseteq X$ ihre *charakteristische Funktion* $\chi_Y: X \rightarrow \mathbb{F}_2$ durch $\chi_Y(x) = 1$, falls $x \in Y$ ist, und $\chi_Y(x) = 0$, falls $x \notin Y$ ist. Zeigen Sie, dass die Zuordnung $\Phi: \mathfrak{P}(X) \rightarrow \text{Abb}(X, \mathbb{F}_2), Y \mapsto \chi_Y$, bijektiv ist.
- (c) Welchen mengentheoretischen Verknüpfungen auf $\mathfrak{P}(X)$ entsprechen nun via Φ den inneren Verknüpfungen $+$ und $*$ von $\text{Abb}(X, \mathbb{F}_2)$ auf $\mathfrak{P}(X)$? Zeigen Sie: Eine Teilmenge $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ ist bezüglich der induzierten Strukturen $(+, *, \cdot)$ via Φ genau dann eine $\mathbb{F}_2$ -Unteralgebra mit Eins, wenn gilt: (i) $X \in \mathfrak{A}$; (ii) $\forall Y \in \mathfrak{A} : Y^c \in \mathfrak{A}$; (iii) $\forall Y_1, Y_2 \in \mathfrak{A} : Y_1 \cup Y_2 \in \mathfrak{A}$.

Ein Maßraum $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ heißt *vollständig*, falls für jedes $M \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(M) = 0$ auch alle Teilmengen $N \subseteq M$ in $\mathfrak{A}$ liegen.

Aufgabe 06. Sei $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum. Wir setzen $\mathfrak{N} := \{N \in \mathfrak{P}(X) : \text{es gibt ein } M \in \mathfrak{A} \text{ mit } N \subseteq M \text{ und } \mu(M) = 0\}$ sowie $\hat{\mathfrak{A}} := \{A \cup N : A \in \mathfrak{A} \text{ und } N \in \mathfrak{N}\}$.

- (a) Zeigen Sie, dass $\hat{\mathfrak{A}}$ eine σ -Algebra mit $\mathfrak{A} \subseteq \hat{\mathfrak{A}}$ ist.
- (b) Definiere $\hat{\mu}: \hat{\mathfrak{A}} \rightarrow [0, \infty]$ durch $\hat{\mu}(A \cup N) := \mu(A)$. Zeigen Sie, dass $\hat{\mu}$ ein wohldefiniertes Maß auf $(X, \hat{\mathfrak{A}})$ mit $\hat{\mu}|_{\mathfrak{A}} = \mu$ ist, und dass $(X, \hat{\mathfrak{A}}, \hat{\mu})$ vollständig ist. ($(X, \hat{\mathfrak{A}}, \hat{\mu})$ heißt *die Vervollständigung von $(X, \mathfrak{A}, \mu)$* .)

Abgabe: Freitag, 06.11.2026, 8 Uhr