

Eberhard Karls Universität Tübingen
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät
Lehrstuhl für mathematische Physik

Elementare Krümmungskonzepte in Mathematik und Physik

Christian Hainzl

Nadine Bellon

Inhaltsverzeichnis

1	Kurventheorie	1
1.1	Kurven im \mathbb{R}^3	1
1.2	Ebene Kurven	8
1.3	Raumkurven	16
2	Lokale Flächentheorie	22
2.1	Flächen und Tangentialraum	22
2.2	Die erste Fundamentalform	27
2.3	Krümmung	29
2.4	Die zweite Fundamentalform	33
3	Innere Geometrie von Flächen	47
3.1	Isometrien	47
3.2	Kovariante Ableitung	51
3.3	Parallelverschiebung und Geodätische	53
3.4	Das Gauß-Bonnet Theorem	62
3.5	Riemannscher Krümmungstensor	71
3.6	Exponentialabbildung	75
4	Äußere Geometrie	84
4.1	Minimalflächen	84
5	Relativitätstheorie	88
5.1	Spezielle Relativitätstheorie	88
5.1.1	Minkowski-Diagramme	91
5.2	Allgemeine Relativitätstheorie	94
5.3	Schwarzschild-Metrik	96
5.4	Geodätische Gleichungen	99
5.4.1	Periheldrehung des Merkur	102
5.4.2	Lichtablenkung	104
6	Quellenverzeichnis	107
	Index	109

1 Kurventheorie

Im ersten Kapitel wollen wir uns zunächst mit Kurven beschäftigen.

Anschaulich können wir uns ebene Kurven vorstellen als Spur, die ein Stift auf einem Blatt Papier hinterlässt und Raumkurven als in den Raum gelegtes, gebogenes Geradenstück.

Wir werden die Begriffe Länge, Krümmung und Torsion einführen. Außerdem soll der Umlaufsatz für einfach geschlossene Kurven und der Hauptsatz der Raumkurventheorie vorgestellt werden und wir werden die isoperimetrische Ungleichung herleiten, die die Länge einer geschlossenen ebenen Kurve in Relation zu der von ihr eingeschlossenen Fläche setzt.

1.1 Kurven im \mathbb{R}^3

Definition 1.1.1. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine *parametrisierte Kurve* ist eine unendlich oft differenzierbare Abbildung

$$\begin{aligned}\gamma &: I \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ c &: I \rightarrow \mathbb{R}^2.\end{aligned}$$

Eine Abbildung $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in I$, ist (unendlich oft) differenzierbar, wenn die Abbildungen $x(t), y(t), z(t) : I \rightarrow \mathbb{R}$ (unendlich oft) differenzierbar sind. (Analog für c .)

Als *Geschwindigkeitsvektor* der Kurve γ an der Stelle $t \in I$ bezeichnen wir den Vektor

$$\dot{\gamma}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)),$$

wobei wir mit $\dot{x}(t)$ die erste Ableitung von x an der Stelle t bezeichnen. (Analog für c .)

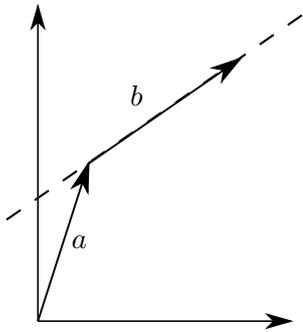
Eine Kurve heißt *regulär*, falls der Geschwindigkeitsvektor nirgends verschwindet, falls also:

$$\dot{\gamma}(t) \neq 0, \quad \dot{c}(t) \neq 0 \quad \forall t \in I.$$

Bemerkung 1.1.2. $\dot{c} \neq 0$ heißt, dass sich die Kurve bewegt und nicht stehen bleibt. $c(t)$ ist mehr als nur die Punkte im Raum. Es beschreibt auch, wie die Kurve durchlaufen wird.

Beispiel 1.1.3.

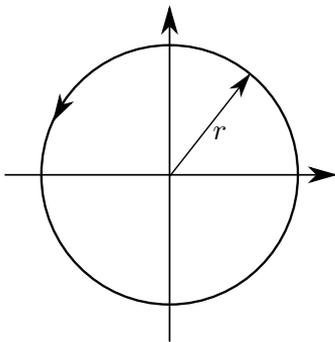
- a) Gerade: Eine Gerade lässt sich folgendermaßen als reguläre parametrisierte Kurve schreiben:



$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3, \\ \gamma(t) &= a + tb, \quad a \in \mathbb{R}^3, \quad b \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Dann gilt
 $\dot{\gamma}(t) = b \neq 0$.

- b) Kreislinie: mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius $r > 0$:



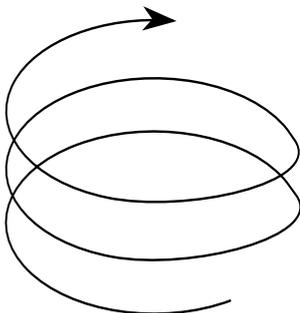
$$c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

$$c(t) = \begin{pmatrix} r \cos(t) \\ r \sin(t) \end{pmatrix}$$

Der Pfeil in der Skizze zeigt die Durchlaufrichtung der Kurve an.

Dies ist ein Beispiel für eine nicht injektive Kurve: Wegen $c(t + 2\pi) = c(t)$ wird jeder Bildpunkt unendlich oft durchlaufen.

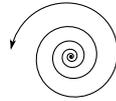
- c) Schraubenlinie



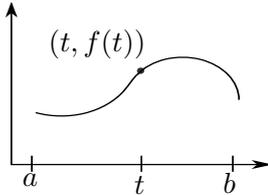
$$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} r \cos(t) \\ r \sin(t) \\ ht \end{pmatrix},$$

wobei $r > 0$ und $h > 0$.

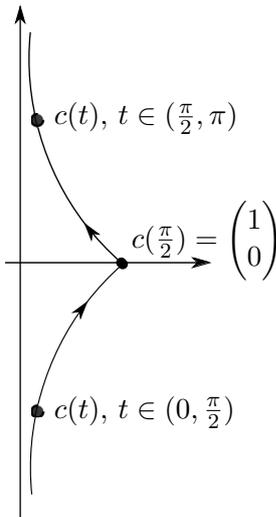
d) logarithmische Spirale

$$c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, c(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \end{pmatrix}$$

e) Funktionsgraph

$$c : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2, c(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix},$$

wobei $f(t)$ unendlich oft differenzierbare Funktion ist mit $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$.

f) Traktix (Schleppkurve)

$$c : (0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

$$c(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t + \ln \tan(t/2) \end{pmatrix}$$

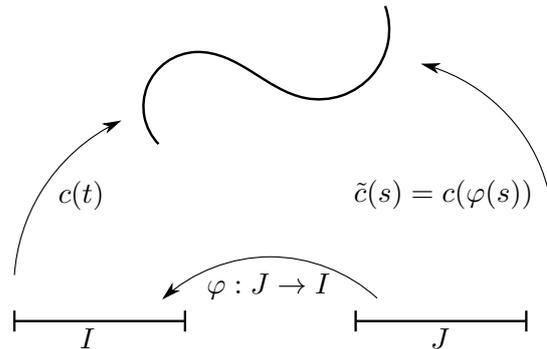
c ließe sich so auch auf $I = (0, \pi)$ definieren. Da aber $\dot{c}(\pi/2) = (0, 0)$, wäre c somit nicht regulär.

Eine Kurve sollte nicht von der Parametrisierung abhängen. Häufig möchte man zum Beispiel die Durchlaufgeschwindigkeit ändern, aber das Bild der Kurve beibehalten. Dies motiviert folgende Definition:

Definition 1.1.4. Sei $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Kurve. Eine *Parametertransformation* von γ ist eine bijektive Abbildung $\varphi : J \rightarrow I$, wobei $J \subset \mathbb{R}$ ein weiteres Intervall ist, sodass sowohl φ als auch $\varphi^{-1} : I \rightarrow J$ unendlich oft differenzierbar sind. Die Abbildung

$$\tilde{\gamma}(s) = \gamma(\varphi(s)) : J \rightarrow \mathbb{R}^3$$

heißt *Umparametrisierung* von γ . (Analog für $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$)



Bemerkung 1.1.5. Für eine Parametertransformation $\varphi : J \rightarrow I$, sollte $\dot{\varphi} \neq 0$ gelten, damit die Umparametrisierung einer regulären Kurve regulär bleibt, denn dann gilt

$$\dot{\tilde{s}} = \dot{c}(\varphi(s))\dot{\varphi}(s) \neq 0 \forall s \in J.$$

Beispiel 1.1.6. Die Parametertransformation

$$\varphi(t) = -t : [-b, -a] \rightarrow [a, b]$$

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma(-t)$$

kehrt den Durchlaufsinne um, ist also orientierungsumkehrend. Es gilt $\dot{\varphi}(t) = -1$.

Definition 1.1.7. Eine Parametertransformation $\varphi : J \rightarrow I$ heißt *orientierungserhaltend*, falls $\dot{\varphi} > 0$ für alle t , und *orientierungsumkehrend*, falls $\dot{\varphi} < 0$ für alle $t \in J$.

Definition 1.1.8. Eine *Kurve* ist eine Äquivalenzklasse von regulären parametrisierten Kurven, wobei diese dann als äquivalent angenommen werden, wenn sie Umparametrisierungen voneinander sind.

Beispiel 1.1.9. Die regulären parametrisierten Kurven

$$c_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, c_1(t) = (t, t),$$

und

$$c_2 : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2, c_2(t) = (\ln t, \ln t)$$

sind äquivalent, denn es gilt $c_1 = c_2 \circ \varphi$ mit $\varphi(t) = e^t$, und c_1 und c_2 repräsentieren daher dieselbe Kurve.

Bemerkung 1.1.10. Das Bild $\gamma(I)$ einer Kurve $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ auch *Spur* der Kurve γ genannt. (Analog für $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$)

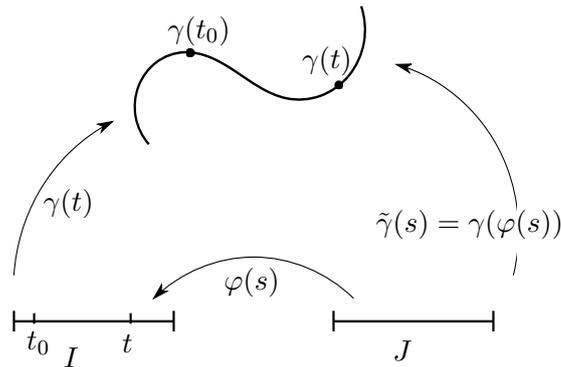
Definition 1.1.11. Eine *orientierte Kurve* ist eine Äquivalenzklasse von parametrisierten Kurven, wobei diese als äquivalent angesehen werden, wenn sie durch orientierungserhaltende Parametertransformationen auseinander hervorgehen.

Definition 1.1.12. Eine *nach Bogenlänge parametrisierte Kurve* ist eine reguläre parametrisierte Kurve $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\|\dot{\gamma}\| = 1$ für alle $t \in I$. (Analog für $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$)

Bemerkung 1.1.13. Nach Bogenlänge parametrisierte Kurven sind solche, die ihr Bild mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen.

Wir werden nach Bogenlänge parametrisierte Kurven später verwenden um Krümmung zu definieren.

Satz 1.1.14. Zu jeder regulären parametrisierten Kurve $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ gibt es eine orientierungserhaltende Parametertransformation $\varphi : J \rightarrow I$, sodass die Umparametrisierung $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ nach Bogenlänge parametrisiert ist, dass also $\|\dot{\tilde{\gamma}}\| = 1$ (analog für $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$).



Beweis. Sei $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine reguläre parametrisierte Kurve. Sei $t_0 \in I$. Setze

$$\psi(t) := \int_{t_0}^t \|\dot{\gamma}(T)\| dT.$$

Dann ist ψ streng monoton wachsend, denn $\dot{\psi}(t) = \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t \|\dot{\gamma}(T)\| dT = \|\dot{\gamma}(t)\| > 0$. Daher ist

$$\psi : I \rightarrow J := \psi(I)$$

eine orientierungserhaltende Parametertransformation und es existiert eine Umkehrabbildung $\varphi(s) := \psi^{-1}(s) : J \rightarrow I$. Dann sind φ und ψ unendlich oft differenzierbar und es gilt

$$\dot{\varphi}(s) = \dot{\psi}^{-1}(s) = \frac{1}{\dot{\psi}(\psi^{-1}(s))} = \frac{1}{\dot{\psi}(\varphi(s))} = \frac{1}{\|\dot{\gamma}(\varphi(s))\|}$$

Damit und mit der Kettenregel folgt

$$\|\dot{\tilde{\gamma}}(s)\| = \left\| \frac{d}{ds} (\gamma \circ \varphi)(s) \right\| = \|\dot{\gamma}(\varphi(s)) \dot{\varphi}(s)\| = \left\| \frac{\dot{\gamma}(\varphi(s))}{\|\dot{\gamma}(\varphi(s))\|} \right\| = 1$$

Damit ist $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ nach Bogenlänge parametrisiert. □

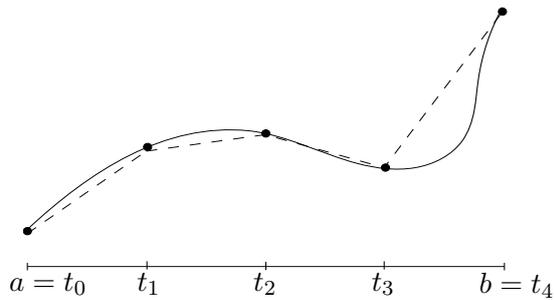
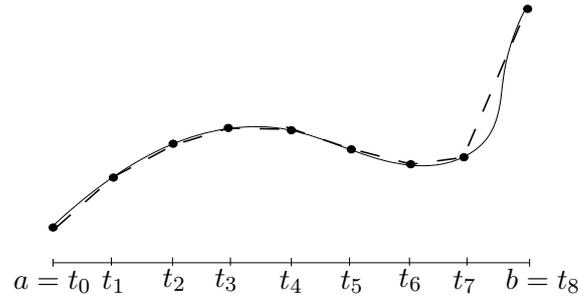
Wir wollen als nächstes die Länge L einer Kurve definieren. Sei

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Wir nähern c an durch einen Polygonzug an und erklären die Länge $L(c)$ von c mit Hilfe des Grenzwerts der Polygonlänge.

Wir betrachten den in c eingeschriebenen Polygonzug $P_1 = (c(t_0), c(t_1), \dots, c(t_n))$, wobei $t_0 = a$ und $t_n = b$, und einen zweiten Polygonzug P_2 , der durch Verfeinerung der Unterteilung aus P_1 hervorgeht.

Polygonzug P_1 Polygonzug P_2

Dann gilt

$$L(P_1) = \sum_{i=1}^n \|c(t_i) - c(t_{i-1})\|$$

und für die Länge der Polygonzüge $L(P_1) \leq L(P_2)$.

Weiter gilt dann

$$\|c(t_i) - c(t_{i-1})\| \rightarrow \|\dot{c}(t_i)\|(t_i - t_{i-1}) \text{ für } (t_i - t_{i-1}) \rightarrow 0.$$

Also gilt mit $\varepsilon = \sup_i \|t_i - t_{i-1}\|$

$$\sum_{i=1}^n \|c(t_i) - c(t_{i-1})\| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^b \|\dot{c}(t)\| dt$$

Dies motiviert folgende Definition:

Definition 1.1.15. Sei $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, bzw. $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, eine parametrisierte Kurve. Dann gilt für die Länge der Kurve:

$$L(c) = \int_a^b \|\dot{c}\| dt,$$

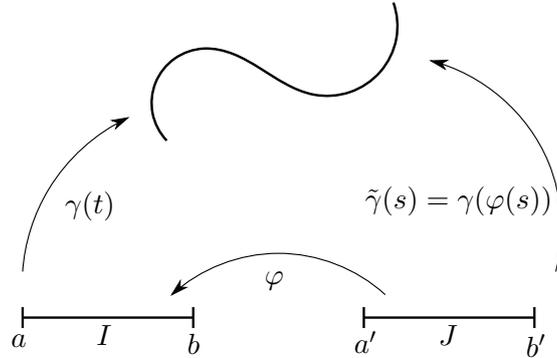
$$L(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}\| dt.$$

Lemma 1.1.16. Die Länge einer Kurve ist unabhängig von der Parametrisierung.

Beweis. Sei γ Kurve und $\tilde{\gamma}$ Umparametrisierung mit Parametertransformation φ . Sei $\dot{\varphi} > 0$. Für die Länge von $\tilde{\gamma}$ gilt

$$\begin{aligned} L(\tilde{\gamma}) &= \int_{a'}^{b'} \|\dot{\tilde{\gamma}}(s)\| ds = \int_{a'}^{b'} \left\| \frac{d}{ds} \gamma(\varphi(s)) \right\| ds = \int_{a'}^{b'} \|\dot{\gamma}(\varphi(s)) \dot{\varphi}(s)\| ds \\ &= \int_{a'}^{b'} \|\dot{\gamma}(\varphi(s))\| \dot{\varphi}(s) ds = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt = L(\gamma), \end{aligned}$$

wobei im vorletzten Schritt substituiert wurde: $t = \varphi(s)$, $\varphi(a') = a$, $\varphi(b') = b$, $dt = \dot{\varphi}(s)ds$.
damit folgt die Behauptung. \square



Definition 1.1.17. Eine parametrisierte Kurve $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ heißt *periodisch* mit Länge L , falls für alle $t \in I$ gilt:

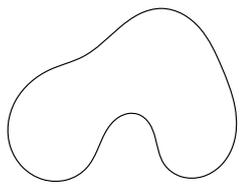
$$c(t + L) = c(t)$$

und es kein L' gibt mit $0 < L' < L$, so dass ebenfalls $c(t + L') = c(t)$ für alle $t \in I$. (Analog für $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$.)

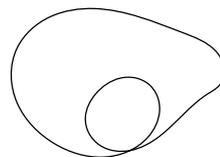
Eine Kurve heißt *geschlossen*, falls sie eine periodische reguläre Parametrisierung besitzt.

Bemerkung 1.1.18. Nicht jede Parametrisierung einer geschlossenen Kurve ist periodisch. Beispielsweise lässt sich eine periodische parametrisierte Kurve so umparametrisieren, dass sie bei jedem Durchlauf der Kurve langsamer wird.

Definition 1.1.19. Eine geschlossene Kurve heißt *einfach geschlossen*, falls sie eine periodische reguläre Parametrisierung γ mit Periode L hat, so dass $\gamma|_{[0,L]}$ injektiv ist.



einfach geschlossen

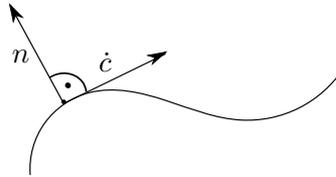


geschlossen, aber nicht einfach geschlossen

1.2 Ebene Kurven

In diesem Kapitel betrachten wir Kurven, die in der Ebene verlaufen, also Werte in \mathbb{R}^2 annehmen.

Eine Besonderheit ebener Kurven ist die Möglichkeit, ihr Normalenfeld n zu definieren.

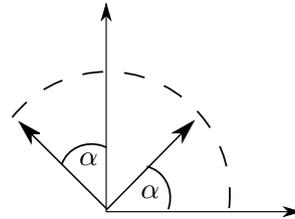


Definition 1.2.1. Dabei entspricht $R\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ einer Rotation um den Winkel $\frac{\pi}{2}$

Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit $\|\dot{c}\| = 1$.
Wir definieren das *Normalenfeld* n von c durch

$$n(t) := R\left(\frac{\pi}{2}\right) \dot{c}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dot{c}(t).$$

gegen den Uhrzeigersinn.



Bemerkung 1.2.2. Da c nach Bogenlänge parametrisiert ist, gilt $\|\dot{c}\|^2 = \dot{c} \cdot \dot{c} = 1$.

(Anmerkung zur Notation: Unter einer Vektormultiplikation verstehen wir hier und im Folgenden das Standardskalarprodukt der Vektoren: $\dot{c} \cdot \dot{c} = \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle$.)

Differentiation der obigen Gleichung liefert

$$0 = \frac{d}{dt} \|\dot{c}\|^2 = \ddot{c} \cdot \dot{c} + \dot{c} \cdot \ddot{c} = 2(\ddot{c} \cdot \dot{c}) \quad (1.2.1)$$

Also stehen $\dot{c}(t)$ und $\ddot{c}(t)$ senkrecht aufeinander und $\ddot{c}(t)$ ist damit ein Vielfaches des Normalenvektors $n(t)$.

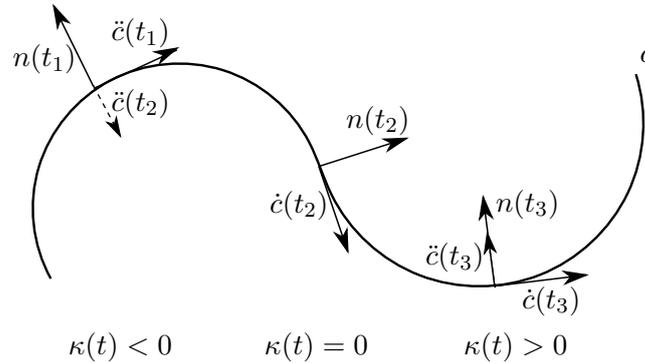
Definition 1.2.3. Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit Normalenfeld n . Die Funktion $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\ddot{c}(t) = \kappa(t)n(t)$$

heißt *Krümmung* von c bei $t \in I$.

Bemerkung 1.2.4. Die Krümmung kann als Maß dafür gesehen werden, wie stark die Kurve von einer Geraden abweicht. Wenn c nach Bogenlänge parametrisiert ist, dann ist c eine Gerade genau dann, wenn $\ddot{c} \equiv 0$, d.h. wenn $\kappa \equiv 0$.

Krümmt sich die Kurve in Richtung des Normalenfeldes (das heißt in Durchlaufrichtung nach links), ist die Krümmung positiv, andernfalls negativ.



Beispiel 1.2.5. Wir betrachten die Kreislinie $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit Radius $r > 0$, parametrisiert nach Bogenlänge durch

$$c(t) = (r \cos(t/r), r \sin(t/r)).$$

Dann gilt $\dot{c}(t) = (-\sin(t/r), \cos(t/r))$ und damit $n(t) = (-\cos(t/r), -\sin(t/r))$ somit $\ddot{c}(t) = \frac{1}{r}(-\cos(t/r), -\sin(t/r)) = \frac{1}{r}n(t)$.

Also ist $\kappa \equiv 1/r$.

Bemerkung 1.2.6. Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine reguläre, (nicht notwendigerweise nach Bogenlänge) parametrisierte Kurve. Die Krümmung der Kurve ist gegeben durch die Formel

$$\kappa(t) = \frac{\det(\dot{c}(t), \ddot{c}(t))}{\|\dot{c}(t)\|^3}$$

Beweis. Sei $\varphi(s) = l^{-1}(s) = t$ mit $l(t) = \int_{-\infty}^t |\dot{c}(T)| dT$. Dann ist $\tilde{c}(s) = c(\varphi(s))$ nach Bogenlänge parametrisiert, denn es gilt:

$$\|\dot{\tilde{c}}(s)\| = \|\dot{c}(\varphi(s))\dot{\varphi}(s)\| = \left\| \frac{\dot{c}(t)}{\|\dot{c}(t)\|} \right\| = 1$$

Dann gilt die obige Formel für die Krümmung von \tilde{c} . Denn nach Definition ist $\ddot{\tilde{c}} = \kappa n$ also $\ddot{\tilde{c}}^\perp = \kappa \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dot{\tilde{c}}^\perp$. Damit gilt

$$\det(\dot{\tilde{c}}(t), \ddot{\tilde{c}}(t)) = \dot{\tilde{c}} \cdot \ddot{\tilde{c}}^\perp = \kappa \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dot{\tilde{c}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dot{\tilde{c}} = \kappa$$

Nun bleibt die Formel für c zu zeigen. Wir berechnen:

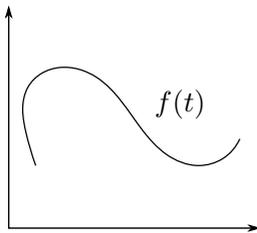
$$\begin{aligned} \dot{\tilde{c}}(s) &= \dot{c}(\varphi(s))\dot{\varphi}(s) \\ \ddot{\tilde{c}}(s) &= \ddot{c}(\varphi(s))\dot{\varphi}^2(s) + \dot{c}(\varphi(s))\ddot{\varphi}(s) \\ \ddot{\tilde{c}}^\perp(s) &= \ddot{c}^\perp(\varphi(s))\dot{\varphi}^2(s) + \dot{c}^\perp(\varphi(s))\ddot{\varphi}(s) \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{\dot{c}(t) \cdot \ddot{c}^\perp(t)}{\|\dot{c}\|^3} = \frac{\dot{c}(\varphi(s))\dot{\varphi}(s) \cdot (\ddot{c}^\perp(\varphi(s))\dot{\varphi}^2(s) + \dot{c}^\perp(\varphi(s))\ddot{\varphi}(s))}{\|\dot{c}(\varphi(s))\dot{\varphi}(s)\|^3} \\ &= \frac{\dot{c}(\varphi(s))\dot{\varphi}(s) \cdot \ddot{c}^\perp(\varphi(s))\dot{\varphi}^2(s) + \dot{c}(\varphi(s))\dot{\varphi}(s) \cdot \dot{c}^\perp(\varphi(s))\ddot{\varphi}(s)}{\dot{\varphi}(s)^3\|\dot{c}(\varphi(s))\|^3} \\ &= \frac{\dot{\varphi}(s)^3(\dot{c}(\varphi(s)) \cdot \ddot{c}^\perp(\varphi(s))) + 0}{\dot{\varphi}(s)^3\|\dot{c}(\varphi(s))\|^3} \\ &= \frac{\dot{c}(\varphi(s)) \cdot \ddot{c}^\perp(\varphi(s))}{\|\dot{c}(\varphi(s))\|^3} = \frac{\dot{c}(t) \cdot \ddot{c}^\perp(t)}{\|\dot{c}(t)\|^3} = \frac{\det(\dot{c}(t), \ddot{c}(t))}{\|\dot{c}(t)\|^3} \end{aligned}$$

□

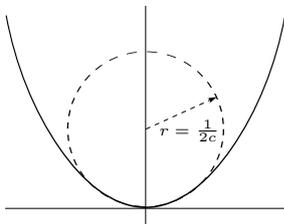
Beispiel 1.2.7. Funktionsgraph



Wir betrachten die Kurve $c(t) = (t, f(t))$. Dann ist $\dot{c}(t) = (1, \dot{f}(t))$ und $\ddot{c}(t) = (0, \ddot{f}(t))$
Für die Krümmung ergibt sich somit

$$\kappa(t) = \frac{\det\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \dot{f} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \ddot{f} \end{pmatrix}\right)}{(1 + \dot{f}^2)^{3/2}} = \frac{\ddot{f}(t)}{(1 + \dot{f}^2)^{3/2}}$$

Sei nun $f(x) = cx^2$. Dann ergibt sich mit oben:



$$\dot{f}(x) = 2cx, \quad \ddot{f}(x) = 2c.$$

Einsetzen in die obige Formel liefert zum Beispiel für die Krümmung bei $t = 0$

$$\kappa(0) = \frac{2c}{(1 + 0)^{3/2}} = 2c$$

Die Frage nach der Krümmung im Nullpunkt entspricht hier der Frage, welcher Kreis sich am Besten an die Parabel anschmiegt. Als Antwort bekommen wir also einen Kreis mit Radius $r = \frac{1}{2c}$. Dieser Kreis wird auch Schmiegekreis genannt.

Satz 1.2.8 (Frenet-Gleichung). Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine ebene nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Sei κ die Krümmung von c , n der Normalenvektor und $v := \dot{c}$. Dann gilt

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v(t) \\ n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(t) \\ -\kappa(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(t) \\ n(t) \end{pmatrix}$$

Beweis. Zu zeigen ist

$$\dot{v}(t) = \kappa(t)n(t) \tag{1.2.2}$$

$$\dot{n}(t) = -\kappa(t)v(t). \tag{1.2.3}$$

Gleichung (1.2.2) $\dot{v} = \ddot{c} = \kappa n$ ist gerade die Definition 1.2.3 der Krümmung. Da c nach Bogenlänge parametrisiert ist, gilt

$$\|\dot{c}\| = \|v\| = 1 \quad (1.2.4)$$

und ebenso

$$\|n\| = n \cdot n = 1. \quad (1.2.5)$$

Durch Differentiation von Gleichung (1.2.5) (Analog zum Vorgehen bei Gleichung (1.2.1)) schließen wir, dass \dot{n} senkrecht auf n steht und daher ein Vielfaches von $\dot{c} = v$ sein muss:

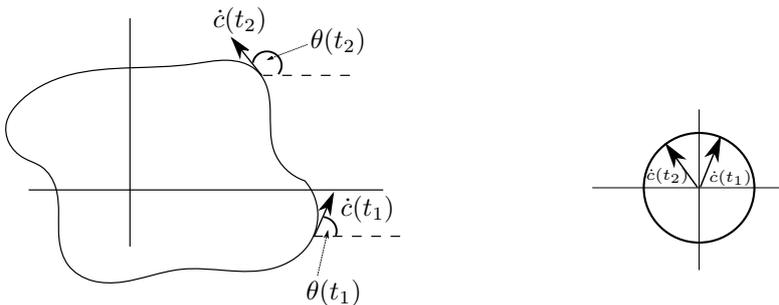
$$\dot{n} = \alpha v, \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (1.2.6)$$

Wir differenzieren $n \cdot \dot{c} = n \cdot v = 0$ und erhalten mit (1.2.4), (1.2.5) und (1.2.6)

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{n} \cdot v + n \cdot \dot{v} = \alpha v \cdot v + n \cdot \kappa n \\ &= \alpha + \kappa. \end{aligned}$$

Also gilt $\alpha = -\kappa$ und damit folgt Gleichung (1.2.3). \square

Wir wollen nun die Krümmung als Winkeländerung betrachten.



Die Zahl $\theta(t)$ misst den Winkel zwischen dem Geschwindigkeitsvektor $\dot{c}(t)$ und der x-Achse. Er ist nur bis auf $2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, eindeutig. Jeder Einheitsvektor kann so in Form $(\cos \theta, \sin \theta)$ geschrieben werden und es gilt $\kappa(t) = \dot{\theta}(t)$.

$\theta(t)$ kann dabei als stetige und sogar glatte Funktion gewählt werden, wie folgendes Lemma zeigt:

Lemma 1.2.9. Sei $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine ebene nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Dann gibt es eine unendlich oft differenzierbare Funktion $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$\dot{c}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) \end{pmatrix} \text{ und } \kappa(t) = \dot{\theta}(t).$$

θ ist eindeutig bis auf $2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, festgelegt.

Beweis. Wir betrachten vier Halbkreise: den oberen, unteren, rechten und linken des Einheitskreises \mathbb{S}^1 .

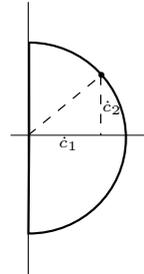
$$S_r := \{(x, y) \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}, \quad S_l := \{(x, y) \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2 \mid x < 0\}$$

$$S_o := \{(x, y) \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}, \quad S_u := \{(x, y) \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2 \mid y < 0\}$$

Zu Beginn nehmen wir an, dass das Bild $\dot{c}([a, b])$ ganz in einem der Halbkreise liegt.

Sei beispielsweise $\dot{c}(t) = \begin{pmatrix} \dot{c}_1(t) \\ \dot{c}_2(t) \end{pmatrix} \in S_r$.

Dann gilt nach Definition von S_r $\dot{c}_1 > 0$.



$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\dot{c}_2(t)}{\dot{c}_1(t)} &= \frac{\sin \theta(t)}{\cos \theta(t)} = \tan \theta(t) \\ \Rightarrow \theta(t) &= \arctan \frac{\dot{c}_2(t)}{\dot{c}_1(t)} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Wie man sieht, ist θ glatt.

Die Fälle, dass $\dot{c}([a, b])$ in einem der anderen Halbkreise liegt, werden ähnlich behandelt.

Nehmen wir jetzt an, dass $\dot{c}([a, b])$ nicht komplett in einem der Halbkreise enthalten ist.

Dann unterteilen wir das Intervall $[a, b]$ so, dass jedes $\dot{c}([t_i, t_{i+1}])$ in einem Halbkreis liegt.



Wie oben findet man dann ein eindeutiges glattes $\theta : [a, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$ wie gewünscht und $\theta(t_1)$ ist festgelegt. Weiter finden wir eine glatte Fortsetzung $\theta : [a, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$ und induktiv eine glatte Abbildung $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Der Startwert $\theta(a)$ ist nur bis auf $2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ eindeutig, daher ist θ eindeutig bis auf $2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. □

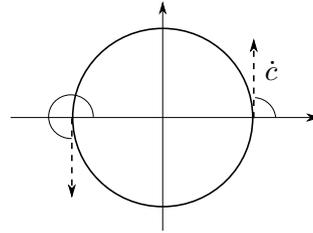
Definition 1.2.10. Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine ebene nach Bogenlänge parametrisierte Kurve und sei c periodisch mit Länge L . Sei $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\dot{c}(t) = (\cos \theta(t), \sin \theta(t))$. Dann heißt

$$n_c := \frac{1}{2\pi}(\theta(L) - \theta(0))$$

Umlaufzahl von c .

Beispiel 1.2.11. Wir betrachten erneut die Kreislinie aus Beispiel 1.2.5 mit Radius $r > 0$ hat die Bogenlängenparametrisierung $c(t) = (r \cos(t/r), r \sin(t/r))$ mit Periode $L = 2\pi r$. Für den Geschwindigkeitsvektor ergibt sich

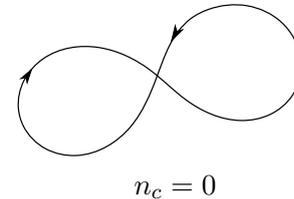
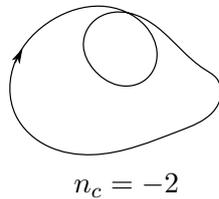
$$\dot{c}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t/r) \\ \cos(t/r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t/r + \pi/2) \\ \sin(t/r + \pi/2) \end{pmatrix}$$



Damit erhalten wir als Winkelfunktion $\theta(t) = t/r + \pi/2$ und somit für die Umlaufzahl

$$n_c = \frac{1}{2\pi}(\theta(2\pi r) - \theta(0)) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2\pi r}{r} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) = 1.$$

Beispiel 1.2.12.



Satz 1.2.13. Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte periodische ebene Kurve mit Periode L . Sei $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ die Krümmung von c . Dann gilt für die Umlaufzahl

$$n_c \in \mathbb{Z}$$

und

$$n_c = \frac{1}{2\pi} \int_0^L \kappa(t) dt.$$

Beweis. Da c periodische Kurve, gilt:

$$c(L) = c(0) \text{ und } \dot{c}(L) = \dot{c}(0)$$

Nach Lemma 1.2.9 gibt es eine unendlich differenzierbare Funktion $\theta(t)$ mit $\dot{c}(t) = (\cos \theta(t), \sin \theta(t))$ und $\kappa(t) = \dot{\theta}(t)$.

Damit und mit $e^{ia} = \cos a + i \sin a$ folgt:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta(L) \\ \sin \theta(L) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta(0) \\ \sin \theta(0) \end{pmatrix} \Leftrightarrow e^{i\theta(L)} = e^{i\theta(0)}$$

$$\Rightarrow \theta(L) = \theta(0) + k2\pi, \text{ mit } e^{ik2\pi} = 1, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\Rightarrow \theta(L) - \theta(0) \in 2\pi\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow n_c \in \mathbb{Z}$$

Daraus ergibt sich mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$n_c = \frac{1}{2\pi}(\theta(L) - \theta(0)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^L \dot{\theta}(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^L \kappa(t) dt$$

□

Satz 1.2.14 (Umlaufsatz). *Eine einfach geschlossene orientierte ebene Kurve hat Umlaufzahl 1 oder -1 .*

Definition 1.2.15. Eine *stückweise glatte Kurve* ist eine stetige Funktion $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, so dass es eine Einteilung von $I = [a, b]$ gibt:

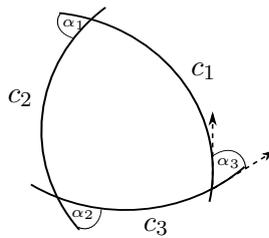
$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

mit $c|_{[t_i, t_{i+1}]}$ glatte reguläre parametrisierte Kurve für alle $i = 0, \dots, n$.

Bemerkung 1.2.16. Die Umlaufzahl einer stückweise glatten Kurve c mit $c_i : I_i = [t_i, t_{i+1}] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $|\dot{c}_i| = 1$, $i = 0, \dots, n$ ist gegeben durch:

$$n_c = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n (\theta_j(t_{j+1}) - \theta_j(t_j)) + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n \alpha_j = \frac{1}{2\pi} \int_{I_i} \kappa(t) dt + \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

wobei α_j der Winkel zwischen den Geschwindigkeitsvektoren an der j -ten Ecke ist.



Wir können also folgern:

Satz 1.2.17 (Umlaufsatz für stückweise glatte Kurven). *Eine stückweise glatte reguläre einfach geschlossene Kurve hat Umlaufzahl 1 oder -1 .*

Als nächstes wollen wir uns mit einem klassischen Optimierungsproblem befassen. Wir stellen uns die Frage, welche ebene einfach geschlossene Kurve mit fester Länge L den größten Flächeninhalt umrandet.

Anschaulich entspricht das beispielsweise dem Problem, wie man einen Weidezaun mit gegebener Länge L legen müsste, damit die Fläche der Kuhweide so groß wie möglich wird.

Optimal wäre für einen Zaun der Länge $L = 2\pi r$ ein Kreis mit Flächeninhalt $A = \pi r^2 = \frac{L^2}{4\pi}$. Das soll im Folgenden bewiesen werden.

Satz 1.2.18 (Isoperimetrische Ungleichung). *Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet, berandet von einer einfach geschlossenen ebenen Kurve c . Sei $A[G]$ der Flächeninhalt des Gebiets. Dann gilt*

$$A[G] \leq \frac{L[c]^2}{4\pi}.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn c ein Kreis ist.

Beweis. Sei $c : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2, c(t) = (x(t), y(t))$ eine einfach geschlossene ebene Kurve mit Periode $L = L[c]$.

Es gilt die Gleichung für den Flächeninhalt

$$|A| = \iint_A \mathbb{1} d(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^L x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^L (x\dot{y} - y\dot{x}) dt.$$

Dies folgt aus dem Satz von Green:

$$F = (P, Q) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\int_{\Gamma} F \cdot dr = \int_0^L F(c(t)) \cdot \dot{c}(t) dt = \int_0^L (P\dot{x} + Q\dot{y}) dt = \iint_A (Q_x - P_y) d(x, y)$$

$$\text{wobei } F = \frac{1}{2}(-y, x), Q = \frac{x}{2}, P = -\frac{y}{2}.$$

Wir identifizieren \mathbb{R}^2 nun mit der komplexen Zahlenebene und betrachten

$$\tilde{z}(t) = x(t) + iy(t)$$

Durch Parametertransformation erhalten wir

$$z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z(t) = x\left(\frac{L}{2\pi}t\right) + iy\left(\frac{L}{2\pi}t\right).$$

z ist damit eine 2π -periodische Funktion in \mathbb{C} : $z(2\pi) = x(L) + iy(L) = z(0)$.

Wir wissen, dass wir jede glatte Funktion punktweise in eine Fourier-Reihe entwickeln können

$$z(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$$

mit den Fourier-Koeffizienten $c_k \in \mathbb{C}$.

Nun können wir mit den Fourier-Koeffizienten die Länge von c ausdrücken.

Es gilt einerseits:

$$\int_0^{2\pi} |\dot{z}(t)|^2 dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \left\| \dot{c}\left(\frac{Lt}{2\pi}\right) \right\|^2 dt = \frac{L^2}{2\pi}, \quad (1.2.7)$$

ebenso wie andererseits

$$\dot{z}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k i k e^{ikt}.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |\dot{z}(t)|^2 dt &= \int_0^{2\pi} \dot{z}(t) \bar{\dot{z}}(t) dt = \int_0^{2\pi} \sum_{k,l=-\infty}^{\infty} c_k i k e^{ikt} \bar{c}_l (-il) e^{-ilt} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sum_{k,l=-\infty}^{\infty} c_k \bar{c}_l k l e^{i(k-l)t} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sum_{\substack{k,l=-\infty \\ k \neq l}}^{\infty} c_k \bar{c}_l k l e^{i(k-l)t} dt + \int_0^{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 k^2 dt \\ &= 0 + \int_0^{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 k^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 k^2 2\pi. \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

Mit (1.2.7) und (1.2.8) folgt für die Länge von c :

$$L[c]^2 = (2\pi)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 |c_k|^2. \quad (1.2.9)$$

Als nächstes drücken wir auch den Flächeninhalt $A[G]$ mit Fourier-Koeffizienten aus. Wir schreiben dabei $\Im(w)$ für den Imaginärteil einer komplexen Zahl w .

$$\begin{aligned} 2A[G] &= \int_0^L (x(t)y'(t) - \dot{x}(t)y(t)) dt = -\Im \int_0^{2\pi} \bar{z}(t)z'(t) dt \\ &= -\Im \int_0^{2\pi} \sum_{l,k=-\infty}^{\infty} -ik\bar{c}_k c_l e^{(l-k)it} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k|c_k|^2 2\pi. \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

Insgesamt folgt dann aus (1.2.9) und (1.2.10):

$$\frac{A[G]}{\pi} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k|c_k|^2 \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 |c_k|^2 = \frac{L[c]^2}{(2\pi)^2}$$

Und damit

$$4\pi A[G] \leq L[c]^2.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn alle $c_k = 0$ für $k \neq 0, 1$. Dies würde genau bedeuten

$$z(t) = c_0 + c_1 e^{it},$$

das heißt, c beschreibt einen Kreis. □

1.3 Raumkurven

Im Folgenden betrachten wir nun Kurven, die im Raum verlaufen, also Werte in \mathbb{R}^3 annehmen.

Definition 1.3.1. Eine parametrisierte Kurve $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ heißt *parametrisierte Raumkurve*. Analog sind *reguläre parametrisierte Raumkurven* und *orientierte Raumkurven* definiert.

Im Falle einer Raumkurve ist es schwieriger ein Normalenfeld analog zu ebenen Kurven zu definieren, da wir eine senkrechte Ebene zum Geschwindigkeitsvektor $\dot{\gamma}$ haben. Dadurch können wir auch den Begriff der Krümmung nicht wie zuvor definieren. Jedoch macht es auch wenig Sinn im dreidimensionalen Raum von rechts- und linksgekrümmt zu sprechen, weshalb wir auf ein Vorzeichen und auf die Verwendung des Normalenfeldes in der Definition der Krümmung verzichten können:

Definition 1.3.2. Sei $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve. Die Funktion

$$\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}, \kappa(t) := \|\ddot{\gamma}(t)\|$$

heißt *Krümmung* von γ .

$\kappa(t)$ ist somit per Definition positiv und gibt wieder ein Maß dafür an, wie stark die Kurve bei $t \in I$ gekrümmt ist.

Damit haben wir nun auch die Möglichkeit, einen Normalenvektor zu definieren:

Definition 1.3.3. Sei $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve. Sei $t_0 \in I$ und $\kappa(t_0) \neq 0$. Dann heißt

$$n(t_0) := \frac{\ddot{\gamma}(t_0)}{\kappa(t_0)} = \frac{\ddot{\gamma}(t_0)}{\|\ddot{\gamma}(t_0)\|}$$

der *Normalenvektor* von γ in t_0 .

Wie im ebenen Fall in Gleichung (1.2.1) gilt $\frac{d}{dt}\|\dot{\gamma}\|^2 = 2(\ddot{\gamma} \cdot \dot{\gamma}) = 0$, also folgt mit $\ddot{\gamma} = n \cdot \|\ddot{\gamma}\|$ und $\|\dot{\gamma}\| \neq 0$

$$n \cdot \dot{\gamma} = 0.$$

Also steht $n(t)$ tatsächlich senkrecht auf $\dot{\gamma}(t)$. Da wir jetzt den Normalenvektor haben, können wir zu einer Orthonormalbasis des \mathbb{R}^3 vervollständigen und folgendes definieren:

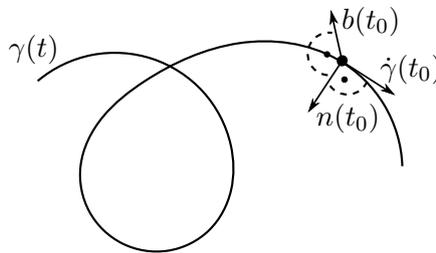
Definition 1.3.4. Sei $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve. Sei $t_0 \in I$ und $\kappa(t_0) \neq 0$. Dann heißt

$$b(t_0) = \dot{\gamma}(t_0) \times n(t_0)$$

Binomialvektor von γ in t_0 .

(Anmerkung zur Notation: Mit $x \times y$ bezeichnen wir das Kreuzprodukt zweier Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^3$. Es hat die Eigenschaft, dass es orthogonal sowohl auf x als auch auf y steht.)

Definition 1.3.5. Sei $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve. Die Orthonormalbasis $(\dot{\gamma}(t_0), n(t_0), b(t_0))$ heißt *begleitendes Dreibein* von γ in t_0 .



Definition 1.3.6. Sei $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve. Sei $t_0 \in I$ mit $\kappa(t_0) \neq 0$, und sei $(\dot{\gamma}(t_0), n(t_0), b(t_0))$ das begleitende Dreibein von γ in t_0 . Dann heißt

$$\tau(t_0) := \dot{n}(t_0) \cdot b(t_0)$$

die *Windung*, oder auch *Torsion* von γ in t_0 .

Proposition 1.3.7 (Frenet-Gleichung). Sei $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve mit positiver Krümmung, $\kappa(t) > 0$ für alle $t \in I$. Sei (v, n, b) das begleitende Dreibein von γ , wobei $v = \dot{\gamma}$, und sei τ die Windung. Dann gilt

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v(t) \\ n(t) \\ b(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(t) & 0 \\ -\kappa(t) & 0 & \tau(t) \\ 0 & -\tau(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(t) \\ n(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$$

Beweis. Zu zeigen ist

$$\dot{v}(t) = \kappa(t)n(t) \quad (1.3.1)$$

$$\dot{n}(t) = -\kappa(t)v(t) + \tau(t)b(t) \quad (1.3.2)$$

$$\dot{b}(t) = -\tau(t)n(t) \quad (1.3.3)$$

Die Gleichung (1.3.1) $\dot{v} = \tilde{\gamma} = \kappa n$ ist gerade die Definition 1.3.3 des Normalenvektors.

Gleichung (1.3.2) ergibt sich mit

$$\begin{aligned} \dot{n} \cdot n &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(n \cdot n) = 0 \\ \dot{n} \cdot v &= \frac{d}{dt}(n \cdot v) - n \cdot \dot{v} = 0 - \kappa = -\kappa \\ \dot{n} \cdot b &= \tau. \end{aligned}$$

Gleichung (1.3.3) schließlich folgt aus

$$\begin{aligned} \dot{b} \cdot b &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(b \cdot b) = 0 \\ \dot{b} \cdot n &= \frac{d}{dt}(b \cdot n) - b \cdot \dot{n} = 0 - \tau = -\tau \\ \dot{b} \cdot v &= \frac{d}{dt}(b \cdot v) - b \cdot \dot{v} = 0 - b \cdot \kappa n = 0. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 1.3.8. Sei $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve und $\tilde{\gamma} = R\gamma + d$ mit $d \in \mathbb{R}^3, R \in SO(3)$ (d.h. R ist speziell-orthogonale 3×3 -Matrix, also $\det(R) = 1$ und $R^T R = 1$). Dann gilt

$$\tilde{\kappa} = \kappa \text{ und } \tilde{\tau} = \tau.$$

Das heißt, durch orientierungserhaltende Drehungen und Verschiebungen ändern sich Krümmung und Torsion einer Raumkurve nicht.

Beweis. Es gilt für die Krümmung $\tilde{\kappa}$ von $\tilde{\gamma}$

$$\tilde{\kappa} = \|\ddot{\tilde{\gamma}}\| = \sqrt{\ddot{\tilde{\gamma}} \cdot \ddot{\tilde{\gamma}}} = \sqrt{R\ddot{\gamma} \cdot R\ddot{\gamma}} = \|R\ddot{\gamma}\| = \|\ddot{\gamma}\| = \kappa,$$

wobei die Orthogonalität der Matrix R mit eingegangen ist.

Für die Torsion $\tilde{\tau}$ von $\tilde{\gamma}$ ergibt sich somit

$$\tilde{\tau} = \dot{\tilde{n}} \cdot \tilde{b} = R\dot{n} \cdot Rb = \dot{n} \cdot b = \tau.$$

□

Satz 1.3.9 (Hauptsatz der Raumkurventheorie). *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, seien $\kappa, \tau : I \rightarrow \mathbb{R}$ glatte (C^∞ -)Funktionen und $\kappa > 0$. Dann existiert eine nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit Krümmung κ und Windung τ . Diese Raumkurve ist bis auf Drehung und Verschiebung eindeutig, das heißt bis auf $R\gamma + d$, wobei $R \in SO(3), d \in \mathbb{R}^3$.*

Beweis. Seien

$$\begin{aligned}\gamma(t_0) &= 0, \\ v(t_0) &= e_1, \\ n(t_0) &= e_2, \\ b(t_0) &= e_3.\end{aligned}$$

Dann hat das lineare gewöhnliche Differentialgleichungssystem erster Ordnung

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \gamma \\ v \\ n \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa & 0 \\ 0 & -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ v \\ n \\ b \end{pmatrix}$$

mit obigem Anfangswertproblem nach dem Existenz- und Eindeigkeitssatz für derartige Differentialgleichungssysteme (Picard-Lindelöf) genau eine Lösung: $\gamma(t), v(t), n(t), b(t)$.

Die Struktur der Matrix erhält dabei die Orthogonalität von $v(t), n(t)$ und $n(t)$. □

Beispiel 1.3.10. Wir betrachten die Schraubenlinie $\gamma(t) = \begin{pmatrix} r \cos t/a \\ r \sin t/a \\ ht/a \end{pmatrix}$

Damit ist $\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -r/a \sin t/a \\ r/a \cos t/a \\ h/a \end{pmatrix}$. Wenn γ nach Bogenlänge parametrisiert ist, gilt

$$1 = \|\dot{\gamma}\| = \sqrt{\left(\frac{r}{a}\right)^2 \sin^2\left(\frac{t}{a}\right) + \left(\frac{r}{a}\right)^2 \cos^2\left(\frac{t}{a}\right) + \left(\frac{h}{a}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{r}{a}\right)^2 + \left(\frac{h}{a}\right)^2}$$

und damit

$$a = \sqrt{r^2 + h^2}.$$

Weiter erhalten wir $\ddot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -r/a^2 \cos t/a \\ -r/a^2 \sin t/a \\ 0 \end{pmatrix}$.

Damit können wir nun die Krümmung berechnen:

$$\begin{aligned}\kappa(t) &= \|\ddot{\gamma}(t)\| = \sqrt{\frac{r^2}{a^4} \cos^2\left(\frac{t}{a}\right) + \frac{r^2}{a^4} \sin^2\left(\frac{t}{a}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{r^2}{a^4}} = \frac{r}{a^2} \\ &= \frac{r}{r^2 + h^2}.\end{aligned}$$

Da $n(t) = \frac{\ddot{\gamma}(t)}{\kappa(t)}$, gilt $n(t) = \begin{pmatrix} -\cos t/a \\ -\sin t/a \\ 0 \end{pmatrix}$.

Dadurch berechnen wir

$$b(t) = \dot{\gamma}(t) \times n(t) = \begin{pmatrix} -r/a \sin t/a \\ r/a \cos t/a \\ h/a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\cos t/a \\ -\sin t/a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h/a \sin t/a \\ -h/a \cos t/a \\ r/a \end{pmatrix}$$

Also ergibt sich für die Torsion

$$\begin{aligned}\tau(t) &= \dot{n}(t) \cdot b(t) = \begin{pmatrix} 1/a \sin t/a \\ -1/a \cos t/a \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h/a \sin t/a \\ -h/a \cos t/a \\ r/a \end{pmatrix} \\ &= \frac{h}{a^2} \sin^2\left(\frac{t}{a}\right) + \frac{h}{a^2} \cos^2\left(\frac{t}{a}\right) + 0 \\ &= \frac{h}{a^2} = \frac{h}{r^2 + h^2}\end{aligned}$$

Sei $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve. Wir werden die Gleichung der Kurve γ in einer Umgebung von $t_0 \in I$ aufstellen, indem wir das begleitende Dreibein $(\dot{\gamma}(t_0), n(t_0), b(t_0))$ als Basis des \mathbb{R}^3 nehmen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir $t_0 = 0$ an.

Nach dem Satz von Taylor gilt

$$\gamma(t) = \gamma(0) + \dot{\gamma}(0)t + \ddot{\gamma}(0)\frac{t^2}{2} + \ddot{\gamma}(0)\frac{t^3}{3!} + R,$$

wobei $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{R}{t^3} = 0$. Es gilt nach Definition 1.3.3:

$$\ddot{\gamma} = \kappa n$$

und somit

$$\ddot{\gamma} = \frac{d}{dt}\dot{\gamma} = \frac{d}{dt}(\kappa n) = \dot{\kappa}n + \kappa\dot{n} = \dot{\kappa}n + \kappa(-\kappa\dot{\gamma} - \tau b) = \dot{\kappa}n - \kappa^2\dot{\gamma} - \kappa\tau b.$$

Wir erhalten durch einsetzen und umsordieren

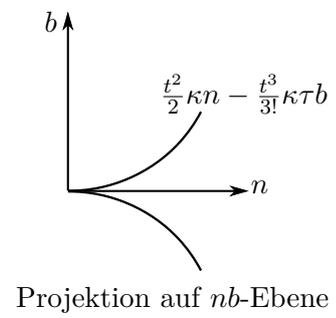
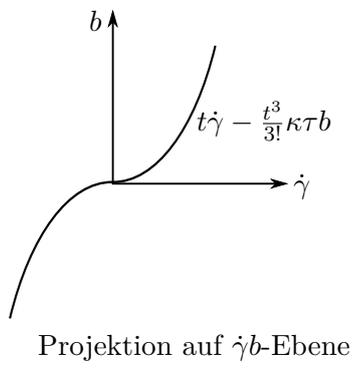
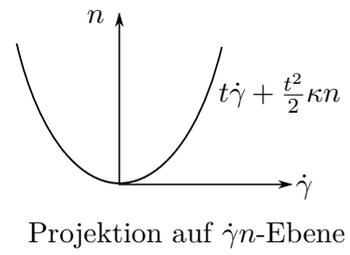
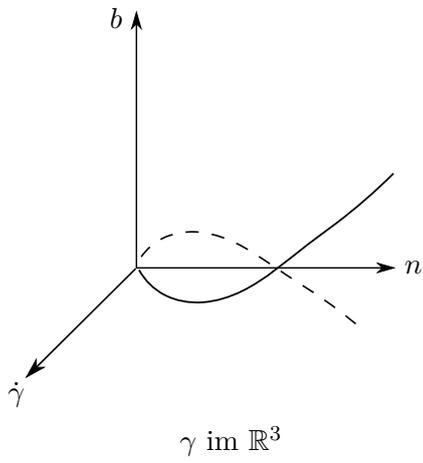
$$\gamma(t) - \gamma(0) = \dot{\gamma}\left(t - \frac{t^3}{3!}\kappa^2\right) + n\left(\frac{t^2}{2}\kappa + \frac{t^3}{3!}\dot{\kappa}\right) - \frac{t^3}{3!}b\kappa\tau + R.$$

Definition 1.3.11. Die Darstellung von einer Raumkurve $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ bezüglich der Basis (v, n, b) durch

$$x(t) = t - \frac{t^3}{3!}\kappa^2 + R, \quad y(t) = \frac{t^2}{2}\kappa + \frac{t^3}{3!}\dot{\kappa} + R, \quad z(t) = -\frac{t^3}{3!}\kappa\tau + R$$

heißt *lokale kanonische Form* von γ .

Für kleine t skizzieren wir die Projektionen der Spur von γ in die $\dot{\gamma}n$ -, $\dot{\gamma}b$ - und nb -Ebenen:



2 Lokale Flächentheorie

Wir werden in diesem Kapitel die Begriffe Fläche und Tangentialraum kennenlernen. Außerdem wird deutlich werden, dass die Geometrie einer regulären Fläche im Wesentlichen durch die erste und zweite Fundamentalform bestimmt ist, die auch verschiedene Begriffe von Krümmung liefern werden.

2.1 Flächen und Tangentialraum

Flächen im dreidimensionalen Raum sind zweidimensionale Objekte, das heißt die Punkte auf einer Fläche können durch zwei unabhängige reelle Parameter beschrieben werden. Im Gegensatz zu Kurven, die wir stets als Ganzes parametrisiert haben, verlangen wir bei Flächen nur, dass man jeweils kleine Stücke der Fläche durch eine Parametrisierung beschreiben kann.

Definition 2.1.1. Unter einer *parametrisierten Fläche* verstehen wir eine glatte (C^∞ -)Abbildung

$$X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

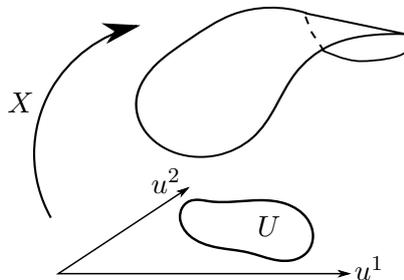
$$X(u^1, u^2) = (x^1(u^1, u^2), x^2(u^1, u^2), x^3(u^1, u^2))$$

mit U offene Teilmenge von \mathbb{R}^2 , sodass die Jakobi-Matrix

$$dX = DX : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_u X \subset \mathbb{R}^3,$$

$$DX(y) = X_i y^i \text{ mit } X_i = \frac{\partial}{\partial u^i} X, y = (y^1, y^2) \in \mathbb{R}^2$$

injektiv ist.



Anmerkung zur Notation:

Nach der Einsteinschen Summationskonvention schreiben wir:

$$Y = \sum_{i=1}^2 X_i y^i = X_i y^i$$

Beispiel 2.1.2. a) Affine Ebene:

Die Ebene ist das einfachste Beispiel für eine Fläche. Die Parametrisierung einer affinen Ebene durch einen Punkt $a \in \mathbb{R}^3$ aufgespannt durch die Vektoren $b, c \in \mathbb{R}^3$ ist

$$X(u^1, u^2) = a + u^1 b + u^2 c$$

Dabei ist also $X_1 = b, X_2 = c$.

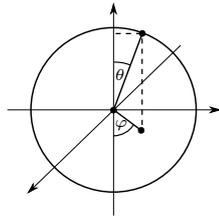
b) Funktionsgraph:

Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Wir betrachten die Abbildung $X(x, y, f(x, y))$. Dann ist

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x \end{pmatrix}, X_2 = \frac{\partial}{\partial y} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y \end{pmatrix}$$

c) Sphäre:

Für U offen wählen wir: $0 < \varphi < 2\pi, 0 < \theta < \pi$ und betrachten



$$X(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

Also ist $X = \sin \theta \cos \varphi$, $Y = \sin \theta \sin \varphi$ und $Z = \cos \theta$.

$X(U)$ überdeckt nicht die ganze Sphäre, da der Halbkreis vom Nord- zum Südpol ausgeschlossen wird.

d) Drehfläche:

Wir betrachten eine allgemeine Fläche $\begin{pmatrix} r(t) \\ 0 \\ h(t) \end{pmatrix}$. Dann ergibt sich mit der Rotation

$$R_\varphi = e^\varphi \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

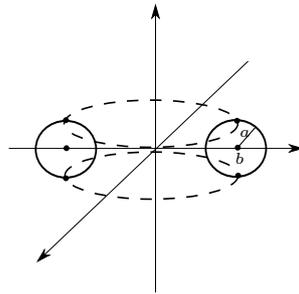
um die z -Achse mit Drehwinkel $0 < \varphi < 2\pi$ folgende *Drehfläche*:

$$X(t, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r(t) \\ 0 \\ h(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t) \cos \varphi \\ r(t) \sin \varphi \\ h(t) \end{pmatrix}.$$

Für einen Torus bedeutet das beispielsweise

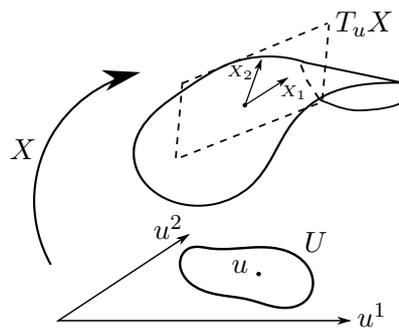
$$X(t, \varphi) = R_\varphi \begin{pmatrix} a \cos t + b \\ 0 \\ a \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a \cos t + b) \cos \varphi \\ (a \cos t + b) \sin \varphi \\ a \sin t \end{pmatrix},$$

wobei $0 < t, \varphi < 2\pi, a, b \in \mathbb{R}$.



Definition 2.1.3. Der *Tangentialraum* $T_u X$ an die parametrisierte Fläche $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ in $u \in U$ ist der zweidimensionale Vektorraum, der von den Tangentialvektoren X_1, X_2 aufgespannt wird. Das heißt,

$$Y \in T_u X \Leftrightarrow Y = y^i X_i$$



Bemerkung 2.1.4. $T_u X$ stimmt überein mit der Menge der Tangentialvektoren $\dot{\gamma}(0)$ einer glatten Kurve $\gamma(t) = X \circ c(t)$ mit $c(0) = u$, wobei $c : U \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Beweis. Sei $Y = y^i X_i$ und $c(t) = u + ty$.

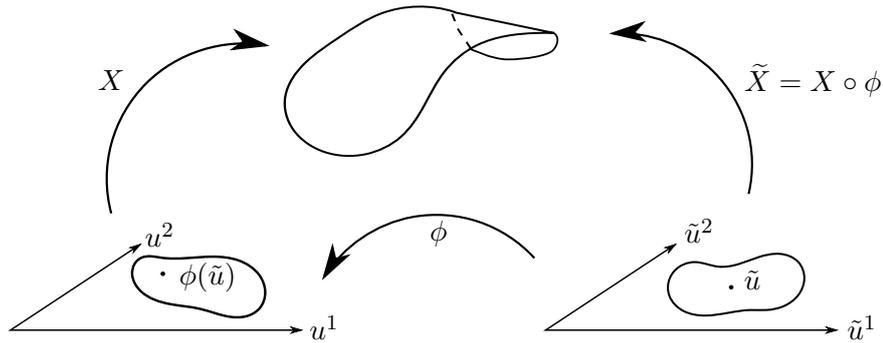
Dann ist

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= X \circ c(t) = X(c^1(t), c^2(t)) \\ \dot{\gamma}(0) &= X_1 \dot{c}^1(0) + X_2 \dot{c}^2(0) = X_i y^i. \end{aligned}$$

□

Definition 2.1.5. Seien $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $\tilde{X} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrisierte Flächen. Wir sagen, \tilde{X} ist eine *Umparametrisierung* von X , wenn $\tilde{X} = X \circ \phi$, wobei ϕ ein Diffeomorphismus (das heißt eine glatte bijektive Abbildung, deren Umkehrabbildung ebenfalls glatt ist): $\phi : \tilde{U} \rightarrow U$ ist. ϕ heißt dann *Parametertransformation*.

Wenn ϕ orientierungserhaltend ist, das heißt $\det \phi > 0$, dann ist \tilde{X} eine *orientierungserhaltende Umparametrisierung*.



Proposition 2.1.6. Sei $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche und sei $\tilde{X} = X \circ \phi$ eine Umparametrisierung von X . Dann gilt $T_{\phi(\tilde{u})}X = T_{\tilde{u}}\tilde{X}$. Sei weiter $Z \in T_{\phi(\tilde{u})}\tilde{X}$ und $Z = z^i X_i = \tilde{z}^j \tilde{X}_j$. Dann gilt

$$z^i = \tilde{z}^j \frac{\partial u^i}{\partial \tilde{u}^j} = \tilde{z}^j \frac{\partial \phi^i}{\partial \tilde{u}^j}$$

und

$$\phi(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) = \begin{pmatrix} \phi^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \\ \phi^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \\ u^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \end{pmatrix}.$$

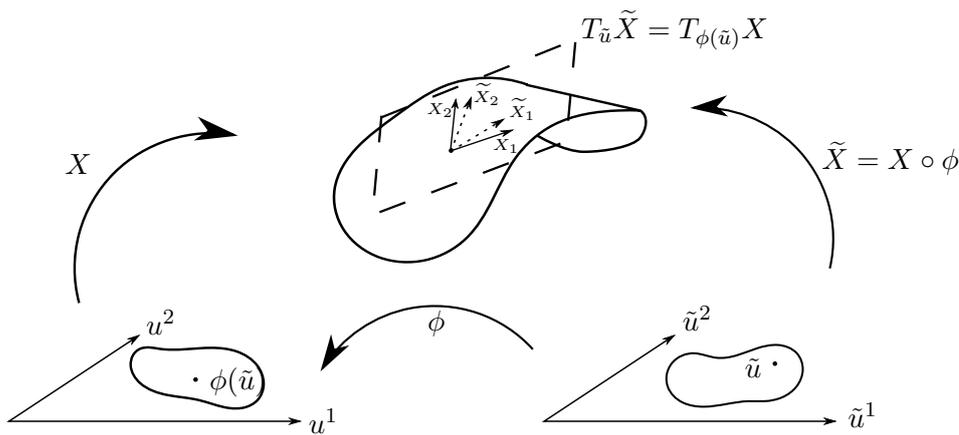
Beweis. Es gilt $\tilde{X} = X \circ \phi = X(\phi^1(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2), \phi^2(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2))$.

Mit der Kettenregel folgt: $\tilde{X}_j = \frac{\partial}{\partial \tilde{u}^j} \tilde{X}_i = X_1 \frac{\partial \phi^1}{\partial \tilde{u}^j} + X_2 \frac{\partial \phi^2}{\partial \tilde{u}^j}$, also $\tilde{X}_j = X_i \frac{\partial \phi^i}{\partial \tilde{u}^j}$.

Dadurch erhalten wir

$$Z = \tilde{z}^j \tilde{X}_j = \tilde{z}^j X_i \frac{\partial \phi^i}{\partial \tilde{u}^j} = z^i X_j \frac{\partial u^j}{\partial \tilde{u}^i} = z^j X_j.$$

□



Definition 2.1.7. Ein Vektorfeld entlang einer parametrisierten Fläche $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist eine Abbildung $Y : U \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Ein Vektorfeld Y ist ein Tangentenfeld, von X , wenn $Y(u) \in T_u X \forall u = (u^1, u^2) \in U$, d.h.

$$Y = y^i X_i = y^i(u) X_i(u).$$

Ein Vektorfeld Z heißt *Normalenfeld* von X , wenn $Z(u) \perp T_u X \forall u \in U$.

Beispiel 2.1.8. Sei $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche. Die Abbildung

$$N(u^1, u^2) = \frac{X_1(u^1, u^2) \times X_2(u^1, u^2)}{\|X_1(u^1, u^2) \times X_2(u^1, u^2)\|}$$

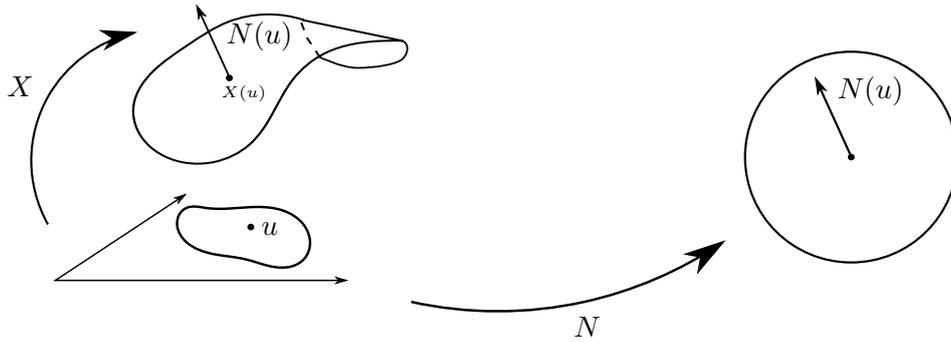
ist das Einheitsnormalenfeld von X .

(X_1, X_2, N) ist positiv orientiert, aber $\det(X_1, X_2, N)$ muss nicht notwendigerweise 1 sein.

Definition 2.1.9. Sei $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche. Die Abbildung $N : U \rightarrow \mathbb{S}^2$, wobei \mathbb{S}^2 die zweidimensionale Sphäre im \mathbb{R}^3 ist, mit

$$N(u^1, u^2) = \frac{X_1(u^1, u^2) \times X_2(u^1, u^2)}{\|X_1(u^1, u^2) \times X_2(u^1, u^2)\|}$$

heißt *Gauß-Abbildung*.



Bemerkung 2.1.10. Sei $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche und sei $N : U \rightarrow \mathbb{S}^2$ die Gauß-Abbildung. Sei weiter $\tilde{X} = X \circ \phi$ eine orientierungserhaltende Umparametrisierung. Dann gilt für die Gauß-Abbildung von \tilde{X} :

$$\tilde{N} = N \circ \phi.$$

Beweis. Sei $\tilde{u} \in \tilde{U}$. Dann gilt nach Definition 2.1.7

$$\tilde{N}(\tilde{u}) \perp T_{\tilde{u}} \tilde{X} \text{ sowie } N(\phi(\tilde{u})) \perp T_{\phi(\tilde{u})} X.$$

Da nach Proposition 2.1.6 $T_{\phi(\tilde{u})} X = T_{\tilde{u}} \tilde{X}$, folgt auch

$$\tilde{N}(\tilde{u}) \perp T_{\phi(\tilde{u})} X.$$

Daraus ergibt sich $\tilde{N}(\tilde{u}) = \pm N(\phi(\tilde{u}))$ und da \tilde{X} orientierungserhaltend ist folgt

$$\tilde{N}(\tilde{u}) = N(\phi(\tilde{u})).$$

□

2.2 Die erste Fundamentalform

Wir betrachten Flächen im Raum als Abbildung $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$. Für eine Kurve $c(t)$ in $U \subset \mathbb{R}^2$ wissen wir aus dem letzten Kapitel, wie wir die zugehörige Länge berechnen können (vergleiche Definition 1.1.15). Allerdings ist dies für das Bild $\gamma = X(c(t))$ der Kurve unter X a priori nicht klar, da dies von der Fläche abhängt, und wir zuerst eine Metrik auf dieser Fläche brauchen. Diese Metrik g werden wir im Folgenden behandeln, welche vom zugehörigen Tangentialraum $T_u X$ abhängt. Wir nennen g auch *erste Fundamentalform*.

Definition 2.2.1. Sei $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche. Die *erste Fundamentalform* $g : T_u X \times T_u X \rightarrow \mathbb{R}$ von X ist definiert durch

$$g(Y, Z) = Y \cdot Z = y^i X_i \cdot z^j X_j = y^i z^j X_i \cdot X_j = y^i z^j g_{ij}$$

wobei

$$Y, Z \in T_u X \text{ mit } Y = y^i X_i, Z = z^j X_j.$$

Dabei gilt

$$g_{ij} = g(X_i, X_j) = X_i \cdot X_j$$

Wir nennen dies die *Koordinatendarstellung* von g .

In der sogenannten *Gauß-Notation* wird g_{ij} geschrieben als

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

Bemerkung 2.2.2. In der Physik wird die erste Fundamentalform auch oft in der Form

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j$$

geschrieben. ds wir auch als *Bogenlängeelement* bezeichnet.

Als Erklärung dafür betrachten wir die Länge s einer Kurve c auf einer Fläche X gemäß Definition 1.1.15, wobei wir die Notation $c(t) = (c^1(t), c^2(t)) = (u^1(t), u^2(t))$ verwenden:

$$s(t) = \int_0^t \|\dot{c}(t)\| dt = \int_0^t \sqrt{g(\dot{c}(t))} dt = \int_0^t \sqrt{g_{ij} \dot{c}^i \dot{c}^j} dt$$

Damit ergibt sich $\frac{ds}{dt} = \sqrt{g_{ij} \dot{c}^i \dot{c}^j}$ und durch Quadrieren erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{ds^2}{dt^2} &= g_{ij} \dot{c}^i \dot{c}^j = g_{ij} \frac{dc^i}{dt} \frac{dc^j}{dt} \\ \Rightarrow ds^2 &= g_{ij} dc^i dc^j = g_{ij} du^i du^j \end{aligned}$$

.

Beispiel 2.2.3. Sphäre

Wir betrachten erneut die Parametrisierung der Sphäre aus Beispiel 2.1.2

$$X(\varphi, \theta) = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta),$$

mit $0 < \varphi < 2\pi$, $0 < \theta < \pi$. Es gilt $X_\varphi = (-\sin \theta \sin \varphi, \sin \theta \cos \varphi, 0)$. Damit ergibt sich:

$$X_\varphi \cdot X_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \sin^2 \theta \cos^2 \varphi = \sin^2 \theta.$$

Die übrigen Einträge berechnen sich analog und es ergibt sich für die erste Fundamentalform:

$$\begin{pmatrix} g_{\varphi\varphi} & g_{\varphi\theta} \\ g_{\theta\varphi} & g_{\theta\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_\varphi \cdot X_\varphi & X_\varphi \cdot X_\theta \\ X_\theta \cdot X_\varphi & X_\theta \cdot X_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und $ds^2 = \sin^2 \theta d^2\varphi + d^2\theta$.

Bemerkung 2.2.4. Die erste Fundamentalform $g : T_u X \times T_u X \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine positiv definite symmetrische Bilinearform, das heißt:

- $g(Y, Y) \geq 0$ für alle $Y \in T_u X$.
- $g(Y, Y) = 0 \Leftrightarrow Y = 0$
- $g(Y, Z) = g(Z, Y)$ für alle $Z, Y \in T_u X$.
- $g(aX + bY, Z) = ag(X, Z) + bg(Y, Z)$,
 $g(X, aY + bZ) = ag(X, Y) + bg(X, Z)$ für alle $X, Y, Z \in T_u X$ und für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

Definition 2.2.5. Sei $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche und $g : T_u X \times T_u X \rightarrow \mathbb{R}$ ihre erste Fundamentalform. Der Winkel θ zwischen zwei Vektoren $Y, Z \in T_u X$ ist gegeben durch

$$\cos \theta = \frac{g(Y, Z)}{\sqrt{g(Y, Y)g(Z, Z)}}.$$

Der Winkel zwischen zwei Kurven ist definiert als der Winkel zwischen ihren Tangentialvektoren.

Proposition 2.2.6. Sei $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche und $\tilde{X} = X \circ \phi$ eine Umparametrisierung von X . Sei g_{ij} die Koordinatendarstellung der ersten Fundamentalform von X und sei \tilde{g}_{ij} die Koordinatendarstellung der ersten Fundamentalform von \tilde{X} . Dann gilt

$$\tilde{g}_{ij} = g_{kl} \frac{\partial u^k}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^l}{\partial \tilde{u}^j}$$

mit der Jacobi-Matrix $d\phi = \frac{\partial u^i}{\partial \tilde{u}^j}$.

Beweis. Mit der Kettenregel und den Eigenschaften der ersten Fundamentalform als Bilinearform ergibt sich

$$\tilde{g}_{ij} = g(\tilde{X}_i, \tilde{X}_j) = g\left(\frac{\partial u^k}{\partial \tilde{u}^i} X_k, \frac{\partial u^l}{\partial \tilde{u}^j} X_l\right) = \frac{\partial u^k}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^l}{\partial \tilde{u}^j} g(X_k, X_l) = g_{kl} \frac{\partial u^k}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^l}{\partial \tilde{u}^j}.$$

□

Definition 2.2.7. Sei $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche. Sei g_{ij} die erste Fundamentalf orm von X . Wir definieren denn *Flächeninhalt* $A_X(V)$ einer Fläche $X(V)$ mit $V \subset U$:

$$A_X(V) = \int_V dA = \iint_V \sqrt{\det g_{ij}} du^1 du^2$$

Bemerkung 2.2.8. Obige Definition des Flächeninhalts stimmt mit der üblichen Definition $\iint_V \|X_1(u) \times X_2(u)\| du^1 du^2$ überein, denn es gilt

$$\begin{aligned} |X_1 \times X_2|^2 &= |X_1|^2 |X_2|^2 \sin^2 \theta = |X_1|^2 |X_2|^2 (1 - \cos^2 \theta) \\ &= |X_1|^2 |X_2|^2 - |X_1|^2 |X_2|^2 \cos^2 \theta \\ &= (X_1 \cdot X_1)(X_2 \cdot X_2) - (X_1 \cdot X_2)^2 = \det \begin{pmatrix} X_1 \cdot X_1 & X_1 \cdot X_2 \\ X_2 \cdot X_1 & X_2 \cdot X_2 \end{pmatrix} \\ &= \det g_{ij}. \end{aligned}$$

Also folgt

$$A_X(V) = \iint_V |X_1(u) \times X_2(u)| du^1 du^2 = \iint_V \sqrt{\det g_{ij}} du^1 du^2.$$

Bemerkung 2.2.9. Der Flächeninhalt ist unabhängig von der Parametrisierung.

Beweis. Sei $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche und $\tilde{X} = X \circ \phi$ eine Umparametrisierung von X . Sei g_{ij} die Koordinatendarstellung der ersten Fundamentalf orm von X und sei \tilde{g}_{ij} die Koordinatendarstellung der ersten Fundamentalf orm von \tilde{X} . Sei $V \subset U$ und $\tilde{V} = \phi(V)$. Dann gilt für die Fläche von $\tilde{X}(\tilde{V})$ (bzw. $X(V)$) mit Proposition 2.2.6:

$$\begin{aligned} A_{\tilde{X}}(\tilde{V}) &= \iint_{\tilde{V}} \sqrt{\det \tilde{g}_{ij}} d\tilde{u}^1 d\tilde{u}^2 = \iint_V \sqrt{\det \begin{pmatrix} g_{lk} \frac{\partial u^l}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^k}{\partial \tilde{u}^j} \end{pmatrix}} d\tilde{u}^1 d\tilde{u}^2 \\ &= \iint_V \sqrt{\det g_{lk}} \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi^l}{\partial \tilde{u}^i} \end{pmatrix} \right| d\tilde{u}^1 d\tilde{u}^2 = \iint_V \sqrt{\det g_{lk}} d(u^1, u^2) \\ &= A_X(V) \end{aligned}$$

□

2.3 Krümmung

Bei Kurven gibt die Krümmung κ die Änderung des Tangentialvektors $\dot{\gamma}$ an. Da dieser bei Flächen aber nicht eindeutig ist, brauchen wir hier einen neuen Krümmungsbegriff.

Eine natürliche Art und Weise Krümmung bei Flächen zu definieren, ist mittels der Flächennormalen, die wir mit N bezeichnen. Die Krümmung der Fläche wird dann durch die Änderungsrate von N gemessen werden. Hierbei werden an jedem Punkt der Fläche zwei Richtungen ausgezeichnet, die *Hauptkrümmungsvektoren*, die genau so definiert werden, dass wenn N entlang dieser Richtung läuft die Änderungsrate von N parallel zu dieser Richtung ist.

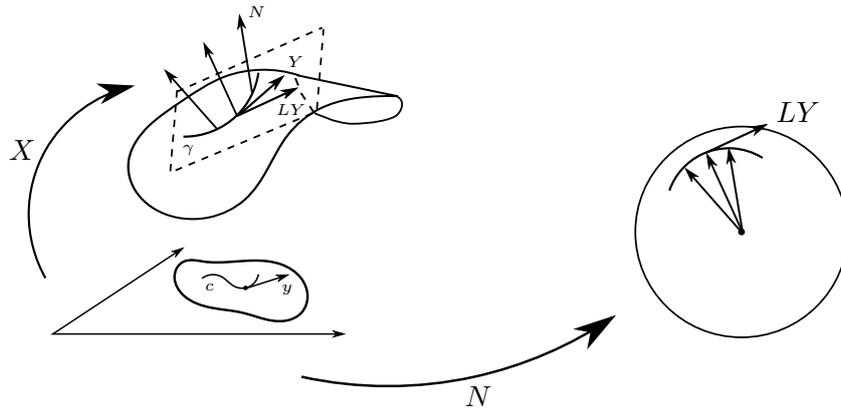
Die Änderungsraten von N in diese Richtungen werden wir dann die *Hauptkrümmungen* nennen und mit κ_1 und κ_2 bezeichnen. Das Mittel der beiden Werte wird als *mittlere Krümmung* bezeichnet und das Produkt als *Gauß-Krümmung*. Letztere wird im Folgenden besondere Bedeutung für uns haben.

Definition 2.3.1. Sei $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche mit Einheitsnormalenfeld N . Sei $Y = y^i X_i \in T_u X$, c Kurve mit $\dot{c}(0) = y$ und $\gamma = X \circ c$. Wir definieren die Weingarten-Abbildung

$$L : T_u X \rightarrow T_u X,$$

$$LY := -\frac{d}{dt} N \circ c|_{t=0} = -N_i \dot{c}^i(0) = -N_i y^i =: -\partial_Y N$$

LY gibt also die Änderung des Einheitsnormalenfelds N an, wenn N entlang einer Kurve γ mit $\dot{\gamma}(0) = Y$ bewegt wird.



Bemerkung 2.3.2. Es gilt $-\partial_Y N \in T_u X$, also liegt das Bild von L wieder ganz im Tangentialraum von X

$$LY \in T_u X \quad \forall Y \in T_u X$$

Beweis. Nach Definition 2.1.9 der Gauß-Abbildung gilt: $N \cdot N = 1$. Differentiation liefert

$$0 = \frac{d}{du^i} (N \cdot N)$$

$$0 = 2N_i \cdot N = 0$$

Also folgt: $N_i \perp N$ und $N_i \in T_u X$. □

Bemerkung 2.3.3. Die Weingarten-Abbildung L kann in Matrixform bezüglich der Basisvektoren $X_1 = \frac{\partial}{\partial u^1} X$ und $X_2 = \frac{\partial}{\partial u^2} X$ von $T_u X$ geschrieben werden:

$$L : T_u X \rightarrow T_u X$$

$$M_{\mathcal{A}}(L) = ((LX_1)_{\mathcal{A}}), (LX_2)_{\mathcal{A}}),$$

mit $\mathcal{A} = (X_1, X_2)$ und $M_{\mathcal{A}}(L) \in \text{Mat}(2 \times 2)$.

Nach Definition 2.3.1 gilt $LY = -N_i y^i$ und nach Bemerkung 2.3.2 ist $LY \in T_u X$. Also ergibt sich für die Spalten der Matrix $M_{\mathcal{A}}(L)$:

$$LX_1 = -N_1 = -\frac{d}{du^1} N = k_1^j X_j = k_1^1 X_1 + k_1^2 X_2$$

$$LX_2 = -N_2 = -\frac{d}{du^2}N = k_2^j X_j = k_2^1 X_1 + k_2^2 X_2$$

Damit ist die Matrixdarstellung der Weingarten-Abbildung gegeben durch

$$M_{\mathcal{A}}(L) = k_i^j = \begin{pmatrix} k_1^1 & k_2^1 \\ k_1^2 & k_2^2 \end{pmatrix}$$

Es folgt

$$LY = -y^i N_i = -y^i k_i^l X_l.$$

Satz 2.3.4. Sei $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche mit Einheitsnormalenfeld N , erster Fundamentalform g_{ij} und Weingarten-Abbildung L . Dann gilt für die Einträge der Matrix $M_{\mathcal{A}}(L)$:

$$k_i^m = (N \cdot X_{il})g^{lm},$$

wobei $g^{lm} = (g_{lm})^{-1}$.

Beweis. Nach Bemerkung 2.3.3 gilt

$$\begin{aligned} -N_i &= k_i^j X_j \quad | \cdot X_l \\ -N_i \cdot X_l &= k_i^j X_j \cdot X_l \\ -N_i \cdot X_l &= k_i^j g_{jl} \\ N \cdot X_{li} &= k_i^j g_{jl} \quad | \cdot g^{lm} \\ \Rightarrow N \cdot X_{li} g^{lm} &= k_i^j g_{jl} g^{lm} = k_j^m. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.3.5. Die 2×2 -Matrix k_i^j ist symmetrisch, da $k_1^2 = k_2^1$, was aus Satz 2.3.4 und dem Satz von Schwarz folgt. κ_1 und κ_2 sind die reellen Eigenwerte der Matrix mit den zugehörigen Eigenvektoren e_1 und e_2 .

Definition 2.3.6. Sei $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche mit Einheitsnormalenfeld N und Weingarten-Abbildung L .

Wir definieren die *Gauß-Krümmung* G :

$$G = \kappa_1 \kappa_2 = \det k_i^m = k_1^1 k_2^2 - k_1^2 k_2^1 = k_1^1 k_2^2 - |k_1^2|^2$$

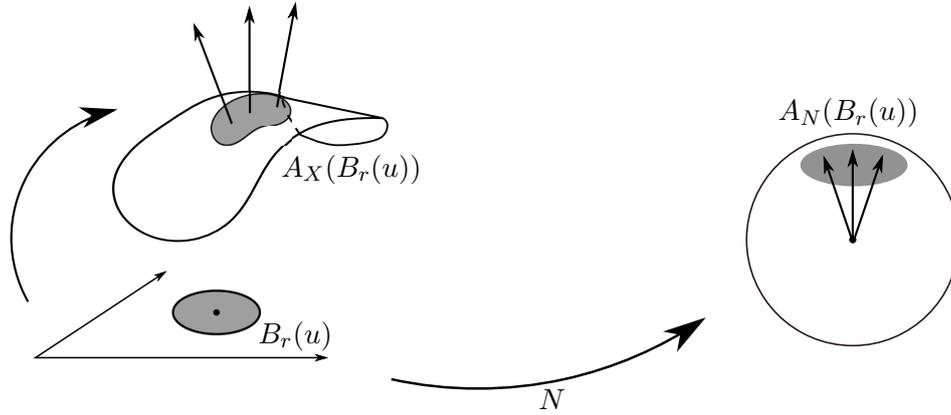
und die *mittlere Krümmung* H :

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{1}{2} \text{Spur}(k_i^j) = \frac{k_1^1 + k_2^2}{2}$$

Satz 2.3.7. Sei $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche mit Einheitsnormalenfeld N und Weingarten-Abbildung L . Sei G die Gauß-Krümmung. Sei weiter $B_r(u) \subset U$ eine Kreisscheibe um $u \in U$ mit Radius $r > 0$. Dann gilt

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{A_N(B_r(u))}{A_X(B_r(u))} = |G(u)|$$

Dabei bezeichnet A_N den Flächeninhalt des Bildes von $B_r(u)$ unter der Gauß-Abbildung und A_X den Flächeninhalt des Bildes von $B_r(u)$ unter X .



Beweis. Es gilt nach der Definition 2.2.7 des Flächeninhalts

$$A_X(B_r(u)) = \iint_{B_r(u)} \sqrt{\det g_{ij}} du^1 du^2$$

Weiter gilt analog zu Bemerkung 2.2.8

$$\begin{aligned} \|N_1 \times N_2\|^2 &= |N_1|^2 |N_2|^2 \sin^2 \theta = |N_1|^2 |N_2|^2 (1 - \cos^2 \theta) \\ &= |N_1|^2 |N_2|^2 - (N_1 \cdot N_2)^2 \\ &= \det \begin{pmatrix} N_1 \cdot N_1 & N_1 \cdot N_2 \\ N_2 \cdot N_1 & N_2 \cdot N_2 \end{pmatrix} = \det(N_i \cdot N_j) \end{aligned}$$

und mit Bemerkung 2.3.3 $N_i \cdot N_j = k_i^l X_l \cdot k_j^m X_m = k_i^l k_j^m X_l \cdot X_m = k_i^l k_j^m g_{lm}$
Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} A_N(B_r(u)) &= \iint_{B_r(u)} \|N_1 \times N_2\|(u^1, u^2) d(u^1, u^2) \\ &= \iint_{B_r(u)} \sqrt{\det(N_i \cdot N_j)} d(u^1, u^2) = \iint_{B_r(u)} \sqrt{\det(k_i^l k_j^m g_{lm})} d(u^1, u^2) \\ &= \iint_{B_r(u)} \sqrt{\det(k_i^j)^2 \det(g_{ij})} d(u^1, u^2) = \iint_{B_r(u)} |\det k_i^j| \sqrt{\det g_{ij}} d(u^1, u^2) \\ &= \iint_{B_r(u)} |G(u)| \sqrt{\det g_{ij}} d(u^1, u^2) \end{aligned}$$

Mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gilt für ein $x \in B_r(u)$

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{A_N}{A_X} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\iint_{B_r(u)} |G(u)| \sqrt{\det g_{ij}} d(u^1, u^2)}{\iint_{B_r(u)} \sqrt{\det g_{ij}} d(u^1, u^2)} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} |G(x)| \frac{\iint_{B_r(u)} \sqrt{\det g_{ij}} d(u^1, u^2)}{\iint_{B_r(u)} \sqrt{\det g_{ij}} d(u^1, u^2)} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} |G(x)| = |G(u)| \end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.3.8. Obiger Satz 2.3.7 gilt für Kurven gleichermaßen:

Sei $c(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit Krümmung $\kappa(t) = \|\ddot{c}(t)\|$. Dann ist $T(t) = \dot{c}(t)$ eine Kurve auf dem Einheitskreis. Wir bezeichnen mit $L_{[a,b]}(c)$ die Länge der Kurve c zwischen $c(a)$ und $c(b)$ für $a, b \in I$. Es gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{L_{[a,a+h]}(T)}{L_{[a,a+h]}(c)} = |\kappa(a)|.$$

Beweis. Es gilt nach Definition 1.1.15 der Länge einer Kurve

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{L_{[a,a+h]}(T)}{L_{[a,a+h]}(c)} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^{a+h} \|\ddot{c}(t)\| dt}{\int_a^{a+h} \|\dot{c}(t)\| dt} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^{a+h} \|\ddot{c}(t)\| dt}{\int_a^{a+h} 1 dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^{a+h} \|\ddot{c}(t)\| dt}{h} \end{aligned}$$

Wir verwenden wie oben den Mittelwertsatz der Integralrechnung. Für ein $x \in [a, a+h]$ gilt damit

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^{a+h} \|\ddot{c}(t)\| dt}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \|\ddot{c}(x)\| \frac{\int_a^{a+h} 1 dt}{h} &&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|\ddot{c}(x)\| h}{h} \\ &= \|\ddot{c}(a)\| = |\kappa(a)| \end{aligned}$$

□

2.4 Die zweite Fundamentalform

Wir haben bereits festgestellt, dass die Änderung der Flächennormalen N im Tangentialraum $T_u X$ liegt. Die *zweite Fundamentalform* ist eine Bilinearform, die von zwei Vektoren abhängt: Der eine Vektor ist die Richtung, in die N variiert. Die zugehörige Variation liegt wieder im Tangentialraum und nun wird mit dem zweiten Vektor das Skalarprodukt in \mathbb{R}^3 gebildet.

Definition 2.4.1. Sei X eine parametrisierte Fläche und Y und Z Tangentenvelder entlang X mit $Y = y^i X_i$, $Z = z^i X_i$. Wir definieren die *Richtungsableitung* von Z in Richtung Y durch

$$\partial_Y Z = y^i Z_i = y^i \frac{\partial Z}{\partial u^i}.$$

Bemerkung 2.4.2. Die Definition der Richtungsableitung hängt ab von der Basis X_1, X_2 . $\partial_Y Z$ ist aber invariant unter Umparametrisierung. Jedoch wenn Y und Z tangential sind, dann müssen $\partial_Y Z$ und $\partial_Z Y$ nicht notwendigerweise tangential sein.

Definition 2.4.3. Wir definieren den *Kommutator* von zwei Vektorfeldern Y und Z als das Vektorfeld

$$[Y, Z] := \partial_Y Z - \partial_Z Y$$

Satz 2.4.4. Sei $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche und sei N ihr Einheitsnormalenfeld. Dann gilt:

- (1) Wenn Y und Z Tangentenvfelder entlang X sind, dann gilt $[Y, Z] \in T_u(X)$.
- (2) Wenn $Y, Z \in T_u(X)$, dann gilt $\partial_Y N \cdot Z = \partial_Z N \cdot Y$.

Beweis. Es gilt mit den Definitionen 2.4.1 und 2.4.3

$$\begin{aligned} [Y, Z] &= \partial_Y Z - \partial_Z Y = y^i Z_i - z^i Y_i \\ &= y^i \partial_i(z^l X_l) - z^i \partial_i(y^l X_l) \\ &= y^i z^l_{,i} X_l + y^i z^l X_{li} - z^i y^l_{,i} X_l - z^i y^l X_{il} \end{aligned}$$

(Anmerkung zur Schreibweise: Wir schreiben $y^l_{,i} = \partial_i y^l = \frac{\partial}{\partial u^i} y^l$.)

Da nach dem Satz von Schwarz $X_{li} = X_{il}$ ist, gilt

$$[Y, Z] = \partial_Y Z - \partial_Z Y = (y^i z^l_{,i} - z^i y^l_{,i}) X_l \in T_u X$$

und so ist (1) gezeigt.

Weiter gilt für $Y, Z \in T_u X$

$$\begin{aligned} \partial_Y N \cdot Z - \partial_Z N \cdot Y &= -\partial_Y Z \cdot N - \partial_Z Y \cdot N \\ &= (\partial_Y Z - \partial_Z Y) \cdot (-N) \\ &= [Z, Y] \cdot (-N) = 0 \end{aligned}$$

Damit folgt (2):

$$\partial_Y N \cdot Z = \partial_Z N \cdot Y$$

□

Definition 2.4.5. Sei $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche und sei $N : U \rightarrow \mathbb{S}^2$ ihre Gauß-Abbildung. Die zweite Fundamentalform ist die symmetrische Bilinearform

$$k : T_u X \times T_u X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$k(Y, Z) = -\partial_Y N \cdot Z,$$

wobei $Y, Z \in T_u X$ mit $Y = y^i X_i$ und $Z = z^j X_j$.

Bemerkung 2.4.6. Für die zweite Fundamentalform gilt somit

$$k(Y, Z) = -\partial_Y N \cdot Z = LY \cdot Z = g(LY, Z)$$

mit Weingarten-Abbildung L und erster Fundamentalform $g_{ij} = X_i \cdot X_j = g(X_i, X_j)$.

Bemerkung 2.4.7. Wir setzen $k_{ij} = k(X_i, X_j)$ und erhalten so

$$k_{ij} = -N_i \cdot X_j = N \cdot X_{ij}$$

Bemerkung 2.4.8. Mittels Bemerkung 2.4.7 bekommen wir folgenden Zusammenhang zwischen der ersten Fundamentalform g_{ij} und der zweiten Fundamentalform k_{ij} :

$$k_i^m = (N \cdot X_{il}) g^{lm} = k_{il} g^{lm},$$

wobei $g^{lm} = (g_{lm})^{-1}$ und k_i^m die Matrix der Weingarten-Abbildung bezeichnet.

Das bedeutet, dass wir mittels der g_{ij} die Indizes von k nach oben bzw. unten verschieben können.

Beispiel 2.4.9. a) Sphäre

Analog zu Beispiel 2.2.3 betrachten wir die Parametrisierung der Sphäre

$$X(\theta, \varphi) = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta),$$

mit $r > 0$, $0 < \varphi < 2\pi$, $0 < \theta < \pi$
mit der ersten Fundamentalform

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

Für die Gauß-Abbildung N gilt $N = \frac{X_\theta \times X_\varphi}{\|X_\theta \times X_\varphi\|} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$. Mit Bemerkung 2.4.7 berechnen wir die zweite Fundamentalform

$$k_{ij} = \begin{pmatrix} -r & 0 \\ 0 & -r \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

Für die Matrix der Weingarten-Abbildung ergibt sich mit Bemerkung 2.4.8 $k_i^j = k_{il}g^{li} = k_{il}(g_{lj}^{-1})$

$$k_i^j = \begin{pmatrix} -\frac{1}{r} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r} \end{pmatrix}$$

Somit erhalten wir für die Gauß-Krümmung G und die mittlere Krümmung H

$$G = \det k_i^j = \frac{1}{r^2}$$

$$H = \frac{k_1^1 + k_2^2}{2} = -\frac{1}{r}$$

b) Torus

Sei

$$X(\theta, \varphi) = (\cos \theta(R + r \cos \varphi), \sin \theta(R + r \cos \varphi), r \sin \varphi),$$

wobei $r > 0$, $R > 0$, $0 < \theta, \varphi < 2\pi$.

Die Tangentialvektoren sind gegeben durch

$$X_\theta = (-\sin \theta(R + r \cos \varphi), \cos \theta(R + r \cos \varphi), 0)$$

$$X_\varphi = (-r \cos \theta \sin \varphi, -r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \varphi).$$

Für die erste Fundamentalform ergibt sich damit

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} (R + r \cos \varphi)^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

Es gilt außerdem $N = \frac{X_\theta \times X_\varphi}{\|X_\theta \times X_\varphi\|} = (\cos \theta \cos \varphi, \sin \theta \cos \varphi, \sin \varphi)$. Damit ergibt sich wieder mit Bemerkung 2.4.7 die zweite Fundamentalform

$$k_{ij} = \begin{pmatrix} -\cos \varphi(R + r \cos \varphi) & 0 \\ 0 & -r \end{pmatrix}$$

Die Matrix der Weingarten-Abbildung berechnen wir erneut mit Bemerkung 2.4.8 und erhalten

$$k_i^j = \begin{pmatrix} -\frac{\cos \varphi}{R + r \cos \varphi} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r} \end{pmatrix}$$

Für Gauß-Krümmung G und die mittlere Krümmung H gilt also

$$G = \det k_i^j = \frac{\cos \varphi}{r(R + r \cos \varphi)}$$

$$H = \frac{k_1^1 + k_2^2}{2} = -\frac{1}{2r}$$

c) Zylinder
Sei

$$X(\varphi, h) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, h),$$

wobei $r > 0$, $h > 0$, $0 < \varphi < 2\pi$.

Dann gilt für die Tangentialvektoren

$$X_\varphi = (-r \sin \varphi, r \cos \varphi, 0), \quad X_h = (0, 0, 1).$$

Für die erste Fundamentalform ergibt sich

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir berechnen $N = \frac{X_\theta \times X_\varphi}{\|X_\theta \times X_\varphi\|} = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$ und mit Bemerkung 2.4.7 die zweite Fundamentalform

$$k_{ij} = \begin{pmatrix} -r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bemerkung 2.4.8 liefert die Matrix der Weingarten-Abbildung

$$k_i^j = \begin{pmatrix} -\frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich für die Gauß-Krümmung G und die mittlere Krümmung H

$$G = \det k_i^j = 0$$

$$H = \frac{k_1^1 + k_2^2}{2} = -\frac{1}{2r}$$

Beispiel 2.4.10. Nachrechnen zeigt, dass für die erste Fundamentalform g , die zweite Fundamentalform k , die Gauß-Krümmung G und die mittlere Krümmung H einer Drehfläche analog zu Beispiel 2.1.2 $X(t, \varphi) = (r(t) \cos(\varphi), r(t) \sin(\varphi), h(t))$ mit $\dot{r}^2 + \dot{h}^2 = 1$ gilt

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \quad k_{ij} = \begin{pmatrix} \dot{r}\ddot{h} - \dot{h}\ddot{r} & 0 \\ 0 & r\dot{h} \end{pmatrix}$$

$$G = \frac{\dot{h}(\dot{r}\ddot{h} - \dot{r}\ddot{h})}{r}, \quad H = \frac{\dot{r}\ddot{h} - \dot{r}\ddot{h} + \frac{\dot{h}}{r}}{2}$$

Aus $\dot{r}^2 + \dot{h}^2 = 1$ folgt aber mittels Differentiation

$$\dot{r}\ddot{r} + \dot{h}\ddot{h} = 0 \quad (2.4.1)$$

und damit ergibt sich

$$G = \frac{\dot{h}\ddot{r} - \dot{r}\ddot{h}}{r} = \frac{-\dot{r}^2\ddot{r} - \dot{h}^2\ddot{r}}{r} = -\frac{\ddot{r}}{r}$$

Wir betrachten nun die Kurve $\gamma(t) = (r(t), 0, h(t))$ und die Krümmung von γ $\kappa = \|\ddot{\gamma}\| = \sqrt{\ddot{r}^2 + \ddot{h}^2}$. Mit Gleichung (2.4.1) folgt für κ

$$\kappa = \sqrt{\frac{\dot{h}^2\ddot{h}^2}{\dot{r}^2} + \ddot{h}^2} = \frac{\ddot{h}}{\dot{r}}$$

Da aber ebenso mit Gleichung (2.4.1) gilt $\dot{r}\ddot{h} - \dot{h}\ddot{r} = \dot{r}\ddot{h} + \dot{h}\frac{\dot{h}\ddot{h}}{\dot{r}} = \frac{\ddot{h}}{\dot{r}} = \kappa$ ergibt sich

$$k_{ij} = \begin{pmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & r\dot{h} \end{pmatrix}, \quad G = \frac{\dot{h}\kappa}{r}$$

Definition 2.4.11. Sei $\gamma(t) \in \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Kurve und Y ein Vektorfeld längs γ . Eine parametrisierte Fläche $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

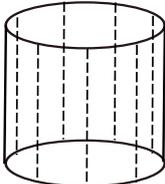
$$X(s, t) = \gamma(s) + tY(s)$$

heißt *Regelfläche*.

Bemerkung 2.4.12. (a) Ein Zylinder ist eine Regelfläche. Wir betrachten einen Kreis in der x - y -Ebene mit Radius $r > 0$. Um einen Zylinder zu erhalten muss $Y(s)$ so gewählt werden, dass die Vektoren senkrecht auf den Kreis stehen. Wir wählen daher

$$\gamma(s) = \begin{pmatrix} r \cos s \\ r \sin s \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Y(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad 0 < r, \quad 0 < s < 2\pi$$

und erhalten damit

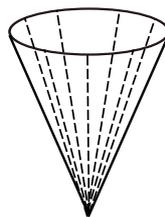
$$X(s, t) = \begin{pmatrix} r \cos s \\ r \sin s \\ t \end{pmatrix}$$


(b) Ein Kegel ist ebenso eine Regelfläche. Wir wählen die Spitze im Ursprung und

$$\gamma(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Y(s) = \begin{pmatrix} \cos s \\ \sin s \\ 1 \end{pmatrix}, \quad 0 < t < 1, \quad 0 < s < 2\pi.$$

Damit gilt

$$X(s, t) = \begin{pmatrix} t \cos s \\ t \sin s \\ t \end{pmatrix}$$



Proposition 2.4.13. Sei $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche und $\tilde{X} = X \circ \phi$ eine Umparametrisierung von X . Sei k_{ij} die Koordinatendarstellung der zweiten Fundamentalform von X und sei \tilde{k}_{ij} die Koordinatendarstellung der zweiten Fundamentalform von \tilde{X} . Dann gilt analog zur ersten Fundamentalform in Proposition 2.2.6

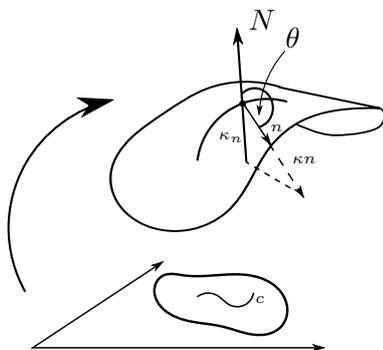
$$\tilde{k}_{ij} = k(\tilde{X}_u, \tilde{X}_j) = k_{lm} \frac{\partial u^l}{\partial \tilde{u}^j} \frac{\partial u^m}{\partial \tilde{u}^i}$$

Definition 2.4.14. Sei $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche und sei $\gamma = X \circ c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve, das heißt $\|\dot{\gamma}\| = 1$. Sei κ die Krümmung von γ . Wir definieren die Normalkrümmung $\kappa_n(t)$ von γ in $t \in I$

$$\kappa_n(t) := \kappa(t) \cos \theta(t)$$

Dabei ist θ der Winkel zwischen dem Einheitsnormalenfeld N von X und dem Normalenvektor n von γ , also $\cos \theta = N \cdot n$.

κ_n ist somit die Länge der Projektion des Vektors κn auf das Einheitsnormalenfeld N von X bei t .



Satz 2.4.15. Sei $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche und sei $\gamma = X \circ c$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Sei k die zweite Fundamentalform von X und sei κ die Krümmung von γ . Dann gilt für die Normalkrümmung κ_n von γ

$$\kappa_n = k(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}).$$

Beweis. Gemäß Definition 2.4.5 der zweiten Fundamentalform schließen wir

$$k(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = -\partial_{\dot{\gamma}} N \cdot \dot{\gamma} = -\dot{N} \cdot \dot{\gamma} = N \cdot \ddot{\gamma} = \kappa N \cdot n = \kappa \cos \theta = \kappa_n$$

wobei verwendet wurde, dass $\ddot{\gamma} = \kappa n$ nach Definition 1.3.3. □

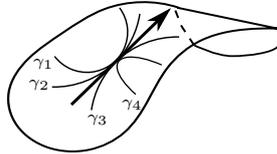
Bemerkung 2.4.16. Den Tangentialanteil von κn auf X (das heißt die Projektion auf den Tangentialraum $T_u X$) nennt man *geodätische Krümmung* κ_g . Es gilt

$$|\kappa_g(t)| = |\kappa(t) \sin \theta(t)|.$$

Nach dem Satz des Pythagoras gilt $\kappa^2 = \kappa_g^2 + \kappa_n^2$.

Bemerkung 2.4.17. Die Normalkrümmung hängt nicht von der Wahl der Kurve γ ab, sondern wird nur von der Fläche X bestimmt.

Folgerung 2.4.18. *Alle Kurven γ auf einer parametrisierten Fläche X , die in einem gegebenen Punkt u dieselbe Tangente Y haben, besitzen in diesem Punkt die gleiche Normalkrümmung $\kappa_n(u)$.*



Bemerkung 2.4.19. Wenn das Einheitsnormalenfeld N von X parallel zum Normalenvektor n er Kurve γ verläuft, also $n \parallel N$ gilt, dann gibt die zweite Fundamentalform k die Krümmung κ der Kurve an:

$$k(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = \kappa$$

Beweis. Da γ in X verläuft, gilt

$$N(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) = 0.$$

Nach Differentiation ergibt sich:

$$N(\gamma(t)) \cdot \ddot{\gamma}(t) = -\frac{d}{dt} N(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)$$

Damit und mit Definition 2.3.1 der Weingarten-Abbildung folgt

$$\begin{aligned} k(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) &= L\dot{\gamma}(t) \cdot \dot{\gamma}(t) \\ &= -\frac{d}{dt} N(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) \\ &= N(\gamma(t)) \cdot \ddot{\gamma}(t) \\ &= N(\gamma(t)) \cdot \kappa(t)n(t), \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt verwendet wurde, dass nach Definition 1.3.3 $\ddot{\gamma} = \kappa n$. Da aber $N \parallel n$, gilt $N(\gamma(t)) = n(t)$ und weil γ nach Bogenlänge parametrisiert ist folgt

$$k(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = \kappa.$$

□

Definition 2.4.20. Sei $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche mit zweiter Fundamentalform k . Die maximale Normalkrümmung κ_1 und die minimale Normalkrümmung κ_2 heißen *Hauptkrümmungen* von X bei $u \in U$. Genauer heißt das

$$\kappa_1 = \min_{Y \in T_u X} \frac{k(Y, Y)}{g(Y, Y)} = \min_{g(Y, Y)=1} k(Y, Y), \quad \kappa_2 = \max_{Y \in T_u X} \frac{k(Y, Y)}{g(Y, Y)} = \max_{g(Y, Y)=1} k(Y, Y).$$

Die Einheitsvektoren $E_1, E_2 \in T_u X$ bei denen Minimum und Maximum angenommen werden, heißen *Hauptkrümmungsrichtungen*.

Satz 2.4.21. Sei $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche. Sei $L : T_u X \rightarrow T_u X$ die Weingarten-Abbildung. Dann sind die Hauptkrümmungen κ_1 und κ_2 Eigenwerte von L mit Eigenvektoren E_1 und E_2 .

$$LE_1 = \kappa_1 E_1$$

$$LE_2 = \kappa_2 E_2$$

Die Eigenvektoren E_1, E_2 sind orthogonal zueinander, bzw. können immer orthogonal gewählt werden, das heißt es gilt

$$g(E_1, E_2) = k(E_1, E_2) = 0.$$

Beweis. Sei

$$\kappa_1 = \min_{Y \in T_u X} \frac{k(Y, Y)}{g(Y, Y)}$$

und κ_1 werde bei E_1 angenommen, also $\kappa_1 = \frac{k(E_1, E_1)}{g(E_1, E_1)}$.

Zu zeigen ist, dass $LE_1 = \kappa_1 E_1$.

Wir betrachten

$$\begin{aligned} f(\varepsilon) &= \frac{k(E_1 + \varepsilon Y, E_1 + \varepsilon Y)}{g(E_1 + \varepsilon Y, E_1 + \varepsilon Y)} \\ &= \frac{k(E_1, E_1) + 2\varepsilon k(E_1, Y) + \varepsilon^2 k(Y, Y)}{g(E_1, E_1) + 2\varepsilon g(E_1, Y) + \varepsilon^2 g(Y, Y)}, \end{aligned}$$

wobei die Bilinearität von g und k ausgenutzt wurde. Differentiation und Auswertung an der Stelle $\varepsilon = 0$ führt zu

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \frac{k(E_1 + \varepsilon Y, E_1 + \varepsilon Y)}{g(E_1 + \varepsilon Y, E_1 + \varepsilon Y)} \\ &= \frac{k(E_1, Y)g(E_1, E_1) - 2g(E_1, Y)k(E_1, E_1)}{g(E_1, E_1)^2} \\ &= 2 \left(\frac{k(E_1, Y)}{g(E_1, E_1)} - \frac{g(E_1, Y)k(E_1, E_1)}{g(E_1, E_1)^2} \right) \\ &= 2(k(E_1, Y) - g(E_1, Y)\kappa_1) \end{aligned}$$

Da nach Annahme $k(E_1, E_1) = \kappa_1 g(E_1, E_1)$ und $g(E_1, E_1) = E_1 \cdot E_1 = 1$ ergibt sich

$$k(E_1, Y) = \kappa_1 g(E_1, Y)$$

$$LE_1 \cdot Y = \kappa_1 E_1 \cdot Y \quad \forall Y \in T_u X$$

Da $LE_1 \cdot N = \kappa_1 E_1 \cdot N = 0$ folgt

$$LE_1 \cdot Z = \kappa_1 E_1 \cdot Z \quad \forall Z \in \mathbb{R}^3.$$

Damit ergibt sich

$$LE_1 = \kappa_1 E_1$$

und κ_1 ist somit Eigenwert von L . Dass κ_2 ebenso Eigenwert von L ist lässt sich analog zeigen. Bleibt noch die Orthogonalität zu beweisen. Allgemein gilt für $Y, Z \in T_u X$

$$g(LY, Z) = -\partial_Y N \cdot Z = -\partial_Z N \cdot Y = g(Y, LZ)$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \kappa_2 g(E_1, E_2) &= g(E_1, \kappa_2 E_2) = g(E_1, LE_2) \\ &= g(LE_1, E_2) = g(\kappa_1 E_1, E_2) \\ &= \kappa_1 g(E_1, E_2) \end{aligned}$$

Für den Fall $\kappa_1 \neq \kappa_2$ folgt damit

$$g(E_1, E_2) = E_1 \cdot E_2 = 0$$

und da $g(E_1, LE_2) = k(E_1, E_2)$ folgt dies auch für k . □

Bemerkung 2.4.22 (Euler-Formel). Sei Y ein beliebiger Einheitsvektor, also $Y \in T_u X$ und $g(Y, Y) = 1$. Seien E_1 und E_2 die Hauptkrümmungsrichtungen, also $\kappa_1 = k(E_1, E_1)$ und $\kappa_2 = k(E_2, E_2)$. Wir können Y in der Basis E_1, E_2 ausdrücken durch

$$Y = \cos \theta E_1 + \sin \theta E_2.$$

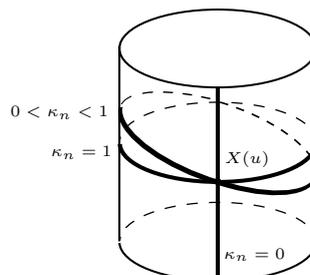
Durch Einsetzen in die zweite Fundamentalform erhalten wir die *Euler-Formel* für die Normalkrümmung:

$$\begin{aligned} k(Y, Y) &= k(\cos \theta E_1 + \sin \theta E_2, \cos \theta E_1 + \sin \theta E_2) \\ &= k(E_1, E_1) \cos^2 \theta + k(E_2, E_2) \sin^2 \theta \\ &= \kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta, \end{aligned}$$

wobei die Bilinearität von k und die $k(E_1, E_2) = 0$ verwendet wurde.

Beispiel 2.4.23.

Wir betrachten die Parametrisierung $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eines Zylinders. Sei $u \in U$. Der Durchschnitt von X mit der Normalebene im Punkt $X(u)$ gibt entweder einen Kreis, eine Ellipse oder eine Gerade. Dementsprechend gilt $0 \leq \kappa_n \leq 1$.



Bemerkung 2.4.24. Nach Bemerkung 2.4.8 gilt $k_i^j = k_{il}g^{lj}$ und $g^{lm} = (g_{lm}^{-1})$. Es folgt für die Gauß-Krümmung

$$G = \det(k_i^j) = \det(k_{il}g^{lj}) = \det(k_{il}) \det(g^{lj}) = \frac{\det(k_{ij})}{\det(g_{ij})}$$

Lemma 2.4.25. Für die Gauß-Krümmung G gilt

$$G = 2H^2 - \frac{1}{2}k_{ij}k^{ij}$$

wobei H die mittlere Krümmung und k die zweite Fundamentalform von X bezeichnet, mit $k^{ij} = (k_{ij})^{-1}$

Beweis. Mit Definition 2.3.6 ergibt sich

$$k_{ij}k^{ij} = \text{Spur}L^2 = \text{Spur}k_i^j k_j^i = \kappa_1^2 + \kappa_2^2 = (\kappa_1 + \kappa_2)^2 - 2\kappa_1\kappa_2 = 4H^2 - 2G$$

□

Bemerkung 2.4.26. Für die mittlere Krümmung H einer Fläche X gilt

$$H = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k(Y(\theta), Y(\theta))d\theta,$$

wobei $Y = E_1 \cos(\theta) + E_2 \sin(\theta)$ mit den Eigenvektoren E_1 und E_2 .

Beweis. Es gilt nach Satz 2.4.21 $k(E_1, E_2) = 0$. damit und mit der Bilinearität von k ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k(Y, Y)d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k(E_1 \cos(\theta) + E_2 \sin(\theta), E_1 \cos(\theta) + E_2 \sin(\theta))d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k(E_1 \cos(\theta), E_1 \cos(\theta))d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k(E_2 \sin(\theta), E_2 \sin(\theta))d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} k(E_1 \cos(\theta), E_1 \cos(\theta))d\theta + \int_0^{2\pi} k(E_2 \sin(\theta), E_2 \sin(\theta))d\theta \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} (LE_1 \cos(\theta)) \cdot E_1 \cos(\theta)d\theta + \int_0^{2\pi} (LE_2 \sin(\theta)) \cdot E_2 \sin(\theta)d\theta \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} (\kappa_1 E_1 \cos(\theta)) \cdot E_1 \cos(\theta)d\theta + \int_0^{2\pi} (\kappa_2 E_2 \sin(\theta)) \cdot E_2 \sin(\theta)d\theta \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\kappa_1 \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta)d\theta + \kappa_2 \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta)d\theta \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} (\kappa_1 \pi + \kappa_2 \pi) \\ &= \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = H \end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.4.27. Sei $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche. Mittels Taylor-Entwicklung um $0 \in U$ folgt

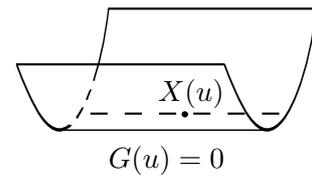
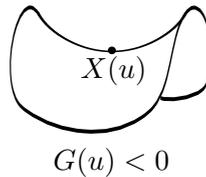
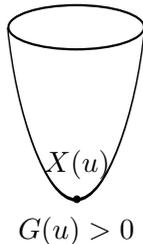
$$X(u) - X(0) = X_i(0)u^i + \frac{1}{2}X_{ij}(0)u^i u^j + R,$$

wobei $\lim_{|u| \rightarrow 0} \frac{R}{|u|^3} = 0$. Damit gilt

$$\begin{aligned} X(u) - X(0) - X_i(0)u^i &= \frac{1}{2}X_{ij}(0)u^i u^j + R \quad | \cdot N \\ (X(u) - X(0) - X_i(0)u^i) \cdot N &= \frac{1}{2}k_{ij}(0)u^i u^j + R \end{aligned}$$

Definition 2.4.28. Wir nennen einen Punkt $u \in U$ der Fläche $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$

- *elliptisch*, wenn $G(u) > 0$,
- *hyperbolisch*, wenn $G(u) < 0$,
- *parabolisch*, wenn $G(u) = 0$,
- *Nabelpunkt*, wenn $\kappa_1(u) = \kappa_2(u)$,
- *Flachpunkt*, wenn $\kappa_1(u) = \kappa_2(u) = 0$.



Beispiel 2.4.29. Wir parametrisieren eine Fläche $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ durch $X(u^1, u^2) = (u^1, u^2, f(u^1, u^2))$ mittels einer Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $f(0,0) = 0$ und für den Gradient von f gilt $\nabla f(0,0) = \frac{\partial}{\partial u^i} = 0$.

Dann ist

$$k_{ij}(0,0) = X_{ij}(0,0) \cdot N(0,0) = \text{Hess}f(0,0).$$

$\text{Hess}f = \frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^j} f$ bezeichnet dabei die Hesse-Matrix von f .

Definition 2.4.30. Sei $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche. $Y \in T_u X$ ist eine *Asymptotenrichtung* von X bei u , falls die Normalkrümmung $\kappa_n = 0$ ist, wenn also

$$\kappa_n = k(Y, Y) = 0.$$

Eine Kurve $\gamma = X \circ c$ heißt *Asymptotenlinie*, von X , falls für jedes $\gamma(u)$ die Tangente $\dot{\gamma}(u)$ Asymptotenrichtung ist, falls also

$$k(\dot{\gamma}(u), \dot{\gamma}(u)) = 0 \quad \forall u \in U.$$

Definition 2.4.31. Eine reguläre Kurve $\gamma = X \circ c$ auf einer parametrisierten Fläche $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ heißt *Krümmungslinie*, falls $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ und $\frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}$ in jedem Punkt $t \in I$ eine Hauptkrümmungsrichtung ist, falls also:

$$L\dot{\gamma} = -\partial_{\dot{\gamma}}N = \kappa_i\dot{\gamma},$$

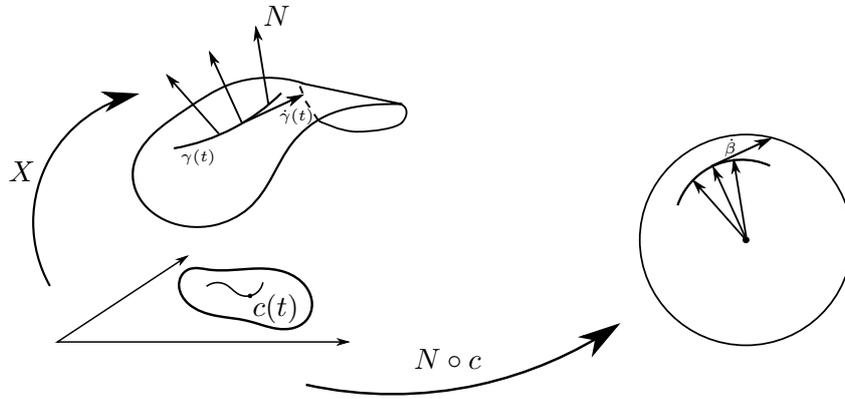
für entweder $i = 1$ oder $i = 2$.

Daraus ergibt sich die folgende Charakterisierung der Krümmungslinien.

Proposition 2.4.32. Sei $\gamma(t) = X \circ c(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ und sei $\beta(t) = N \circ c(t)$ das sphärische Bild von c unter der Gauß-Abbildung N . Dann ist $\gamma(t)$ eine Krümmungslinie genau dann, wenn

$$\dot{\beta}(t) + \lambda(t)\dot{\gamma}(t) = 0,$$

wobei $\lambda(t)$ die Hauptkrümmung κ_1 oder κ_2 entlang $\dot{\gamma}$ ist.



Beweis. Angenommen es sei $\dot{\beta}(t) + \lambda(t)\dot{\gamma}(t) = 0$. Da $\dot{\gamma} = X_i\dot{c}^i(t)$ folgt $L\dot{\gamma} = -N_i\dot{c}^i(t)$. Außerdem gilt $\dot{\beta}(t) = N_i\dot{c}^i(t)$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{\beta}(t) + \lambda(t)\dot{\gamma}(t) \\ &= N_i\dot{c}^i + \lambda(t)\dot{\gamma}(t) \\ &= -L\dot{\gamma}(t) + \lambda(t)\dot{\gamma}(t) \\ \Leftrightarrow L\dot{\gamma}(t) &= \lambda(t)\dot{\gamma}(t) \end{aligned}$$

Also ist $\dot{\gamma}$ Hauptkrümmungsrichtung und γ Krümmungslinie. \square

Definition 2.4.33. Man nennt eine Fläche *nach Krümmungslinie parametrisiert*, wenn die Koordinatenlinien

$$\gamma_c(u^1) = X(u^1, c), \text{ und } \tilde{\gamma}_c(u^2) = X(c, u^2),$$

mit $c \in \mathbb{R}$ konstant, Krümmungslinien sind.

Bemerkung 2.4.34. Für eine nach Krümmungslinie parametrisierte Fläche gilt mit Bemerkung 2.4.7

$$\kappa_1 X_1 = \kappa_1 \dot{\gamma}_c = -\partial_{\dot{\gamma}_c} N = -\partial_{u^1} N = -N_1$$

$$\kappa_2 X_2 = \kappa_2 \dot{\gamma}_c = -\partial \dot{\gamma}_c N = -\partial u^2 N = -N_2$$

Damit und mit $k_{ij} = N \cdot X_{ij} = -N_i \cdot X_j$ erhalten wir

$$\begin{aligned} k_{11} &= -N_1 \cdot X_1 = \kappa_1 X_1 \cdot X_1 = \kappa_1 g_{11} \\ k_{12} &= -N_1 \cdot X_2 = \kappa_1 X_1 \cdot X_2 = \kappa_1 g_{12} = 0 \\ k_{22} &= -N_2 \cdot X_2 = \kappa_2 X_2 \cdot X_2 = \kappa_2 g_{22} \\ \Rightarrow k_{ij} &= \begin{pmatrix} \kappa_1 g_{11} & 0 \\ 0 & \kappa_2 g_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Proposition 2.4.35. Sei $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche und es gelte für die zweite Fundamentalform $k_{ij} = 0$. dann gibt es einen fixen Vektor $a \in \mathbb{R}^3$ und eine Konstante $b \in \mathbb{R}$, so dass

$$X \cdot a = b$$

gilt. Das heißt, X ist enthalten in einer Ebene.

Beweis. Sei

$$\begin{aligned} k_{ij} &= -N_i \cdot X_j = 0 \\ &\Rightarrow N_i \cdot N = 0 \\ &\Rightarrow N_i = 0, \forall i \in \{1, 2\} \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass N konstant sein muss. Sei also $N = a \in \mathbb{R}^3$. Damit gilt

$$0 = X_i \cdot N = \frac{d}{du^i}(X \cdot N) = \frac{d}{du^i}(X \cdot a)$$

Daraus ergibt sich, dass $X \cdot N$ konstant sein muss, also $X \cdot N = X \cdot a = b \in \mathbb{R}$. \square

Proposition 2.4.36. Sei $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche. Seien weiter alle Punkte Nabelpunkte, also $\kappa_1(u^1, u^2) = \kappa_2(u^1, u^2) \forall u = (u^1, u^2) \in U$. Dann ist X entweder in einer Ebene oder einer Kugel enthalten.

Beweis. Im Fall $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ folgt automatisch, dass $N_1 = N_2 = 0$ und deshalb N konstant sein muss. Also liegt X in der Ebene.

Sei nun also $\kappa(u) = \kappa_1(u) = \kappa_2(u) \neq 0$. Dann gilt $LY = \kappa Y$ für alle $Y \in T_u X$, insbesondere $LX_i = \kappa X_i$, $i \in \{1, 2\}$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} LX_i &= \kappa X_i \\ -\partial_i N &= \kappa X_i \\ N_i &= -\kappa X_i =: \lambda X_i, \quad i \in \{1, 2\} \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$N_1 = \lambda X_1, \text{ und } N_2 = \lambda X_2.$$

Differenzieren liefert

$$N_{12} = \lambda_2 X_1 + \lambda X_{12}, \text{ und } N_{21} = \lambda_1 X_2 + \lambda X_{21}$$

Da aber $N_{12} = N_{21}$, erhalten wir

$$0 = N_{12} - N_{21} = \lambda_2 X_1 - \lambda_1 X_2$$

Weil X_1 und X_2 linear unabhängige Tangentialvektoren sind, folgt damit

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial u^i} \lambda(u) = 0 \quad \forall u \in U.$$

Damit ergibt sich, dass $\lambda(u^1, u^2) = \lambda$ konstant sein muss.

Aus

$$\frac{\partial}{\partial u_i} \left(X - \frac{1}{\lambda} N \right) = 0$$

folgt, dass auch $X - \frac{1}{\lambda} N =: a$ konstant sein muss. Mit $\|N\| = 1$ folgt

$$|X - a| = \left| \frac{1}{\lambda} \right|$$

Dies entspricht der Gleichung der Kugel mit Radius $\frac{1}{|\lambda|}$ mit Mittelpunkt a . □

3 Innere Geometrie von Flächen

Unter innerer Geometrie versteht man all diejenigen Eigenschaften einer Fläche, die nur von der ersten Fundamentalform g_{ij} abhängen. Diese entsprechen anschaulich den Eigenschaften, die zweidimensionale Lebewesen auf der Fläche erkennen würden.

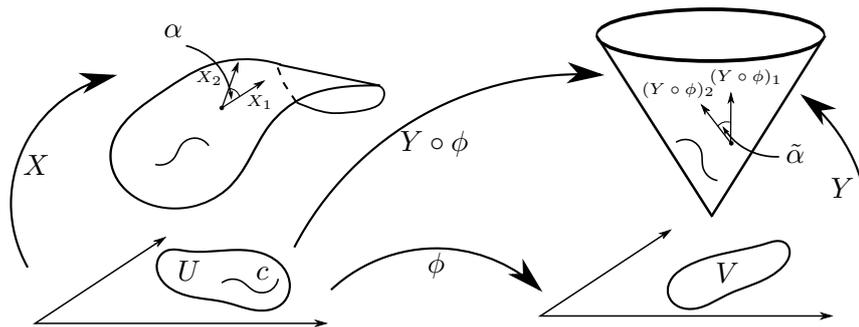
Wir werden in diesem Abschnitt den Fragen nachgehen, welche Krümmungsgrößen zu Größen der inneren Geometrie gehören. Es wird sich zeigen, dass die mittlere Krümmung H sowie die zweite Fundamentalform keine inneren Größen sind, die Gauß-Krümmung G dagegen schon. Außerdem werden wir Ableitungen, sowie die Parallelverschiebung von Vektoren, als Größe der inneren Geometrie definieren, also nur unter Verwendung der g_{ij} .

3.1 Isometrien

Definition 3.1.1. Seien $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, und $Y : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrisierte Flächen. X und Y heißen *lokal isometrisch*, wenn es einen Diffeomorphismus $\phi : U \rightarrow V$ gibt, mit:

$$X_i \cdot X_j = g(X_i, X_j) = g(\partial_i(Y \circ \phi), \partial_j(Y \circ \phi)) = \partial_i(Y \circ \phi) \cdot \partial_j(Y \circ \phi)$$

Die Abbildung ϕ heißt dann *Isometrie*.



Äquivalente Definition:

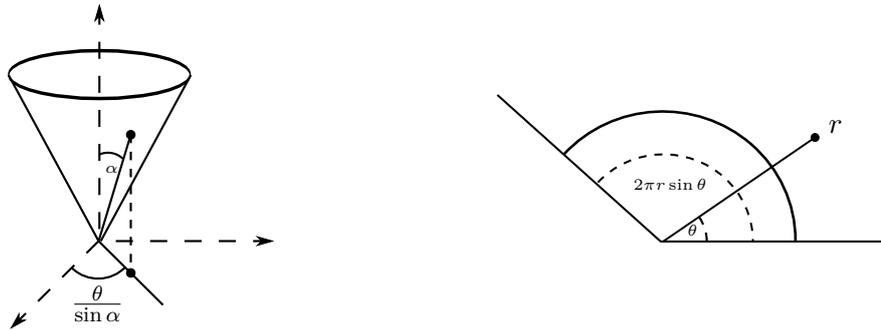
Seien $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, $Y : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrisierte Flächen, seien g und h die zugehörigen ersten Fundamentalformen. X und Y heißen *lokal isometrisch*, falls es einen Diffeomorphismus $\phi : U \rightarrow V$ gibt, so dass

$$g_{ij} = h_{lm} \frac{\partial \phi^l}{\partial u^i} \frac{\partial \phi^m}{\partial u^j}$$

Beispiel 3.1.2. Man kann zeigen, dass der Kegel lokal isometrisch zu einer Ebene ist. Die Idee dabei ist es, zu zeigen, dass der Kegel auf ein Stück der Ebene abgewickelt werden kann. Sei $U(r, \theta) \subset \mathbb{R}^2$, mit $0 < r$, $0 < \theta < 2\pi r \sin \alpha$. Dabei ist α der Winkel an der Spitze des Kegels.

$$Y(r, \theta) = \left(r \sin(\alpha) \cos\left(\frac{\theta}{r \sin(\alpha)}\right), r \sin(\alpha) \sin\left(\frac{\theta}{r \sin(\alpha)}\right), r \cos(\alpha) \right)$$

$$X(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), 0)$$



Nachrechnen zeigt, dass

$$\begin{aligned} X_r \cdot X_\theta &= 0 = Y_r \cdot Y_\theta \\ X_r \cdot X_r &= 1 = Y_r \cdot Y_r \\ X_\theta \cdot X_\theta &= r^2 = Y_\theta \cdot Y_\theta. \end{aligned}$$

Damit stimmt die erste Fundamentalform überein und die Flächen sind lokal isometrisch.

Bemerkung 3.1.3. Eine Isometrie ϕ erhält Längen und Winkel. Seien $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $Y : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ zwei lokal isometrische Flächen. Dann gilt für die Länge L zweier Kurven $\gamma = X \circ c$ und $\gamma' = Y \circ \phi \circ c$ nach Definition 1.1.15

$$L(X \circ c) = L(Y \circ \phi \circ c)$$

da diese nur von der Metrik g_{ij} abhängt. Ebenso wie Längen werden offensichtlich auch Winkel erhalten durch die Isometrie, da gemäß Definition 2.2.5

$$\cos \alpha = \frac{g(X_1, X_2)}{\sqrt{g(X_1, X_1)g(X_2, X_2)}} = \frac{g((Y \circ \phi)_1, (Y \circ \phi)_2)}{\sqrt{g((Y \circ \phi)_1, (Y \circ \phi)_1)g((Y \circ \phi)_2, (Y \circ \phi)_2)}} = \cos \tilde{\alpha}$$

Bemerkung 3.1.4. Lokal isometrisch bedeutet nach Definition 3.1.1, dass die erste Fundamentalform übereinstimmt. Aber es gilt

$$X \neq Y \circ \phi,$$

also ist die zweite Fundamentalform nicht gleich. Wir werden sehen, dass die Gauß-Krümmung G nur von g_{ij} abhängen wird, d.h. G ist invariant unter Isometrien und damit eine Größe der inneren Geometrie. Das bedeutet, dass alle lokal isometrischen Flächen dieselbe Gauß-Krümmung haben.

Definition 3.1.5. Sei $X(s, t) = \gamma(t) + sY(t)$ eine Regelfläche. Die Kurven zu konstantem t bzw. zu konstantem s werden *Erzeugende* bzw. *Leitkurven* genannt.

Falls der Normalvektor $N(s, t)$ konstant entlang der Erzeugenden ist, falls also $N_s = 0$, dann nennt man die Fläche X eine *Torse*.

Proposition 3.1.6. Sei $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Regelfläche. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) X ist Torse,

(ii) X_{st} ist linear abhängig von X_s, X_t ,

(iii) $G = 0$.

Beweis. Wir betrachten die Regelfläche $X(s, t) = \gamma(t) + sY(t)$. Es gilt

$$X_s = Y(t), \quad X_t = \dot{\gamma}(t) + s\dot{Y}(t)$$

$$X_{ss} = 0, \quad X_{tt} = \ddot{\gamma}(t) + s\ddot{Y}(t).$$

Da $k_{ss} = N \cdot X_{ss} = N \cdot 0 = 0$ gilt für die zweite Fundamentalform

$$k_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & k_{st} \\ k_{st} & k_{tt} \end{pmatrix}$$

„(a) \Leftrightarrow (c)“:

Sei X eine Torse, also gilt nach Definition 3.1.5 $N_s = 0$. Nach Bemerkung 2.4.24 gilt für die Gauß-Krümmung

$$G = \frac{\det(k_{ij})}{\det(g_{ij})}$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned} \det k_{ij} &= k_{ss}k_{tt} - (k_{st})^2 \\ &= 0 - (N \cdot X_{st})^2 \\ &= 0 - (-N_s \cdot X_t)^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow G = 0$$

„(c) \Leftrightarrow (b)“:

Sei $G = 0$. Nach Bemerkung 2.4.24 gilt für die Gauß-Krümmung $G = \frac{\det(k_{ij})}{\det(g_{ij})}$.

Also ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= G \\ \Leftrightarrow 0 &= \frac{-(k_{st})^2}{\det(g_{ij})} \\ \Leftrightarrow 0 &= k_{st} \\ \Leftrightarrow 0 &= X_{st} \cdot N \\ \Leftrightarrow X_{st} &\in T_u X \end{aligned}$$

Da $T_u X$ aber von X_s und X_t aufgespannt wird folgt, dass X_{st} linear abhängig von X_s und X_t sein muss. \square

Definition 3.1.7. Sei $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche mit $X(s, t) = \gamma(t) + s\dot{\gamma}(t)$ so, dass $\dot{\gamma}$ und $\ddot{\gamma}$ linear unabhängig sind. Dann heißt $X(s, t)$ *Tangentialfläche*.

Bemerkung 3.1.8. Sei $X(s, t)$ eine Tangentialfläche. Dann ist X eine Torse.

Beweis. Sei $X(s, t) = \gamma(t) + s\dot{\gamma}(t)$. Dann ist $X_s = \dot{\gamma}(t)$ und $X_t = \dot{\gamma}(t) + s\ddot{\gamma}(t)$. Es ergibt sich für N

$$\begin{aligned} N &= \frac{X_s \times X_t}{\|X_s \times X_t\|} \\ &= \frac{\dot{\gamma}(t) \times (\dot{\gamma}(t) + s\ddot{\gamma}(t))}{\|\dot{\gamma}(t) \times (\dot{\gamma}(t) + s\ddot{\gamma}(t))\|} \\ &= \frac{\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t) + s(\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t))}{\|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t) + s(\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t))\|} \\ &= \frac{s(\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t))}{\|s(\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t))\|} \\ &= \frac{\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)\|} \end{aligned}$$

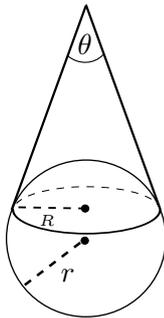
Also folgt $N_s = 0$ □

Definition 3.1.9. Sei $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche und $\gamma = X \circ c$ eine Kurve auf der Fläche X . Sei $Y(t) \in T_u X$ ein tangentiales Vektorfeld längs γ mit $k(\dot{\gamma}(t), Y(t)) = 0$ und $\dot{\gamma}$ und Y linear abhängig. Die Torse

$$\tilde{X}(s, t) = \gamma(t) + sY(t)$$

nennt man *Schmiegtorse*.

Beispiel 3.1.10.



Wir konstruieren den Schmiegtorset mit Öffnungswinkel θ zur Sphäre mit Radius $r > 0$:

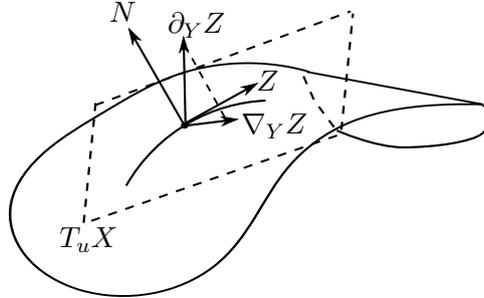
$$\gamma(t) = (R(\theta) \cos(t), R(\theta) \sin(t), \sqrt{r^2 - R^2})$$

$$Y(t) = \gamma(t) - h(\theta)$$

$$X(s, t) = \begin{pmatrix} R(\theta) \cos(t) \\ R(\theta) \sin(t) \\ \sqrt{r^2 - R^2} \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} R(\theta) \cos(t) \\ R(\theta) \sin(t) \\ \sqrt{r^2 - R^2} - h(\theta) \end{pmatrix}$$

3.2 Kovariante Ableitung

Wir wollen nun eine Ableitung definieren, die eine Größe der inneren Geometrie ist, die sogenannte kovariante Ableitung. Für die kovariante Ableitung des Tangentenvektorfeldes $\dot{\gamma}$



verwenden wir die Bezeichnungen

$$\frac{\nabla}{dt} \dot{\gamma}(t)|_{t=0} = \frac{\nabla^2}{dt^2} \gamma(t)|_{t=0} = \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}$$

Diese Ableitung muss per definitionem ein Vektor im Tangentialraum $T_u X$ sein.

Unter $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}$ verstehen wir dabei die kovariante Ableitung von $\dot{\gamma}$ in Richtung $\dot{\gamma}$. Im Allgemeinen bezeichnen wir $\nabla_Y Z$ als kovariante Ableitung des Vektorfeldes Z in Richtung Y .

Erinnerung 3.2.1. Wir betrachten zwei Vektorfelder $Y = y^i X_i$, $Z = z^j X_j \in T_u X$. Die Richtungsableitung $\partial_Y Z$ von Z in Richtung Y muss im Allgemeinen nicht tangential an X sein, sondern kann durchaus einen Normalenteil haben.

Im Allgemeinen gilt also nach Definition 2.4.1

$$\partial_Y Z = y^i Z_i = y^i \partial_i (z^j X_j) = y^i z^j_{,i} X_j + y^i z^j X_{ji} \notin T_u X$$

Es handelt sich also bei der Richtungsableitung um keine innere Größe. Damit die kovariante Ableitung eine Größe der inneren Geometrie darstellt, also $\nabla_Y Z \in T_u X$ gilt, betrachten wir nur den Tangentialanteil der Richtungsableitung und definieren

$$\nabla_Y Z = P_{T_u X}(\partial_Y Z).$$

$P_{T_u X}(\partial_Y Z)$ bezeichnet dabei die Projektion von $\partial_Y Z$ auf die Tangentialebene. Es gilt

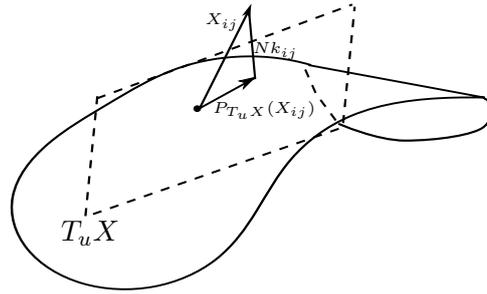
$$\frac{d}{dt} \dot{\gamma}(t) = \frac{d}{dt} X_i \dot{c}^i = X_{ij} \dot{c}^i \dot{c}^j + X_i \ddot{c}^i$$

Definition 3.2.2. Sei $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine parametrisierte Fläche und $Y, Z \in T_u X$ Tangentenvelder. Wir definieren die *kovariante Ableitung*

$$\frac{\nabla}{dt} \dot{\gamma}(t) := P_{T_{c(t)} X} (X_{ij} \dot{c}^i \dot{c}^j + X_i \ddot{c}^i) = (P_{T_u X} X_{ij}) \cdot \dot{c}^i \dot{c}^j + X_i \ddot{c}^i$$

$$\nabla_Y Z := P_{T_u X} (y^i z^j_{,i} X_j + y^i z^j X_{ij}) = y^i z^j_{,i} X_j + y^i z^j P_{T_u X} (X_{ij})$$

Mit $P_{T_u X}(X_{ij})$ bezeichnen wir dabei die Projektion des Vektors X_{ij} auf den Tangentialraum.



Bemerkung 3.2.3. Es gilt nach dem Satz von Schwarz $X_{ij} = \partial_j X_i = \partial_i X_j$

Bemerkung 3.2.4. Wir können die Projektion des Vektors X_{ij} auf den Tangentialraum $T_u X$ schreiben als

$$P_{T_u X}(X_{ij}) = X_{ij} - N(X_{ij} \cdot N) = X_{ij} - Nk_{ij} = \partial_j X_i - Nk(X_i, X_j)$$

Definition 3.2.5. Wir definieren die *Christoffel-Symbole* Γ_{ij}^m durch

$$X_{ij} - Nk_{ij} = P_{T_u X}(X_{ij}) =: \Gamma_{ij}^m X_m$$

und

$$\Gamma_{ijk} := \Gamma_{ij}^m g_{mk}$$

Damit gilt

$$g(X_{ij}, X_k) = X_{ij} \cdot X_k = \Gamma_{ij}^m X_m \cdot X_k = \Gamma_{ij}^m g_{mk} = \Gamma_{ijk}$$

Satz 3.2.6. Die kovariante Ableitung $\nabla_Y Z$ bzw. $\frac{\nabla}{dt} \dot{\gamma}$ ist eine Größe der inneren Geometrie, hängt also nur von den g_{ij} und deren Ableitungen ab. Genauer gilt

(a)

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}(-\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki})$$

(b)

$$\Gamma_{ij}^l = \Gamma_{ijk} g^{kl} = \frac{1}{2} g^{lk}(-\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki})$$

(c)

$$\Gamma_{ij}^l = \Gamma_{ji}^l, \nabla_i X_j = \Gamma_{ij}^l X_l, (\nabla_i X_j)^l = \Gamma_{ij}^l$$

(d)

$$\begin{aligned} \nabla_Y Z &= y^i z_{,i}^l X_l + y^i z^l \Gamma_{li}^m X_m = y^i (z_{,i}^m + z^l \Gamma_{li}^m) X_m \\ (\nabla_Y Z)^m &= y^i z_{,i}^m + y^i z^l \Gamma_{li}^m \end{aligned}$$

(e)

$$\left(\frac{\nabla}{dt} \dot{\gamma} \right)^m = \ddot{c}^m + \Gamma_{ij}^m \dot{c}^i \dot{c}^j$$

Beweis. Zu (a): Es gilt

$$\begin{aligned} -\partial_k g_{ij} &= -\partial_k(X_i \cdot X_j) = -X_{ik} \cdot X_j - X_i \cdot X_{jk} \\ \partial_i g_{ik} &= \partial_i(X_j \cdot X_k) = X_{ij} \cdot X_k + X_j \cdot X_{ki} \\ \partial_j g_{ki} &= \partial_j(X_{kj} \cdot X_i) = X_{kj} \cdot X_i + X_k \cdot X_{ij} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\frac{1}{2}(-\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki}) = \frac{1}{2}(2X_{ij} \cdot X_k) = \Gamma_{ijk}$$

Das Übrige folgt dann direkt aus den Definitionen 3.2.2 und 3.2.5. □

Korollar 3.2.7 (Ableitungsgleichungen). *Es gilt*

$$a) X_{ij} = \nabla_i X_j + X_{ij} \cdot NN = \Gamma_{ij}^k X_k + k_{ij} N$$

$$b) N_i = -k_i^j X_j$$

also

$$\partial_Y Z = \nabla_Y Z + k(Y, Z)N$$

Beweis. Es gilt mit Definition 2.4.1 und Bemerkung 3.2.4

$$\begin{aligned} \partial_Y Z &= y^i Z_i = y^i z_i^j X_j + y^i z^j X_{ji} \\ \nabla_Y Z &= y^i z_i^j X_j + y^i z^j (X_{ij} - N k_{ij}) \\ k(Y, Z)N &= -y^i N_i z^j X_j = y^i z^j k_{ij} N \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \nabla_Y Z + k(Y, Z)N &= y^i z_i^j X_j + y^i z^j X_{ij} - y^i z^j N k_{ij} + y^i z^j k_{ij} N \\ &= \partial_Y Z \end{aligned}$$

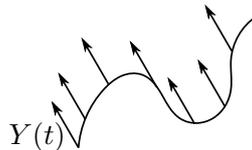
□

3.3 Parallelverschiebung und Geodätische

In der Ebene verstehen wir unter einer Parallelverschiebung eines Vektors Y längs einer Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, dass

$$\frac{d}{dt} Y(t) = 0 \quad \forall t \in I.$$

Das heißt, die Länge eines Vektors und sein Winkel mit einer festen Richtung sind konstant.

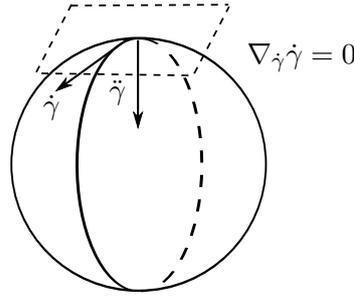


Analog dazu werden wir ein Vektorfeld entlang einer Kurve γ einer Fläche X als parallel bezeichnen, falls die kovariante Ableitung verschwindet.

Definition 3.3.1. a) Sei $Y(t)$ ein Vektorfeld entlang einer Kurve $\gamma(t) = X \circ c(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $Y(t) \in T_{c(t)}X$. Dann heißt $Y(t)$ *parallel* längs γ , wenn

$$\nabla_{\dot{\gamma}} Y = \frac{\nabla}{dt} Y(t) = 0 \quad \forall t \in I.$$

(Anmerkung: Wir schreiben hier $Y(t)$ für $Y(\gamma(t))$.)



b) Sei $\gamma(t) = X \circ c(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Kurve auf der Fläche X . $\gamma(t)$ heißt *Geodätische* oder *Geodäte*, falls

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = \frac{\nabla}{dt} \dot{\gamma} = 0 \quad \forall t \in I.$$

c) Falls $Y : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein tangentiales Vektorfeld längs X ist, dann heißt Y *parallel*, falls

$$\nabla_Z Y = 0 \quad \forall Z \in T_u X$$

Bemerkung 3.3.2. Sei $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche und $Y(t) \in T_u X$. Y kann auf zwei Arten geschrieben werden, wobei wir verwenden, dass Y eine Linearkombination der Tangentialvektoren X_1 und X_2 ist.

a) Mit $a = (a^1(t), a^2(t)) : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ gilt

$$\begin{aligned} Y(t) &= a^i(t) X_i(c(t)) = a^1(t) X_1(c(t)) + a^2(t) X_2(c(t)) \\ \nabla_{\dot{\gamma}} Y &= \frac{\nabla}{dt} Y(t) = \dot{a}^i X_i + a^i \frac{\nabla}{dt} X_i \circ c \\ &= \dot{a}^i X_i + a^i \Gamma_{ij}^k \dot{c}^j X_k \\ &= (\dot{a}^k + \Gamma_{ij}^k a^i \dot{c}^j) X_k \end{aligned}$$

b) Wir können $Y(t)$ aber auch mittels eines Vektorfeldes $y = (y^1, y^2) \in \mathbb{R}^2$ schreiben. Dann gilt

$$\begin{aligned} Y(t) &= y^i(c(t)) X_i(c(t)) \\ \nabla_{\dot{\gamma}} Y &= \frac{\nabla}{dt} Y(t) = (y_{,j}^k \dot{c}^j + \Gamma_{ij}^k y^i \dot{c}^j) X_k \end{aligned}$$

Satz 3.3.3. Für jede parametrisierte Kurve $\gamma = X \circ c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ existiert zu jedem gegebenen Tangentialvektor $Y_0 \in T_u X$ in jedem beliebigen Punkt $\gamma(t_0) = X \circ c(t_0)$, $t_0 \in I$, eindeutig ein Vektorfeld $Y(t)$ längs γ mit Anfangsbedingung $Y(t_0) = Y_0$, das parallel längs γ ist.

Beweis. Nach Definition 3.3.1 muss gelten

$$0 = \nabla_{\dot{\gamma}} Y = (\dot{y}^k(t) + y^i(t) \dot{c}^j \Gamma_{ij}^k) X_k,$$

wobei Bemerkung 3.3.2 verwendet wurde.

Mit $A_i^k = \dot{c}^j \Gamma_{ij}^k$ ergibt sich

$$\dot{y}^k(t) = A_i^k(t) y^i$$

mit $y^k(t_0) = y_0^k$. Mit dem Satz von Picard-Lindelöf ist dieses Gleichungssystem lösbar und es existiert genau eine Lösung. \square

Korollar 3.3.4. Ein paralleles Vektorfeld Y hat konstante Länge, das heißt $\frac{d}{dt} g(Y(t), Y(t)) = 0$. Insbesondere ist für eine Geodätische mit $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$ die Länge des Tangentialvektors notwendigerweise konstant.

$$\frac{d}{dt} g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 0.$$

Beweis. Sei $Y(t)$ ein paralleles Vektorfeld, also nach Definition 3.3.1 $\frac{\nabla}{dt} Y(t) = 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} g(Y(t), Y(t)) &= \frac{d}{dt} (Y(t) \cdot Y(t)) = \frac{d}{dt} Y(t) \cdot Y(t) + Y(t) \cdot \frac{d}{dt} Y(t) \\ &= 2 \frac{d}{dt} Y(t) \cdot Y(t) \\ &= 2 \frac{\nabla}{dt} Y(t) \cdot Y(t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

\square

Bemerkung 3.3.5. Seien $Y(t), Z(t)$ zwei parallele Vektorfelder entlang $\gamma(t) = X \circ c(t)$, dann gilt

$$\frac{d}{dt} g(Y(t), Z(t)) = 0$$

Damit bleibt auch der Winkel α zwischen Y und Z konstant, denn nach Definition 2.2.5 ist

$$\cos \alpha = \frac{g(Y(t), Z(t))}{\sqrt{g(Y(t), Y(t))g(Z(t), Z(t))}}$$

Satz 3.3.6. Für jeden Punkt $X(u_0)$ einer Fläche $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ und jeden Tangentialvektor Y_0 in $X(u_0)$ existiert ein $\varepsilon > 0$ und genau eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische $\gamma = X \circ c$ mit $c(0) = u_0$, $\gamma(0) = X \circ c(u_0)$ und $\dot{\gamma}(0) = Y_0$, wobei $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$.

Beweis. Die Bedingung, dass γ Geodätische sein soll, kann nach Definition 3.3.1 geschrieben werden als

$$0 = \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = (\ddot{c}^k + \dot{c}^i \dot{c}^j \Gamma_{ij}^k(c(t))).$$

Dies entspricht einem Gleichungssystem zweiter Ordnung. Mittels Picard-Lindelöf und durch Umschreiben auf ein System erster Ordnung ist dieses eindeutig lösbar. \square

Definition 3.3.7. Sei $Y(t)$ Einheitsvektorfeld, also $\|Y(t)\| = 1$, längs einer parametrisierter Kurve $\gamma(t) = X \circ c(t)$. Da $\dot{Y}(t)$ normal zu $Y(t)$ ist, gilt

$$\frac{\nabla}{dt} Y(t) = P_{T_u X} \dot{Y} = \lambda N \times Y(t).$$

$\lambda = \lambda(t)$, das wir als $\left[\frac{\nabla}{dt} Y \right] = \lambda$ bezeichnen, heißt *algebraischer Wert* der kovarianten Ableitung von $Y(t)$ in t . Es gilt

$$\left[\frac{\nabla}{dt} Y \right] = \dot{Y} \cdot N \times Y$$

Definition 3.3.8. Sei $\gamma(t) = X \circ c(t)$ nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Der Wert

$$\left[\frac{\nabla}{dt} \dot{\gamma} \right] = \ddot{\gamma} \cdot N \times \dot{\gamma} =: \kappa_g(t)$$

heißt *geodätische Krümmung* von γ in $t \in I$.

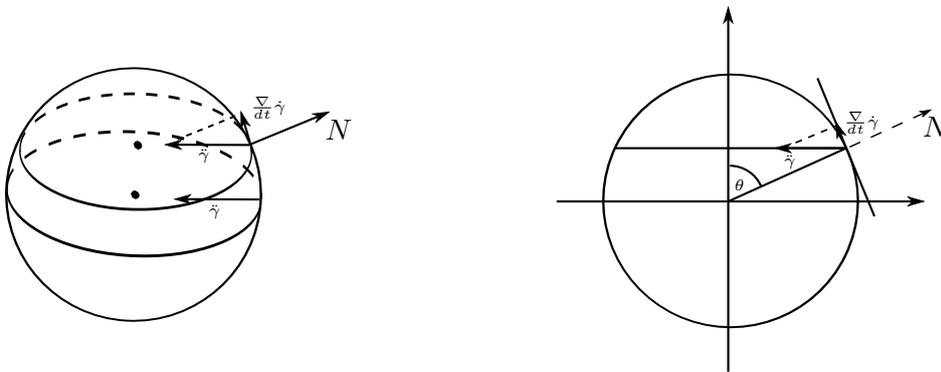
Es gilt

$$\kappa^2 = \kappa_n^2 + \kappa_g^2.$$

Bemerkung 3.3.9. Es gelten die Äquivalenzen

γ ist Geodätische $\Leftrightarrow \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0 \Leftrightarrow \kappa_g = 0$

Beispiel 3.3.10. Wir wollen die geodätische Krümmung eines Breitenkreises auf der Einheitssphäre berechnen.



Es gilt die Formel

$$\kappa^2 = \kappa_n^2 + \kappa_g^2$$

Wir wissen nach Satz 2.4.15, dass die Normalkrümmung κ_n nur von $\dot{\gamma}$ abhängt: $\kappa_n = k(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 1$. Außerdem gilt nach Beispiel 1.2.5 $\kappa^2 = \frac{1}{r^2} = \frac{1}{\sin^2 \theta}$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2 \theta} &= 1 + \kappa_g^2 \\ \Leftrightarrow \kappa_g^2 &= 1 - \frac{1}{\sin^2 \theta} \\ \Leftrightarrow \kappa_g^2 &= \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \cot^2 \theta \end{aligned}$$

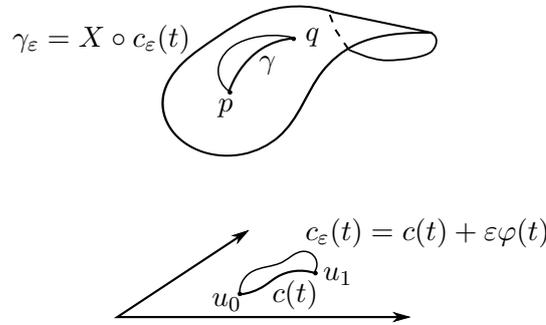
Folgerung 3.3.11. *Die Geodäten einer Sphäre sind gerade ihre Großkreise.*

Bemerkung 3.3.12 (Physikalische Interpretation). Sei $\gamma(t) = X \circ c(t)$ eine Bewegung eines Massenpunktes. Dann ist $\frac{\nabla^2}{dt^2}\gamma$ der Beschleunigungsvektor auf einer Mannigfaltigkeit und $\frac{\nabla^2}{dt^2}\gamma = 0$ entspricht einer beschleunigungsfreien Bewegung. In dem Sinne sind Geodätische die beschleunigungsfreien Bewegungen (Grundidee Einsteins).

Der folgende Satz wird zeigen, dass die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten eine Geodätische ist (bis auf Parametrisierung).

Satz 3.3.13. *Seien $p = X(u_0)$ und $q = X(u_1)$ feste Punkte auf einer Fläche X . Falls $\gamma = X \circ c$ die kürzeste Verbindung der Punkte ist, dann ist γ Geodätische, das heißt nach Bogenlänge parametrisiert gilt*

$$\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0 \text{ und } \kappa_g = 0.$$



Beweis. Die Länge von γ_ε ist nach Definition 1.1.15 $L(\gamma_\varepsilon) = \int_0^L \|\dot{\gamma}_\varepsilon\| dt = \int_0^L \sqrt{\dot{\gamma}_\varepsilon \cdot \dot{\gamma}_\varepsilon} dt = f(\varepsilon)$. $f(\varepsilon)$ hat ein Minimum bei $\varepsilon = 0$.

Mit $\frac{d}{d\varepsilon}\gamma_\varepsilon = \frac{d}{d\varepsilon}X \circ (c + \varepsilon\varphi) = X_i\varphi^i \in T_{c(t)}X$ ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}L(\gamma_\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{dt} \int_0^L \sqrt{\dot{\gamma}_\varepsilon \cdot \dot{\gamma}_\varepsilon} dt |_{\varepsilon=0} \\ &= \int_0^L \frac{\dot{\gamma}_\varepsilon \cdot \frac{d}{d\varepsilon}\dot{\gamma}_\varepsilon}{\sqrt{\dot{\gamma}_\varepsilon \cdot \dot{\gamma}_\varepsilon}} dt |_{\varepsilon=0} = \int_0^L \dot{\gamma} \cdot \left(\frac{d}{dt} \frac{d}{d\varepsilon} \gamma \right) |_{\varepsilon=0} dt \\ &= - \int_0^L \ddot{\gamma} \cdot \frac{d}{d\varepsilon} \gamma_\varepsilon dt = - \int_0^L \ddot{\gamma} \cdot X_i \varphi^i(t) dt = \int_0^L \frac{\nabla}{dt} \dot{\gamma} \cdot X_i \varphi^i dt \\ &= \int_0^L \kappa_g(t) N \times \dot{\gamma} \cdot X_i \varphi^i(t) dt = \int_0^L \kappa_g(t) f(t) dt \end{aligned}$$

Da φ^i beliebig, gilt

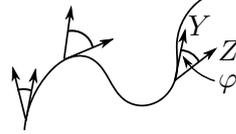
$$\begin{aligned} \int_0^L \kappa_g(t) f(t) dt &= 0 \quad \forall f(t) \in C^\infty((0, L)) \\ &\Rightarrow \kappa_g = 0 \end{aligned}$$

□

Satz 3.3.14. Seien $Y(t), Z(t)$ zwei Vektorfelder entlang einer Kurve γ mit $g(Y, Y) = g(Z, Z) = 1$. Dann gilt

$$\left[\frac{\nabla}{dt} Z \right] - \left[\frac{\nabla}{dt} Y \right] = \frac{d\varphi}{dt},$$

wobei $\varphi(t)$ der Winkel zwischen $Y(t)$ und $Z(t)$ ist.



Beweis. Sei $\tilde{Y}(t) = N \times Y(t)$ und $\tilde{Z}(t) = N \times Z(t)$. Dann gilt mit Bemerkung 2.4.22

$$Z(t) = (\cos \varphi(t))Y(t) + (\sin \varphi(t))\tilde{Y}(t),$$

$$\begin{aligned} \tilde{Z}(t) &= N \times Z(t) = (\cos \varphi(t))N \times Y(t) + (\sin \varphi(t))N \times \tilde{Y}(t) \\ &= (\cos \varphi(t))\tilde{Y}(t) - (\sin \varphi(t))Y(t) \end{aligned}$$

$$\dot{Z}(t) = -(\sin \varphi(t))\dot{\varphi}(t)Y(t) + (\cos \varphi(t))\dot{Y}(t) + (\cos \varphi(t))\dot{\varphi}(t)\tilde{Y}(t) + (\sin \varphi(t))\dot{\tilde{Y}}(t)$$

Mit $Y \cdot \tilde{Y} = 0 = Y \cdot \dot{Y}$ und $Y \cdot Y = 1 = \tilde{Y} \cdot \tilde{Y}$ folgt

$$\begin{aligned} \dot{Z} \cdot \tilde{Z} &= (\sin^2 \varphi)\dot{\varphi} + (\cos^2 \varphi)\dot{Y} \cdot \tilde{Y} + (\cos^2 \varphi)\dot{\varphi} - (\sin^2 \varphi)\dot{\tilde{Y}} \cdot Y \\ &= \dot{\varphi} + (\cos^2 \varphi)\dot{Y} \cdot \tilde{Y} - (\sin^2 \varphi)\dot{\tilde{Y}} \cdot Y. \end{aligned}$$

Da $Y \cdot \tilde{Y} = 0$ folgt mittels Differentiation $\dot{Y} \cdot \tilde{Y} = -Y \cdot \dot{\tilde{Y}}$ und damit ergibt sich

$$\dot{Z} \cdot \tilde{Z} = \dot{\varphi} + (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)(\dot{Y} \cdot \tilde{Y}) = \dot{\varphi} + \dot{Y} \cdot \tilde{Y}. \quad (3.3.1)$$

Mit Definition 3.3.7 gilt

$$\dot{Z} \cdot \tilde{Z} = \frac{d}{dt} Z \cdot \tilde{Z} = \left[\frac{\nabla}{dt} Z \right] \cdot \tilde{Z} = \left[\frac{\nabla}{dt} Z \right] \cdot (N \times Z) = \left[\frac{\nabla}{dt} Z \right] \cdot \tilde{Z}$$

können wir mit Gleichung (3.3.1) schließen

$$\left[\frac{\nabla}{dt} Z \right] \cdot \tilde{Z} = \dot{Z} \cdot \tilde{Z} \dot{\varphi} + \dot{Y} \cdot \tilde{Y} = \frac{d\varphi}{dt} + \left[\frac{\nabla}{dt} Y \right] \cdot \tilde{Z}.$$

□

Korollar 3.3.15. Sei $\gamma(t) = X \circ c(t)$ nach Bogenlänge parametrisierte Kurve und $Y(t)$ ein paralleles Vektorfeld entlang $\gamma(t)$. Sei φ der Winkel zwischen Y und $\dot{\gamma}$. Dann gilt

$$\kappa_g(t) = \left[\frac{\nabla}{dt} \dot{\gamma} \right] \cdot Y = \dot{\varphi}.$$

Die geodätische Krümmung ist also die Änderung des Winkels, den die Tangente an die Kurve mit einer parallelen Richtung längs der Kurve bildet.

Bemerkung 3.3.16. Im Falle der Ebene ist die parallele Richtung fest und κ_g reduziert sich zu κ .

Theorem 3.3.17 (Theorema Egregium). *Die Gauß-Krümmung einer parametrisierten Fläche $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ hängt nur von der ersten Fundamentalform g_{ij} ab. Das heißt, G ist eine Größe der inneren Geometrie.*

Beweis. folgt später. □

Beispiel 3.3.18. Sei $X(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$, $0 < \theta < \pi$, $0 < \varphi < 2\pi$, die Sphäre und sei $\gamma = X \circ c$ definiert durch

$$c(t) = \left(\theta, \frac{t}{\sin(\theta)} \right).$$

Wir wollen nun in b) den Vektor $Y(0) = (0, 1, 0) = \frac{1}{\sin(\theta)} X_\varphi \circ c(0)$ parallel um γ verschieben. Anschließend werden wir in c) dasselbe mithilfe des zugehörigen Schmiegekegels tun und feststellen, dass das Ergebnis dasselbe ist. Zum Schluss wollen wir in d) noch untersuchen, wann die Kurve γ eine Geodäte ist.

Zuerst ist es nötig, die Christoffel-Symbole auszurechnen:

a) Wir berechnen die Christoffel-Symbole Γ_{ij}^k der Sphäre.

Es ist nach Satz 3.2.6

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{lk} (-\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki})$$

und nach Beispiel 2.2.3 ist die erste Fundamentalform der Sphäre

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (g^{lk}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin^2 \theta} \end{pmatrix}$$

mit $\theta \in (0, \pi)$. Also

$$\begin{aligned} \Gamma_{\theta\theta}^\theta &= \frac{1}{2} g^{\theta\theta} (-\partial_\theta g_{\theta\theta} + \partial_\theta g_{\theta\theta} + \partial_\theta g_{\theta\theta}) = 0 \\ \Gamma_{\theta\theta}^\varphi &= \frac{1}{2} g^{\varphi\varphi} (-\partial_\varphi g_{\theta\theta} + \partial_\theta g_{\theta\varphi} + \partial_\theta g_{\varphi\theta}) = 0 \\ \Gamma_{\theta\varphi}^\theta &= \frac{1}{2} g^{\theta\theta} (-\partial_\theta g_{\theta\varphi} + \partial_\theta g_{\varphi\theta} + \partial_\varphi g_{\theta\theta}) = 0 \\ \Gamma_{\varphi\theta}^\theta &= \frac{1}{2} g^{\theta\theta} (-\partial_\theta g_{\varphi\theta} + \partial_\varphi g_{\theta\theta} + \partial_\theta g_{\theta\varphi}) = 0 \\ \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi &= \frac{1}{2} g^{\varphi\varphi} (-\partial_\varphi g_{\theta\varphi} + \partial_\theta g_{\varphi\varphi} + \partial_\varphi g_{\varphi\theta}) = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \\ \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi &= \frac{1}{2} g^{\varphi\varphi} (-\partial_\varphi g_{\varphi\theta} + \partial_\varphi g_{\theta\varphi} + \partial_\theta g_{\varphi\varphi}) = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \\ \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta &= \frac{1}{2} g^{\theta\theta} (-\partial_\theta g_{\varphi\varphi} + \partial_\varphi g_{\varphi\theta} + \partial_\varphi g_{\theta\varphi}) = -\sin(\theta) \cos(\theta) \\ \Gamma_{\varphi\varphi}^\varphi &= \frac{1}{2} g^{\varphi\varphi} (-\partial_\varphi g_{\varphi\varphi} + \partial_\varphi g_{\varphi\varphi} + \partial_\varphi g_{\varphi\varphi}) = 0 \end{aligned}$$

- b) Wir verschieben nun den Vektor $Y(0) = (0, 1, 0) = \frac{1}{\sin(\theta)} X_\varphi \circ c(0)$ parallel um γ . Wir stellen $Y(t)$ in der Basis X_θ, X_φ dar:

$$Y(t) = y^\theta(t) X_\theta \circ c(t) + y^\varphi(t) X_\varphi \circ c(t).$$

Parallelverschieben heißt dann nach Definition 3.3.1, die Gleichung

$$0 = \nabla_{\dot{\gamma}} Y(t) = (\dot{y}^k(t) + \Gamma_{ij}^k y^i(t) \dot{c}^j(t)) X_k$$

zu lösen. Dies ist äquivalent zu

$$\dot{y}^k(t) + \Gamma_{ij}^k y^i(t) \dot{c}^j(t) = 0, \quad k = \theta, \varphi.$$

Setzen wir $\begin{pmatrix} \dot{c}^\theta \\ \dot{c}^\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sin(\theta)} \end{pmatrix}$ und die Christoffel-Symbole aus a) ein, erhalten wir das Gleichungssystem

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y^\theta \\ y^\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cos(\theta) \\ -\frac{\cos(\theta)}{\sin^2(\theta)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^\theta \\ y^\varphi \end{pmatrix}.$$

Die Lösung zum Anfangswertproblem ist

$$\begin{pmatrix} y^\theta(t) \\ y^\varphi(t) \end{pmatrix} = \exp(Mt) \begin{pmatrix} y^\theta(0) \\ y^\varphi(0) \end{pmatrix} = \exp(Mt) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sin(\theta)} \end{pmatrix},$$

wobei

$$M = \cos(\theta) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sin^2(\theta)} & 0 \end{pmatrix}.$$

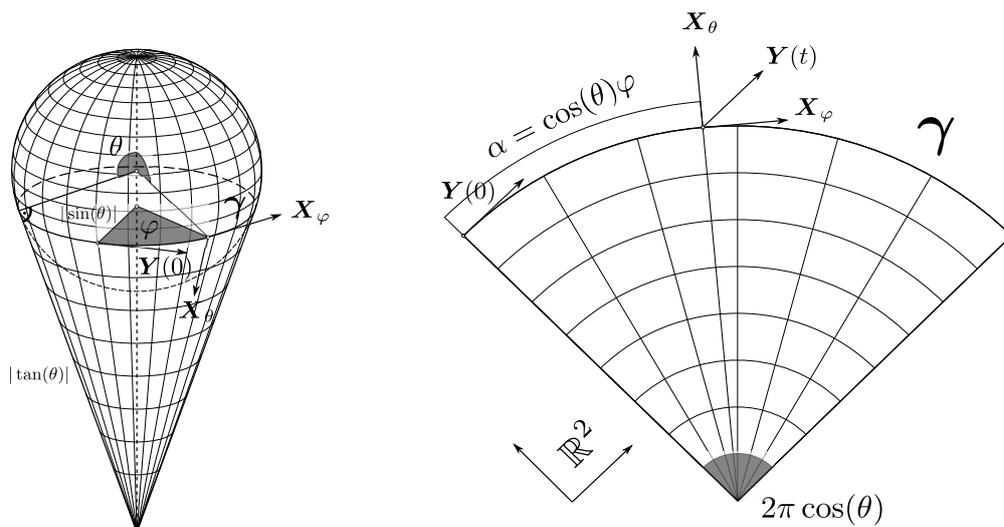
Um $\exp(Mt)$ auszurechnen untersuchen wir die Matrix M und stellen fest, dass $M^2 = -\cot^2(\theta)1$. Dies reicht schon um die Exponentialreihe auszurechnen, indem wir in gerade und ungerade Exponenten zerlegen:

$$\begin{aligned} \exp(Mt) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (Mt)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (Mt)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} (Mt)^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} (M^2)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} M (M^2)^n \\ &= 1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\cot(\theta)t)^{2n}}{(2n)!} (-1)^n + \frac{M}{\cot(\theta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\cot(\theta)t)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= 1 \cos(\cot(\theta)t) + M \tan(\theta) \sin(\cot(\theta)t). \end{aligned}$$

Dementsprechend erhalten wir

$$\begin{pmatrix} y^\theta(t) \\ y^\varphi(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\cot(\theta)t) \\ \frac{\cos(\cot(\theta)t)}{\sin(\theta)} \end{pmatrix}.$$

- c) Wir rollen den Schmiegekegel auf \mathbb{R}^2 ab.



Im folgenden stehen die Vektoren $Y(t)$, X_θ und X_φ für die Bilder der zugehörigen Vektoren unter der Abbildung (Isometrie), die den Kegel abrollt. Wir wählen ein Koordinatensystem, in welchem $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. In \mathbb{R}^2 ist Parallelverschieben trivial und wir erhalten $Y(t) = Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Um mit dem Ergebnis aus b) zu vergleichen, müssen wir $Y(t)$ wieder in der Basis $X_\theta \circ c(t)$, $X_\varphi \circ c(t)$ ausdrücken.

In unserem Koordinatensystem gilt

$$X_\varphi = \sin(\theta) \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ -\sin(\alpha) \end{pmatrix}, \quad X_\theta = \begin{pmatrix} \sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix},$$

wobei $\alpha = \cos(\theta)\varphi$ der Winkel in \mathbb{R}^2 ist und φ mit t über $c(t) = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \varphi(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta \\ t \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$ zusammenhängt, d.h. insgesamt $\alpha(t) = \cot(\theta)t$. Wir erhalten

$$Y(t) = (Y(t) \cdot X_\theta)X_\theta + \left(Y(t) \cdot \frac{X_\varphi}{\sin(\theta)} \right) \frac{X_\varphi}{\sin(\theta)} = \sin(\alpha(t))X_\theta + \frac{\cos(\alpha(t))}{\sin(\theta)}X_\varphi,$$

was mit dem Ergebnis aus b) übereinstimmt.

d) Mit Definition 3.3.1 gilt

γ ist Geodäte

$$\Leftrightarrow 0 = \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = (\Gamma_{ij}^k \dot{c}^i \dot{c}^j + \ddot{c}^k) X_k$$

$$\Leftrightarrow \Gamma_{ij}^k \dot{c}^i \dot{c}^j + \ddot{c}^k = 0.$$

Einsetzen von Γ_{ij}^k und c^i liefert für $0 < \theta < \pi$

$$0 = \cot(\theta) \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}.$$

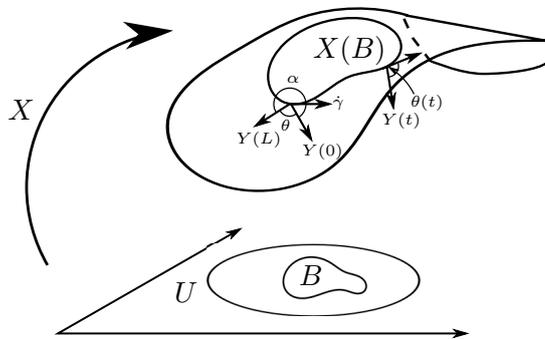
3.4 Das Gauß-Bonnet Theorem

Als eines der berühmtesten Theoreme der Mathematik verknüpft das Gauß-Bonnet Theorem geometrische und topologische Eigenschaften von Flächen.

Die erste Version dieses Satzes wurde von Carl Friedrich Gauß vorgestellt und behandelt geodätische Dreiecke auf Flächen, das heißt Dreiecke, deren Seiten Stücke von Geodäten sind.

Theorem 3.4.1 (Die Gauß-Bonnet Formel). *Sei $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche mit Gauß-Krümmung G , $B \subset U$, und $\gamma = X \circ c$ der glatte Rand von $X(B)$, wobei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine einfach geschlossene Kurve in U ist. Sei $\kappa_g(t)$ die geodätische Krümmung von γ . Dann gilt*

$$\int_{X(B)} G + \int_{\partial X(B)} \kappa_g = 2\pi$$



Beweis. folgt später □

Folgerung 3.4.2. *Sei Y ein paralleles Vektorfeld entlang γ und θ der Winkel zwischen Y und $\dot{\gamma}$. Dann gilt nach Korollar 3.3.15 $\dot{\theta} = \kappa_g$ und mit $\gamma(L) = \gamma(0)$ folgt*

$$\int_{\gamma} \kappa_g = \int_0^L \dot{\theta}(s) ds = \theta(L) - \theta(0) =: \phi$$

Nach Gauß-Bonnet folgt:

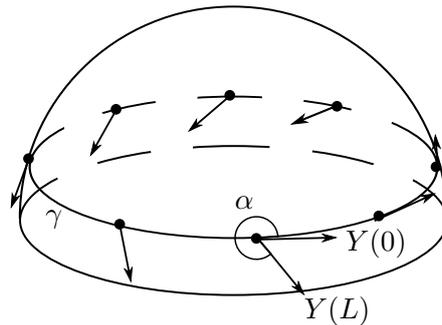
$$\int_R G = 2\pi - \phi$$

Definition 3.4.3. Wir definieren den Defektwinkel α , $0 < \alpha < 2\pi$:

$$\int_R G = 2\pi - \phi =: \alpha$$

Beispiel 3.4.4. Für einen Kreis gilt $0 = \int_R G = 2\pi - \phi$, also $\phi = 2\pi$ und $\alpha = 0$. Für die obere Hälfte der Einheitssphäre gilt nach Beispiel 2.4.9 $G = 1$, also bekommen wir $2\pi = \int_R G = 2\pi - \phi$, also $\phi = 0$ und $\alpha = 2\pi$.

Bemerkung 3.4.5. Allgemein entspricht $G(u)$ dem Netto-Betrag, um den sich ein Vektor dreht wenn er parallel transportiert wird.

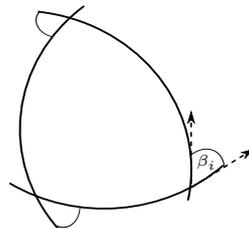


Bemerkung 3.4.6. Für die Gauß-Krümmung G und Defektwinkel eines Polyeders gilt

$$G = 2\pi - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3.$$

Korollar 3.4.7. Sei $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche mit Gauß-Krümmung G und c der stückweise glatte Rand von $B \subset U \subset \mathbb{R}^2$. Seien $-\pi < \beta_i < \pi$, $i = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$ die Außenwinkel der endlich vielen Ecken von $\gamma(t) = X \circ c(t)$. Dann gilt

$$\int_{X(B)} G + \int_{\partial X(B)} \kappa_g + \sum_{i=1}^n \beta_i = 2\pi$$



Korollar 3.4.8. Sei B wie oben, nur mit Rand c aus endlich vielen Stücken von Geodätischen. Dann gilt mit Bemerkung 3.3.9

$$\int_{X(B)} G + \sum_{i=1}^n \beta_i = 2\pi.$$

Es handelt sich hier um ein geodätisches n -Eck. Für $n = 3$, also ein geodätisches Dreieck, erhalten wir

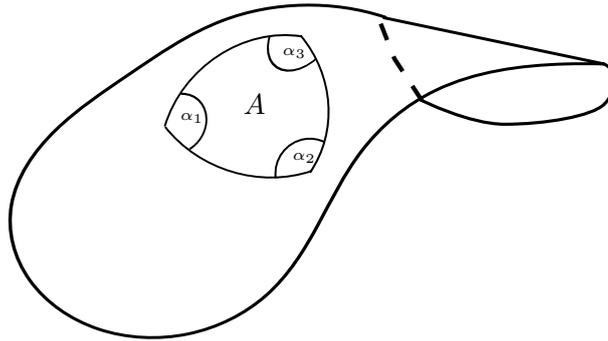
Theorem 3.4.9 (Theorem Elegantissimum (Gauß 1827)). Sei $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche mit Gauß-Krümmung G und A ein geodätisches Dreieck auf X mit Innenwinkeln $0 < \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 < 2\pi$. Dann gilt:

$$\int_A G = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi$$

Für eine Folge schrumpfender geodätischer Dreiecke gilt damit

$$G(u) = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi}{|A|}.$$

Es folgt:



$$G > 0 \Leftrightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 > \pi$$

$$G = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$$

$$G < 0 \Leftrightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 < \pi$$

Beweis. Nach Korollar 3.4.8 gilt für $n = 3$

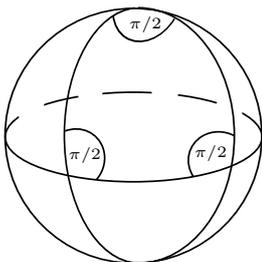
$$\int_A G + \sum_{i=1}^3 \beta_i = 2\pi,$$

mit β_i Außenwinkel der i -ten Ecke, $i = 1, \dots, 3$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \int_A G &= 2\pi - \sum_{i=1}^3 \beta_i \\ &= 2\pi + \sum_{i=1}^3 (\pi - \beta_i) - 3\pi \\ &= \sum_{i=1}^3 (\pi - \beta_i) - \pi \\ &= \sum_{i=1}^3 \alpha_i - \pi, \end{aligned}$$

wobei α_i die Innenwinkel der i -ten Ecke sind, $i = 1, \dots, 3$. □

Beispiel 3.4.10.



Nach Beispiel 2.4.9 gilt für die Gauß-Krümmung G der Einheitssphäre $G = \frac{1}{r^2} = 1$.

$$\Rightarrow \int_A G = \int_A 1 = A \quad (3.4.1)$$

Ein geodätisches Dreieck auf der Einheitssphäre überdeckt genau ein Achtel der Oberfläche, also gilt $A = \frac{1}{8}4\pi = \frac{\pi}{2}$.

Für die Summe der Innenwinkel ergibt sich

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \frac{3\pi}{2} = \pi + A \quad (3.4.2)$$

Also gilt mit den Gleichungen (3.4.1) und (3.4.2)

$$\begin{aligned} \int_A G &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi \\ &= A = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Wir kommen nun zum Beweis von Theorem 3.4.1, der Gauß-Bonnet Formel.

Beweis. [Gauß-Bonnet] Wir verwenden die Beweisidee von Frank Morgan, 2009.

Zu zeigen ist die Gleichung

$$\int_{X(B)} G + \int_{\partial X(B)} \kappa_g = 2\pi$$

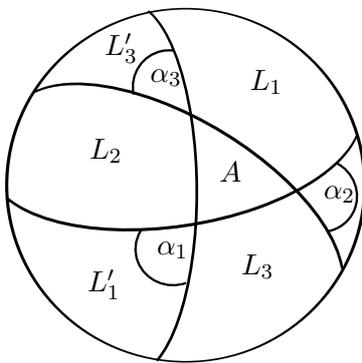
Wir unterteilen den Beweis in vier Schritte und zeigen die Aussage zunächst für geschlossene Kurven auf der Einheitssphäre.

1.Schritt: geodätisches Dreieck auf Einheitssphäre

Für jedes geodätisches Dreieck mit Winkeln $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ gilt das Theorem Elegantissimum 3.4.9 auf der Sphäre (Thomas Harriot, 1603):

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi + A$$

Um dies zu sehen, betrachten wir ein Dreieck A auf der Einheitssphäre, das von Stücken aus drei Großkreisen (also Geodäten) begrenzt wird. Jeweils zwei dieser Großkreise begrenzen zwei kongruente Zweiecke L_i und L'_i mit Innenwinkel α_i , $i = 1, \dots, 3$. Die L_i überlappen sich in A , die L'_i in einem zu A kongruenten Dreieck auf der Rückseite der Sphäre. Insgesamt wird diese vollständig von den L_i und L'_i überdeckt und es gilt:



$$\begin{aligned} |\cup_{i=1}^3 L_i + \cup_{i=1}^3 L'_i| &= 4\pi \\ \Rightarrow |2 \cup_{i=1}^3 L_i| &= 4\pi \\ \Rightarrow |\cup_{i=1}^3 L_i| &= 2\pi \\ \Rightarrow |L_1| + |L_2| + |L_3| - 2A &= 2\pi \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

Offensichtlich hängen die L_i nur von der Größe des Winkels α_i ab und falls $\alpha_i = \pi$ folgt $|L_i| = 2\pi$, da L_i in diesem Fall genau die halbe Sphäre überdecken würde. Damit ergibt sich

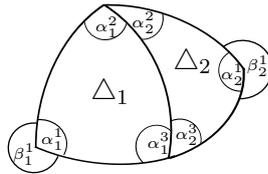
$$|L_i| = 2\alpha_i$$

und mit Gleichung (3.4.3) folgt

$$\begin{aligned} 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 - 2A &= 2\pi \\ A &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi \end{aligned}$$

2.Schritt: geodätisches Polygon auf Einheitssphäre

wir betrachten nun nicht länger ein Dreieck, sondern ein beliebiges geodätisches Polygon auf der Einheitssphäre.



Jedes geodätische Polygon P auf der Einheitssphäre kann aber in endlich viele geodätische Dreiecke Δ_i zerlegt werden. Damit gilt:

$$\int_P dA = \sum_i \int_{\Delta_i} dA.$$

Wir betrachten zunächst ein geodätisches Viereck mit Zerlegung in zwei geodätische Dreiecke Δ_1 und Δ_2 .

Für ein solches Dreieck gilt nach Schritt 1

$$\int_{\Delta} dA = \sum_{i=1}^3 (\alpha_i - \pi) + 2\pi = 2\pi - \sum_{i=1}^3 \beta_i \Leftrightarrow 2\pi = \int_{\Delta} dA + \sum_{i=1}^3 \beta_i,$$

wobei α_i die Innenwinkel und β_i die Außenwinkel des Dreiecks sind, $i = 1, \dots, 3$.

Im Folgenden bezeichnen wir mit β_1^i die Außenwinkel des ersten Dreiecks Δ_1 (analog für $\beta_2^i, \alpha_1^i, \alpha_2^i$). Für die beiden Dreiecke Δ_1 und Δ_2 folgt durch Addition

$$\begin{aligned} 4\pi &= \int_{\Delta_1} dA + \int_{\Delta_2} dA + \sum_{i=1}^3 \beta_1^i + \sum_{i=1}^3 \beta_2^i \\ \Leftrightarrow \int_{\Delta_1 + \Delta_2} + \beta_1^1 + \beta_2^1 &= 4\pi - \sum_{i=2}^3 \beta_1^i - \sum_{i=2}^3 \beta_2^i \\ &= \sum_{i=2}^3 (\pi - \beta_1^i) + \sum_{i=2}^3 (\pi - \beta_2^i) \\ &= \sum_{i=2}^3 \alpha_1^i + \sum_{i=2}^3 \alpha_2^i \end{aligned}$$

Wir bezeichnen die Innenwinkel des Vierecks $\Delta_1 + \Delta_2$ mit

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_1 &= \alpha_1^1 \\ \tilde{\alpha}_2 &= \alpha_1^3 + \alpha_2^3 \\ \tilde{\alpha}_3 &= \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \\ \tilde{\alpha}_4 &= \alpha_2^1 \end{aligned}$$

Dadurch ergeben sich die Außenwinkel $\tilde{\beta}_i = \pi - \tilde{\alpha}_i$, $i = 1, \dots, 4$. Also folgt

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_1 + \Delta_2} dA + \tilde{\beta}_1 + \tilde{\beta}_4 &= \tilde{\alpha}_3 + \tilde{\alpha}_2 \\ &= \pi - \tilde{\beta}_3 + \pi - \tilde{\beta}_2 \\ \Leftrightarrow \int_{\Delta_1 + \Delta_2} dA + \sum_{i=1}^4 \tilde{\beta}_i &= 2\pi \end{aligned}$$

Induktiv folgt für beliebige Polygone P mit n Ecken

$$\int_P dA + \sum_{i=1}^n \beta_i = 2\pi. \quad (3.4.4)$$

3.Schritt:

$\int_{X(B)} dA$ und $\int_{\partial X(B)} \kappa_g$ lassen sich beliebig genau approximieren indem wir die Randkurve $\partial X(B)$ durch ein geodätisches Polygon ersetzen. Damit gilt für ein vorgegebenes $\varepsilon > 0$, dass wir ein Polygon P_ε finden, sodass mit Gleichung (3.4.4) folgt

$$\begin{aligned} \int X(B) dA + \int_{\partial X(B)} \kappa_g &= \varepsilon + \int_{P_\varepsilon} dA + \sum_{i=1}^n \beta_i \\ &= \varepsilon + 2\pi \end{aligned}$$

Somit haben wir Gauß-Bonnet für Flächen auf der Einheitssphäre bewiesen.

4.Schritt:

Jetzt betrachten wir eine allgemeine Fläche und beweisen die Gauß-Bonnet Formel mittels der Gauß-Abbildung auf die Einheitssphäre $N : U \rightarrow \mathbb{S}^2$. Dabei erinnern wir uns, dass die Gauß-Krümmung die Jakobi-Determinante der Gauß-Abbildung ist.

Sei $G > 0$, ansonsten müssen wir in Gebiete unterteilen. (Falls G das Vorzeichen wechselt, muss man N zerlegen und algebraische Flächen verwenden)

Unter Anwendung der Transformationsformel fuer Integrale schließen wir

$$\int_{X(B)'} 1 = \int_{N(X(B))} 1 = \int_{X(B)} \det(dN) = \int_{X(B)} G$$

Nun bleibt noch zu zeigen, dass das Integral über der geodätischen Krümmung der Randkurve das gleiche ist wie das Integral über die zugehörige Kurve $N \circ \gamma$ auf der Einheitssphäre.

Dazu verwenden wir, dass das Integral über die geodätische Krümmung dem Winkel gleich zwischen dem Anfangs- und dem Endwert eines paralleltransportierten Vektorfeldes Y , also $\phi = \langle Y(0), Y(L) \rangle$ (siehe Folgerung 3.4.2)

Für ein paralleles Vektorfeld $Y(t)$ an γ gilt $\dot{Y}(t) \parallel N$. Da N auf Fläche und Sphäre übereinstimmen, gilt selbiges für die Tangentialebenen. Damit bleibt auch die Parallelität erhalten und es gilt für den Winkeln ϕ und ϕ' auf $N \circ \gamma$

$$\phi = \int_{\gamma} \kappa_g = \int_{\gamma'} \kappa_g = \phi'$$

Damit ist der Satz von Gauß-Bonnet bewiesen. \square

Definition 3.4.11. Sei M eine geschlossene Fläche in \mathbb{R}^3 . Sei $T(M)$ eine Triangulierung von M . Dann nennt man

$$\chi(T(M)) := E(T(M)) - K(T(M)) + F(T(M))$$

die *Euler-Charakteristik* von $T(M)$, mit

E = Anzahl der Ecken

K = Anzahl der Kanten

F = Anzahl der Flächen.

Wir betrachten nun eine geschlossene zweidimensionale Fläche, oder zweidimensionale Mannigfaltigkeit.

Eine Mannigfaltigkeit wird beschrieben von einer parametrisierten Fläche. In der Differentialgeometrie wird M durch einen Atlas mit zugehörigen Karten $\phi_1 = X_2^{-1}, \phi_2 = X_1^{-1}$ beschrieben, wobei X_1, X_2 zugehörige Parametrisierungen in unserem Sinne sind (siehe Bemerkung 3.5.6)

Theorem 3.4.12. Sei M eine geschlossene zweidimensionale Fläche in \mathbb{R}^3 mit Gauß-Krümmung G und sei $T(M)$ eine Triangulierung von M . Dann gilt

$$\int_M G = 2\pi\chi(T(M))$$

Beweis. Sei $T(M)$ Triangulierung von M mit $k > 0$ Dreiecken. Für ein Dreieck $\Delta_i, i = 1, \dots, k$, bei dem der Rand in positivem Sinn (also gegen den Uhrzeigersinn) durchlaufen wird, gilt nach Korollar 3.4.7

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_i} G &= - \int_{\partial\Delta_i} \kappa_g - \sum_{n=1}^3 \beta_i^n + 2\pi = - \int_{\partial\Delta_i} \kappa_g + \sum_{n=1}^3 (\pi - \beta_i^n) - \pi \\ &= - \int_{\partial\Delta_i} \kappa_g + \sum_{n=1}^3 \alpha_i^n - \pi, \end{aligned}$$

wobei α_i^n den n -ten Innenwinkel des i -ten Dreiecks bezeichnet, $n = 1, \dots, 3$. Für M ergibt sich damit

$$\Rightarrow \int_M G = \sum_{i=1}^k \int_{\Delta_i} G = - \sum_{i=1}^k \int_{\partial\Delta_i} \kappa_g + \sum_{i=1}^k \sum_{k=1}^3 \alpha_i^n - \sum_{i=1}^k \pi$$

Es ist $\sum_{i=1}^k \int_{\partial\Delta_i} \kappa_g = 0$, denn jede Randkurve wird zweimal in unterschiedlicher Richtung durchlaufen, sodass sich die Randanteile bei der Summe über alle $i = 1, \dots, k$ aufheben. Außerdem ist die Innenwinkelsumme in jeder Ecke genau 2π , weshalb $\sum_{i=1}^k \sum_{n=1}^3 \alpha_i^n = 2\pi E$ gilt. Also ergibt sich

$$\int_M G = 0 + 2\pi E - \pi F$$

Jede Fläche wird von drei Kanten begrenzt, wobei sich jeweils zwei Flächen eine Kante teilen. Für die Anzahl der Kanten K gilt also: $K = \frac{3}{2}F \Leftrightarrow 2K = 3F$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \int_M G &= 2\pi\left(E - \frac{F}{2}\right) = 2\pi\left(E - \frac{3}{2}F + F\right) \\ &= 2\pi(E - K + F) = 2\pi\chi(T(M)) \end{aligned}$$

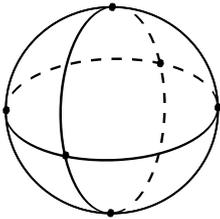
□

Bemerkung 3.4.13. Da $\int_M G$ unabhängig von der Triangulierung von M ist, ist es auch die Euler-Charakteristik und es gilt

$$\int_M G = 2\pi\chi(M).$$

Bemerkung 3.4.14. $\chi(M)$ ist sogar eine topologische Invariante, das heißt invariant unter stetigen Deformationen, also unter homöomorphen Abbildungen. Somit auch jeglicher Polyeder.

Beispiel 3.4.15.



Wir wollen die Euler-Charakteristik der Sphäre \mathbb{S}^2 berechnen und betrachten dazu eine Triangulierung in (Dreiecke). Es ergibt sich

$$\chi(\mathbb{S}^2) = 6 - 12 + 8 = 2.$$

Bemerkung 3.4.16. Verfeinert man einen Polyeder M durch Hinzunahme einer Ecke im inneren des Dreiecks zu einem neuen Polyeder \tilde{M} , dann ändert sich die Euler-Charakteristik nicht:

$$\chi(\tilde{M}) = \chi(M)$$

Beweis. Wie man sich leicht überlegt, gilt nach Hinzunahme einer Ecke für Ecken, Kanten und Flächen

$$E(\tilde{M}) = E(M) + 1$$

$$K(\tilde{M}) = K(M) + 3$$

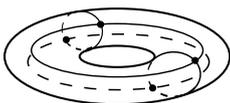
$$F(\tilde{M}) = F(M) + 2.$$

Also folgt

$$\begin{aligned} \chi(\tilde{M}) &= E(\tilde{M}) - K(\tilde{M}) + F(\tilde{M}) \\ &= E(M) + 1 - K(M) - 3 + F(M) + 2 \\ &= E(M) - K(M) + F(M) = \chi(M). \end{aligned}$$

□

Beispiel 3.4.17.



Wir berechnen die Euler-Charakteristik des Torus T mit Hilfe von vier Rechtecken:

$$\chi(T) = 4 - 8 + 4 = 0$$

Definition 3.4.18. Unter einer Fläche M vom *Geschlecht* g versteht man eine Fläche, die aus \mathbb{S}^2 durch Anfügen von $g \geq 0$ Henkeln entsteht.

Beispiel 3.4.19. Ein Torus T hat Geschlecht $g = 1$.

Ein 2-Torus, der durch Anfügen eines weiteren Henkels an einen Torus entsteht, hat Geschlecht $g = 2$. Für seine Euler-Charakteristik $\chi(M)$ ergibt sich, da nach Beispiel 3.4.17 $\chi(T) = 0$ ist,

$$\chi(M) = (\chi(T) - 1) + (\chi(T) - 1) = -2$$



Bemerkung 3.4.20. Allgemein gilt für die Euler-Charakteristik $\chi(M)$ einer Fläche M vom Geschlecht g

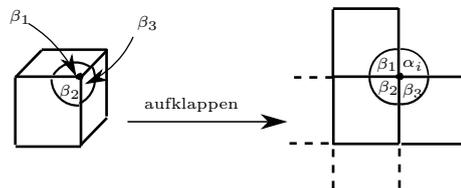
$$\chi(M) = 2 - 2g.$$

Bemerkung 3.4.21. Die Formel $\chi(M) = 2 - 2g$ gilt auch für einen Polyeder mit E Ecken, K Kanten und F Flächen.

Definition 3.4.22. Sei P ein Polyeder, sei i eine Ecke von P . Seien β_1, \dots, β_n die Innenwinkel in der Ecke i aller Polygone von P , die i als Ecke haben. Dann heißt

$$\alpha_i := 2\pi - \sum_{j=1}^n \beta_j$$

der Defektwinkel von P in i .



Theorem 3.4.23 (Gauß-Bonnet für Polyeder). Sei P ein Polyeder mit Defektwinkeln α_i , $i = 1, \dots, n$. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i(P) = 2\pi\chi(P)$$

Beweis. Es reicht nach Bemerkung 3.4.16 einen Polyeder aus Dreiecken zu betrachten.

Sei $\alpha_i = 2\pi - \sum_j \beta_j^i$, wobei β_j^i die j -ten Innenwinkel in der i -ten Ecke aller Polygone bezeichnet, die i als Ecke haben. Dann ergibt sich durch Summieren über alle Ecken

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \alpha_i(P) &= \sum_{i=1}^n (2\pi - \sum_j \beta_j^i) \\ &= \sum_{i=1}^n 2\pi - \sum_i \sum_j \beta_j^i \\ &= E(P)2\pi - F(P)\pi \\ &= 2\pi E(P) - 2\pi \frac{1}{2} F(P) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi(E(P) - \frac{1}{2}F(P)) \\
&= 2\pi(E(P) - \frac{3}{2}F(P) + F(P)) \\
&= 2\pi(E(P) - K(P) + F(P)) \\
&= 2\pi\chi(P).
\end{aligned}$$

Dabei ging ein, dass die Innenwinkelsumme eines der Dreiecke π beträgt und somit $\sum_i \sum_j \beta_j^i = F(P)\pi$ gilt, das $F(P)$ gerade die Anzahl aller Dreiecke ist. Außerdem gilt auch hier $K = \frac{3}{2}F$, da jede Fläche drei Kanten hat und sich je zwei Flächen eine Kante teilen. \square

3.5 Riemannscher Krümmungstensor

In diesem Abschnitt werden wir die Ableitungsgleichungen aus Korollar 3.2.7 genauer betrachten, welche uns zu weiteren Gleichungen, den Integrabilitätsbedingungen, führen werden. Damit werden wir schließlich in der Lage sein, dass Theorema Egregium 3.3.17 zu beweisen.

Erinnerung 3.5.1. Für eine parametrisierte Fläche $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ gelten die Ableitungsgleichungen aus Korollar 3.2.7

- i) $X_{ij} = \Gamma_{ij}^k X_k + k_{ij} N$
- ii) $N_i = -k_i^k X_k$

wobei $k_{ij} = k(X_i, X_j)$ die zweite Fundamentalform von X ist und $k_{ij} = k_i^l g_{lj}$.

Satz 3.5.2. *Es gelten die Integrabilitätsbedingungen der Ableitungsgleichungen:*

- i) *Gauß-Gleichung*

$$\frac{\partial}{\partial u^k} \Gamma_{ij}^s - \frac{\partial}{\partial u^j} \Gamma_{ik}^s + (\Gamma_{ij}^r \Gamma_{rk}^s - \Gamma_{ik}^r \Gamma_{rj}^s) = (k_{ij} k_{km} - k_{ik} k_{jm}) g^{ms} \quad \forall i, j, k, s$$

- ii) *Codazzi-Mainardi-Gleichung*

$$\frac{\partial}{\partial u^k} k_{ij} - \frac{\partial}{\partial u^j} k_{ik} + (\Gamma_{ij}^r k_{rk} - \Gamma_{ik}^r k_{rj}) = 0 \quad \forall i, j, k$$

Beweis. Nach dem Satz von Schwarz gilt $X_{ijk} = X_{ikj}$, also

$$0 = X_{ijk} - X_{ikj} = \frac{\partial}{\partial u^k} X_{ij} - \frac{\partial}{\partial u^j} X_{ik}$$

Mit den Ableitungsgleichungen 3.2.7 und Definition 3.2.5 $X_{ij} = \Gamma_{ij}^m X_m + N k_{ij}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial u^k} (\Gamma_{ij}^s X_s + k_{ij} N) - \frac{\partial}{\partial u^j} (\Gamma_{ik}^s X_s + k_{ik} N) \\
&= \Gamma_{ij,k}^s X_s - \Gamma_{ik,j}^s X_s + \Gamma_{ij}^r X_{rk} - \Gamma_{ik}^r X_{rj} + k_{ij,k} N - k_{ik,j} N + k_{ij} N_k - k_{ik} N_j \\
&= (\Gamma_{ij,k}^s - \Gamma_{ik,j}^s) X_s + \Gamma_{ij}^r X_{rk} - \Gamma_{ik}^r X_{rj} + (k_{ij,k} - k_{ik,j}) N - k_{ij} k_k^s X_s + k_{ik} k_j^s X_s \\
&= (\Gamma_{ij,k}^s - \Gamma_{ik,j}^s) X_s + \Gamma_{ij}^r (\Gamma_{rk}^s X_s + k_{rk} N) - \Gamma_{ik}^r (\Gamma_{rj}^s X_s + k_{rj} N) + (k_{ij,k} - k_{ik,j}) N \\
&\quad + (-k_{ij} k_k^s + k_{ik} k_j^s) X_s \\
&= X_s (\Gamma_{ij,k}^s - \Gamma_{ik,j}^s + \Gamma_{ij}^r \Gamma_{rk}^s - \Gamma_{ik}^r \Gamma_{rj}^s - k_{ij} k_k^s + k_{ik} k_j^s) + N (k_{ij,k} - k_{ik,j} + \Gamma_{ij}^r k_{rk} - \Gamma_{ik}^r k_{rj})
\end{aligned}$$

Da $X_s \perp N$ müssen die beiden Terme in Klammern verschwinden, und wir erhalten die beiden Aussagen des Satzes. \square

Definition 3.5.3. Die linke Seite der Gauß-Gleichung heißt auch *Riemannscher Krümmungstensor* und wird mit R_{ikj}^s bezeichnet.

$$R_{ikj}^s = \frac{\partial}{\partial u^k} \Gamma_{ij}^s - \frac{\partial}{\partial u^j} \Gamma_{ik}^s + \left(\Gamma_{ij}^r \Gamma_{rk}^s - \Gamma_{ik}^r \Gamma_{rj}^s \right)$$

Damit sind wir nun in der Lage das Theorema Egregium 3.3.17 zu beweisen. Es sei erinnert, dass das Theorema Egregium aussagt, dass die Gauß-Krümmung G eine Größe der inneren Geometrie ist, also nur von den g_{ij} abhängt.

Beweis. [Theorema Egregium] Wir betrachten den Riemannschen Krümmungstensor und setzen $i = j = 1$, $k = 2$. Nach der Gauß-Gleichung 3.5.2 gilt

$$\begin{aligned} R_{121}^s &= g^{sm} (k_{11}k_{2m} - k_{12}k_{1m}) \quad | g_{2s} \\ g_{2s} R_{121}^s &= R_{2121} = g_{2s} g^{sm} (k_{11}k_{22} - k_{12}k_{12}) \\ &= \det(k_{ij}) = \det(k_i^m g_{mj}) = \det(k_i^m) \det(g_{mj}) \\ \Rightarrow R_{2121} &= G \det(g_{ij}) \\ \Rightarrow G &= \frac{R_{2121}}{\det(g_{ij})} \end{aligned}$$

Also hängen die R_{ikj}^s nur von den Γ_{ij}^k ab, welche wiederum nur von den g_{ij} abhängen. Also ist G eine Funktion von g_{ij} und damit eine Größe der inneren Geometrie. \square

Folgerung 3.5.4. Für die Gauß-Krümmung G einer parametrisierten Fläche gilt also

$$G = \frac{R_{2121}}{\det(g_{ij})} = \frac{R_{1212}}{\det(g_{ij})}.$$

Satz 3.5.5. Sei $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche. Für den Riemannschen Krümmungstensor gelten die folgenden Gleichungen:

$$i) \quad [\nabla_k, \nabla_j] X_i = R_{ikj}^s X_s$$

$$ii) \quad g(X_l, [\nabla_k, \nabla_j] X_i) = R_{likj}$$

wobei $[\nabla_k, \nabla_j] = (\nabla_k \nabla_j - \nabla_j \nabla_k)$.

Beweis. Wir benutzen die Aussagen von Satz 3.2.6 und erhalten

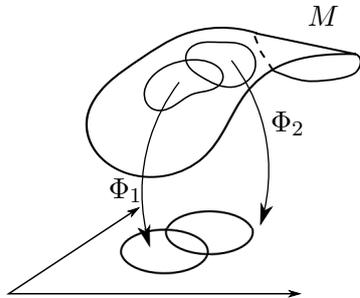
$$\begin{aligned} [\nabla_k, \nabla_j] X_i &= (\nabla_k \nabla_j - \nabla_j \nabla_k) X_i = \nabla_k (\nabla_j X_i) - \nabla_j (\nabla_k X_i) \\ &= \nabla_k [\Gamma_{ji}^r X_r] - \nabla_j [\Gamma_{ki}^r X_r] \\ &= \Gamma_{ji,k}^s X_s + \Gamma_{ji}^r \Gamma_{kr}^s X_s - \Gamma_{ki,j}^s X_s - \Gamma_{ki}^r \Gamma_{jr}^s X_s \\ &= R_{ikj}^s X_s \end{aligned}$$

Damit und mit der Linearität von g folgt

$$g(X_l, [\nabla_k, \nabla_j] X_i) = g(X_l, R_{ikj}^s X_s) = R_{ikj}^s g(X_l, X_s) = g_{ls} R_{ikj}^s = R_{likj}$$

\square

Bemerkung 3.5.6. In der Riemannschen Geometrie, also in der Geometrie, die eine Mannigfaltigkeit M und eine Metrik (M, g_{ij}) vorgibt, wird dies als Definition für den Riemannstensor verwendet. Dort werden die Basiselemente mit δ_j statt X_j bezeichnet, was aber dasselbe ist.



Φ Karte,
 $\Phi_1^{-1} = X_1, \Phi_2^{-1} = X_2$ Parametrisierungen
 $\delta_j = X_j,$
 $\Phi_1 \circ \Phi_2^{-1}$ glatte Abbildung,
 $(\cup \Phi_i)$ Atlas

Hier wird M nicht als eingebettete Fläche angesehen, sondern wir stellen uns als Flachländer vor, die nur Längen und Winkeln messen können.

Riemannsche Geometrie: g_{ij} positiv definit
 Lorentzsche Geometrie: g_{ij} indefinit.

Länge von Licht = 0.

Die Definition der kovarianten Ableitung, als auch die der Geodäten, bleibt dieselbe, denn dort kommen nur g_{ij} vor.

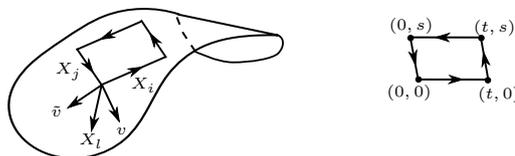
Bemerkung 3.5.7. Es wird auch der Ausdruck

$$R(X_k, X_j)X_i := [\nabla_k, \nabla_j]X_i$$

verwendet. Es gilt dann mit Satz 3.5.5 und der Gauß-Gleichung 3.5.2

$$\begin{aligned} R(X_k, X_j)X_i &= R_{ikj}^s X_s = (k_{ij}k_{km}g^{ms} - k_{ik}k_{jm}g^{ms})X_s \\ &= k_{ij}k_k^s X_s - k_{ik}k_j^s X_s \\ &= k(X_i, X_j)LX_k - k(X_i, X_k)LX_j \end{aligned}$$

Bemerkung 3.5.8 (Geometrische Interpretation).



Der Vektor \tilde{v} entspricht dem um ein Parallelogramm herum parallelverschobenen Vektor v . Mit δv bezeichnen wir den Unterschied von v und \tilde{v} . Es gilt

$$\begin{aligned} \delta g(v, X_l) &= g(v, X_l)(t, 0) - g(v, X_l)(0, 0) + g(v, X_l)(t, s) - g(v, X_l)(t, 0) \\ &\quad + g(v, X_l)(0, s) - g(v, X_l)(t, s) + g(v, X_l)(0, 0) - g(v, X_l)(0, s) \end{aligned}$$

Wir betrachten die Taylor-Entwicklung und vernachlässigen Terme höherer Ordnung in s und t .

$$\begin{aligned} \delta g(v, X_l) &= tg(v, \nabla_i X_l)\left(\frac{t}{2}, 0\right) + sg(v, \nabla_j X_l)\left(t, \frac{s}{2}\right) - tg(v, \nabla_i X_l)\left(\frac{t}{2}, s\right) - sg(v, \nabla_j X_l)\left(0, \frac{s}{2}\right) \\ &= stg(v, \nabla_i \nabla_j X_l) - stg(v, \nabla_j \nabla_i X_l) \\ &= stg(v, (\nabla_i \nabla_j - \nabla_j \nabla_i) X_l) = stg(v, [\nabla_i, \nabla_j] X_l) \\ &= stv^k g(X_k, [\nabla_i, \nabla_j] X_l) = stv^k R_{kl ij}, \end{aligned}$$

Es gilt also

$$\begin{aligned} \delta g(v, X_l) &= \delta g(v^k X_k, X_l) = \delta v^k g_{kl} = stv^k R_{kl ij} \quad | g^{ln} \\ \delta v^n &= stv^k R_{kij}^n = R_{kij}^n \end{aligned}$$

Allgemein geben die R_{kij}^n die n -te Komponente der Änderung des Vektors X_k an, wenn er um ein Parallelogramm, das von X_i und X_j aufgespannt wird, parallel verschoben wird.

Bemerkung 3.5.9. Im Zweidimensionalen gibt es nur X_1, X_2 .

Satz 3.5.10. Für eine parametrisierte Flächen $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gilt

$$i) R_{likj} = G(u)(g_{ij}g_{kl} - g_{jk}g_{il})$$

$$ii) R_{ikj}^l = G(u)(g_{ij}\delta_k^l - g_{jk}\delta_i^l)$$

Beweis. nach Satz 3.5.5 gilt

$$R_{likj} = g(X_l, [\nabla_k, \nabla_j] X_i).$$

Da $[\nabla_k, \nabla_j] = \nabla_k \nabla_j - \nabla_j \nabla_k = -(\nabla_j \nabla_k - \nabla_k \nabla_j) = -[\nabla_j, \nabla_k]$ folgt mit der Linearität von g

$$\begin{aligned} R_{likj} &= g(X_l, [\nabla_k, \nabla_j] X_i) \\ &= -g(X_l, [\nabla_j, \nabla_k] X_i) \\ &= -R_{lij k}. \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} R_{likj} &= g(X_l, [\nabla_k, \nabla_j] X_i) \\ &= -g(X_l, [\nabla_j, \nabla_k] X_i) \\ &= -g(X_i, [\nabla_k, \nabla_j] X_l) \\ &= -R_{ilkj} \end{aligned}$$

Für

$$\tilde{R}_{likj} = G(u)(g(X_i, X_j)g(X_k, X_l) - g(X_k, X_i)g(X_i, X_l))$$

gilt ebenfalls $\tilde{R}_{likj} = -\tilde{R}_{lij k}$ und $\tilde{R}_{likj} = -\tilde{R}_{ilkj}$.

Es ergibt sich mit der Folgerung 3.5.4 aus dem Theorema Egregium

$$R_{1212} = -R_{2112} = R_{2121} = G \det(g_{ij})$$

und

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{1212} &= G(u)(g_{22}g_{11} - g_{12}g_{21}) \\ &= G(u) \det(g_{ij}) \end{aligned}$$

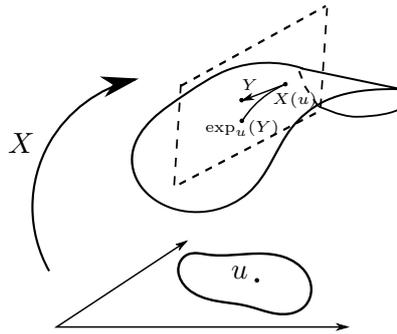
Daraus ergibt sich $R = \tilde{R}$ und es folgt die Behauptung. □

3.6 Exponentialabbildung

Definition 3.6.1. Sei $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche und $u \in U$. Sei $T_u X$ der Tangentialraum an X in $u \in U$. Wir definieren die *Exponentialabbildung*

$$\begin{aligned}\exp_u(Y) &: T_u X \rightarrow X(U) \\ \exp_u(Y) &:= \gamma(1, Y),\end{aligned}$$

wobei $\gamma(t, Y)$ die Geodätische bezeichnet mit $\gamma(0, Y) = X(u)$ und $\dot{\gamma}(0, Y) = Y$, $Y \in T_u X$.



Lemma 3.6.2. *Es existiert zu jedem $u \in U$ ein $\varepsilon > 0$, sodass $\exp_u : B_\varepsilon(0) \rightarrow T_u X$ eine glatte Abbildung ist, wobei $B_\varepsilon(0) \subset T_u X$ eine Kreisscheibe um 0 auf der Tangentialebene mit Radius ε bezeichnet.*

Beweis. Sei $Y \in T_u X$. Wir wissen nach Satz 3.3.6, dass es $\delta(Y) > 0$ gibt, welches von Y abhängt, sodass die Geodäte $\gamma(t, Y)$ im Intervall $(-\delta(Y), \delta(Y))$ definiert ist und $\gamma(0, Y) = X(u)$ und $\dot{\gamma}(0, Y) = Y$ gilt.

Es ist $\gamma(t, \lambda Y) = \gamma(\lambda t, Y)$, $\lambda > 0$, $t \in (-\delta(Y), \delta(Y))$, wegen

$$\frac{d}{dt}\gamma(\lambda t, Y)|_{t=0} = \lambda \dot{\gamma}(Y t, Y)|_{t=0} = \lambda Y = \frac{d}{dt}\gamma(t, \lambda Y)|_{t=0}$$

und der Eindeutigkeit der Geodäten. Damit ergibt sich insbesondere

$$\gamma(1, \lambda Y) = \gamma(\lambda, Y) \tag{3.6.1}$$

Man betrachtet nun

$$\varepsilon = \min_{\|Y\|=1} \delta(Y).$$

Somit ist

$$\exp_u : B_\varepsilon \rightarrow T_u X$$

wohldefiniert. Der Satz über die Abhängigkeit der Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen von den Anfangswerten stellt sicher, dass \exp_u eine glatte Abbildung ist. \square

Bemerkung 3.6.3. Es gilt mit Gleichung (3.6.1)

$$\exp_u(v) = \gamma(1, v) = \gamma(\|v\|, \frac{v}{\|v\|}).$$

Dies entspricht folgender anschaulichen Vorstellung der Exponentialabbildung: Man nimmt eine Schnur der Länge $\|v\|$ und legt sie so auf die Fläche, dass sie auf die Geodäte in Richtung $\frac{v}{\|v\|}$ zu liegen kommt.

Für

$$v = r(\cos \varphi E_1 + \sin \varphi E_2)$$

ist $\exp_u(v) = \exp_u(r, \varphi)$ die geodätischen Polarkoordinaten.

Lemma 3.6.4. Die Abbildung $\exp_u : B_\varepsilon \rightarrow X(U)$ ist ein Diffeomorphismus auf einer Umgebung $V \subset B_\varepsilon \subset T_u X$ des Ursprungs 0 von $T_u X$.

Beweis. Wir zeigen, dass $d \exp_u$ nicht singulär ist an der Stelle $0 \in T_u X$. Es gilt mit Gleichung (3.6.1)

$$\begin{aligned} (d \exp_u(0))(Y) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp_u(tY) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \gamma(1, tY) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \gamma(t, Y) \\ &= Y. \end{aligned}$$

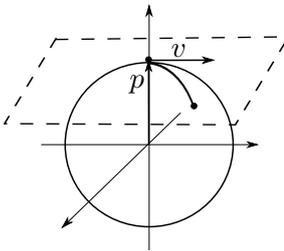
Daraus folgt

$$d \exp_u(0) = \mathbb{1},$$

sodass $d \exp_u$ nicht singulär ist bei 0 . Eine Anwendung des Satzes über die Umkehrabbildung ergibt die Behauptung. \square

Beispiel 3.6.5. Sphäre

Sei $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ die Sphäre \mathbb{S}^2 , $p \in \mathbb{S}^2$ und $v \in T_u X$ mit $\|v\| > 0$.



Die Geodätischen in \mathbb{S}^2 sind genau die Großkreise und die Exponentialabbildung ist

$$\begin{aligned} \exp_p(v) &= \gamma(1, v) = \gamma(\|v\|, \frac{v}{\|v\|}) \\ &= p \cos(\|v\|) + \frac{v}{\|v\|} \sin(\|v\|) \end{aligned}$$

Dabei muss $\|v\| < \pi$ gelten.

Definition 3.6.6. Sei $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche. Sei E_1, E_2 eine Orthonormalbasis des Tangentialraums $T_u X$. Da die Exponentialabbildung nach Lemma 3.6.4 ein Diffeomorphismus ist, können wir mit ihrer Hilfe Koordinaten einführen.

- i) Unter *Riemannschen Normalkoordinaten* verstehen wir folgendes Koordinatensystem, bzw. folgende Parametrisierung:

$$(v^1, v^2) \rightarrow \exp_u(v^1 E_1 + v^2 E_2)$$

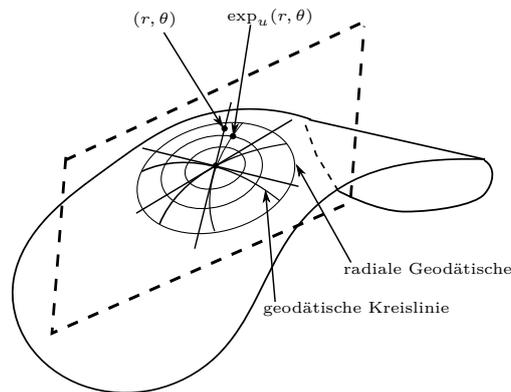
Diese entsprechen einem System rechtwinkliger Koordinaten in $T_u X$.

- ii) Unter *geodätischen Polarkoordinaten* in $B_\varepsilon(0)$ verstehen wir folgendes Koordinatensystem, bzw. folgende Parametrisierung:

$$(r, \varphi) \rightarrow \exp_u(r(\cos \varphi E_1 + \sin \varphi E_2))$$

Diese entsprechen den Polarkoordinaten in $T_u X$.

Die Kurven $r = \text{const}$ heißen *geodätische Kreise*, $\varphi = \text{const}$ heißen *radiale Geodätische*. Dies sind die Bilder unter \exp_u von Kreisen um 0 bzw. von Geraden durch 0.



Bemerkung 3.6.7. Für die Parametrisierung der Ebene

$$X(r, \varphi) := \exp_u(r, \varphi) = r \cos \varphi E_1 + r \sin \varphi E_2$$

berechnen wir

$$X_r = \cos \varphi E_1 + \sin \varphi E_2$$

$$X_\varphi = -r \sin \varphi E_1 + r \cos \varphi E_2.$$

Damit ergibt sich

$$X_\varphi \cdot X_\varphi = g_{\varphi\varphi} = r^2$$

$$X_r \cdot X_r = g_{rr} = 1.$$

Also folgt $g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$

Satz 3.6.8 (Gauß-Lemma). *Sei*

$$\exp_u(r, \varphi) = \exp_u(r(\cos \varphi E_1 + \sin \varphi E_2))$$

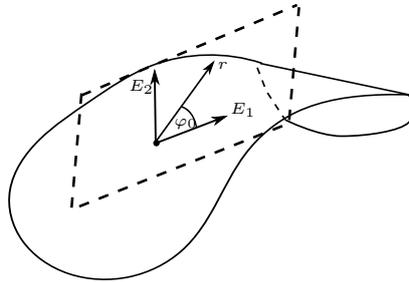
eine lokale Parametrisierung durch geodätische Polarkoordinaten (r, φ) . Dann hat bezüglich dieser Parametrisierung die Riemannsche Metrik g_{ij} die Form

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g_{22}(r, \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g_{\varphi\varphi}(r, \varphi) \end{pmatrix},$$

mit positiver Funktion g_{22} , wobei

$$\lim_{r \rightarrow 0} g_{22}(r, \varphi) = 0 \text{ und } \lim_{r \rightarrow 0} \frac{g_{22}}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \partial_r \sqrt{g_{22}} = 1.$$

Beweis.



Es sei $X(r, \varphi) = \exp_u(r, \varphi) = \exp_u(r(\cos \varphi E_1 + \sin \varphi E_2))$ eine Parametrisierung durch geodätische Polarkoordinaten.

Sei $\varphi = \varphi_0$ fest und $v = \cos \varphi_0 E_1 + \sin \varphi_0 E_2$. nach der Definition der Exponentialabbildung 3.6.1 und Gleichung (3.6.1) gilt

$$\begin{aligned} X(r, \varphi_0) &= \exp_u(r, \varphi_0) = \gamma(1, rv) \\ &= \gamma(r, v) \end{aligned}$$

$X(r, \varphi_0) = \gamma(r, v)$ ist also Geodätische mit $\dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma}|_{r=0} = v \cdot v = 1$. Es gilt damit

$$\begin{aligned} g_{rr} &= X_r \cdot X_r \\ &= \dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma} = 1 \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} g_{r\varphi}(r, \varphi_0) &= \frac{\partial}{\partial r} g(X_r, X_\varphi)|_{(r, \varphi_0)} \\ &= g\left(\frac{\partial}{\partial r} X_r, X_\varphi\right)|_{(r, \varphi_0)} + g\left(X_r, \frac{\partial}{\partial r} X_\varphi\right)|_{(r, \varphi_0)} \\ &= g\left(\frac{\partial}{\partial r} \dot{\gamma}, X_\varphi(r, \varphi_0)\right) + g\left(X_r, \frac{\partial}{\partial \varphi} X_r\right)|_{(r, \varphi_0)} \\ &= 0 + g\left(X_r, \frac{\partial}{\partial \varphi} X_r\right)|_{(r, \varphi_0)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} g(X_r, X_r)|_{(r, \varphi_0)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} 1 = 0. \end{aligned}$$

wobei einging, dass $X(r, \varphi_0)$ Geodäte in r ist und dass $g(X_r, X_r) = X_r \cdot X_r = 1$. Also ist $g_{r\varphi}$ konstant in r . Weiter gilt

$$\begin{aligned}\lim_{r \rightarrow 0} X_\varphi &= \lim_{r \rightarrow 0} (\partial_\varphi \exp_u(r, \varphi)(-r \sin \varphi E_1 + r \cos \varphi E_2)) \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \partial_v \arphi(\exp_u(r(\cos \varphi E_1 + r \sin \varphi E_2)) = 0\end{aligned}$$

Also folgt

$$\lim_{r \rightarrow 0} g_{12}(r, \varphi) = g(\lim_{r \rightarrow 0} X_r, \lim_{r \rightarrow 0} X_\varphi) = 0$$

Damit folgt $g_{r\varphi} = g_{\varphi r} = 0$ und $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g_{\varphi\varphi} \end{pmatrix}$.

Außerdem gilt ebenso

$$\lim_{r \rightarrow 0} g_{22}(r, \varphi) = g(\lim_{r \rightarrow 0} X_\varphi, \lim_{r \rightarrow 0} X_\varphi) = 0$$

und

$$\begin{aligned}\lim_{r \rightarrow 0} \frac{g_{22}}{r^2} &= \lim_{r \rightarrow 0} g\left(\frac{X_\varphi}{r}, \frac{X_\varphi}{r}\right) \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} g((- \sin \varphi E_1 + \cos \varphi E_2)(\exp(r(\cos \varphi E_1 + \sin \varphi E_2))), \\ &\quad (- \sin \varphi E_1 + \cos \varphi E_2)(\exp(r(\cos \varphi E_1 + \sin \varphi E_2)))) \\ &= (\cos \varphi E_2 - \sin \varphi E_1)^2 \lim_{r \rightarrow 0} \exp(r(\cos \varphi E_1 + \sin \varphi E_2))^2 = 1\end{aligned}$$

und

$$\lim_{r \rightarrow 0} \partial_r \sqrt{g_{22}}(r, \varphi) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sqrt{g_{22}}(r, \varphi) - \sqrt{g_{22}}(0, \varphi)}{r - 0} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sqrt{g_{22}}}{r} = \sqrt{\lim_{r \rightarrow 0} \frac{g_{22}}{r^2}} = 1.$$

□

Satz 3.6.9. Für die Gauß-Krümmung G gilt

$$G(r, \varphi) = \frac{-\partial_r^2 \sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{22}}} = \frac{-\partial_r^2 \sqrt{g_{\varphi\varphi}}}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}}}.$$

Beweis. Für die Christoffel-Symbole gilt nach Satz 3.2.6

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} g^{lk} (-\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki}).$$

Gemäß dem Gauß-Lemma Satz 3.6.8 gilt für die erste Fundamentalform in geodätischen

Polarkoordinaten $g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g_{22} \end{pmatrix}$ und damit ist $g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g_{22}^{-1} \end{pmatrix}$.

Mit $g_{11} = 1$ und $g_{12} = g_{21} = 0$ berechnen wir

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = 0 \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2} g^{22} (-\partial_\varphi g_{12} + \partial_r g_{22} + \partial_\varphi g_{21}) \\ &= \frac{1}{2} g^{22} \partial_r g_{22} = \frac{1}{2} g_{22}^{-1} \partial_r g_{22}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(-\partial_r g_{22} + \partial_\varphi g_{21} + \partial_\varphi g_{12}) \\
&= -\frac{1}{2}\partial_r g_{22} \\
\Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}(-\partial_\varphi g_{22} + \partial_\varphi g_{22} + \partial_\varphi g_{22}) \\
&= \frac{1}{2}g^{22}\partial_\varphi g_{22} \\
&= \frac{1}{2}g_{22}^{-1}\partial_\varphi g_{22}
\end{aligned}$$

Wir verwenden die Gleichung aus Folgerung 3.5.4

$$G = \frac{R_{1212}}{\det \varphi}$$

Aus $g_{11} = 1$ und $g_{12} = g_{21} = 0$ folgt $R_{1212} = g_{11}R_{212}^1 = R_{212}^1$ und $\det g_{ij} = g_{22}$. Wir berechnen nach Definition 3.5.3 den Riemannschen Krümmungstensor:

$$\begin{aligned}
R_{212}^1 &= \partial_r \Gamma_{22}^1 - \partial_\varphi \Gamma_{21}^1 + (\Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{21}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{21}^1 - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1) \\
&= \partial_r \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 \\
&= \partial_r \left(-\frac{1}{2}\partial_r g_{22} \right) - \left(\frac{1}{2}\partial_r g_{22} g_{22}^{-1} \left(-\frac{1}{2} \right) \partial_r g_{22} \right) \\
&= -\frac{1}{2}\partial_r^2 g_{22} + \frac{1}{4}(\partial_r g_{22})^2 g_{22}^{-1} \\
\Rightarrow G &= \frac{R_{212}^1}{g_{22}} = -\frac{1}{2g_{22}} \left(\partial_r^2 g_{22} - \frac{1}{2} \frac{1}{g_{22}} (\partial_r g_{22})^2 \right) \\
&= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial_r^2 g_{22}}{g_{22}} - \frac{1}{2} \frac{1}{g_{22}} \frac{(\partial_r g_{22})^2}{g_{22}} \right) \\
&= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial_r^2 g_{22} - \frac{1}{2g_{22}} (\partial_r g_{22})^2}{g_{22}} \right) \\
&= -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \left(\frac{\partial_r^2 g_{22} \sqrt{g_{22}} - \frac{1}{2\sqrt{g_{22}}} (\partial_r g_{22})^2}{g_{22}} \right) \\
&= -\frac{\partial_r^2 \sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{22}}}
\end{aligned}$$

wobei verwendet wurde, dass

$$\partial_r \sqrt{g_{22}} = \frac{1}{2} \frac{\partial_r g_{22}}{\sqrt{g_{22}}}$$

und

$$\partial_r^2 \sqrt{g_{22}} = \frac{1}{2} \frac{\partial_r^2 g_{22} \sqrt{g_{22}} - \frac{1}{2\sqrt{g_{22}}} (\partial_r g_{22})^2}{g_{22}}$$

□

Folgerung 3.6.10. Aus Satz 3.6.9

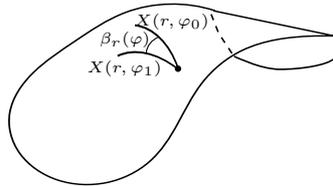
$$G = -\frac{\partial_r^2 \sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{22}}} \Leftrightarrow \partial_r^2 \sqrt{g_{22}} = -G \sqrt{g_{22}}$$

folgt

$$\partial_r^3 \sqrt{g_{22}} = -\partial_r \sqrt{g_{22}} G - \sqrt{g_{22}} \partial_r G$$

Bemerkung 3.6.11. Wir betrachten nun die Bogenlänge L einer Kurve $X(r, \varphi) = \beta_r(\varphi)$ zwischen zwei benachbarten Geodäten φ_0 und φ_1 .

Es gilt



$$\begin{aligned} L(\beta_r(\varphi)) &= \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \|\dot{\beta}_r(\varphi)\| d\varphi \\ &= \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{X_\varphi \cdot X_\varphi} d\varphi \\ &= \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{g_{\varphi\varphi}} d\varphi \end{aligned}$$

Nach Satz 3.6.9 gilt $\sqrt{g_{22}} G = -\partial_r^2 \sqrt{g_{22}}$. Damit ergibt sich

$$\partial_r^2 L(\beta_r(\varphi)) = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \partial_r^2 \sqrt{g_{\varphi\varphi}} d\varphi = - \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} G \sqrt{g_{22}} d\varphi.$$

Also folgt

- i) falls $G = 0$, dann ist $\partial_r^2 L(\beta_r) = 0$. Die benachbarten Geodäten sind also unbeschleunigt, wie in der Ebene.
- ii) falls $G > 0$, dann ist $\partial_r^2 L(\beta_r) < 0$. Die benachbarten Geodäten werden also zueinander hin beschleunigt.
- iii) falls $G < 0$, dann ist $\partial_r^2 L(\beta_r) > 0$. Die benachbarten Geodäten werden also voneinander weg beschleunigt.

Eine weitere Anwendung der geodätischen Polarkoordinaten besteht in der geometrischen Interpretation der Gauß-Krümmung.

Bemerkung 3.6.12. Sei $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Parametrisierung durch geodätische Polarkoordinaten. Mittels Taylorentwicklung um $r = 0$ bei festem φ ergibt sich

$$\sqrt{g_{22}}(r, \varphi) = r - \frac{r^3}{6} G + R(r)$$

mit $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{R(r)}{r^3} = 0$.

Beweis. Es gilt mit Taylorentwicklung um $r = 0$ bei festem φ

$$\sqrt{g_{22}}(r, \varphi) = \sqrt{g_{22}}(0, \varphi) + r\partial_r\sqrt{g_{22}}(0, \varphi) + \frac{r^2}{2}\partial_r^2\sqrt{g_{22}}(0, \varphi) + \frac{r^3}{6}\partial_r^3\sqrt{g_{22}}(0, \varphi) + R(r, \varphi)$$

mit $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{R}{r^3} = 0$.

Nach Folgerung 3.6.10 gilt

$$\partial_r^2\sqrt{g_{22}} = -\sqrt{g_{22}}G \text{ und } \partial_r^3\sqrt{g_{22}} = -\partial_r\sqrt{g_{22}}G - \sqrt{g_{22}}\partial_r G.$$

Einsetzen in die obige Taylorentwicklung liefert

$$\begin{aligned} \sqrt{g_{22}}(r, \varphi) &= \sqrt{g_{22}}(0, \varphi) + r\partial_r\sqrt{g_{22}}(0, \varphi) - \frac{r^2}{2}\sqrt{g_{22}}(0, \varphi)G(0, \varphi) + \frac{r^3}{6}(-\partial_r\sqrt{g_{22}}(0, \varphi)G(0, \varphi) \\ &\quad - \sqrt{g_{22}}(0, \varphi)\partial_r G(0, \varphi)) + R(r, \varphi) \end{aligned}$$

Weiter wissen wir aus dem Gauß-Lemma 3.6.8, dass

$$\sqrt{g_{22}}(0, \varphi) = 0 \text{ und } \partial_r\sqrt{g_{22}}(0, \varphi) = 1.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \sqrt{g_{22}}(r, \varphi) &= 0 + r - 0 + \frac{r^3}{6}(-G(0, \varphi) - 0) + R(r, \varphi) \\ &= r - \frac{r^3}{6}G + R \end{aligned}$$

□

Lemma 3.6.13. Sei $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Parametrisierung durch geodätische Polarkoordinaten und $L_r = \int_0^{2\pi} \sqrt{g_{22}}(r, \varphi) d\varphi$ der Umfang der geodätischen Kreislinie mit Radius r . Dann gilt für die Gauß-Krümmung G

$$G = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2\pi r - L_r}{r^3} \frac{3}{\pi}$$

Beweis. Wir berechnen L_r mittels der Taylorentwicklung aus Bemerkung 3.6.12:

$$\begin{aligned} L_r &= \int_0^{2\pi} \sqrt{g_{22}}(r, \varphi) d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \left(r - \frac{r^3}{6}G + R \right) d\varphi \\ &= 2\pi r - \frac{r^3}{3}\pi G + R' \end{aligned}$$

wobei $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{R'}{r^3} = 0$.

Damit gilt also

$$\begin{aligned} G &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{L_r - 2\pi r}{-\frac{r^3}{3}\pi} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2\pi r - L_r}{r^3} \frac{3}{\pi} \end{aligned}$$

□

Lemma 3.6.14. Sei $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Parametrisierung durch geodätische Polarkoordinaten und $L_r = \int_0^{2\pi} \sqrt{g_{22}(r, \varphi)} d\varphi$ der Umfang der geodätischen Kreislinie mit Radius r . Sei $A(r)$ die Fläche dieser geodätischen Kreislinie. Dann gilt für die Gauß-Krümmung G

$$G = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{12 \pi r^2 - A(r)}{\pi r^4}$$

Beweis. Wir berechnen A_r erneut mittels der Taylorentwicklung aus Bemerkung 3.6.12:

$$\begin{aligned} A_r &= \int_0^r L_s ds \\ &= \int_0^r \int_0^{2\pi} \sqrt{g_{22}(s, \varphi)} d\varphi ds \\ &= \int_0^r \int_0^{2\pi} s - \frac{s^3}{6} G + R d\varphi ds \\ &= \int_0^r 2\pi s - \frac{\pi s^3}{3} G + R' ds \\ &= \pi r^2 - \frac{\pi r^4}{12} G + \tilde{R} \end{aligned}$$

wobei $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\tilde{R}}{r^3} = 0$.
Damit gilt also

$$\begin{aligned} G &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{A_r - \pi r^2}{-\frac{\pi r^4}{12}} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{12\pi r^2 - A_r}{r^4} \frac{12}{\pi} \end{aligned}$$

□

4 Äußere Geometrie

In diesem Kapitel wollen wir den interessanten Spezialfall der Minimalflächen betrachten. Dabei handelt es sich um Flächenstücke, die die Oberfläche minimieren. Dies ist beispielsweise bei einer Seifenhaut der Fall, die zwischen zwei festen Reifen eingespannt ist.

4.1 Minimalflächen

Wir wollen jetzt eine notwendige Bedingung für Minimalflächen herleiten. Sei $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche mit Gauß-Abbildung N .

Sei $\partial X(U)$ der feste Rand von $X(U)$.

Wir nehmen an, dass $X(U)$ minimalen Flächeninhalt hat und betrachten eine Variation in Normalenrichtung

$$X^\varepsilon(u^1, u^2) = X(u^1, u^2) + \varepsilon\varphi(u^1, u^2)N(u^1, u^2)$$

mit fester C^2 -Funktion $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ und $\varphi|_{\partial U} = 0$.

Satz 4.1.1. *Sei $A(X^\varepsilon)$ minimal bei $\varepsilon = 0 \forall \varphi \in C^2(U)$, mit $\varphi|_{\partial U} = 0$. Dann gilt für die mittlere Krümmung H*

$$H = 0 \quad \forall u \in U.$$

Beweis. Sei $X^\varepsilon(u^1, u^2) = X(u^1, u^2) + \varepsilon\varphi(u^1, u^2)N(u^1, u^2)$. Dann ist

$$X_i^\varepsilon = X_i + \varepsilon\varphi_i N + \varepsilon\varphi N_i$$

und somit ergibt sich die erste Fundamentalform

$$\begin{aligned} g_{ij}^\varepsilon &= X_i^\varepsilon \cdot X_j^\varepsilon \\ &= (X_i + \varepsilon\varphi_i N + \varepsilon\varphi N_i) \cdot (X_j + \varepsilon\varphi_j N + \varepsilon\varphi N_j) \\ &= X_i \cdot X_j + 2\varepsilon\varphi(X_i \cdot N_j) + \varepsilon^2(\varphi^2(N_i \cdot N_j) + \varphi_i\varphi_j) \\ &= g_{ij} - 2\varepsilon\varphi k_{ij} + R(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

Wir stellen damit fest, dass

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \det g_{ij}^\varepsilon &= \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} (g_{11}^\varepsilon g_{22}^\varepsilon - (g_{12}^\varepsilon)^2) \\ &= \frac{d}{d\varepsilon} ((g_{11} - 2\varepsilon\varphi k_{11})(g_{22} - 2\varepsilon\varphi k_{22}) - (g_{12} - 2\varepsilon\varphi k_{12})^2)\Big|_{\varepsilon=0} \\ &= (-g_{11}2\varphi k_{22} - 2\varphi k_{11}g_{22} + 8\varepsilon\varphi^2 k_{11}k_{22} + 4\varphi k_{12}g_{12} - 8\varepsilon\varphi^2 k_{12}^2)\Big|_{\varepsilon=0} \\ &= -2\varphi(k_{11}g_{22} + k_{22}g_{11} - 2k_{12}g_{12}). \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

Da

$$g^{ij} = g_{ij}^{-1} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det g_{ij}} \begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11} \end{pmatrix}$$

gilt für die mittlere Krümmung H nach Definition 2.3.6

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} k_i^i = \frac{1}{2} \sum_{i,j} k_{ij} g^{ji} \\
 &= \frac{1}{2} (k_{11} g^{11} + k_{22} g^{22} + 2k_{12} g^{12}) \\
 &= \frac{1}{2 \det g_{ij}} (k_{11} g_{22} + k_{22} g_{11} - 2k_{12} g_{12}) \\
 \Rightarrow 2H \det g_{ij} &= k_{11} g_{22} + k_{22} g_{11} - 2k_{12} g_{12} \tag{4.1.2}
 \end{aligned}$$

Mit Gleichung (4.1.1) und (4.1.2), sowie Definition 2.2.7 des Flächeninhalts, ergibt sich

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \iint_U A(X^\varepsilon) du^1 du^2 \\
 &= \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \iint_U \sqrt{\det g_{ij}^\varepsilon} du^1 du^2 \\
 &= \iint_U \frac{d}{d\varepsilon} \det g_{ij}^\varepsilon \Big|_{\varepsilon=0} du^1 du^2 \\
 &= - \iint_U \frac{\varphi}{\sqrt{\det g_{ij}}} (k_{11} g_{22} + k_{22} g_{11} - 2k_{12} g_{12}) du^1 du^2 = - \iint_U \frac{\varphi}{\sqrt{\det g_{ij}}} 2H \det g_{ij} du^1 du^2 \\
 &= - \iint_U 2H \varphi \sqrt{\det g_{ij}} du^1 du^2 \quad \forall \varphi \in C^2(U) \\
 \Rightarrow H &= 0 \quad \forall u \in U.
 \end{aligned}$$

□

Dies kann folgendermaßen verallgemeinert werden:

Bemerkung 4.1.2. Sei X^ε so, dass $\frac{d}{d\varepsilon} X^\varepsilon \Big|_{\varepsilon=0} = Y$ mit $Y|_{\partial U} = 0$. Dann gilt

$$\frac{d}{d\varepsilon} A(X^\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0} = - \iint_U Y \cdot NH \sqrt{\det g_{ij}} du^1 du^2.$$

Definition 4.1.3. Man bezeichnet eine Fläche $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ als *Minimalfläche*, wenn die mittlere Krümmung H auf ganz U verschwindet, wenn also $H = 0 \forall u \in U$.

Man kann Minimalflächen sehr gut bei isothermen Parametrisierungen beschreiben.

Definition 4.1.4. Man nennt eine parametrisierte Fläche $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ *isotherm*, wenn $X_1 \cdot X_1 = X_2 \cdot X_2$ und $X_1 \cdot X_2 = X_2 \cdot X_1 = 0$ ist, wenn also

$$g_{ij} = \lambda(u^1, u^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

mit $\lambda : U \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda > 0$.

Satz 4.1.5. Sei $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine isotherme parametrisierte Fläche. Dann gilt

$$X_{11} + X_{22} = 2\lambda^2 H N.$$

Beweis. Da X isotherme Fläche, gilt nach Definition 4.1.4

$$X_1 \cdot X_1 = X_2 \cdot X_2.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u^1}(X_1 \cdot X_1) &= \frac{\partial}{\partial u^1}(X_2 \cdot X_2) \\ \Rightarrow X_{11} \cdot X_1 &= X_{21} \cdot X_2. \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

$$\tag{4.1.4}$$

Da $X_1 \cdot X_2 = 0$ ergibt sich ebenso

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u^2}(X_1 \cdot X_2) &= 0 \\ \Leftrightarrow X_{12} \cdot X_2 &= -X_1 \cdot X_{22} \end{aligned}$$

Mit Gleichung (4.1.3) folgt

$$\begin{aligned} X_{11} \cdot X_1 &= -X_1 \cdot X_{22} \\ \Leftrightarrow (X_{11} + X_{22}) \cdot X_1 &= 0. \end{aligned}$$

Analog für $\frac{\partial}{\partial u^2}$ ergibt sich

$$(X_{11} + X_{22}) \cdot X_2 = 0.$$

Da X_2 aber senkrecht auf N steht folgt daraus, dass $(X_{11} + X_{22})$ ein vielfaches von N sein muss.

$$\begin{aligned} X_{11} + X_{22} &= \mu N \\ \Leftrightarrow X_{11}N + X_{22}N &= \mu \end{aligned}$$

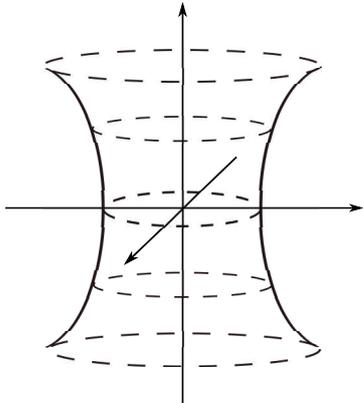
und indem wir verwenden, dass X isotherme Fläche ist, bekommen wir für die mittlere Krümmung

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}(k_{11} + k_{22}) \frac{1}{\det g_{ij}} \\ &= \frac{1}{2}(X_{11}N + X_{22}N) \frac{1}{\lambda^2} \\ &= \frac{1}{2} \mu \frac{1}{\lambda^2} \\ \Leftrightarrow \mu &= 2H\lambda^2 \\ X_{11}N + X_{22}N &= 2H\lambda^2 \\ X_{11} + X_{22} &= 2H\lambda^2 N \end{aligned}$$

□

Folgerung 4.1.6. Sei $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche und sei X isotherm. Dann ist X genau dann eine Minimalfläche, wenn die $X(u^1, u^2) = (X^1, X^2, X^3)$ harmonische Funktionen sind, das heißt

$$\Delta X^i = \partial_{u^1}^2 X^i + \partial_{u^2}^2 X^i = 0.$$

Beispiel 4.1.7. Katenoid

Sei $0 < \varphi < 2\pi$. Wir betrachten die Drehfläche um die z -Achse

$$\begin{aligned} X(t, \varphi) &= D_\varphi^z \begin{pmatrix} a \cosh t \\ 0 \\ at \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \cosh t \\ 0 \\ at \end{pmatrix} \\ &= (a \cos \varphi \cosh t, a \sin \varphi \cosh t, at) \end{aligned}$$

Es ist also $X^1 = a \cos \varphi \cosh t$, $X^2 = a \sin \varphi \cosh t$, $X^3 = at$. Damit berechnen wir

$$\begin{aligned} \partial_t^2 X^1 &= X_{tt}^1 = a \cos \varphi \cosh t \\ \partial_\varphi^2 X^1 &= X_{\varphi\varphi}^1 = -a \cos \varphi \cosh t \\ &\Rightarrow \partial_t^2 X^1 + \partial_\varphi^2 X^1 = 0 \\ \partial_t^2 X^2 &= X_{tt}^2 = a \sin \varphi \cosh t \\ \partial_\varphi^2 X^2 &= X_{\varphi\varphi}^2 = -a \sin \varphi \cosh t \\ &\Rightarrow \partial_t^2 X^2 + \partial_\varphi^2 X^2 = 0 \\ \partial_t^2 X^3 &= X_{tt}^3 = 0 \\ \partial_\varphi^2 X^3 &= X_{\varphi\varphi}^3 = 0 \\ &\Rightarrow \partial_t^2 X^3 + \partial_\varphi^2 X^3 = 0 \end{aligned}$$

Also gilt $\Delta X^i = \partial_{u^1}^2 X^i + \partial_{u^2}^2 X^i = 0$ und $X(t, \varphi)$ ist somit Minimalfläche.

5 Relativitätstheorie

5.1 Spezielle Relativitätstheorie

Michelson-Morley-Experiment (1887):

Glaube seit Isaac Newton: Licht wären Wellen, die durch Äther fortbewegt werden. Man sah jedoch im Experiment keinen Unterschied, die Bewegung gegen den Äther hatte keinen Einfluss auf die Geschwindigkeit des Lichts.

Erklärungen:

Lorentz: Um die Theorie des Äthers zu retten kam Hendrik Antoon Lorentz auf die Idee, dass Gegenstände in ihrer Bewegung gegen den Äther gestaucht werden um den Faktor $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ (mit $\beta = \frac{v}{c}$, wobei v die Geschwindigkeit des Gegenstandes bezeichnet und c die Lichtgeschwindigkeit). Für die neue Länge des Stabes ergibt sich also

$$L' = L\sqrt{1 - \beta^2},$$

wenn L die Länge im Ruhezustand bezeichnet. Die Rechnungen konnten so zwar gerettet werden, aber die Erklärung war nicht überzeugend.

Einstein: Letztendlich war es Albert Einstein, der im Jahre 1905 alle alten Vorstellungen fallen ließ und ein völlig neues Konzept von Raum und Zeit einführte, das zu einer der größten Denkrevolutionen in der Geschichte der Wissenschaft führte. Veranlasst durch die Experimente von Michelson und Morley begründete er seine Theorie auf der Annahme, dass die Lichtgeschwindigkeit eine Naturkonstante sei, also von allen Beobachtern, egal wie schnell diese sich relativ zueinander bewegen, mit dem gleichen Wert gemessen werden. Dies hatte weitreichende Konsequenzen. Einsteins Theorie basierte auf folgenden Axiomen.

Einsteins Axiome:

1. Die Gesetze der Physik sehen in allen Inertialsystemen gleich aus, also für alle Beobachter, die sich relativ zueinander mit gleichmäßiger Geschwindigkeit bewegen.
2. Die Lichtgeschwindigkeit ist für alle Beobachter gleich.

Definition 5.1.1. Wir verwenden im folgenden Einheiten in denen die Lichtgeschwindigkeit $c = 1$ ist.

Insbesondere das zweite Axiom impliziert sofort, dass jeder Beobachter nicht nur seinen eigenen Maßstab hat, sondern auch seine eigene Zeitnehmung. Aus dem Grunde werden Inertialsysteme als vierdimensionale Objekte beschrieben, drei Raumdimensionen und eine Zeitdimension. Eine entscheidende Frage ist, wie transformieren sich die Koordinatensysteme der verschiedenen Beobachter, oder Inertialsysteme.

Nehmen wir an Beobachter A hat Koordinaten $x = (t, \vec{x})$, wobei t die Zeitkoordinate beschreibt und \vec{x} einen Vektor im dreidimensionalen Raum. Der Beobachter A kann nun die Bewegungen von Objekten mittels Weltlinien beschreiben, zum Beispiel die Bewegung eines Flugzeuges mittels einer Parametrisierung

$$x(\lambda) = (t(\lambda), \vec{x}(\lambda)) \in \mathbb{R}^4.$$

Wir stellen uns nun vor, Beobachter B bewegt sich mit Geschwindigkeit v relativ zu Beobachter A in Richtung $(1, 0, 0)$ (sprich in Richtung der x -Achse). Welche Transformation Λ erlaubt nun die Bewegung des Flugzeuges auf die Koordinaten $x' = (t', \vec{x}')$ zu transformieren? Genauer, wie sieht die zugehörige 4×4 Matrix Λ aus, sodass

$$x' = \Lambda x.$$

Minkowski hat festgestellt, dass sich die Transformationen am besten durch geometrische Argumente veranschaulichen lassen. Er hat nämlich eine „Länge“ in der vierdimensionalen Raumzeit definiert, die eine Invariante unter allen Beobachtern darstellt. Diese Länge wird beschrieben durch die Minkowski-Metrik:

Definition 5.1.2. *Minkowski-Metrik* :

$$g_{ij} = \eta_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bemerkung 5.1.3. Das Skalarprodukt zweier Vektoren $a = a^i, b = b^j \in \mathbb{M}^4 = \mathbb{R}^{1,3}$ ist in dieser Metrik gegeben durch

$$\langle a, b \rangle = a^i g_{ij} b^j = a^i \eta_{ij} b^j$$

Für $c = (a, a, 0, 0)$ gilt dann

$$\langle c, c \rangle = c^i g_{ij} c^j = -a^2 + a^2 = 0.$$

Wir haben die Bezeichnung c verwendet, weil dies den Geschwindigkeitsvektor eines Photons in x -Richtung beschreibt.

Die Länge von Geschwindigkeitsvektoren von Photonen ist gleich null. Das heißt Vektoren, die einen gleichen Anteil von Raum und Zeitrichtung haben, haben in der Minkowski-Metrik die Länge null. Es ist nun eine Tatsache, dass die Menge aller möglichen Transformationen, oder die Menge aller Inertialsysteme, dadurch charakterisiert werden, dass die Transformationen die Minkowski-Metrik invariant lassen. Dadurch ist sofort Axiom 2 garantiert, da alle lichtartigen Vektoren in allen Inertialsystemen verschwindende Länge haben.

Da wir die Herleitung dieser Eigenschaften weglassen, benutzen wir es als Definition der Klasse aller Beobachter.

Definition 5.1.4. Die Menge aller *Transformationen* Λ ist gegeben durch die Forderung

$$\Lambda x \text{ mit } \Lambda^T \eta \Lambda = \eta.$$

Bemerkung 5.1.5. Wie sieht nun die Transformation von Beobachter A zu Beobachter B aus?

Es stellt sich heraus, dass diese, beschrieben durch die relative Geschwindigkeit v in x_1 Richtung, gegeben ist durch

$$x' = \Lambda(v)x = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

mit $\beta = \frac{v}{c}$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

Man rechnet leicht nach, dass diese Matrix $\Lambda(v)$ die Minkowski-Metrik invariant lässt. Das heißt, mit $\langle x, x \rangle = \left(x, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} x \right) = (x, \eta x)$ gilt

$$\langle \Lambda x, \Lambda x \rangle = (x, \Lambda^T \eta \Lambda x) = (x, \eta x) = x^i \eta_{ij} x^j$$

Bezüglich dieser Metrik ist Λ also invariant.

Eine solche Transformation nennt man *Lorentz-Boost*.

Es ist hilfreich, die Geschwindigkeit v mittels hyperbolischem Winkel ϕ zu definieren, genauer $v = \operatorname{artanh} \phi$. Unter Verwendung der Winkelsätze, zum Beispiel

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\sinh^2 \phi}{\cosh^2 \phi}}} = \cosh \phi,$$

bekommt man sofort

$$\Lambda(\phi) = \begin{pmatrix} \cosh \phi & \sinh \phi & 0 & 0 \\ \sinh \phi & \cosh \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Man kann dies in der kompakteren Form

$$\begin{pmatrix} \cosh \phi & \sinh \phi & 0 & 0 \\ \sinh \phi & \cosh \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e^{\phi \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

schreiben und sieht somit, dass es einer Art Drehung um den hyperbolischen Winkel ϕ entspricht. In dieser Form ist es noch einfacher nachzurechnen, dass Längen bezüglich dieses Minkowski-Skalarprodukts erhalten bleiben.

$$\begin{aligned} \langle \Lambda x, \Lambda x \rangle &= \Lambda x \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \Lambda x \\ &= x \cdot \Lambda^\top \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \Lambda x \\ &= x \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} x = \langle x, x \rangle. \end{aligned}$$

Mittels dieses Winkels lässt sich leicht eine Additionsregel dieser Lorentz-Boosts herleiten, oder einfacher eine relativistische Additionsregel bezüglich der Addition von Geschwindigkeiten. Angenommen Beobachter B hat gegenüber Beobachter A eine Geschwindigkeit v . Und Beobachter B hat relativ zu Beobachter C eine Geschwindigkeit w . Frage: Welche Geschwindigkeit hat C relativ zu A ?

In herkömmlicher Newtonscher Mechanik wäre die Antwort $u = v + w$. Aber in der Relativitätstheorie muss das falsch sein, denn angenommen v und w wären beide gleich der

Lichtgeschwindigkeit c , dann wäre $u = 2c$, was definitiv im Widerspruch zu Axiom 2 steht. Die Antwort lässt sich wunderbar durch die hyperbolischen Winkel ϕ, ψ , mit

$$\phi = \operatorname{artanh} v, \quad \psi = \operatorname{artanh} w,$$

ausdrücken. Aus obiger Exponentialdarstellung sieht man sofort, dass

$$\Lambda(\phi)\Lambda(\psi) = \Lambda(\phi + \psi)$$

gilt. Das bedeutet für die Geschwindigkeit u des Beobachters C relativ zu A gilt

$$\operatorname{artanh} u = \phi + \psi,$$

oder in Termen von v, w unter Verwendung der Winkelsätze bekommen wir das Additionstheorem

$$u = \operatorname{artanh}(\tanh v + \tanh w) = \frac{v + w}{1 + \frac{vw}{c}}$$

In der Klasse der Lorentztransformationen liegen natürlich auch die Drehungen im Raum um einen fixen Winkel θ und eine fixe Drehachse. Es sei erinnert, dass eine Drehung um die z -Achse die Form

$$\Lambda(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e^{\theta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

hat. Hier wird die Zeitkomponente gleich gelassen und nur die Komponenten der x -/ y -Achse geändert.

5.1.1 Minkowski-Diagramme

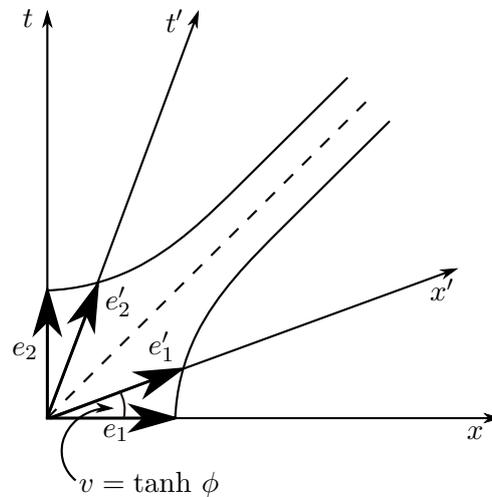
Die beste Methode sich Effekte der speziellen Relativitätstheorie zu veranschaulichen wird einem durch die *Minkowski-Diagramme* gegeben. In solchen können wir die Koordinatensysteme verschiedener Beobachter veranschaulichen, die sich mit Geschwindigkeit $v = \tanh \phi$ gegenüber eines ausgezeichneten Beobachters A in Richtung der x -Achse bewegen. Wir zeichnen nur die Zeit und x -Achse ein. Wir bezeichnen mit e_1 die kanonische Einheitsrichtung der x -Achse, das heißt $e_1 = (0, 1, 0, 0)$ und $e_2 = (1, 0, 0, 0)$ bezeichnet den Einheitsvektor in Zeitrichtung. Dann gilt wie gewöhnlich

$$(t, x) = te_1 + xe_2.$$

Die kanonischen Einheitsvektoren des bewegten Beobachters B bekommen wir dann einfach mittels

$$e'_1 = \Lambda(v)e_1 = (\cosh \phi, \sinh \phi), \quad e'_2 = \Lambda(v)e_2 = (\sinh \phi, \cosh \phi)$$

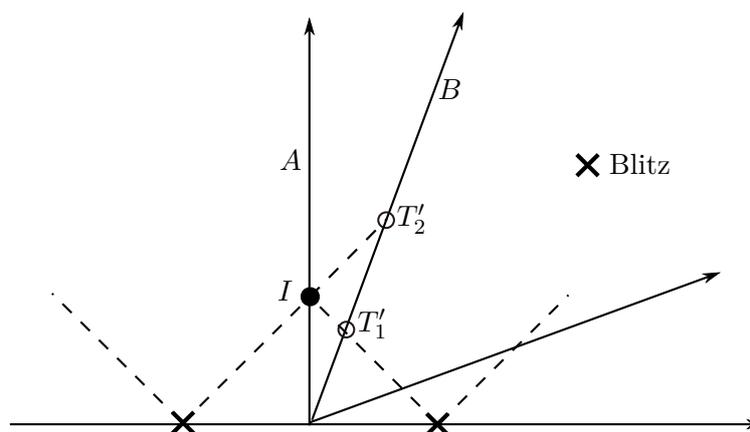
wobei wir die y -/ z -Koordinate weggelassen haben. Hier kann ϕ als Parameter gesehen werden. Bemerke, dass beide Vektoren Einheitsvektoren bezüglich der Minkowski-Metrik sind, ähnlich wie die Vektoren $(\cos \theta, \sin \theta)$ Einheitslänge bezüglich des euklidischen Abstandes haben. Die Koordinaten bezüglich des Beobachters B bekommt man mittels $(t', x') = \Lambda(t, x)$. Graphisch lässt sich v als die Steigung der e'_1 -Achse veranschaulichen.



Aus diversen PM-Heften kennen wir Gedankenexperimente, die Einstein gerne als Beispiel für seine Theorie brachte. Diese lassen sich nun ganz einfach anhand dieser Diagramme erklären:

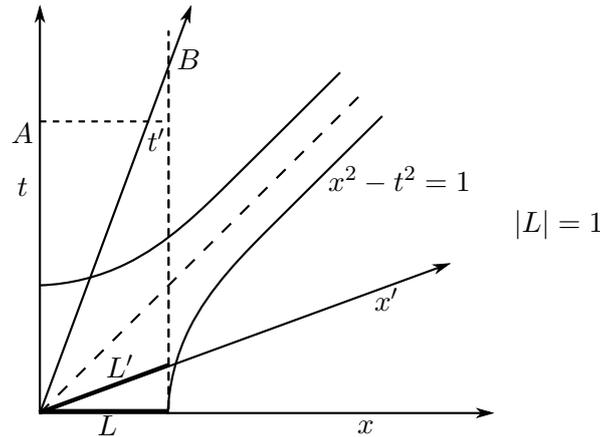
Wir stellen uns vor, Beobachter A steht auf einem Bahnsteig und Beobachter B fährt just in dem Moment am Bahnsteig von A vorbei, als aus der Sicht von A zwei Blitze gleichzeitig einschlagen, einer in Fahrtrichtung von A , der andere in entgegengesetzter Fahrtrichtung beide gleich weit von A entfernt. Für den Beobachter im Zug schlagen die Blitze nicht gleichzeitig ein, er sieht den entgegenkommenden Blitz zuerst, was plausibel klingt, denn der Blitz im Rücken muss den Zug zuerst noch einholen. Im Diagramm bedeutet Gleichzeitigkeit für A dass t konstant ist und für B , dass t' konstant ist.

Die beiden Blitze sind als Kreuze eingezeichnet und bewegen sich entlang lichtartiger Vektoren fort. Sie erreichen den Beobachter A zur Zeit T gleichzeitig, während das Licht der Blitze bei Beobachter B zu den unterschiedlichen Zeiten T'_1 und T'_2 ankommen.



Ein weiterer wichtiger Punkt sind Längenkontraktion und Zeitdilatation. Das heißt, im bewegten System erscheinen Längen gestaucht und die Zeit läuft langsamer. Dies lässt sich ebenfalls in den Minkowski-Diagrammen einfach beschreiben: Wir stellen uns

einen Stab mit Länge L vor. Die Enden werden als Weltlinie angedeutet, die parallel zur t -Achse verlaufen. Wir wählen den Stab der Einfachheit halber so, dass er Länge 1 hat. Der Beobachter B sieht den Stab mit der Länge L' , da er die Enden zur gleichen Zeit abliest, und für ihn heißt gleichzeitig, dass t' fest ist. Da die Hyperbel $x^2 - t^2 = 1$ die normierte Länge in den bewegten Koordinatensystemen andeutet ist klar, dass $L' < 1$ ist, und damit die Einheitslänge im Auge des Betrachters B verkürzt erscheint. Das Argument der Zeitdilatation läuft analog.



Wir kommen jetzt zum Zwillingsparadoxon und der Definition der Eigenzeit eines Beobachters.

Wir stellen uns wieder vor: Beobachter B entfernt sich mit Geschwindigkeit v von der Erde, wo sein Zwilling, Beobachter A zurück bleibt. Im Koordinatensystem von A wird v als $\Delta x / \Delta t$ eingezeichnet. Zur Zeit $T = \Delta t$ auf A 's Uhr, im Punkt P des Koordinatensystems, kehrt B um und fliegt mit Geschwindigkeit v zur Erde zurück. Für A ist $2T = 2\Delta t$ auf der Uhr vergangen und für B ist in der Zeichnung zweimal der Betrag von Δs also zweimal die Strecke von O nach P vergangen. Hier sei erwähnt, dass in unserer Konvention zeitartige Vektoren, also Vektoren die Geschwindigkeitsvektoren von Weltlinien beschreiben, negatives Skalarprodukt haben.

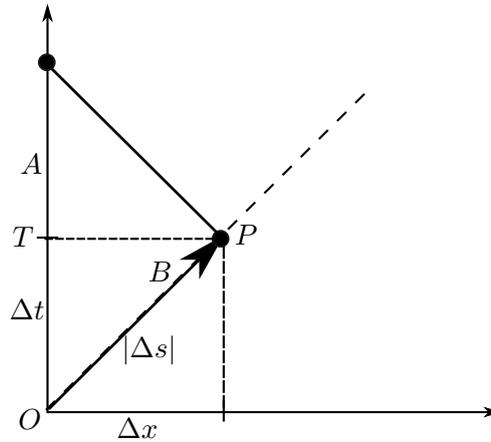
Das heißt wir bezeichnen $|\Delta s| = \sqrt{-(\Delta s)^2}$. Nach der Minkowski-Metrik gilt nun, dass $(\Delta s)^2$ gegeben ist durch

$$(\Delta s)^2 = \langle (\Delta t, \Delta x), (\Delta t, \Delta x) \rangle = -(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 = -(\Delta t)^2(1 - v^2),$$

also

$$|\Delta s| = \Delta t \sqrt{1 - v^2} = \Delta t \beta(v) < \Delta t.$$

Damit ist die Zeit, die auf der Uhr von B vergangen ist $2\Delta t \beta(v)$ und somit kleiner als die Zeit von A , was bedeutet, dass B jünger ist.



Aus dem Beispiel sehen wir, dass $|\Delta s|$ die *Eigenzeit* des bewegten Beobachters beschreibt.

Definition 5.1.6. Ganz allgemein wird nun die infinitesimale *Eigenzeit* als

$$d\tau = \sqrt{-ds^2} = \sqrt{-\eta_{ij}dx^i dx^j}$$

definiert.

Damit ist klar, dass die Eigenzeit eine Invariante ist. Dies wird auch in der allgemeinen Relativitätstheorie gelten. Intuitiv leuchtet ein, dass somit auch die Eigenzeit auf einer realistischeren Weltlinie langsamer verläuft wie für den zurückgebliebenen Zwilling.

5.2 Allgemeine Relativitätstheorie

Nach der Formulierung der speziellen Relativitätstheorie hatte Einstein das Ziel, die Gravitation in diese Theorie zu inkludieren.

Die Newtonsche Theorie erfüllt die Axiome der Speziellen nicht. Man stelle sich zwei entfernte Planeten vor. Wenn sich einer von beiden bewegt, dann spürt nach Newton der andere diese Bewegung instantan. Dies widerspricht aber den Axiomen, die implizieren, dass sich nichts schneller als Licht fortbewegen kann.

Einstein stellte sich vor, dass Objekte, die zum Beispiel frei auf die Erde fallen, durch die Zentralkraft der Erde gegeneinander beschleunigt werden. Vor allem hatte er die Idee, dass eine Theorie so formuliert werden muss, dass diese Objekte als frei fallend angesehen werden. Frei fallend in einer gekrümmten Raumzeit, im Gegensatz zur flachen Raumzeit der Minkowski-Metrik.

Im nächsten Lemma betrachten wir ein geodätisches Vektorfeld T , $\nabla_T T = 0$, in einem gekrümmten Raum, beschrieben durch die Metrik g_{ij} . Außerdem sei S ein orthogonales Vektorfeld, in dem Sinne, dass $[T, S] = 0$ ist. S beschreibt den Abstand zwischen Benachbarten Geodäten. Nun variieren wir S entlang von T und sehen, dass die relative Beschleunigung von benachbarten Geodäten einzig vom Riemannstensor R_{lmn}^s abhängt.

Lemma 5.2.1. Sei T geodätisches Vektorfeld, $T = T^i X_i$, und S , $S = S^l X_l$, vertausche mit T , $[S, T] = 0$. Dann gilt

$$\nabla_T \nabla_T S = T^l T^m S^n R_{lmn}^s X_s$$

Beweis. Nach Satz 3.5.6 gilt

$$[\nabla_k, \nabla_j]X_i = R_{ikj}^s X_s.$$

Durch Vertauschen gilt

$$[T, S] = 0 \Leftrightarrow \partial_T S = \partial_S T$$

und

$$T^a \partial_a S^l = S^l \partial_a T^l.$$

Weiter erhalten wir

$$\begin{aligned} \nabla_T \nabla_T S &= \nabla_T \nabla_S T = [\nabla_T, \nabla_S]T \\ &= [T^l \nabla_l, S^m \nabla_m]T^i X_i = T^i T^l S^m [\nabla_l, \nabla_m]X_i \\ &= T^l (\nabla_l S^m) \nabla_m (T^i X_i) = R_{ilm}^s T^i T^l S^m + S^l \nabla_l T^m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\nabla_T, \nabla_S]T^l X_l &= T^l [\nabla_T, \nabla_S]X_l \\ &= T^l [T^m \nabla_m, S^n \nabla_n]X_l \\ &= T^l T^m S^n [\nabla_m, \nabla_n]X_l + T^l T^m \nabla_m S^n \nabla_n X_l - T^l S^n (\nabla_n T^m) \nabla_m X_l \\ &= T^l T^m S^n [\nabla_m, \nabla_n]X_l + T^l S^m \nabla_m T^n \nabla_n X_l - T^l S^n (\nabla_n T^m) \nabla_m X_l \\ &= T^l T^m S^n [\nabla_m, \nabla_n]X_l \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung. \square

Dies gab Einstein die Idee, dass Gravitation in Zusammenhang mit dem Riemann Tensor steht.

Als das geeignete Objekt stellte sich der *Ricci-Tensor* heraus, der aus dem Riemann-Tensor durch eine partielle Spur gewonnen wird. Das bedeutet im wesentlichen, dass der Ricci-Tensor durch Mittelung über geeignete Indizes entsteht:

Definition 5.2.2. Wir definieren den *Ricci-Tensor*

$$R_{ln} := R_{lsm}^s$$

Definition 5.2.3. Die Gleichung

$$R_{ij} = 0$$

nennen wir *Vakuum-Einstein-Gleichung*.

Dies ist eine der wichtigsten Gleichungen, denn der Ricci-Tenso muss diese etwa außerhalb der Masse eines Sternes, im Vakuum, erfüllen. Im inneren von Sternen oder Planeten muss dagegen auf der rechten Seite ein Term vorkommen, der Masse und Energie beschreibt, der sogenannte Energie-Impuls-Tensor.

Bemerkung 5.2.4. T_{ij} ist der Energie-Impuls-Tensor, dann sind die Einsteinschen Feldgleichungen

$$G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} = \kappa T_{ij}$$

wobei $\nabla^l G_{ij} = \nabla^l T_{ij} = 0$ und $R = R_{ij} g^{ij} = R_i^i$.

Wir beschäftigen uns im folgenden mit der Vakuum-Gleichung. Wir stellen uns einen radialen Stern vor, also einen Stern mit radialer Massenverteilung. Dann kann man die Vakuum-Gleichung außerhalb explizit lösen und bekommt die sogenannte Schwarzschild-Metrik.

5.3 Schwarzschild-Metrik

Wir stellen uns eine sphärische symmetrische Massenverteilung vor und suchen eine zugehörige Metrik, die die Einsteingleichung $R_{ij} = 0$ erfüllt.

Wir suchen also eine isotrope, statische Metrik

$$g = \begin{pmatrix} g_{tt} & g_{tr} & g_{t\theta} & g_{t\phi} \\ g_{rt} & g_{rr} & g_{r\theta} & g_{r\phi} \\ g_{\theta t} & g_{\theta r} & g_{\theta\theta} & g_{\theta\phi} \\ g_{\phi t} & g_{\phi r} & g_{\phi\theta} & g_{\phi\phi} \end{pmatrix}$$

Statisch bedeutet dabei: $g_{ti} = 0 \forall i \neq t$.

Ansatz:

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{\beta(r)} dr^2 + e^{2\gamma(r)} r^2 d\Omega^2$$

mit $d\Omega^2 = \sin^2 \theta d\phi^2 + d\theta^2$.

Die Isotropieannahme gestattet uns, dass wir alle Vorfaktoren als Funktionen von r ansehen können. Wir setzen dafür zunächst $(t, r, \theta, \phi) = (0, 1, 2, 3)$.

Mittels $\bar{r} = e^{\gamma(r)} r$ erhalten wir

$$d\bar{r} = e^{\gamma} dr + e^{\gamma} r d\gamma = \left(1 + r \frac{d\gamma}{dr}\right) e^{\gamma} dr$$

und

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + \left(1 + r \frac{d\gamma}{dr}\right)^{-2} e^{2\beta-2\gamma} d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\Omega^2$$

Also sieht die allgemeine Form der Metrik nach Umskalierung folgendermaßen aus:

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

Wir wollen nun $\alpha(r)$ und $\beta(r)$ ermitteln unter der Annahme, dass sich außerhalb von R keine Masse befindet und dort somit die Vakuum-Einstein-Gleichung erfüllt ist, dass also

$$R_{ij} = 0$$

gilt für $r \geq R$. Um R_{ij} zu betrachten, berechnen wir zuerst die Christoffel-Symbole Γ_{ij}^k mit Hilfe von Satz 3.2.6:

$$\begin{array}{lll} \Gamma_{tr}^t = \partial_r \alpha & \Gamma_{tt}^r = e^{2(\alpha-\beta)} \partial_r \alpha & \Gamma_{rr}^r = \partial_r \beta \\ \Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{r} & \Gamma_{\theta\theta}^r = -r e^{-2\beta} & \Gamma_{r\phi}^\phi = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{\phi\phi}^r = -r e^{-2\beta} \sin^2 \theta & \Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta & \Gamma_{\theta\phi}^\phi = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \end{array}$$

Damit können wir mit Definition 3.5.3 die Riemannschen Krümmungstensoren $R_{ikj}^s = \partial_k \Gamma_{ij}^s - \partial_j \Gamma_{ik}^s + (\Gamma_{ij}^r \Gamma_{rk}^s - \Gamma_{ik}^r \Gamma_{rj}^s)$ ermitteln:

$$\begin{aligned}
R_{rtr}^t &= \partial_r \alpha \partial_r \beta - \partial_r^2 \alpha - (\partial_r \alpha)^2 \\
R_{\theta t \theta}^t &= -r e^{-2\beta} \partial_r \alpha \\
R_{\phi t \phi}^t &= -r e^{-2\beta} \sin^2 \theta \partial_r \alpha \\
R_{\theta r \theta}^r &= r e^{-2\beta} \partial_r \beta \\
R_{\phi r \phi}^r &= r e^{-2\beta} \sin^2 \theta \partial_r \beta \\
R_{\phi \theta \phi}^\theta &= (1 - e^{-2\beta}) \sin^2 \theta
\end{aligned}$$

Dadurch ergibt sich also nun

$$\begin{aligned}
R_{tt} &= e^{2(\alpha-\beta)} [\partial_r^2 \alpha + (\partial_r \alpha)^2 - \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \alpha] \\
R_{rr} &= -\partial_r^2 \alpha - (\partial_r \alpha)^2 + \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \beta \\
R_{\theta\theta} &= e^{-2\beta} [r(\partial_r \beta - \partial_r \alpha) - 1] + 1 \\
R_{\phi\phi} &= \sin^2 \theta R_{\theta\theta}
\end{aligned}$$

Jetzt verwenden wir die Einsteinsche Gleichung $R_{ij} = 0$. Aus $R_{tt} = R_{rr} = 0$ folgt

$$0 = e^{2(\beta-\alpha)} R_{tt} + R_{rr} = \frac{2}{r} (\partial_r \alpha + \partial_r \beta)$$

Also gilt $\alpha = -\beta + c$ mit Konstante c .

c kann 0 gesetzt werden, oder durch Umskalierung $t \rightarrow e^{-c} t$ zu null gemacht werden.

$$\Rightarrow \alpha = -\beta$$

$$\begin{aligned}
R_{\theta\theta} &= e^{2\alpha} (2r \partial_r \alpha - 1) + 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow e^{2\alpha} (2r \partial_r \alpha + 1) = 1 \\
&\Leftrightarrow \partial_r (r e^{2\alpha}) = 1 \\
&\Leftrightarrow r e^{2\alpha} = r - R_s \\
&\Leftrightarrow e^{2\alpha} = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)
\end{aligned}$$

Damit haben wir die Schwarzschild-Metrik abgeleitet. Diese ist von der Form

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{R_s}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

mit

$$g_{tt} = -\left(1 - \frac{R_s}{r}\right).$$

Die Metrik hängt vom Parameter R_s ab. Man kann diesem Parameter aber physikalische Bedeutung geben, indem man ihn in Bezug auf die Masse innerhalb von R stellt, mittels Vergleich mit Newtons Theorie.

Man kann sich überlegen, dass im Newtonschen Limes, also $c \rightarrow \infty$, oder für schwache Felder gilt, dass g_{tt} von der Form $g_{tt} = -(1 + 2\phi)$ ist, wobei ϕ durch ein Newtonsches Potential $\phi = -\frac{GM}{r}$ gegeben ist. Dabei bezeichnet M die Masse und G die Gravitationskonstante. Der Vergleich mit g_{tt} legt nun folgende Definition nahe.

Definition 5.3.1. Wir definieren den *Schwarzschild-Radius*

$$R_s = 2GM,$$

wobei M die Masse und G die Gravitationskonstante bezeichnet.

Bemerkung 5.3.2. Die Metrik g_{ij} wird singulär bei $r = 0$ und bei $r = 2GM$. Aber nur $r = 0$ ist eine echte Singularität, das heißt

$$R^{ijkl}R_{ijkl} \rightarrow \infty$$

Definition 5.3.3. Man bezeichnet den Schwarzschildradius

$$r = 2GM$$

auch als *Ereignishorizont*.

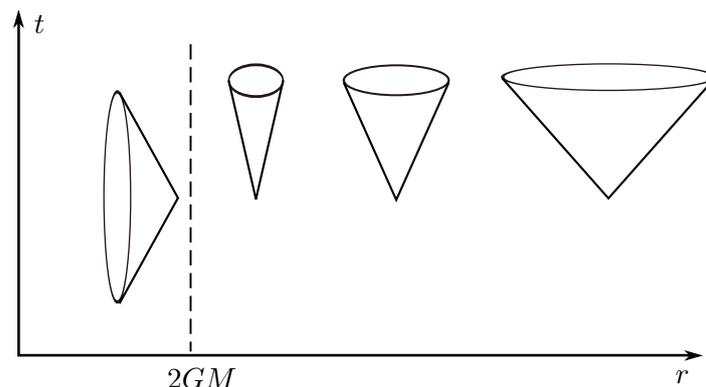
Falls der Radius R eines Sterns kleiner ist, falls also $R < R_s$, spricht man von schwarzem Loch, da kein Lichtstrahl innerhalb von R_s nach außen gelangen kann. Dies kann man sich folgendermaßen veranschaulichen:

Wir betrachten ein (t, r) -Diagramm, wobei wir t wieder in der senkrechten Richtung einzeichnen. Die lichtartigen Vektoren erfüllen $ds^2 = 0$. Wenn wir nur die radiale Komponente betrachten, bedeutet das, dass diese Vektoren

$$\left(\frac{dt}{dr}\right)^2 = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^2$$

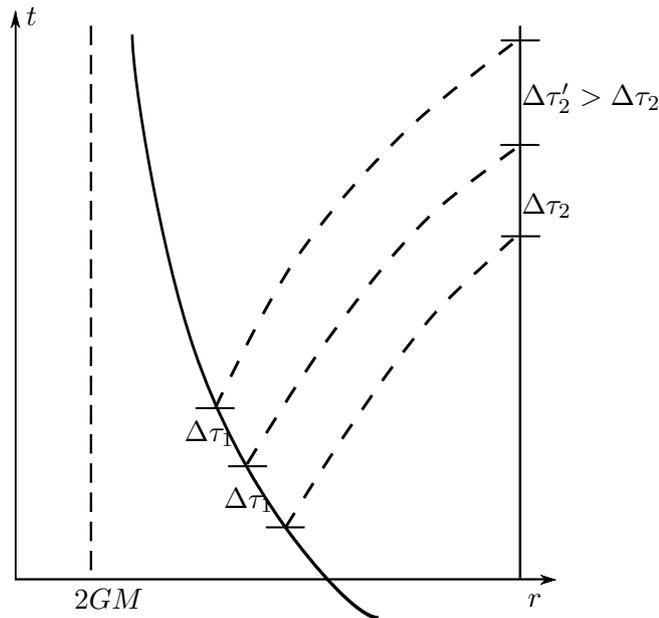
erfüllen.

Das heißt, die Form der Lichtkegel hängt vom Radius ab. Für $r \rightarrow \infty$ sehen die Kegel wie im Minkowski-Raum aus. Für kleinere r wird der Kegel immer schmaler.



Innerhalb von R_s kippt der Kegel dann nach links, was bedeutet, dass kein Licht nach außen dringen kann.

Man kann sich auch zwei Beobachter vorstellen. Beobachter A verharrt bei festem Radius r_A , während sich Beobachter B Richtung schwarzes Loch bewegt, oder einfach frei fällt. In regelmäßigen Abständen $\Delta\tau$ sendet Beobachter B ein Lichtsignal aus. Da die Lichtkegel immer schmaler werden in Richtung schwarzes Loch, werden die Lichtvektoren immer steiler, was zur Konsequenz hat, dass die Intervalle zwischen den bei A ankommenden Signalen immer grösser werden, so dass der Beobachter A nie sieht wie B den Ereignishorizont überschreitet. Aus der Sicht von A braucht B unendlich lange, bis er den Horizont erreicht. Auf der Uhr von B vergeht allerdings nur endlich viel Zeit bis er das schwarze Loch erreicht und den Ereignishorizont überschreitet.



5.4 Geodätische Gleichungen

Wir leiten nun die Bewegungsgleichungen eines Objektes her, das sich in einem Feld bewegt, welches durch die Schwarzschild-Metrik beschrieben wird.

Sei $X(\lambda)$ die zugehörige Teilchenbahn. Der Parameter λ sei so, dass λ die Eigenzeit darstellt, sprich die Bahn ist nach Bogenlänge parametrisiert, $X(\lambda) = (t(\lambda), r(\lambda), \theta(\lambda), \phi(\lambda))$. Die geodätische Gleichung für $X(\lambda)$ lautet bekanntermaßen

$$\ddot{x}^i + \Gamma_{lk}^i \dot{x}^l \dot{x}^k = 0$$

Die zugehörigen Christoffel-Symbole wurden schon abgeleitet. Für die Christoffel-Symbole gilt mit Satz 3.2.6

$$\begin{aligned}
\Gamma_{tt}^t &= \frac{GM}{r^3}(r-2GM) & \Gamma_{rr}^r &= \frac{-GM}{r(r-2GM)} & \Gamma_{tr}^t &= \frac{GM}{r(r-2GM)} \\
\Gamma_{r\theta}^\theta &= \frac{1}{r} & \Gamma_{\theta\theta}^r &= -r(r-2GM) & \Gamma_{r\phi}^\phi &= \frac{1}{r} \\
\Gamma_{\phi\phi}^r &= -(r-2GM)\sin^2\theta & \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\sin\theta\cos\theta & \Gamma_{\theta\phi}^\phi &= \frac{\cos\theta}{\sin\theta}
\end{aligned}$$

Die geodätischen Gleichungen liefern somit folgende vier Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\ddot{t} + \Gamma_{tr}^t \dot{t} \dot{r} &= 0 \\
\Leftrightarrow \ddot{t} + \frac{2GM}{r(r-2GM)} \dot{t} \dot{r} &= 0 \quad (5.4.1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{r} + \Gamma_{tt}^r \dot{t}^2 + \Gamma_{rr}^r \dot{r}^2 + \Gamma_{\theta\theta}^r \dot{\theta}^2 + \Gamma_{\phi\phi}^r \dot{\phi}^2 &= 0 \\
\Leftrightarrow \ddot{r} + \frac{GM}{r^3}(r-2GM)\dot{t}^2 - \frac{2GM}{r(r-2GM)}\dot{r}^2 - (r-2GM)(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2) &= 0 \quad (5.4.2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\theta} + 2\Gamma_{r\theta}^\theta \dot{r} \dot{\theta} + \Gamma_{\phi\phi}^\theta \dot{\phi}^2 &= 0 \\
\Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{2}{r} \dot{\theta} \dot{r} - \sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2 &= 0 \quad (5.4.3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\phi} + 2\Gamma_{r\phi}^\phi \dot{r} \dot{\phi} + 2\Gamma_{\theta\phi}^\phi \dot{\theta} \dot{\phi} &= 0 \\
\Leftrightarrow \ddot{\phi} + \frac{2}{r} \dot{\phi} \dot{r} + 2\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \dot{\theta} \dot{\phi} &= 0 \quad (5.4.4)
\end{aligned}$$

Außerdem gilt durch die Parametrisierung nach Bogenlänge, dass

$$-\dot{x}^i g_{ij} \dot{x}^j = \varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{für Teilchen} \\ 0 & \text{für Licht} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
-\dot{x}^i g_{ij} \dot{x}^j &= \varepsilon \\
\Leftrightarrow \dot{t}^2 \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\phi}^2 - r^2 \sin^2\theta \dot{\theta}^2 &= \varepsilon \quad (5.4.5)
\end{aligned}$$

Die dritte Gleichung 5.4.3 lässt sich lösen durch $\theta = \frac{\pi}{2}$. Das bedeutet, dass die Bahn in einer Ebene verläuft. Dies können wir weiter in die vierte Gleichung einsetzen und bekommen:

$$\begin{aligned}
\ddot{\phi} + \frac{2}{r} \dot{\phi} \dot{r} &= 0 \\
r^2 \ddot{\phi} + 2r \dot{\phi} \dot{r} &= 0 \\
\Leftrightarrow \frac{d}{d\lambda}(r^2 \dot{\phi}) &= 0
\end{aligned}$$

$r^2\dot{\phi} = L$ ist somit eine Erhaltungsgröße, die wir *Drehimpuls* nennen. Aus Gleichung 5.4.5 folgt

$$\begin{aligned} \ddot{t} + \frac{2GM}{r(r-2GM)}\dot{t} &= 0 \\ \Leftrightarrow \ddot{t} + \frac{2GM}{r^2\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)}\dot{t} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{d}{d\lambda}\left(\dot{t}\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\right) &= 0 \end{aligned}$$

Die Erhaltungsgröße $\dot{t}\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)$ bezeichnen wir als *Energie*. L, E seien im Weiteren fest.

Mit $r^2\dot{\phi}^2 = \frac{1}{r^2}\left(r^2\dot{\phi}\right)^2 = \frac{L^2}{r^2}$ folgt

$$\begin{aligned} -\frac{ds^2}{d\lambda^2} &= \dot{t}^2\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 - r^2\dot{\phi}^2 = \varepsilon \\ \Leftrightarrow E^2 - \dot{r}^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\frac{L^2}{r^2} &= \varepsilon\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \\ E^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\left(\frac{L^2}{r^2} + \varepsilon\right) &= \dot{r}^2 \\ E^2 - V_{\text{eff}}(r) &= \dot{r}^2 \end{aligned}$$

mit

$$V_{\text{eff}}(r) = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\left(\frac{L^2}{r^2} + \varepsilon\right).$$

Für $\varepsilon = 1$ ergibt sich

$$V_{\text{eff}}(r) = 1 - \frac{2GM}{r} + \frac{L^2}{r^2} - \frac{2GM}{r} \cdot \frac{L^2}{r^2}$$

also die radiale Energieerhaltung

$$\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) = E^2.$$

Daraus bekommen wir die radiale Bewegungsgleichung.

Es gibt eine Ähnlichkeit zum Newtonschen Fall.

Nach Newton gilt:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\dot{r}^2 - \frac{GM}{r} = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + \dot{\phi}^2 r^2) - \frac{GM}{r} \\ V_N(r) &= -\frac{2GM}{r} + \frac{L^2}{r^2} \end{aligned}$$

Wir wollen nun r als Funktion von ϕ lösen. Wir verwenden dabei:

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \frac{\dot{r}^2}{\dot{\phi}^2}$$

$$u = \frac{1}{r}, \quad du = -\frac{1}{r^2} dr, \quad \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = r^4 \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2$$

Damit ergibt sich mit $u = 1/r$ für die Funktion $u(\phi)$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 &= \frac{E^2}{L^2} - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \frac{1}{r^2} - \frac{\varepsilon}{L^2} \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \\ &= \frac{E^2}{L^2} - u^2 + 2GMu^3 - \frac{\varepsilon}{L^2} + \varepsilon \frac{2GM}{L^2} u \end{aligned}$$

Wir bezeichnen im Folgenden die Ableitung nach ϕ $\frac{du}{d\phi}$ mit \dot{u} . wir erhalten für

$$\begin{aligned} \varepsilon = 0: \quad (\dot{u})^2 &= \frac{E^2}{L^2} - u^2 + 2GMu^3 \\ \varepsilon = 1: \quad (\dot{u})^2 &= \frac{E^2 - \varepsilon}{L^2} - u^2 + 2GMu^3 + \frac{2GM}{L^2} u \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser beiden Bewegungsgleichungen können wir im folgenden die beiden wichtigsten Vorhersagen von Einsteins Theorie betrachten, die Einstein zum absoluten Weltruhm verhalten.

Die erste ist die Erklärung der Periheldrehung des Merkur. Die Drehung der Hauptachse konnte nicht mittels klassischer Theorie erklärt werden. Als Einstein sah, dass seine Theorie den richtigen Wert lieferte konnte er sein Glück kaum fassen und bezeichnete dies später als den glücklichsten Moment seines Lebens.

Die zweite Vorhersage bezieht sich auf die Lichtablenkung durch große Massen. Seine prognostizierte Lichtablenkung durch die Sonne konnte 1919 von Sir Arthur Stanley Eddington bei einer Sonnenfinsternis nachgewiesen werden.

Die Nachricht der Richtigkeit seiner Vorhersage machte Einstein über Nacht zum Weltstar.

5.4.1 Periheldrehung des Merkur

Wir beschäftigen uns zuerst mit der Gleichung für die Teilchen, also mit dem Fall $\varepsilon = 1$.

Wir leiten dazu beide Seiten der Gleichung nach ϕ ab und bekommen so eine Gleichung zweiter Ordnung.

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\phi}: \quad 2\dot{u}\ddot{u} &= -2u\dot{u} + 6GMu^2\dot{u} + 2\frac{GM}{L^2}\dot{u} \\ \ddot{u} &= -u + 3GMu^2 + \frac{GM}{L^2} \\ \ddot{u} + u &= \frac{GM}{L^2} + 3GMu^2 \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist nichtlinear und nicht in geschlossener Form lösbar. Es ist aber leicht zu sehen, dass für Planeten der Einstein-Term $3GMu^2$ klein ist im Verhältnis zu $\frac{GM}{L^2}$.

Deshalb lösen wir zunächst die lineare Newtonsche Gleichung und setzen die Lösung als

Störungsterm ein, um so eine approximative Lösung der Einstein-Gleichung zu erhalten. Wir verwenden also den Ansatz $u = u_0 + u_1$, sodass wir die Gleichung

$$\ddot{u}_0 + u_0 + \ddot{u}_1 + u_1 = \frac{GM}{L^2} + 3GM(u_0 + u_1)^2 \simeq \frac{GM}{L^2} + 3GMu_0^2$$

erhalten. Wir nehmen nun an, dass u_1 nur eine kleine Störung von u_0 und $3GMu_0^2$ wiederum klein gegenüber u_0 ist, und von der Größenordnung von u_1 ist, womit wir zwei Gleichungen für u_0 und u_1 bekommen. u_0 erfüllt dann dieselbe Gleichung wie in der Newtonschen Mechanik.

Newton: Mit $a = \frac{GM}{L^2}$ lautet die Newtonsche Gleichung

$$\ddot{u}_0 = -u_0 + a$$

Diese ist explizit lösbar, und wir bekommen

$$\begin{aligned} u &= a(1 + e \cos \phi) = \frac{GM}{L^2}(1 + e \cos \phi) \\ \Leftrightarrow r &= \frac{L^2}{GM} \frac{1}{1 + e \cos \phi} \\ e < 1 &\text{ liefert Ellipse} \end{aligned}$$

e ist die Exzentrizität und hängt von den Parametern L, E, M, G ab.

Einstein: Wir setzen diese Lösung in die Einsteinsche Gleichung ein und bekommen so folgende Gleichung für u_1 :

$$\ddot{u}_1 + u_1 = 3GM \left(\frac{GM}{L^2} (1 + e \cos \phi) \right)^2.$$

also

$$\ddot{u}_1 + u_1 = \frac{3(GM)^3}{L^4} (1 + 2e \cos \phi + e^2 \cos^2 \phi).$$

Dies lässt sich explizit Term für Term lösen und man bekommt

$$u_1 = \frac{3G^2M^2}{L^2} \left[\left(1 + \frac{1}{2}e^2\right) + e\phi \sin \phi - \frac{1}{6}e^2 \cos 2\phi \right].$$

Um die Richtigkeit zu überprüfen muss man nur einsetzen in die Gleichung. Der Leser ist willkommen das zu tun.

Der erste Term ist nur eine Konstante und der letzte Term oszilliert nur π -periodisch um die Null. Uns interessiert nur der zweite Term, darin sind die wichtigen Effekte versteckt. Wir nehmen diesen und kombinieren ihn mit der Lösung u_0 . Dies ergibt die Lösung

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \frac{6(GM)^3}{L^2} e \frac{1}{2} \phi \sin \phi \\ &= \frac{GM}{L^2} \left(1 + e \cos \phi + \frac{3(GM)^2}{L^2} e \phi \sin \phi \right) \\ &\simeq \frac{GM}{L^2} \left(1 + e \cos \left(1 - \frac{3(GM)^2}{L^2} \right) \phi \right) \end{aligned}$$

Letzteres sehen wir durch Taylorentwicklung. Die rechte Seite ist von der Form

$$f(\delta) = \cos(1 - \delta)\phi,$$

mit δ klein. Es gilt nach Satz von Taylor

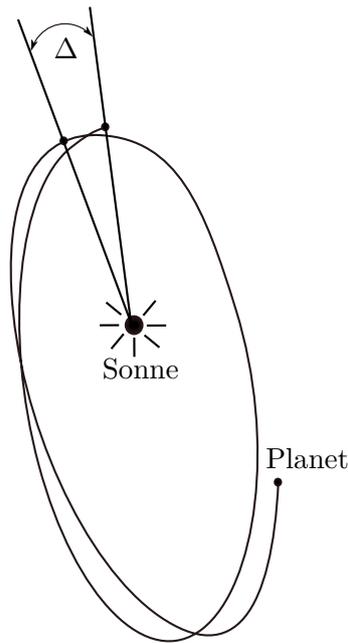
$$f(\delta) = f(0) + f'(0)\delta + R(\delta^2) = \cos \phi + \delta \phi \sin \phi + R(\delta^2)$$

womit wir obige Gleichung bestätigt haben. Nun stellen wir fest, dass $u(\phi)$ eine periodische Funktion ist, mit $u(\phi_0) = u(0)$ und Periode

$$\phi_0 = \frac{2\pi}{1 - \frac{3(GM)^2}{L^2}}.$$

$$\frac{2\pi}{1 - \frac{3(GM)^2}{L^2}} - 2\pi = \Delta \simeq 6\pi \frac{(GM)^2}{L^2}$$

Das heißt in einer Umdrehung verschiebt sich die Hauptachse um den Winkel Δ .



Für den Merkur liefert dies eine Periheldrehung um 43 Bogensekunden pro Jahrhundert - exakt die Zahl, die zur Erklärung der Periheldrehung mittels klassischer Theorie fehlte.

5.4.2 Lichtablenkung

Nun kommen wir zur Lichtablenkung. Die Bewegungsgleichung für ein Photon, $\varepsilon = 0$, im Feld der Schwarzschild-Metrik hatten wir bereits abgeleitet.

Wir nehmen an, im Ursprung liegt ein Stern mit Masse M und im Abstand R passiert ein Photon. Wir messen den Winkel relativ zur x -Achse, das heißt wir haben die Anfangsbedingung

$r(\frac{\pi}{2}) = R$. Würde das Photon vom Stern unbeeinflusst bleiben, dann soll der Photonstrahl geradlinig parallel zur x -Achse verlaufen. Wir wollen nun die Ablenkung des Lichts von dieser geraden Bahn ableiten mittels der Schwarzschild-Metrik.

Wir bekamen mit $u = 1/r$ die Gleichung für $u(\phi)$

$$\dot{u}^2 = \frac{E^2}{L^2} - u^2 + 2GMu^3.$$

Wenn wir diese Gleichung nun wiederum nach ϕ ableiten, liefert dies

$$\ddot{u} = -u + 3GMu^2.$$

Mit dem Ansatz $u = u_0 + u_1$ bekommen wir

$$\ddot{u}_0 + u_0 + \ddot{u}_1 + u_1 = 3GM(u_0 + u_1)^2 \simeq 3GMu_0^2,$$

wobei wir verwenden, dass u_1 eine kleine Störung von u_0 ist und $3GMu_0^2$ wiederum viel kleiner als u_0 selbst und von der Größenordnung von u_1 . Damit bekommen die beiden Gleichungen

$$\ddot{u}_0 + u_0 = 0 \tag{5.4.6}$$

$$\ddot{u}_1 + u_1 = 3GMu_0^2. \tag{5.4.7}$$

Die erste Gleichung lässt sich explizit lösen. Unter der Nebenbedingung, dass $u(\frac{\pi}{2}) = 1/R$ ist, bekommen wir

$$u_0(\phi) = \frac{\sin(\phi)}{R},$$

also

$$\frac{1}{r} = \frac{\sin \phi}{R} \Leftrightarrow \frac{R}{r} = \sin \phi,$$

was genau eine geradlinige Bahn parametrisiert, die im Abstand R parallel zur Achse verläuft. Die Gleichung für u_1 lautet somit

$$\ddot{u}_1 + u_1 = 3GM \left(\frac{\sin \phi}{R} \right)^2 = \frac{3GM}{R^2} (1 - \cos^2 \phi) = \frac{3GM}{2R^2} (1 - \cos 2\phi),$$

mit der expliziten Lösung

$$u_1 = \frac{3GM}{2R^2} \left(1 + \frac{1}{3} \cos 2\phi \right).$$

Das liefert dann die kombinierte Lösung:

$$u = u_0 + u_1 = \frac{\sin \phi}{R} + \frac{3GM}{2R^2} \left(1 + \frac{1}{3} \cos 2\phi \right).$$

Wir wollen nun wissen wie sich $r(\phi)$ verhält, wenn das Photon ins Unendliche läuft, also wenn r groß wird.

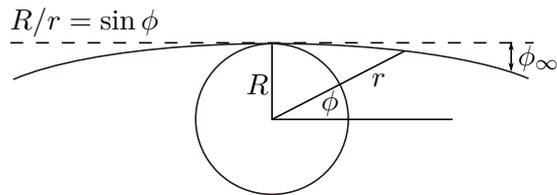
r groß entspricht u klein, wir müssen uns also nur überlegen, wie sich der Winkel ϕ verhalten muss, damit $u(\phi) = 0$ gilt. Der Einfachheit halber gehen wir von der Annahme aus, dass ϕ klein sein wird. Nach Taylor gilt ja dafür $\sin \phi \sim \phi$ und $\cos 2\phi \sim 1$. Also bekommen wir die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 = u(\phi) &\sim \frac{\phi}{R} + \frac{3GM}{2R^2} \left(1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{\phi}{R} + \frac{3GM}{2R^2} \frac{4}{3} \\ &= \frac{\phi}{R} + \frac{2GM}{R^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \phi = -\frac{2GM}{R}$$

Da die gesamte Lichtablenkung dem Doppelten dieses Winkels entspricht bekommen wir für die gesamte Lichtablenkung

$$\theta = \frac{4GM}{R}.$$



Im Falle der Sonne wurde dieses Resultat von Eddington 1919 als auch von weiteren Gruppen 1921 bestätigt.

6 Quellenverzeichnis

- Christian Bär. Elementare Differentialgeometrie. De Gruyter, Berlin, 2. Auflage, 2010.
- Manfredo P. do Carmo. Differentialgeometrie auf Kurven und Flächen. Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 3. Auflage, 1993.
- Wilhelm Klingenberg. Eine Vorlesung über Differentialgeometrie. Springer, Berlin, New York, 1973.
- Wolfgang Kühnel. Differentialgeometrie. Vieweg, Wiesbaden, 5. Auflage, 2010.
- Frank Morgan. Riemannian Geometry. A. K. Peters, Natrick, 2. Auflage, 2009.
- Wolfgang Rindler. Relativity. Oxford, New York, 2. Auflage, 2006.

Index

- Ableitung
 - kovariante, 51
- algebraischer Wert, 56
- Asymptotenlinie, 43
- Asymptotenrichtung, 43

- begleitendes Dreibein, 17
- Binomialvektor, 17
- Bogenlängeelement, 27

- Christoffel-Symbole, 52

- Defektwinkel, 62, 70
- Drehfläche, 23
- Drehimpuls, 101

- Eigenzeit, 94
- elliptisch, 43
- Endergie, 101
- Ereignishorizont, 98
- Erzeugende, 48
- Euler-Charakteristik, 68
- Euler-Formel, 41
- Exponentialabbildung, 75

- Fläche
 - parametrisierte, 22
- Flächeninhalt, 29
- Flachpunkt, 43
- Fundamentalform
 - erste, 27
 - zweite, 34

- Gauß-Abbildung, 26
- Gauß-Bonnet, 62
- Gauß-Krümmung, 31
- Gauß-Notation, 27
- Geodäte, 54
- Geodätische, 54
 - radiale, 77
- geodätische Kreise, 77
- geodätische Polarkoordinaten, 77
- Geschlecht, 69
- geschlossen, 7
 - einfach, 7
- Geschwindigkeitsvektor, 1

- Hauptkrümmung, 40
- Hauptkrümmungsrichtungen, 40
- hyperbolisch, 43

- Isometrie, 47
- isoperimetrische Ungleichung, 14
- isotherm, 85

- Kommutator, 33
- Koordinatendarstellung, 27
- kovariante Ableitung, 51
- Krümmung, 8, 16
 - Gauß-, 31
 - geodätische, 39, 56
 - Haupt-, 40
 - mittlere, 31
 - Normal-, 38
- Krümmungslinie, 44
- Krümmungstensor
 - Riemannscher, 72
- Kurve, 4
 - parametrisierte, 1
 - orientierte, 4
 - parametrisierte
 - nach Bogenlänge, 4
 - reguläre, 1
 - stückweise glatte, 14

- Länge, 6
- Leitkurven, 48
- lokal isometrisch, 47
- lokale kanonische Form, 20
- Lorentz-Boost, 90

- Minimalfläche, 85
- Minkowski-Diagramm, 91
- Minkowski-Metrik, 89

- Nabelpunkt, 43
- Normalenfeld, 8, 26
- Normalenvektor, 17
- Normalkoordinaten
 - riemannsche, 77
- Normalkrümmung, 38

- orientierungserhaltend, 4

- orientierungsumkehrend, 4
- parabolisch, 43
- parallel, 54
- Parametertransformation, 3, 24
- parametrisiert
 - nach Krümmungslinie, 44
- periodisch, 7
- Polarkoordinaten
 - geodätische, 77
- radiale Geodätische, 77
- Raumkurve
 - orientierte, 16
 - parametrisierte, 16
 - reguläre, 16
- Regelfläche, 37
- regulär, 1
- Ricci-Tensor, 95
- Richtungsableitung, 33
- Riemannsche Normalkoordinaten, 77
- Riemannscher Krümmungstensor, 72
- Satz
 - Haupt- der Raumkurventheorie, 18
 - Umlauf-, 14
 - Frenet-Gleichung, 10, 17
- Schmiegtorse, 50
- Schwarzschild-Radius, 98
- Spur, 4
- Tangentenfeld, 25
- Tangentialfläche, 50
- Tangentialraum, 24
- Theorem Elegantissimum, 63
- Theorema Egregium, 59
- Torse, 48
- Torsion, 17
- Transformationen, 89
- Umlaufzahl, 12
- Umparametrisierung, 3, 24
 - orientierungserhaltende, 24
- Vakuum-Einstein-Gleichung, 95
- Vektorfeld, 25
- Weingarten-Abbildung, 30
- Windung, 17