

Vorlesungsmitschrieb

Differentialgeometrie I

PROF. DR. FRANK LOOSE

im Wintersemester 2010/2011
an der Eberhard-Karls-Universität Tübingen

gesetzt von CHRISTIAN POWER mit L^AT_EX

Letzte Änderung: 21. Juli 2011

Vorwort

Dieses Scriptum ist ein Mitschrieb der Vorlesung Diffgeo I aus dem Wintersemester 2010/2011.

Wer Fehler findet, schickt mir bitte ein E-mail an: power2c@aol.com.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	iii
I. Differentialgeometrie I	1
1. Mengentheoretische Topologie	3
2. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten	17
3. Dynamische Systeme	45
II. Differentialgeometrie II	73
4. Vektorraumbündel	75
5. Liegruppe	107
A. Der Igelsatz	115
B. Der Satz von Stokes	125
Index	147
Literaturverzeichnis	151

Teil I.

Differentialgeometrie I

1

Kapitel 1.

Mengentheoretische Topologie

(1.1) Definition. Sei M eine Menge. Eine Abbildung $d : M \times M \rightarrow [0, \infty)$ heißt eine **Metrik** auf M , wenn gilt:

- (a) $d(p, q) = 0 \iff p = q$;
- (b) $d(q, p) = d(p, q), \forall p, q \in M$;
- (c) $d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r), \forall p, q, r \in M$ (Dreiecksungleichung).

Das Paar (M, d) heißt dann ein **metrischer Raum**.

(1.2) Beispiel.

- (a) Sei $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty), \|x\| := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$. Dann ist

$$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty), d(x, y) := \|y - x\|$$

eine Metrik auf \mathbb{R}^n (Übung). Es heißt $d = d_{\text{eukl}}$ die **euklidische Metrik** und $(\mathbb{R}^n, d_{\text{eukl}})$ der **euklidische Raum**.

- (b) Sei M eine beliebige Menge. Dann ist $d : M \times M \rightarrow [0, \infty)$,

$$d(p, q) := \begin{cases} 0 & \text{für } p = q, \\ 1 & \text{für } p \neq q \end{cases}.$$

eine Metrik auf M (Übung). Sie heißt die **diskrete Metrik** auf M .

- (c) Sei $V = \mathcal{C}([0, 1]) := \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ ist stetig}\}$. Setze $\|f\| := \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| < \infty$, und dann $d(f, g) := \|g - f\|$. Dann ist d eine Metrik auf V (Übung).

(1.3) Beispiel. Sei (M, d) metrischer Raum und $A \subseteq M$ beliebige Teilmenge. Dann erbt A durch $d_A : A \times A \rightarrow [0, \infty), d_A(p, q) := d(p, q)$ eine Metrik. Sie heißt die **induzierte Metrik**. Insbesondere: Ist $M \subseteq \mathbb{R}^n$ beliebige Teilmenge, so $d := d_{\text{eukl}}|_{M \times M}$ die **induzierte euklidische Metrik**.

(1.4) Definition. Sei (M, d) ein metrischer Raum, $p \in M, r > 0$.

- (a) Es heißt dann $B(p; r) := \{q \in M : d(q, p) < r\}$ der (offene) **Ball** um p mit **Radius** r .
- (b) Es heißt eine Teilmenge $U \subseteq M$ **offen**, wenn es zu jedem $p \in U$ ein $r > 0$ gibt mit $B(p; r) \subseteq U$.
- (c) Es heißt $S \subseteq M$ eine **Umgebung** von p , wenn es ein offenes $U \subseteq M$ gibt mit $p \in U \subseteq S$.

(1.5) Definition. Seien (M_1, d_1) und (M_2, d_2) metrische Räume.

- (a) Eine Abbildung $\Phi : M_1 \rightarrow M_2$ heißt **stetig** in $p_1 \in M_1$, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass aus $d_1(x, p_1) < \delta$ folgt: $d_2(\Phi(x), \Phi(p_1)) < \varepsilon$.
- (b) Φ heißt **stetig**, wenn Φ stetig ist in $p \in M_1$, für alle $p \in M_1$.

(1.6) Bemerkung. Sei $\Phi : M_1 \rightarrow M_2$ eine Abbildung zwischen metrischen Räumen, $p_1 \in M_1$. Dann gilt:

- (a) Es ist Φ stetig in p_1 genau, wenn für jede Umgebung $S_2 \subseteq M_2$ von $p_2 := \Phi(p_1)$ gilt: $\Phi^{-1}(S_2)$ ist Umgebung von p_1 .
- (b) Es ist Φ stetig, genau wenn das Urbild jeder offenen Menge offen ist.

Beweis. (a) „ \implies “: Sei S_2 Umgebung von p_2 und $U_2 \subseteq M_2$ offen mit $p_2 \in U_2 \subseteq S_2$. Da U_2 offen ist, existiert $\varepsilon > 0$, so dass $B(p_2; \varepsilon) \subseteq U_2$. Da Φ stetig in p_1 ist, existiert nun ein $\delta > 0$ so klein, dass $\Phi(B(p_1; \delta)) \subseteq B(p_2; \varepsilon)$ ist. Also ist

$$B(p_1; \delta) \subseteq \Phi^{-1}\left(\Phi(B(p_1; \delta))\right) \subseteq \Phi^{-1}(B(p_2; \varepsilon)) \subseteq \Phi^{-1}(S_2),$$

und da $B(p_1; \delta)$ offen ist (Übungsaufgabe, Blatt 1), folgt: $\Phi^{-1}(S_2)$ ist Umgebung von p_1 .

„ \impliedby “: Sei $\varepsilon > 0$ und $S_2 := B(p_2; \varepsilon) \implies S_2$ ist Umgebung von p_2 , also ist auch $\Phi^{-1}(S_2)$ Umgebung von $p_1 \implies \exists \delta > 0 : B(p_1; \delta) \subseteq \Phi^{-1}(S_2) \implies$

$$\Phi(B(p_1; \delta)) \subseteq \Phi(\Phi^{-1}(S_2)) \subseteq S_2 = B(p_2; \varepsilon).$$

$\implies \Phi$ ist stetig in p_1 .

(b) Übung (Blatt 1). □

(1.7) Bemerkung. Sei M ein metrischer Raum. Dann gilt:

- (a) Ist $(U_i)_{i \in I}$ beliebige Familie offener Mengen in M , so ist auch $\bigcup_{i \in I} U_i$ offen;
- (b) Ist $n \in \mathbb{N}$, $U_1, \dots, U_n \subseteq M$ offen so ist auch $\bigcap_{i=1}^n U_i$ offen.

Beweis. (a) Sei $p \in U := \bigcup_{i \in I} U_i \implies \exists i_0 \in I : p \in U_{i_0} \implies \exists r > 0 : B(p; r) \subseteq U_{i_0} \subseteq U$.

(b) Sei $p \in U := \bigcap_{i=1}^n U_i \implies \forall i, \exists r_i > 0 : B(p; r_i) \subseteq U_i$. Setze $r := \min_{i=1, \dots, n}(r_i) > 0$. $\implies B(p; r) \subseteq B(p; r_i) \subseteq U_i, \forall i = 1, \dots, n. \implies B(p; r) \subseteq U$. □

(1.8) Kommentar. Stetige Abbildungen $\Phi : M_1 \rightarrow M_2$ zwischen metrischen Räumen sind viel flexibler als **abstandstreue Abbildungen** (d.h.: $\forall p_1, q_1 \in M_1 : d_2(\Phi(p_1), \Phi(q_1)) = d_1(p_1, q_1)$) z.B. ist für $S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ und $\mathbb{E} := \{x \in \mathbb{R}^3 : (\frac{x_1}{a_1})^2 + (\frac{x_2}{a_2})^2 + (\frac{x_3}{a_3})^2 = 1\}$ ($a_1, a_2, a_3 > 0$) die Abbildung $\Phi : S^2 \rightarrow \mathbb{E}$, $\Phi(x) = (a_1 x_1, a_2 x_2, a_3 x_3)$ bijektiv, stetig und auch Φ^{-1} ist stetig, aber Φ ist im allgemeinen nicht abstandstreu. Man sagt, S^2 und \mathbb{E} haben *die gleiche Gestalt*, $S^2 \simeq \mathbb{E}$. Um Räume zunächst auf ihre bloße Gestalt zu untersuchen, führt man das Konzept der topologischen Räume ein.

(1.9) Definition. Sei M eine Menge. Ein System τ von Teilmengen von M , $\tau \subseteq \mathfrak{P}(M)$ ($\mathfrak{P}(M) :=$ Potenzmenge von M) heißt eine **Topologie** auf M , wenn gilt:

- (a) Ist I eine beliebige (Index-) Menge und $U_i \in \tau$, so ist auch $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$, die leere Menge $\emptyset \in \tau$.
- (b) Ist $n \in \mathbb{N}$ und sind $U_1, \dots, U_n \in \tau$, so ist auch $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \tau$, die volle Teilmenge $M \in \tau$.

Man nennt $U \subseteq M$ dann **offen**, wenn $U \in \tau$. Das Paar (M, τ) heißt dann ein **topologischer Raum**.

(1.10) Beispiel.

- (a) Sei (M, d) ein metrischer Raum. Dann ist das System $\tau \subseteq \mathfrak{P}(M)$ aller offenen Teilmengen von M eine Topologie auf M (siehe (1.7)). Man nennt dies die von der Metrik **induzierte Topologie** auf M .
- (b) Sei M eine beliebige Menge und τ die volle Potenzmenge, $\tau = \mathfrak{P}(M)$. Dann ist τ eine Topologie auf M . Sie heißt die **diskrete Topologie** auf M .
- (c) Sei M eine beliebige Menge und $\tau = \{\emptyset, M\}$. Es heißt dann τ die **indiskrete Topologie** auf M .

(1.11) Definition. Sei (M, τ) ein topologischer Raum.

- (a) Eine Teilmenge $A \subseteq M$ heißt **abgeschlossen**, wenn das Komplement $\complement A = M \setminus A$ offen ist;
- (b) Sei $p \in M$. Eine Teilmenge $S \subseteq M$ heißt **Umgebung** von p , wenn es ein offenes $U \subseteq M$ gibt mit

$$p \in U \subseteq S.$$

(1.12) Definition. Seien M und N topologische Räume und $\Phi : M \rightarrow N$ eine Abbildung.

- (a) Es heißt Φ **stetig** in p , wenn das Urbild jeder Umgebung von $\Phi(p)$ eine Umgebung von p ist;
- (b) es heißt Φ **stetig**, wenn das Urbild jeder offenen Menge offen ist;
- (c) es heißt Φ ein **Homöomorphismus**, wenn Φ stetig ist und es ein stetiges $\Psi : N \rightarrow M$ gibt mit

$$\Psi \circ \Phi = \mathbb{1}_M, \Phi \circ \Psi = \mathbb{1}_N$$

($\mathbb{1}_M$ bezeichnet die Identität auf M , $\mathbb{1}_M(p) = p, \forall p \in M$). M und N heißen **homöomorph**, $M \simeq N$, wenn es einen Homöomorphismus zwischen ihnen gibt.

(1.13) Kommentar. Es ist $\Phi : M \rightarrow N$ stetig, genau wenn Φ stetig in jedem Punkt $p \in M$ ist (Übung).

(1.14) Kommentar.

- (a) Ist (M, d) ein metrischer Raum und $\tau \subseteq \mathfrak{P}(M)$ die induzierte Topologie, so gibt es viele andere Metriken \tilde{d} , die die gleiche Topologie induzieren, z.B. $\tilde{d} = \alpha \cdot d$ ($\alpha > 0$).
- (b) Ist umgekehrt (M, τ) ein topologischer Raum, so heißt (M, τ) **metrisierbar**, wenn es eine Metrik d auf M gibt, so dass τ von d induziert ist.

(1.15) Definition. Man nennt einen topologischen Raum M **hausdorffsch**, wenn er folgendes **Trennungsaxiom** erfüllt: zu je zwei verschiedenen Punkten $p, q \in M, p \neq q$, existieren offene Mengen $U, V \subseteq M$ mit $p \in U, q \in V$ und $U \cap V = \emptyset$.

(1.16) Bemerkung. Ist (M, d) ein metrischer Raum, so ist ihre induzierte Topologie hausdorffsch.

Beweis. Seien $p, q \in M$, $p \neq q$ und $d := d(p, q) > 0$. Wähle dann $U := B(p; \frac{d}{2})$, $V := B(q; \frac{d}{2})$. Dann ist U und V offen, $p \in U$, $q \in V$ und auch $U \cap V = \emptyset$, denn wäre $x \in U \cap V$, so wäre

$$d = d(p, q) \leq d(p, x) + d(x, q) = d(x, p) + d(x, q) < \frac{d}{2} + \frac{d}{2} = d \quad \blacksquare$$

(1.17) Definition.

(a) Sei (M, τ) ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $\mathfrak{B} \subseteq \tau$ heißt ein **Basis** der Topologie, wenn jede offene Menge U Vereinigung von Elementen aus \mathfrak{B} ist,

$$U = \bigcup_{\substack{B \in \mathfrak{B} \\ B \subseteq U}} B.$$

(b) Es heißt (M, τ) von **abzählbarer Topologie**, wenn M eine abzählbare Basis besitzt.

(1.18) Beispiel. Der euklidische Raum $\mathbb{E}^n := (\mathbb{R}^n, d_{\text{eukl}})$ hat abzählbare Topologie, denn

$$\mathfrak{B} = \left\{ B(q; \frac{1}{n}) : q \in \mathbb{Q}^n, n \in \mathbb{N} \right\}$$

ist eine abzählbare Basis (Übung).

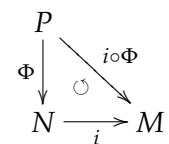
(1.19) Definition. Ist (M, τ) ein topologischer Raum und $N \subseteq M$ eine Teilmenge. Wir definieren die **Relativtopologie** (oder auch **induzierte Topologie** oder **Teilraumtopologie**) auf N wie folgt: $V \subseteq N$ ist offen genau dann, wenn es ein $U \subseteq M$, $U \in \tau$ gibt mit $U \cap N = V$.

(1.20) Kommentar.

(a) Sei (M, τ) topologischer Raum und $N \subseteq M$ mit der Relativtopologie versehen. Dann ist die **Inklusion** $i : N \rightarrow M$, $i(p) = p$ stetig. Die Relativtopologie ist die **größte Topologie** auf N , so dass i stetig ist.

(b) Eine Topologie τ_1 auf N heißt **größer** als ein Topologie τ_2 auf N , wenn $\tau_1 \subseteq \tau_2$ (und τ_2 heißt dann **feiner** als τ_1). Man beachte: Ist τ_1 **echt größer** als τ_2 , d.h.: $\tau_1 \subsetneq \tau_2$, so ist die Identität $\mathbb{1} : (N, \tau_2) \rightarrow (N, \tau_1)$ stetig und bijektiv, ihre Umkerung $\mathbb{1}^{-1} = \mathbb{1} : (N, \tau_1) \rightarrow (N, \tau_2)$ aber nicht stetig.

(c) Die Relativtopologie hat folgende **universelle Eigenschaft**: Ist P ein topologischer Raum und $\Phi : P \rightarrow N$ eine Abbildung, so ist Φ genau dann stetig, wenn $i \circ \Phi : P \rightarrow M$ stetig ist (Übung).



(d) Ist M ein Hausdorffraum und $N \subseteq M$ eine Teilmenge, so ist die Teilraumtopologie auf N auch hausdorfsch.

(e) Ist M von abzählbarer Topologie, so auch N . Insbesondere ist also jede Teilmenge M des euklidischen Raumes \mathbb{E}^n ($n \in \mathbb{N}$) mit ihrer induzierten Topologie hausdorfsch und von abzählbarer Topologie.

(1.21) Beispiel. Sei \mathbb{R}^n mit der Standard-Topologie versehen. Wir nennen

$$B^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$$

(1.26) Beispiel.

- (a) Die Produkttopologie auf $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}^n$ (wo \mathbb{R} die Standard-Topologie trage) stimmt mit der Standard-Topologie überein (Übung).
- (b) Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichnet man mit

$$\mathbb{T}^n := \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$$

(zusammen mit der Produkttopologie) als den **n-dimensionalen Torus**.

(1.27) Definition. Sei M ein topologischer Raum, $R \subseteq M \times M$ eine Äquivalenz-Relation ($(p, q) \in R \iff p \sim_R q$), $[p] := \{q \in M : p \sim q\}$ eine Äquivalenz-Klasse und

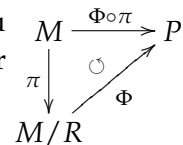
$$M/R = \{[p] \subseteq \mathfrak{P}(M) : p \in M\}$$

die Quotientenmenge. Bezeichne $\pi : M \rightarrow M/R, p \mapsto [p]$, die kanonische Projektion. Eine Teilmenge $U \subseteq M/R$ heißt *offen*, wenn $\pi^{-1}(U) \subseteq M$ offen.

(1.28) Kommentar.

- (a) Die so definierten offenen Mengen bilden eine Topologie auf M/R .
- (b) Sie ist die **feinste** Topologie auf M , so dass π stetig ist.

- (c) Für einen topologischen Raum P ist eine Abbildung $\Phi : M/R \rightarrow P$ genau dann stetig, wenn $\Phi \circ \pi : M \rightarrow P$ es ist (universelle Eigenschaft der **Quotienten-Topologie**). (Übung)



(1.29) Beispiel.

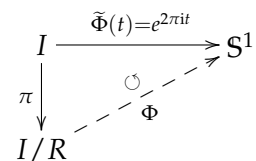
- (a) Sei $I = [0, 1]$ (mit der induzierten Topologie) und $R \subseteq I \times I$ die von $(0, 1)$ erzeugte Äquivalenz-Relation (d.h.: die kleinste, die $(0, 1)$ enthält), also

$$R = \{(0, 1), (1, 0), (p, p) : p \in I\}.$$

Dann ist $I/R \simeq \mathbb{S}^1$ vermöge

$$I/R \rightarrow \mathbb{S}^1, \Phi([t]) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$

ein Homöomorphismus (Übung).



- (b) Sei R auf $M = I \times I$ die von $(0, t) \sim (1, t)$ und $(s, 0) \sim (s, 1)$ erzeugte Äquivalenz-Relation. Dann ist

$$\Phi : M/\sim \rightarrow \mathbb{T}^2 \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{C}, \Phi([s, t]) = (e^{2\pi i s}, e^{2\pi i t})$$

ein Homöomorphismus.

- (c) Sei R die Äquivalenz-Relation auf $M = I \times I$, die von $(0, t) \sim (1, t)$ erzeugt wird. Dann nennt man $Z := M/\sim$ den **Zylinder**.
- (d) Sei nun R auf $M = I \times I$ von $(0, t) \sim (1, 1 - t)$ erzeugt. Dann nennt man $M = X/\sim$ das **Möbiusband**.

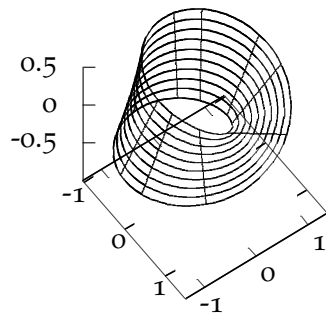


Abbildung 1.1.: Möbiusband

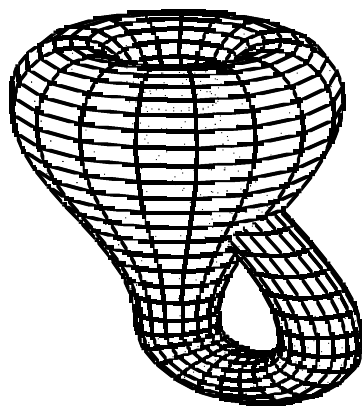


Abbildung 1.2.: kleinsche Flasche

(e) Sei schließlich R auf $M = I \times I$ von $(0, t) \sim (1, t)$ und $(s, 0) \sim (1 - s, 1)$ erzeugt. Dann heißt $K = M/\sim$ die **Kleinsche Flasche**.

(1.30) Definition. Seien $p, q \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ äquivalent, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gibt mit $q = \lambda p$. Der Quotientenraum

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) := (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$$

heißt der n -dimensionale (reell-) **projektive Raum**.

(1.31) Kommentar.

(a) Für einen Punkt $[p] \in \mathbb{P}^n$ schreibt man häufig

$$[p] = (p_0 : p_1 : \dots : p_n),$$

weil der Repräsentant $(p_0, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ bis auf ein multiplikatives Inverses eindeutig ist. Die Abbildung $j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$,

$$x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto (1 : x_1 : \dots : x_n)$$

ist eine **Einbettung** (d.h.: $\mathbb{R}^n \rightarrow j(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathbb{P}^n$ ist ein Homöomorphismus). Die Teilmenge

$$H := \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n : x_0 = 0\},$$

also $H = \mathbb{P}^n \setminus j(\mathbb{R}^n)$ wird als **unendlich ferne Hyperebene** bezeichnet.

(b) Identifiziert man auf S^n **Antipoden**, $x \sim \pm x$, so ist $\mathbb{P}^n \simeq S^n / \sim$ vermöge

$$[x] \mapsto \left[\frac{x}{\|x\|} \right] \quad (\text{Übung}).$$

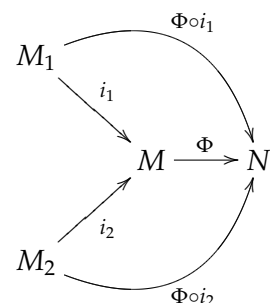
(1.32) Vorbereitung. Seien M_1 und M_2 Mengen. Dann gibt es (bis auf Isomorphie) genau eine Menge M zusammen mit injektiven Abbildungen $i_1 : M_1 \rightarrow M$, $i_2 : M_2 \rightarrow M$, so dass $M = i_1(M_1) \sqcup i_2(M_2)$ (d.h.: $i_1(M_1) \cap i_2(M_2) = \emptyset$). Diese Menge wird im folgenden mit $M_1 + M_2$ bezeichnet.

(1.33) Definition. Seien M_1 und M_2 topologische Räume und $M = M_1 + M_2$ ihre mengentheoretische Summe mit ihren natürlichen Inklusionen $i_j : M_j \rightarrow M$ ($j = 1, 2$). Wir nennen dann $U \subseteq M$ **offen**, wenn $i_j^{-1}(U) \subseteq M_j$ offen ist.

(1.34) Kommentar.

(a) Die so definierten offenen Mengen bilden eine Topologie auf M . Sie heißt die **Summentopologie** und ist die feinste Topologie auf M , so dass $i_j : M_j \rightarrow M$ stetig ist ($j = 1, 2$).

(b) Ist N ein weiterer topologischer Raum und $\Phi : M_1 + M_2 \rightarrow N$ eine Abbildung, so ist Φ stetig genau dann wenn $\Phi \circ i_j : M_j \rightarrow N$ stetig ist ($j = 1, 2$). (Übung)



(1.35) Beispiel. Seien M und N topologische Räume, $p \in M$ und $q \in N$. Identifiziert man p mit q in $M + N$, so nennt man $M + N / \sim$ die **Einpunktvereinigung** von M und N (entlang p und q) und schreibt

$$M \vee N := M + N / \sim .$$

Zum Beispiel ist $S^1 \vee S^1$ die Figur "Acht".

(1.36) Definition. Ein topologischer Raum M heißt **zusammenhängend**, wenn folgendes gilt: Sind $U, V \subseteq M$ offen mit $U \cup V = M$ und $U \cap V = \emptyset$, so muss $U = \emptyset$ oder $V = \emptyset$ gelten.

(1.37) Kommentar.

- (a) Ein Raum M ist also genau dann zusammenhängend, wenn die einzigen Teilmengen von M , die zugleich offen und abgeschlossen sind, nur die leere Menge \emptyset und die volle Menge sind.
- (b) Ein topologischer Raum ist zusammenhängend, wenn er nicht homöomorph zu der topologischen Summe $U + V$ zweier nicht-leerer Teilräume $U, V \subseteq M$ ist (Übung).

(1.38) Beispiel. Das abgeschlossene Intervall $I = [0, 1]$ ist zusammenhängend.

Beweis. Sei $I = U \sqcup V$ mit $U \neq \emptyset \neq V$ und setze $a := \sup(U)$, $b := \sup(V)$ (Vollständigkeit von \mathbb{R} !). Da $U \subseteq I$ abgeschlossen, $I \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen $\implies U \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen $\implies a \in U$. Weil U offen ist $\implies a = 1$; genau so $b = 1 \implies U \cap V \neq \emptyset \implies I$ ist zusammenhängend. □

(1.39) Proposition. Seien M und N topologischer Raum, $\Phi : M \rightarrow N$ stetig. Ist M zusammenhängend, so auch $\Phi(M) \subseteq N$.

Beweis. O.E.: Φ surjektiv (sonst betrachte $\Phi' : M \rightarrow \Phi(M)$ mit $\Phi'(p) := \Phi(p)$). Seien nun $V_1, V_2 \subseteq N$ offen mit $N = V_1 \sqcup V_2$. $\implies M = \Phi^{-1}(V_1) \sqcup \Phi^{-1}(V_2) \implies \Phi^{-1}(V_1) = \emptyset$ oder $\Phi^{-1}(V_2) = \emptyset$. Da Φ surjektiv ist, muss also $V_1 = \emptyset$ oder $V_2 = \emptyset$, also: N zusammenhängend. □

(1.40) Definition. Sei M ein topologischer Raum.

- (a) Ein **Weg in M** ist eine stetige Abbildung $\alpha : I \rightarrow M$, $I = [0, 1]$. Es heißt $\alpha(0)$ der **Anfangspunkt** von α und $\alpha(1)$ der **Endpunkt** von α .
- (b) M heißt **wegzusammenhängend**, wenn es zu beliebigen $p, q \in M$ einen Weg α in M gibt mit $\alpha(0) = p$ und $\alpha(1) = q$.

(1.41) Beispiel. $M = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist nicht wegzusammenhängend (Zwischenwertsatz).

(1.42) Bemerkung. Ist M wegzusammenhängend, so auch zusammenhängend.

Beweis. Sei $M = U \sqcup V$ mit $U, V \subseteq M$ offen, $U \neq \emptyset \neq V$. Wähle $p \in U$, $q \in V$ und einen Weg $\alpha : I \rightarrow M$ von p nach q . $\implies I = \alpha^{-1}(U) \sqcup \alpha^{-1}(V) \implies$ da I zusammenhängend ist muss $\alpha^{-1}(U) = \emptyset$ oder $\alpha^{-1}(V) = \emptyset$: \blacktriangleright , da $0 \in \alpha^{-1}(U)$, $1 \in \alpha^{-1}(V)$. □

(1.43) Beispiel. Der Teilraum

$$M = \left\{ \left(t, \sin \frac{1}{t} \right) \in \mathbb{R}^2 : t > 0 \right\} \sqcup \left\{ (0, y) : y \in [-1, 1] \right\}$$

ist zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend (Übung).

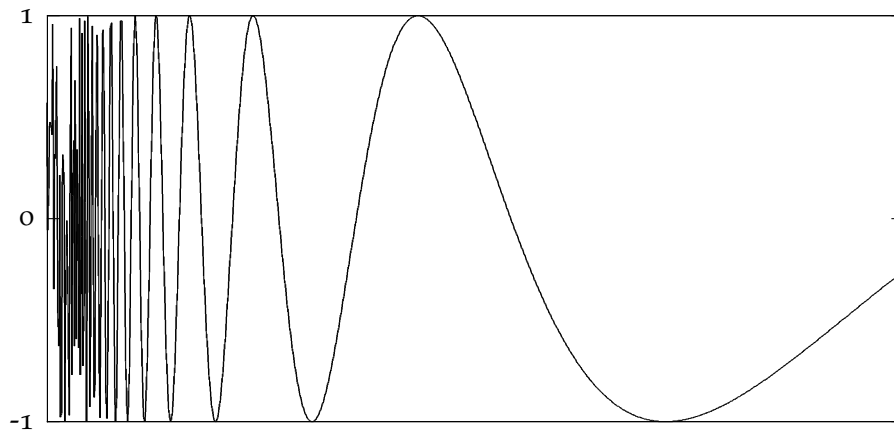


Abbildung 1.3.: Sinuskurve der Topologen

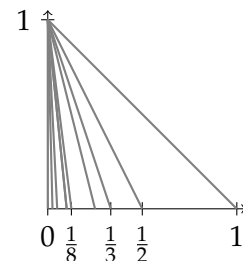
(1.44) Definition. Sei M ein topologischer Raum und $p \in M$. Das System aller Umgebungen wird mit $\mathfrak{A}(p) \subseteq \mathfrak{P}(M)$ bezeichnet. Man nennt nun ein Teilsystem $\mathfrak{B}(p) \subseteq \mathfrak{A}(p)$ eine **Umgebungsbasis von p** , wenn es zu jedem $S \in \mathfrak{A}(p)$ ein $B \in \mathfrak{B}(p)$ gibt mit $B \subseteq S$.

(1.45) Definition. Ein topologischer Raum heißt **lokal wegzusammenhängend**, wenn jeder Punkt $p \in M$ eine Umgebungsbasis aus wegzusammenhängenden Mengen besitzt.

(1.46) Kommentar.

- (a) Ein lokal wegzusammenhängender Raum braucht nicht wegzusammenhängend sein. Beispiel: $M = \mathbb{R}^*$.
- (b) Ein wegzusammenhängender Raum braucht auch nicht lokal wegzusammenhängend zu sein. Beispiel: (Übung)

$$M = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{\begin{pmatrix} 1/n \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \sqcup \overline{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \quad (\overline{pq} = \text{Strecke von } p \text{ nach } q)$$



(1.47) Proposition. Sei M lokal wegzusammenhängend. Dann gilt: M zusammenhängend $\iff M$ wegzusammenhängend.

Beweis. „ \Leftarrow “: Siehe (1.45).

„ \Rightarrow “: Sei $p \in M$ und $U := U(p)$ die **Wegkomponente von p** , d.h.:

$$U(p) := \{x \in M : \exists \text{Weg von } p \text{ nach } x\}$$

(also die größte wegzusammenhängende Teilmenge von M , die p enthält). Es ist U offen, denn sei $x \in U$. Sei $V \in \mathfrak{A}(x)$, V wegzusammenhängend $\implies V \subseteq U$. Klar ist weiter: Für $q \in M$ ist entweder $U(p) = U(q)$ oder $U(p) \cap U(q) = \emptyset$.

$$\implies M = \underbrace{U(p)}_{\text{offen}} \sqcup \underbrace{\bigcup_{q \notin U(p)} U(q)}_{\text{offen}}.$$

$\implies M = U(p) \implies M$ ist wegzusammenhängend. □

(1.48) Beispiel. $\mathbb{R}^n \not\cong \mathbb{R}$ für $n \geq 2$.

Beweis. Angenommen $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist Homöomorphismus $\implies \Psi := \Phi|_{\mathbb{R}^*} : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^* \setminus \{\Phi(0)\}$ ist auch Homöomorphismus. Aber \mathbb{R}^* ist nicht (weg-) zusammenhängend, $\mathbb{R}^n \setminus \{p\}$ ($p = \Phi(0)$) für $n \geq 2$ aber wohl: \blacktriangleright . □

(1.49) Definition. Sei M ein topologischer Raum.

- (a) Eine Familie $(U_i)_{i \in I}$ von Teilmengen von M heißt eine **offene Überdeckung** von M , wenn alle U_i offen sind ($i \in I$) und $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ ist.
- (b) Es heißt M **kompakt**, wenn M hausdorffsch und jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung hat.

(1.50) Kommentar.

- (a) Ist M ein topologischer Raum, $N \subseteq M$ und $(U_i)_{i \in I}$ Familie offener Mengen von M mit $N \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$, so spricht man auch von einer offenen Überdeckung von N . Es ist ja dann $V_i := U_i \cap N$ offen in N und $(V_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von N im Sinne von (1.49).
- (b) Durch Komplementbildung kann man eine äquivalente Beschreibung der kompakten Räumen so bekommen: M ist hausdorffsch und ist $(A_i)_{i \in I}$ Familie abgeschlossener Teilmengen mit $\bigcap_{i \in I} A_i = \emptyset$, so gibt es $i_1, \dots, i_n \in I$, so dass $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n} = \emptyset$ ist.

(1.51) Proposition. Seien M und N Hausdorff-Räume und $\Phi : M \rightarrow N$ stetig. Ist M kompakt, so auch $\Phi(M)$.

Beweis. O.E.: Φ ist surjektiv, $\Phi(M) = N$. Sei $N = \bigcup_{i \in I} V_i$, $V_i \subseteq N$ offen. $\implies M = \bigcup_{i \in I} \Phi^{-1}(V_i) \implies \exists i_1, \dots, i_n \in I$:

$$M = \bigcup_{j=1}^n \Phi^{-1}(V_{i_j}) \implies N = \bigcup_{j=1}^n V_{i_j}. \quad \square$$

(1.52) Lemma.

- (a) Sei M ein kompakter topologischer Raum und $A \subseteq M$ abgeschlossen. Dann ist auch A kompakt.
- (b) Sei M ein Hausdorff-Raum und $K \subseteq M$ kompakt. Dann ist K abgeschlossen.

Beweis. **Zu (a):** Sei $A_i \subseteq A$ abgeschlossen, $i \in I$ und $\bigcap_{i \in I} A_i = \emptyset$. Da A abgeschlossen $\implies A_i \subseteq M$ abgeschlossen in $M \implies \exists i_1, \dots, i_n \in I : \bigcap_{j=1}^n A_{i_j} = \emptyset$, also A kompakt.

Zu (b): Sei $p \in \mathbb{C}K = M \setminus K$. Zu $x \in K$ wähle offene Mengen $U_x \in \mathfrak{A}(x)$, $V_x \in \mathfrak{A}(p)$ mit $U_x \cap V_x = \emptyset$. Weil $K = \bigcup_{x \in K} U_x \implies \exists x_1, \dots, x_n \in K : K \subseteq U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}$. Setze $V := V_{x_1} \cap \dots \cap V_{x_n} \implies V \in \mathfrak{A}(p)$ und $V \cap K = \emptyset \implies \mathbb{C}K$ ist offen, also K abgeschlossen. □

(1.53) Kommentar. In einem kompakten Raum ist eine Teilmenge also genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen ist.

(1.54) Proposition. Sei M ein kompakter Raum und N hausdorffsch. Ist dann $\Phi : M \rightarrow N$ stetig und bijektiv, so ist Φ bereits ein Homöomorphismus.

Beweis. Zeige: $A \subseteq M$ abgeschlossen impliziert $\Phi(A)$ abgeschlossen ($\implies \forall U \subseteq M$ offen: $\Phi(U) \subseteq N$ offen $\implies \Phi^{-1}$ ist stetig, also Φ Homöomorphismus). Sei $A \subseteq M$ abgeschlossen. Mit (1.51,a) ist A kompakt und mit (1.50) folgt, dass auch $\Phi(A)$ kompakt. Mit (1.51,b) gilt, dass auch $\Phi(A) \subseteq N$ abgeschlossen ist. □

(1.55) Definition. Sei M ein topologischer Raum und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in M . Ein Punkt $p \in M$ heißt **Häufungspunkt** von (x_n) , wenn in jeder Umgebung von p unendlich viele Folgenglieder liegen.

(1.56) Lemma. Ein Punkt $p \in M$ ist Häufungspunkt von (x_n) genau dann, wenn er im Abschluss aller Endstücke der Folge liegt.

Beweis. Sei $E_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\} \subseteq M$ ($n \in \mathbb{N}$) Endstück.

„ \implies “: Sei p Häufungspunkt und $S \in \mathfrak{A}(p)$ beliebig. $\implies S \cap E_n \neq \emptyset \implies p \in \overline{E_n}, \forall n \in \mathbb{N} \implies p \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{E_n}$.

„ \impliedby “: Sei $p \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{E_n}$ und $S \in \mathfrak{A}(p) \implies S \cap E_n \neq \emptyset \implies S \cap E_1$ hat unendlich viele Folgenglieder, d.h.: p ist Häufungspunkt. \square

(1.57) Proposition. Sei M ein Hausdorff-Raum mit abzählbarer Topologie. Dann gilt: M ist genau dann kompakt, wenn jede Folge in M einen Häufungspunkt hat.

Beweis. „ \implies “: (x_n) sei Folge, $E_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$ Endstück. Für endlich viele $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ ist stets $\bigcap_{j=1}^k E_{n_j} \neq \emptyset$, erst recht $\bigcap_{j=1}^k \overline{E_{n_j}} \neq \emptyset \implies$ (Kompaktheit) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{E_n} \neq \emptyset \implies \exists$ Häufungspunkt von (x_n) .

„ \impliedby “: Sei $(U_i)_{i \in I}$ offene Überdeckung von M . Sei $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ Basis der Topologie von M . Sei

$$J := \{k \in \mathbb{N} : \exists i_k \in I : B_k \subseteq U_{i_k}\}, \quad J = \{n_1, n_2, n_3, \dots\}.$$

$\implies M = \bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{k \in J} B_k$, erst recht: $M = \bigcup_{k \in J} U_{i_k} = \bigcup_{j=1}^{\infty} U_{i_{n_j}}$. Also: Es existiert eine abzählbare Teilüberdeckung. O.B.d.A. sei daher: $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n, U_n \subseteq M$ offen. Setze

$$V_n := U_1 \cup \dots \cup U_n.$$

Angenommen: Es gibt keine endliche Teilüberdeckung $\implies \mathbb{C}V_n \neq \emptyset$; wähle $x_n \in \mathbb{C}V_n$. Sei p Häufungspunkt von $(x_n) \implies \exists m \in \mathbb{N} : p \in U_m \subseteq V_m \implies V_m \in \mathfrak{A}(p)$, aber $x_n \notin V_m, \forall n \geq m$, also p kein Häufungspunkt von (x_n) \blacktriangleright . Es muss also doch eine endliche Teilüberdeckung existieren, also: M kompakt. \square

(1.58) Proposition (Tychonoff). Sei I abzählbar (oder endlich) und $(X_i)_{i \in I}$ Familie von Hausdorff-Räumen mit abzählbarer Topologie. Das Produkt $M = \prod_{i \in I} M_i$ ist kompakt genau dann, wenn M_i kompakt ist, $\forall i \in I$.

Beweis. M_k Hausdorffsch und hat abzählbare Topologie. Also ist auch $\prod M_k$ Hausdorff-Raum mit abzählbarer Topologie.

„ \implies “: M kompakt. Die kanonische Projektion $\pi_k : M \rightarrow M_k$ ist stetig und surjektiv. Damit ist auch $\pi(M) = M_k$ kompakt.

„ \impliedby “: Sei $(x^{(0,n)})_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in $M \implies (x_1^{(0,n)})_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in $M_1 \implies \exists$ Teilfolge $(x^{(1,n)})_{n \in \mathbb{N}}$ von $(x^{(0,n)})_{n \in \mathbb{N}}$: $(x_1^{(1,n)})_{n \in \mathbb{N}}$ in M_1 gegen p_1 konvergent. $\implies \exists$ Teilfolge $(x^{(2,n)})_{n \in \mathbb{N}}$ von $(x^{(1,n)})_{n \in \mathbb{N}}$: $(x_2^{(2,n)})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent in M_2 , sagen wir p_2 usw. Ist I endlich, $I = \{1, \dots, N\}$, so konvergiert $(x^{(N,n)})_{n \in \mathbb{N}}$ in M (gegen $p = (p_1, p_2, \dots, p_N)$). Ist $I = \mathbb{N}$, so konvergiert die Folge $(x^{(n,n)})_{n \in \mathbb{N}}$ in M gegen (p_1, p_2, \dots) . Also ist M kompakt. \square

(1.59) Beispiel.

(a) Sei $M = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Nach Bolzano-Weierstraß hat jede Folge in M einen Häufungspunkt ist also kompakt.

(b) Sei $Q = [-R, R]^n \subseteq \mathbb{R}^n$. Wegen Tychonoff ist Q kompakt.

(1.60) Proposition (Heine-Borel). *Eine Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) ist kompakt, genau wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

Beweis. „ \implies “: \mathbb{R}^n hausdorffsch, $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt. Mit (1.51,b) ist K abgeschlossen. $K \subseteq \mathbb{R}^n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B(0; n) \implies \exists n_1, \dots, n_k : K \subseteq K \subseteq B(0; n_1) \cup \dots \cup B(0; n_k)$. Setze $R := \max\{n_1, \dots, n_k\} \implies K \subseteq B(0; R) \implies K$ ist beschränkt.

„ \impliedby “: Sei K beschränkt. Also gibt es ein $R > 0 : K \subseteq [-R, R]^n = Q$ und Q kompakt; $K \subseteq Q$ abgeschlossen, also folgt mit (1.52,a), dass K kompakt ist. \square

2

Kapitel 2.

Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

(2.1) Definition. Sei $n \in \mathbb{N}$. Ein Hausdorff-Raum mit abzählbarer Topologie M heißt eine **n -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit**, wenn jeder Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung besitzt, die homöomorph zu einer offenen Teilmenge des \mathbb{R}^n ist.

(2.2) Kommentar.

- (a) Man kann also eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension n (manchmal auch mit M^n notiert) mit einer Familie $(U_i)_{i \in I}$ offener Teilmengen überdecken, die homöomorph zu offenen Teilmengen $V_i \subseteq \mathbb{R}^n$ sind, $U_i \simeq V_i$,

$$M = \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Man nennt dann eine Familie von Homöomorphismen

$$\mathfrak{A} = (\varphi_i : U_i \xrightarrow{\simeq} V_i)_{i \in I}$$

einen (topologischen) **Atlas** für M . Die Mitglieder $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i$ heißen **Karten** und ihre Umkehrungen $\varphi_i^{-1} : V_i \rightarrow U_i$ heißen **lokale Koordinatensysteme** auf M .

- (b) Ist M^n eine topologische Mannigfaltigkeit und $\mathfrak{A} = (\varphi_i : U_i \rightarrow V_i)_{i \in I}$ ein topologischer Atlas, so nennt man für jedes Paar $(i, j) \in I \times I$ (mit $U_i \cap U_j \neq \emptyset$) die Abbildung

$$\varphi_{ij} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j), \quad \varphi_{ij}(x) := \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(x),$$

eine **Übergangsfunktion** des Atlas \mathfrak{A} .

- (c) Lokal ist also eine topologische Mannigfaltigkeit etwas Wohlbekanntes, global kann M^n sehr kompliziert sein. Ist $\mathfrak{A} = (\varphi_i : U_i \rightarrow V_i)$ ein topologischer Atlas mit Übergangsfunktionen (φ_{ij}) , so kann man sich M^n als (zunächst disjunkte) Vereinigung der offenen Mengen $V_i \subseteq \mathbb{R}^n$ vorstellen, bei denen man die Teilmengen $V_{ij} := \varphi_i(U_i \cap U_j) \subseteq V_i$ vermöge $\varphi_{ij} : V_{ji} \rightarrow V_{ij}$ „zusammenklebt“:

(2.3) Bemerkung. Sei M^n eine topologische Mannigfaltigkeit, $\mathfrak{A} = (\varphi_i : U_i \rightarrow V_i)_{i \in I}$ ein topologischer Atlas mit Übergängen $(\varphi_{ij} : V_{ji} \rightarrow V_{ij})$. Auf der topologischen Summe $\tilde{Q} := \sum_{i \in I} V_i$ definiere man eine Äquivalenzrelation durch

$$\iota_i(x_i) \sim \iota_j(x_j) : \iff x_i = \varphi_{ij}(x_j)$$

(für $\iota_k : V_k \rightarrow \tilde{Q}$ die kanonischen Inklusionen, $x_k \in V_k$, $k \in I$). Dann gilt, dass der Quotientenraum $Q := \tilde{Q} / \sim$ homöomorph zu M ist.

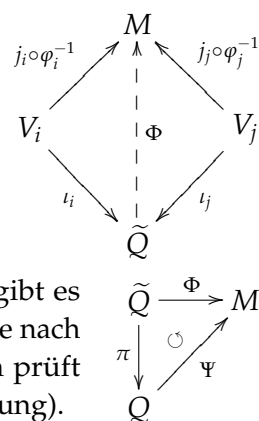
Beweis. Sei $j_k : U_k \hookrightarrow M$ die Inklusion $k \in I$. Dann induzieren die Abbildungen $j_k \circ \varphi_k^{-1} : V_k \rightarrow M$ eine (eindeutig bestimmte) Abbildung $\Phi : \tilde{Q} \rightarrow M$ mit $\Phi \circ \iota_k = j_k \circ \varphi_k^{-1}$, welche nach der universellen Eigenschaft der Summentopologie stetig ist. Ist nun $\iota_i(x_i) \sim \iota_j(x_j)$, so ist

$$\Phi(\iota_i(x_i)) = j_i \circ \varphi_i^{-1}(x_i) = \varphi_i^{-1}(x_i) =$$

$$\varphi_i^{-1}(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(x_j)) = \varphi_j^{-1}(x_j) = (j_j \circ \varphi_j^{-1})(x_j) = \Phi(\iota_j(x_j)).$$

Ist daher $Q = \tilde{Q} / \sim$ und $\pi : \tilde{Q} \rightarrow Q$ die kanonische Projektion, so gibt es eine eindeutig bestimmte Abbildung $\Psi : Q \rightarrow M$ mit $\Psi \circ \pi = \Phi$, welche nach der universellen Eigenschaft der Quotiententopologie stetig ist. Man prüft nun leicht nach, dass Ψ surjektiv, injektiv und auch Ψ^{-1} stetig ist (Übung).

Also ist Ψ ein Homöomorphismus. □



(2.4) Beobachtung. Ist M^n eine topologische Mannigfaltigkeit, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ und $p \in M$, so ist offenbar f genau dann stetig in p , wenn $f|_U \circ \varphi^{-1} : V \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in $x_0 = \varphi(p) \in V \subseteq \mathbb{R}^n$ für eine Karte $\varphi : U \rightarrow V$ um p ist, denn:

$$\begin{aligned} f \text{ stetig in } p &\iff f|_U \text{ stetig in } p \\ &\iff f|_U \circ \varphi^{-1} \text{ stetig in } x_0 \text{ (denn } \varphi \text{ ist ja Homöomorphismus).} \end{aligned}$$

Ist nun $\mathfrak{A} = (\varphi_i : U_i \rightarrow V_i)_{i \in I}$ ein topologischer Atlas, $p \in U_i \cap U_j$ und φ_{ij} der Übergang bzgl. (i, j) , so ist für $x \in V_{ji} := \varphi_j(U_i \cap U_j)$:

$$f \circ \varphi_i^{-1}(x) = f \circ \varphi_i^{-1} \circ \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(x) = (f \circ \varphi_i^{-1}) \circ \varphi_{ij}(x),$$

und deshalb (natürlich) $f|_{U_j} \circ \varphi_j^{-1} : V_j \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in $x_j = \varphi_j(p)$ genau dann wenn $f|_{U_i} \circ \varphi_i^{-1} : V_i \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in $x_i = \varphi_i(p)$ ist, denn $\varphi_{ij} : V_{ji} \rightarrow V_{ij}$ ist ja Homöomorphismus. Beachte nun: Für $f|_{U_i} \circ \varphi_i^{-1} : V_i \rightarrow \mathbb{R}$ macht es auch Sinn darüber zu sprechen, dass diese Abbildung **differenzierbar** in x_i ist und diese Beobachtung wäre bei Vorgabe von \mathfrak{A} unabhängig von der Wahl der Karte, in der p liegt, wenn alle Übergänge $(\varphi_{ij} : V_{ji} \rightarrow V_{ij})$ nicht nur Homöomorphismen wären, sondern sogar Diffeomorphismen sind! Deshalb:

(2.5) Definition. Sei M^n eine topologische Mannigfaltigkeit.

- (a) Man nennt einen (topologischen) Atlas $\mathfrak{A} = (\varphi_i)$ von M **differenzierbar**, wenn alle seine Übergänge φ_{ij} differenzierbar sind.
- (b) Zwei differenzierbare Atlanten $\mathfrak{A} = (\varphi_i)_{i \in I}$ und $\mathfrak{B} = (\psi_j)_{j \in J}$ auf M heißen **äquivalent**, wenn auch $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} := (\varphi_i, \psi_j)_{i \in I, j \in J}$ ein differenzierbarer Atlas ist.
- (c) Eine Äquivalenzklasse $c = [\mathfrak{A}]$ differenzierbarer Atlanten auf M heißt eine **differenzierbare Struktur auf M** . Ein Paar (M, c) heißt eine **differenzierbare Mannigfaltigkeit**.

(2.6) Kommentar.

- (a) Auf einer topologischen Mannigfaltigkeit kann es sehr viele verschiedene differenzierbare Strukturen geben. Z.B. ist $M = \mathbb{R}$ sicher eine topologische Mannigfaltigkeit (der Dimension 1) und folgende beiden Atlanten sind sicher differenzierbar:

$$\mathfrak{A} = (\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(x) = x), \quad \mathfrak{B} = (\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \psi(x) = x^3).$$

Denn: \mathfrak{A} ist differenzierbar, denn der einzige Übergang ist $\varphi \circ \varphi^{-1} = \mathbb{1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $\mathbb{1}$ ist sicher differenzierbar. Ebenso ist \mathfrak{B} differenzierbar, weil auch \mathfrak{B} aus nur einer Karte besteht. Es ist aber $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = (\varphi, \psi)$ nicht mehr differenzierbar, denn $\varphi \circ \psi^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\varphi \circ \psi^{-1}(x) = \sqrt[3]{x},$$

ist nicht mehr differenzierbar (im Nullpunkt). Für die differenzierbare Strukturen $c_1 = [\mathfrak{A}]$ und $c_2 = [\mathfrak{B}]$ gilt also: $c_1 \neq c_2$.

- (b) Wir werden aber bald sehen, dass $(\mathbb{R}, c_1) \cong (\mathbb{R}, c_2)$ „diffeomorph“ ist, nämlich vermöge $x \mapsto \sqrt[3]{x}$. (siehe 2.12)

(2.7) Beispiel.

- (a) $M = \mathbb{R}^n$ trägt die Struktur einer n -dimensionaler Mannigfaltigkeit. Man nehme den Atlas $\mathfrak{A} = (\varphi)$ mit $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\varphi = \mathbb{1}$ (und setze $c = [\mathfrak{A}]$). Das ist die **Standard-Struktur** auf \mathbb{R}^n .
- (b) Ebenso wird jede offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $V := U$ und $\varphi = \mathbb{1} : U \rightarrow V$ (und $\mathfrak{A} = (\varphi)$ sowie $c = [\mathfrak{A}]$) zu einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit der Dimension n .
- (c) Ist M^n eine Mannigfaltigkeit und $N \subseteq M$ offen, so trägt N in natürlicher Weise die Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit der Dimension n : Ist nämlich $\mathfrak{A} = (\varphi_i : U_i \rightarrow V_i)_{i \in I}$ ein Repräsentant der differenzierbaren Struktur c auf M , so betrachte man einfach $\mathfrak{B} := (\tilde{\varphi}_i : \tilde{U}_i \rightarrow \tilde{V}_i)_{i \in I}$ mit $\tilde{U}_i := U_i \cap N$, $\tilde{V}_i := \text{Im}(\tilde{\varphi}_i) \subseteq V_i \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\tilde{\varphi}_i := \varphi_i|_{\tilde{U}_i}$. Dann wird N zusammen mit $\tilde{c} := [\mathfrak{B}]$ zu einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit der Dimension n (und diese Struktur hängt nicht von der Wahl $\mathfrak{A} \in c$ ab).
- (d) Sei V ein (abstrakter) reeller Vektorraum der Dimension n . Sei dann (v_1, \dots, v_n) eine Basis von V und $\iota : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ der zugehörige Koordinatenisomorphismus, also

$$\iota(v) = x = (x^1, \dots, x^n) \iff v = \sum_{i=1}^n x^i v_i.$$

(Beachte: Komponenten eines Vektors $x \in \mathbb{R}^n$ werden mit “Exponenten” bezeichnet: x^1, \dots, x^n .) Versehe nun V mit der Topologie, so dass ι ein Homöomorphismus wird, d.h.: $U \subseteq V$ sei offen, genau wenn $\iota(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ offen ist. Damit ist V zunächst eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension n . (Übung: Diese Topologie hängt nicht von der Basiswahl ab, weil lineare Isomorphismen $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($S \in \text{Gl}_n(\mathbb{R})$) Homöomorphismen sind.) Definiere schließlich (wieder) $\mathfrak{A} := (\iota)$ und $c = [\mathfrak{A}]$. Dann hängt auch c nicht von der Basiswahl ab, weil lineare Isomorphismen sogar Diffeomorphismen sind.

(2.8) Beispiel. Betrachte die **n-Sphäre** ($n \geq 1$)

$$\mathbb{S}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$$

(mit ihrer von \mathbb{R}^{n+1} induzierten Teilraumtopologie). Da \mathbb{R}^{n+1} (mit der Standard-Topologie) hausdorffsch und von abzählbarer Topologie ist, ist \mathbb{S}^n hausdorffsch und von abzählbarer Topologie.

Übrigens ist \mathbb{S}^n auch zusammenhängend (Übung) und kompakt (nach Heine-Borel). Daher kann man \mathbb{S}^n sicher nicht mit einer einzigen Karte $\varphi : \mathbb{S}^n \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ überdecken, denn eine nicht-leere offene Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ist niemals kompakt.

Betrachte nun $N := (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{S}^n$ und $S := (0, \dots, 0, -1) \in \mathbb{S}^n$ und die **stereographischen Projektionen**

$$\mathbb{S}^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n, p \mapsto \frac{1}{1 - p^{n+1}}(p^1, \dots, p^n),$$

$$\mathbb{S}^n \setminus \{S\} \rightarrow \mathbb{R}^n, p \mapsto \frac{1}{1 + p^{n+1}}(p^1, \dots, p^n).$$

Es sind φ und ψ stetig (weil Einschränkungen stetiger Abbildungen stetig sind) und auch

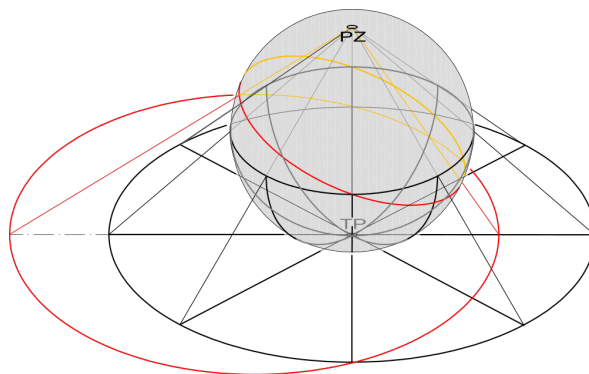


Abbildung 2.1.: stereographische Projektion der \mathbb{S}^2

bijektiv, denn

$$(x^1, \dots, x^n) \mapsto \frac{1}{1 + \|x\|^2}(2x^1, \dots, 2x^n, -1 + \|x\|^2), \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$$

bzw.

$$(x^1, \dots, x^n) \mapsto \frac{1}{1 + \|x\|^2}(2x^1, \dots, 2x^n, 1 - \|x\|^2), \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{S}^n \setminus \{S\}$$

sind Inverse für φ und ψ (Übung). Sie sind offenbar auch stetig und schließlich ist

$$\mathbb{S}^n = (\mathbb{S}^n \setminus \{N\}) \cup (\mathbb{S}^n \setminus \{S\}).$$

Damit ist \mathbb{S}^n eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension n .

Es ist aber $\mathfrak{A} = (\varphi, \psi)$ auch differenzierbar, denn für die Übergänge $\varphi \circ \psi^{-1}$ bzw. $\psi \circ \varphi^{-1}$ von $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ nach $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt (Übung)

$$\varphi \circ \psi^{-1}(x) = \psi \circ \varphi^{-1}(x) = \frac{x}{\|x\|^2}.$$

Also ist $(\mathbb{S}^n, [(\varphi, \psi)])$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n .

(2.9) Definition. Sei (M, c) eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, $p \in M$. Eine stetige Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **differenzierbar in p** , wenn für ein $\mathfrak{A} \in c$ und eine Karte $\varphi : U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ aus \mathfrak{A} mit $p \in U$ gilt: $f \circ \varphi^{-1} : V \rightarrow \mathbb{R}$ ist differenzierbar in $x_0 = \varphi(p)$. Es heißt f **differenzierbar**, wenn f differenzierbar in allen Punkten $p \in M$ ist.

(2.10) Kommentar. Wie in der Definition für den Begriff der differenzierbaren Mannigfaltigkeit bereits vermerkt, ist diese Definition nun unabhängig von der gewählten Karte um p , denn für zwei Karten $\varphi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ und $\varphi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ in $p \in U_1 \cap U_2$ ist ja nun

$$f \circ \varphi_2^{-1} = (f \circ \varphi_1^{-1}) \circ (\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}) \text{ auf } \varphi_2(U_1 \cap U_2),$$

also differenzierbar in $x_2 = \varphi_2(p)$, genau dann wenn $f \circ \varphi_1^{-1}$ differenzierbar in $x_1 = \varphi_1(p)$ ist (mit φ_1 Karte aus \mathfrak{A}_1 , φ_2 Karte aus \mathfrak{A}_2 und $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2 \in c$).

(2.11) Definition.

- (a) Seien $(M^n, [\mathfrak{A}])$ und $(N^r, [\mathfrak{B}])$ differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $p \in M$. Eine stetige Abbildung $\Phi : M \rightarrow N$ heißt **differenzierbar in p** , wenn für eine (und dann jede) Wahl von Karten $\varphi : U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ um p und $\psi : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V} \subseteq \mathbb{R}^r$ um $\Phi(p) = q$ gilt, dass

$$\psi \circ \Phi \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \supseteq \varphi(U \cap \Phi^{-1}(\tilde{U})) \rightarrow \tilde{V} \subseteq \mathbb{R}^r$$

differenzierbar in $x_0 = \varphi(p)$ ist.

- (b) Es heißt Φ **differenzierbar**, wenn Φ differenzierbar in allen Punkten ist.
- (c) Ist $\Phi : M \rightarrow N$ differenzierbar und bijektiv, so dass auch $\Phi^{-1} : N \rightarrow M$ differenzierbar ist, so nennt man Φ einen **Diffeomorphismus**. Es heißt M **diffeomorph zu N** , $M \cong N$, wenn es einen Diffeomorphismus zwischen M und N gibt.

(2.12) Beispiel. Wir wissen bereits, dass $c_1 = [(\varphi)]$ und $c_2 = [(\psi)]$ mit $\varphi = \mathbb{1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3$, zwei verschiedene differenzierbare Strukturen auf \mathbb{R} liefert. Es ist aber $(\mathbb{R}, c_1) \cong (\mathbb{R}, c_2)$ vermöge $\Phi : (\mathbb{R}, c_1) \rightarrow (\mathbb{R}, c_2), p \mapsto \sqrt[3]{p}$, denn in den Karten lautet diese Abbildung ja $\psi \circ \Phi \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\psi \circ \Phi \circ \varphi^{-1}(x) = \psi \circ \Phi(x) = \psi(\sqrt[3]{x}) = (\sqrt[3]{x})^3 = x$$

und das ist sicher differenzierbar und auch $\varphi \circ \Phi^{-1} \circ \psi^{-1} = \mathbb{1}$. Also ist Φ Diffeomorphismus.

(2.13) Kommentar.

- (a) Ist $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion im Sinne von Definition (2.9), so ist f offenbar differenzierbar im Sinne von (2.10), wenn man \mathbb{R} mit seiner Standard-Struktur ($c = [(\mathbb{1})]$) versieht und umgekehrt, denn für eine Karte φ auf M ist

$$f \circ \varphi^{-1} = \mathbb{1} \circ f \circ \varphi^{-1}.$$

- (b) Jede Karte φ auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit ist selbst ein Diffeomorphismus (Übung).
- (c) Es ist übrigens durchaus möglich, dass eine topologische Mannigfaltigkeit keine differenzierbare Struktur trägt und auch, dass sie paarweise nicht diffeomorphe Strukturen trägt. Ein spektakuläres Ergebnis von J. MILNOR (1956) ist, dass auf der S^7 neben der Standard-Struktur weitere (sogenannte exotische) Strukturen existieren (genau 27 Stück (Kervaire/Milnor 1963)).
- (d) Ist M^n eine Mannigfaltigkeit und $N \subseteq M$ offen, so gilt offenbar für die induzierte Struktur von (2.7,c), dass die Inklusion $i : N \hookrightarrow M$ differenzierbar ist.

(2.14) Konstruktion. Seien $(M_1^{n_1}, c_1)$ und $(M_2^{n_2}, c_2)$ differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $M := M_1 \times M_2$ ihr cartesisches Produkt versehen mit der Produkttopologie.

- (i) Es ist dann M eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension $n_1 + n_2$, denn zunächst ist M hausdorffsch und von abzählbarer Topologie, weil M_1 und M_2 es sind. Ist nun $p = (p_1, p_2) \in M$, so gibt es offene Umgebungen $U_1 \subseteq M_1$ von p_1 , $U_2 \subseteq M_2$ von p_2 und offene Mengen $V_1 \subseteq \mathbb{R}^{n_1}$, $V_2 \subseteq \mathbb{R}^{n_2}$ sowie Homöomorphismen $\varphi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ und $\varphi_2 : U_2 \rightarrow V_2$. Es ist dann $U := U_1 \times U_2 \subseteq M$ offene Umgebung von p , es ist $V := V_1 \times V_2 \subseteq \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} = \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ offen und es ist $\varphi := \varphi_1 \times \varphi_2 : U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n, n := n_1 + n_2$ ein Homöomorphismus.

- (ii) Ist nun $\mathfrak{A}_1 \in c_1$, $\mathfrak{A}_1 = (\varphi_1^i : U_1^i \rightarrow V_1^i \subseteq \mathbb{R}^{n_1})_{i \in I}$ ein Repräsentant für die differenzierbare Struktur c_1 auf M_1 und $\mathfrak{A}_2 = (\varphi_2^j : U_2^j \rightarrow V_2^j)_{j \in J}$, so betrachten wir

$$\mathfrak{A} := (\varphi_1^i \times \varphi_2^j : U_1^i \times U_2^j \rightarrow V_1^i \times V_2^j \subseteq \mathbb{R}^n)_{(i,j) \in I \times J}$$

und stellen fest, dass \mathfrak{A} ein differenzierbarer Atlas auf M ist und $c = [\mathfrak{A}]$ nur von c_1 und c_2 abhängt (nicht von Repräsentantenwahl $\mathfrak{A}_1 \in c_1$ und $\mathfrak{A}_2 \in c_2$). Damit ist dann (M, c) eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension $n = n_1 + n_2$.

- (iii) Sind $\pi_1 : M \rightarrow M_1$ und $\pi_2 : M \rightarrow M_2$ die kanonischen Projektionen, so gilt für eine Karte $\varphi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ von M_1 , $\varphi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ von M_2 und $\varphi_1 \times \varphi_2 : U_1 \times U_2 \rightarrow V_1 \times V_2$ von M , dass z.B.

$$\varphi_1 \circ \pi_1 \circ (\varphi_1 \times \varphi_2)^{-1} : \mathbb{R}^n \supseteq V_1 \times V_2 \rightarrow V_1 \subseteq \mathbb{R}^{n_1}, (x_1, x_2) \mapsto x_1,$$

welches differenzierbar ist. Also sind π_1 und π_2 differenzierbar.

(2.15) Beispiel.

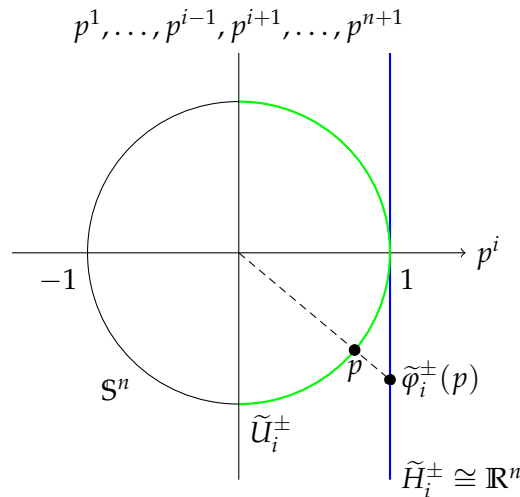
- (a) Betrachte für $\tilde{M} = S^n$ den folgenden $2 \cdot (n + 1)$ -seitigen Atlas (der dem 2-seitigen Atlas der stereographischen Projektion aus Nord- und Südpol heraus äquivalent ist (Übung)). Sei

$$\tilde{U}_i^\pm := \{p \in S^n : \pm p^i > 0\}$$

und $\tilde{V}_i^\pm = \mathbb{R}^n$. Betrachte nun die **Zentralprojektion** aus dem Nullpunkt heraus von \tilde{U}_i^\pm auf

$$\tilde{H}_i^\pm = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} : p^i = \pm 1\} \cong \mathbb{R}^n = \tilde{V}_i^\pm :$$

$$\tilde{\varphi}_i : \tilde{U}_i^\pm \rightarrow \tilde{V}_i^\pm = \mathbb{R}^n, (p^1, \dots, p^{n+1}) \mapsto \pm \frac{1}{p^i} (p^1, \dots, p^{i-1}, p^{i+1}, \dots, p^{n+1})$$



$\tilde{\varphi}_i^\pm$ ist bijektiv und für die Umkehrung $(\tilde{\varphi}_i^\pm)^{-1} : \tilde{V}_i^\pm \rightarrow \tilde{U}_i^\pm$ gilt:

$$(\tilde{\varphi}_i^\pm)^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \|x\|^2}} (x^1, \dots, x^{i-1}, 1, x^i, \dots, x^n)$$

($i = 1, \dots, n + 1$).

(b) Setze nun für den projektiven Raum $\mathbb{P}^n = \mathbb{S}^n / \pm$:

$$U_i := \{(p^1 : \dots : p^{n+1}) \in \mathbb{P}^n : p^i \neq 0\}.$$

Weil \tilde{U}_i^\pm kein Antipodenpaar enthält, gilt für die kanonische Projektion $\pi : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$, $p \mapsto [p]$, dass $\pi|_{\tilde{U}_i^\pm} : \tilde{U}_i^\pm \rightarrow U_i$ ein Homöomorphismus ist. Man setzt nun als Karte $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i = \mathbb{R}^n$:

$$\varphi_i := \tilde{\varphi}_i^+ \circ (\pi|_{\tilde{U}_i^+})^{-1},$$

also

$$\varphi_i(p^1 : \dots : p^{n+1}) = \frac{1}{p^i}(p^1, \dots, p^{i-1}, p^{i+1}, \dots, p^{n+1}).$$

Für die Übergänge φ_{ij} erhält man dann bei $i < j$, dass

$$\varphi_{ij}(x) = \frac{1}{x^i}(x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^{j-1}, 1, x^j, \dots, x^n)$$

(Übung, u. ä. bei $i > j$), also differenzierbar. Mit $\mathfrak{A} = (\varphi_1, \dots, \varphi_{n+1})$ wird daher \mathbb{P}^n zu einer n -dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit (Übung: \mathbb{P}^n ist hausdorffsch und von abzählbarer Topologie). Die kanonische Projektion $\pi : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ wird mit dieser Struktur zu einer differenzierbaren Abbildung, sogar zu einem **lokalen Diffeomorphismus**, d.h.: zu jedem Punkt $p \in \mathbb{S}^n$ gibt es offene Umgebungen $U \subseteq \mathbb{S}^n$ von p und $V \subseteq \mathbb{P}^n$ von $[p] = \pi(p)$, so dass $\pi(U) = V$ ist und $\pi|_U : U \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus ist. Für $p \in \tilde{U}_i^\pm$ ist nämlich mit den Karten $\tilde{\varphi}_i^\pm$ von \mathbb{S}^n um p und φ_i von \mathbb{P}^n um $[p]$

$$\varphi_i \circ \pi \circ (\tilde{\varphi}_i^\pm)^{-1}(x) = \tilde{\varphi}_i^+ \circ (\pi|_{\tilde{U}_i^+})^{-1} \circ \pi \circ (\tilde{\varphi}_i^\pm)^{-1}(x) = \pm x,$$

also $\pi|_{\tilde{U}_i^\pm} : \tilde{U}_i^\pm \rightarrow U_i$ ein Diffeomorphismus. □

(2.16) Definition. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und Γ eine Gruppe. Eine **Operation von Γ durch Diffeomorphismen** ist gegeben durch eine Abbildung $\Phi : \Gamma \times M \rightarrow M$,

$$\Phi(\gamma, p) =: \gamma.p,$$

so dass gilt:

- (a) Für jedes $\gamma \in \Gamma$ ist die Abbildung $\Phi_\gamma : M \rightarrow M$, $p \mapsto \gamma.p$, differenzierbar;
- (b) für alle $p \in M$ gilt: $1.p = p$;
- (c) für alle $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ und $p \in M$ gilt: $(\gamma_1\gamma_2).p = \gamma_1.(\gamma_2.p)$.

(2.17) Kommentar.

(a) Jedes $\Phi_\gamma : M \rightarrow M$ ist tatsächlich ein Diffeomorphismus, denn für $\Phi_{\gamma^{-1}} : M \rightarrow M$ gilt:

$$\Phi_{\gamma^{-1}} \circ \Phi_\gamma(p) = \gamma^{-1}.(\gamma.p) = (\gamma^{-1}\gamma).p = 1.p = p = \mathbb{1}(p)$$

und ebenso

$$\Phi_\gamma \circ \Phi_{\gamma^{-1}} = \mathbb{1}.$$

Also ist Φ_γ bijektiv und $(\Phi_\gamma)^{-1} = \Phi_{\gamma^{-1}}$.

(b) Bezeichnet man mit

$$\text{Diff}(M) := \{\Phi: M \rightarrow M : \Phi \text{ ist Diffeomorphismus}\},$$

so wird $\text{Diff}(M)$ mit der Verkettung von Abbildungen zu einer Gruppe. Ist $\Phi: \Gamma \times M \rightarrow M$ eine Operation durch Diffeomorphismen, so ist die Abbildung

$$\Gamma \rightarrow \text{Diff}(M), \gamma \mapsto \Phi_\gamma,$$

ein Gruppenhomomorphismus. Man spricht daher auch von einer **Darstellung von Γ** als einer **Transformationsgruppe von M** . (Man beachte aber, dass $\Gamma \rightarrow \text{Diff}(M)$ nicht notwendig injektiv sein muss.)

(2.18) Beispiel.

(a) Sei V ein reeller Vektorraum der Dimension n . Sei nun

$$\Gamma = \text{Aut}(V) := \{T: V \rightarrow V : T \text{ ist linearer Automorphismus}\}.$$

Dann operiert Γ durch Diffeomorphismen auf V durch

$$T.v := Tv.$$

(b) Sei

$$\Gamma = \text{O}(n+1) = \{A \in \text{Mat}_{n+1}(\mathbb{R}) : A^t \cdot A = \mathbf{1}\}$$

die orthogonale Gruppe. Dann operiert Γ auf S^n durch Diffeomorphismen vermöge

$$A.p := Ap,$$

denn für $A \in \text{O}(n+1)$ ist $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$, für alle $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$ und dem kanonischen Skalarprodukt $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x^i y^i$, also ist mit $\langle p, p \rangle = 1$ auch $\langle Ap, Ap \rangle = 1$.

(2.19) Definition. Sei Γ eine Gruppe und M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Es operiere Γ auf M durch Diffeomorphismen.

(a) Für $p \in M$ heißt dann

$$\Gamma p := \{\gamma.p \in M : \gamma \in \Gamma\} \subseteq M$$

die **Bahn** (oder der **Orbit**) von **p** unter Γ .

(b) Für $p \in M$ heißt

$$\Gamma_p := \{\gamma \in \Gamma : \gamma.p = p\} \subseteq \Gamma$$

die **Standgruppe in p** .

(2.20) Kommentar.

(a) Operiert Γ auf M , $\Gamma \curvearrowright M$, so ist M disjunkte Vereinigung seiner Bahnen, denn

$$p \sim q : \iff q \in \Gamma_p$$

ist eine Äquivalenzrelation ($p = 1.p; q = \gamma.p \implies \gamma^{-1}.q = p; q = \gamma_1.p, r = \gamma_2.q \implies r = (\gamma_1\gamma_2).p$). Besteht M aus nur einer Bahn, d.h.: $\Gamma p = M$, für ein (und dann für jedes) $p \in M$, so sagt man, dass Γ **transitiv** auf M operiert.

- (b) Zunächst prüft man ohne Mühe nach, dass $\Gamma_p \subseteq \Gamma$ eine Untergruppe ist (Übung). Für jede Bahn $\Gamma p \subseteq M$ erhält man dann eine bijektive Abbildung durch

$$q_p: \Gamma / \Gamma_p \rightarrow \Gamma p, q_p([\gamma]) = \gamma \cdot p,$$

denn für zwei Repräsentanten γ_1, γ_2 der gleichen Linksnebenklasse gibt es offenbar ein $\delta \in \Gamma$, so dass $\gamma_2 = \gamma_1 \delta$ ist und daher ist

$$\gamma_2 \cdot p = (\gamma_1 \delta) \cdot p = \gamma_1 \cdot \underbrace{(\delta \cdot p)}_{=p} = \gamma_1 \cdot p,$$

also ist q_p wohldefiniert. Es ist q_p nach Konstruktion surjektiv und auch injektiv. Ist $\Gamma_p = \{1\}$ für alle $p \in M$, so sagt man, dass Γ **frei** (oder **fixpunktfrei**) operiert. Alle Bahnen sind dann (vermöge q_p) Kopien von Γ .

(2.21) Beispiel.

- (a) Die Operation von $\text{Aut}(V)$ auf V für einen (endlich-dimensionalen) reellen Vektorraum V hat offenbar genau zwei Bahnen, nämlich $\{0\}$ und $V \setminus \{0\}$ (Übung).
- (b) Es operiert $\text{O}(n+1)$ offenbar transitiv auf S^n , denn sind $p, q \in S^n$ beliebig, so ergänze man $p =: e_1$ zu einer Orthonormal-Basis (e_1, \dots, e_{n+1}) von $(\mathbb{R}^{n+1}, \langle -, - \rangle)$ und $q =: f_1$ zu einer Orthonormal-Basis (f_1, \dots, f_{n+1}) und betrachte gerade das $A \in \text{O}(n+1)$, welches durch $A e_i = f_i$ ($i = 1, \dots, n+1$) gegeben ist. Insbesondere ist

$$A p = A e_1 = f_1 = q.$$

- (c) Die Standgruppe von $\text{O}(n+1)$ auf S^n im Nordpol $N = (0, \dots, 0, 1)$ ist (offenbar) gegeben durch

$$\left\{ \left(\left(\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right) \in \text{O}(n+1) : A \in \text{O}(n) \right\} \cong \text{O}(n).$$

Es ist also (zunächst als Menge):

$$S^n \cong \text{O}(n+1) / \text{O}(n).$$

(2.22) Definition. Sei $\Phi: \Gamma \times M \rightarrow M$ eine Operation einer Gruppe Γ auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M durch Diffeomorphismen. Man sagt, dass Γ **eigentlich diskontinuierlich** auf M operiert, wenn es zu jedem Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung $U \subseteq M$ von p gibt, so dass für alle $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ mit $\gamma \neq \gamma'$ gilt:

$$\Phi_\gamma(U) \cap \Phi_{\gamma'}(U) = \emptyset.$$

(schreibe: $\gamma(U) := \Phi_\gamma(U) = \{\gamma \cdot x : x \in U\}$.)

(2.23) Bemerkung. Ist Γ endlich und operiert Γ frei auf M , so operiert Γ eigentlich diskontinuierlich.

Beweis. Sei $p \in M$. Dann ist $\gamma.p \neq \gamma'.p$ für $\gamma \neq \gamma'$ ($\gamma.p = \gamma'.p \implies (\gamma'^{-1}\gamma).p = \gamma'^{-1}.\gamma.p = \gamma'^{-1}.\gamma'.p = (\gamma'^{-1}\gamma').p = 1.p = p \implies \gamma'^{-1}\gamma = 1 \implies \gamma = \gamma'$). Da M hausdorffsch ist, existieren offene Umgebungen $U_\gamma \subseteq M$ von $\gamma.p$, die paarweise disjunkt sind, $U_\gamma \cap U_{\gamma'} = \emptyset$ für $\gamma \neq \gamma'$ (da Γ endlich ist). Sei nun

$$U := \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \gamma^{-1}(U_\gamma).$$

Dann ist $p \in U$, U ist offen (da Γ endlich) und

$$\gamma(U) \subseteq \gamma\gamma^{-1}(U_\gamma) \subseteq U_\gamma,$$

also

$$\gamma(U) \cap \gamma'(U) \subseteq U_\gamma \cap U_{\gamma'} = \emptyset \text{ für } \gamma \neq \gamma'.$$

Also operiert Γ eigentlich diskontinuierlich. □

(2.24) Beispiel.

(a) $\Gamma = \mathbb{Z}_2 (= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \{\pm 1\}$ operiert auf S^n durch Punktspiegelung im Zentrum,

$$\pm 1.p := \pm p,$$

also eigentlich diskontinuierlich.

(b) $\Gamma = \mathbb{Z}^n$ operiert auf $M = \mathbb{R}^n$ durch **Translationen** eigentlich diskontinuierlich vermöge

$$\gamma.p := p + \gamma.$$

Ist nämlich $U := B(p; \frac{1}{2})$, so ist

$$\gamma(U) \cap \gamma'(U) = \emptyset$$

für $\gamma \neq \gamma'$ (Übung).

(2.25) Definition. Sei $\Gamma \curvearrowright M$ eine Operation einer Gruppe Γ auf eine differenzierbaren Mannigfaltigkeit M . Für $p, q \in M$ sei $p \sim q$, wenn es ein $\gamma \in \Gamma$ mit $q = \gamma.p$ gibt. Man nennt dann den Quotientenraum M/\sim den Bahnenraum von M (unter Γ) und schreibt auch M/Γ .

(2.26) Satz. Es operiere Γ auf einer Mannigfaltigkeit \tilde{M} eigentlich diskontinuierlich. Sei $\pi: \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}/\Gamma$ die kanonische Projektion und sei $M := \tilde{M}/\Gamma$ hausdorffsch. Dann gibt es auf M die Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit, so dass folgende universelle Eigenschaft erfüllt ist: Ist N differenzierbare Mannigfaltigkeit, so ist eine stetige Abbildung $\Phi: M \rightarrow N$ genau dann differenzierbar, wenn $\Phi \circ \pi: \tilde{M} \rightarrow N$ differenzierbar ist.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{M} & & \\ \pi \downarrow & \searrow \Phi \circ \pi & \\ M & \xrightarrow{\Phi} & N \end{array}$$

(2.27) Kommentar. Da $\Phi = \mathbb{1}: M \rightarrow M$ differenzierbar ist, ist insbesondere π differenzierbar.

Beweis. (i) M ist topologische Mannigfaltigkeit: M ist nach Voraussetzung hausdorffsch. Weiter ist $\pi: \tilde{M} \rightarrow M$ eine offene Abbildung, denn für ein offenes $\tilde{U} \subseteq \tilde{M}$ gilt

$$\pi^{-1}(\pi(\tilde{U})) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \underbrace{\gamma(\tilde{U})}_{\substack{\text{offen, weil} \\ \Phi_\gamma: \tilde{M} \rightarrow \tilde{M} \text{ Homö.}}}$$

Sei (\tilde{B}_n) eine abzählbare Basis von \tilde{M} . Setze dann $B_n := \pi(\tilde{B}_n)$. Dann gilt (Übung) $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Basis der Topologie auf M . Also hat auch M abzählbare Topologie. Sei weiter $p \in M$ und $\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)$ also $p = [\tilde{p}]$, $\tilde{p} = \tilde{p}(p)$. Dann gibt es eine offene Umgebung $\tilde{U}_{\tilde{p}}$, so dass gilt

$$\gamma(\tilde{U}_{\tilde{p}}) \cap \gamma'(\tilde{U}_{\tilde{p}}) = \emptyset \quad \text{für } \gamma \neq \gamma'. \quad (2.1)$$

Nach eventueller Verkleinerung von $\tilde{U}_{\tilde{p}}$ existiert nun eine Karte $\tilde{\varphi}_{\tilde{p}}: \tilde{U}_{\tilde{p}} \rightarrow \tilde{V}_{\tilde{p}} \subseteq \mathbb{R}^n$ von \tilde{p} . Setze nun $U_p := \pi(\tilde{U}_{\tilde{p}}) \subseteq M$. Da π offen ist, ist $U_p \subseteq M$ offen und wegen (2.1) ist $\pi|_{\tilde{U}_{\tilde{p}}}: \tilde{U}_{\tilde{p}} \rightarrow U_p$ zunächst injektiv. Aber surjektiv ist es sowieso, stetig auch und wegen der Offenheit damit sogar ein Homöomorphismus. Setze schließlich

$$\varphi_p: U_p \rightarrow V_p := \tilde{V}_{\tilde{p}} \subseteq \mathbb{R}^n, \quad \varphi_p := \tilde{\varphi}_{\tilde{p}} \circ (\pi|_{\tilde{U}_{\tilde{p}}})^{-1}.$$

Damit ist also M eine topologische Mannigfaltigkeit (der Dimension $n = \dim(\tilde{M})$) und $\mathfrak{A} = (\varphi_p: U_p \rightarrow V_p)_{p \in M}$ ein topologischer Atlas.

- (ii) Behauptung: \mathfrak{A} ist sogar differenzierbarer Atlas. Seien nun $p_1, p_2 \in M$, so dass $U_0 := U_{p_1} \cap U_{p_2} \neq \emptyset$ und $p_0 \in U_{p_1} \cap U_{p_2}$. Sei $\tilde{U}_1 := \tilde{U}_{\tilde{p}_1} \cap \pi^{-1}(U_0)$, $\tilde{U}_2 := \tilde{U}_{\tilde{p}_2} \cap \pi^{-1}(U_0)$, $\tilde{p}_0 := (\pi|_{\tilde{U}_1})^{-1}(p_0)$, $\tilde{p}_0 := (\pi|_{\tilde{U}_2})^{-1}(p_0)$. Da $\pi(\tilde{p}_0) = p_0 = \pi(\tilde{p}_0)$ ist, existiert ein $\gamma \in \Gamma$ mit $\tilde{p}_0 = \gamma \cdot \tilde{p}_0$. Es ist nun $\pi|_{\tilde{U}_2} \circ \gamma = \pi|_{\tilde{U}_1}$ (in einer Umgebung von p_0) und mit $\varphi_1 := \varphi_{p_1}$, $\varphi_2 := \varphi_{p_2}$, $\tilde{\varphi}_1 := \tilde{\varphi}_{\tilde{p}_1}$ und $\tilde{\varphi}_2 := \tilde{\varphi}_{\tilde{p}_2}$ gilt dann

$$\begin{aligned} \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(x) &= (\tilde{\varphi}_2 \circ (\pi|_{\tilde{U}_2})^{-1}) \circ (\tilde{\varphi}_1 \circ (\pi|_{\tilde{U}_1})^{-1})^{-1}(x) \\ &= \tilde{\varphi}_2 \circ \underbrace{(\pi|_{\tilde{U}_2})^{-1} \circ (\pi|_{\tilde{U}_1})}_{=\gamma} \circ \tilde{\varphi}_1^{-1}(x), \end{aligned}$$

für alle x aus einer Umgebung von p_0 . Also ist $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ differenzierbar in $x_0 = \varphi_1(p_0)$, weil $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2$ und γ Diffeomorphismen sind. Also ist \mathfrak{A} ein differenzierbarer Atlas.

- (iii) Noch zu zeigen: $\Phi: M \rightarrow N$ differenzierbar $\iff \Phi \circ \pi: \tilde{M} \rightarrow N$ differenzierbar.

“ \implies ” Mit der eben definierten Struktur $c = [\mathfrak{A}]$ wird $\pi: \tilde{M} \rightarrow M$ differenzierbar, denn für $\tilde{p} \in \tilde{M}$ und $p := \pi(\tilde{p}) \in M$ existiert ein $\gamma \in \Gamma$, so dass $\tilde{p} = \gamma \cdot \tilde{p}$ (wo $\tilde{p} = \tilde{p}(p)$). In den Karten φ um p , $\tilde{\varphi}$ um \tilde{p} und $\tilde{\varphi} \circ \gamma^{-1} =: \tilde{\tilde{\varphi}}$ um $\tilde{\tilde{p}}$ wird die Abbildung π bzgl. $\tilde{\tilde{\varphi}}$ und φ :

$$\begin{aligned} \varphi \circ \pi \circ \tilde{\tilde{\varphi}}^{-1} &= \varphi \circ \pi \circ (\tilde{\varphi} \circ \gamma^{-1})^{-1} \\ &= (\tilde{\varphi} \circ (\pi|_{\tilde{U}})^{-1}) \circ \underbrace{\pi \circ \gamma}_{=\pi} \circ \tilde{\tilde{\varphi}}^{-1} = \mathbb{1}, \end{aligned}$$

also differenzierbar. Da Kompositionen von differenzierbaren Abbildungen wieder differenzierbar sind (Übung), folgt, dass mit einem differenzierbaren Φ auch $\Phi \circ \pi$ differenzierbar ist.

“ \impliedby ” Ist $\Phi: M \rightarrow N$ stetig, so dass $\Phi \circ \pi$ differenzierbar ist und $p \in M$, so ist Φ in p differenzierbar, weil für die Karte $\varphi := \varphi_p$ um p , eine beliebige Karte ψ um $q := \Phi(p) \in N$ und der Karte $\tilde{\varphi}_{\tilde{p}}$ um $\tilde{p} = \tilde{p}(p) \in \tilde{M}$ gilt:

$$\begin{aligned} \psi \circ \Phi \circ \varphi^{-1} &= \psi \circ \Phi \circ \underbrace{(\pi \circ (\pi|_{\tilde{U}})^{-1})}_{=\mathbb{1}} \circ \varphi^{-1} \\ &= \psi \circ (\Phi \circ \pi) \circ \underbrace{(\varphi \circ (\pi|_{\tilde{U}}))^{-1}}_{=\tilde{\varphi}} = \psi \circ (\Phi \circ \pi) \circ \tilde{\varphi}^{-1} \end{aligned}$$

denn $\Phi \circ \pi$ ist in \tilde{p} differenzierbar. □

(2.28) Beispiel.

- (a) Für $\tilde{M} = S^n$ und $\Gamma = \mathbb{Z}_2$, sowie der natürlichen Wirkung von Γ auf \tilde{M} , erhält man für \tilde{M}/Γ gerade den projektiven Raum \mathbb{P}^n (vergleiche die Konstruktion in (2.15) und (2.26)).
- (b) Sei $\tilde{M} = \mathbb{R}^n$ und $\Gamma = \mathbb{Z}^n$ operiere durch Translation. Dann ist also $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und vermöge

$$\Phi: \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{T}^n = S^1 \times \dots \times S^1 \subseteq \mathbb{C}^n, [(t_1, \dots, t_n)] \mapsto (e^{2\pi i t_1}, \dots, e^{2\pi i t_n}),$$

ist $\mathbb{T}^n \cong \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ (Übung).

(2.29) Motivation. Eine **Untermannigfaltigkeit** $M^n \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ der Dimension n ist eine abgeschlossene Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$, so dass jeder Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ besitzt mit einer differenzierbaren Abbildung $F: U \rightarrow \mathbb{R}^k$, so dass gilt

- (i) $F^{-1}(0) = M \cap U$,
- (ii) $DF_p: \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ hat den Rang k .

Es heißt dann $TM_p := \ker(DF_p) \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ der **Tangentialraum von M in p** und es war

$$TM_p = \{\dot{\alpha}(0) \in \mathbb{R}^{n+k} : \alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M^n \text{ glatt } (C^\infty), \alpha(0) = p\} \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$$

der Raum der Tangentenvektoren an Kurven auf M durch p .

Problem: Wie soll man "TM_p" an eine abstrakte Mannigfaltigkeit definieren?

Idee: Fasse jeden Tangentialvektor $\zeta = \dot{\alpha}(0) \in TM_p \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ als eine **Richtungsableitung** von Funktionen $f: W \rightarrow \mathbb{R}$ auf, die auf einer offenen Umgebung $W \subseteq M$ von p definiert sind,

$$\zeta(f) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \alpha)(t)$$

Beachte: ζ ist \mathbb{R} -linear und eine **Derivation**, d.h.

$$\zeta(fg) = \zeta(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot \zeta(g),$$

denn mit LEIBNIZ ist

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} ((fg) \circ \alpha)(t) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} ((f \circ \alpha) \cdot (g \circ \alpha))(t) \\ &= (f \circ \alpha)(0) \cdot (g \circ \alpha)(0) + (f \circ \alpha)(0) \cdot (g \circ \alpha)(0) \\ &= \zeta(f)g(p) + f(p)\zeta(g). \end{aligned}$$

(2.30) Definition. Sei M^n eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension n . Ein differenzierbarer Atlas $\mathfrak{A} = (\varphi_i: U_i \rightarrow V_i)_{i \in I}$ heißt **C^∞ -Atlas**, wenn alle Übergänge φ_{ij} C^∞ -Abbildungen sind. Zwei C^∞ -Atlanten \mathfrak{A} und \mathfrak{B} heißen äquivalent, wenn $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ auch noch C^∞ -Atlas ist. Eine Äquivalenzklasse $c = [\mathfrak{A}]$ ist eine C^∞ -Struktur auf M . Ein Paar (M, c) heißt dann **eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension n**.

(2.31) Kommentar.

- (a) In offensichtlicher Weise definiert man nun **glatte Funktionen** $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ und **glatte Abbildung** $\Phi: M \rightarrow N$ für glatte Mannigfaltigkeiten M und N .

(b) Für jede offene Teilmenge $U \subseteq M$, M eine glatte Mannigfaltigkeit, schreiben wir:

$$\mathcal{E}(U) := \{f: U \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ ist glatt}\} \quad (\text{auch } C^\infty(U) = \mathcal{E}(U)).$$

Es ist $\mathcal{E}(U)$ eine \mathbb{R} -Algebra vermöge:

$$\begin{aligned} (f + g)(p) &:= f(p) + g(p), & (f \cdot g)(p) &:= f(p) \cdot g(p), \\ (\lambda f)(p) &:= \lambda f(p), & f, g &\in \mathcal{E}(U), \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(2.32) Definition. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Auf der mengentheoretischen Summe $\sum_{\substack{U \in \mathfrak{A}(p) \\ U \text{ offen}}} \mathcal{E}(U)$ definieren wir folgende Äquivalenzrelation: Für $f \in \mathcal{E}(U)$ und $g \in \mathcal{E}(\tilde{U})$ sei $f \sim g$, wenn es ein offenes $W \in \mathfrak{A}(p)$ mit $W \subseteq U \cap \tilde{U}$ gibt, so dass $f|_W = g|_W$ ist. Die Quotientenmenge $\mathcal{E}_p(M) := (\sum \mathcal{E}(U)) / \sim$ heißt der **Raum der glatten Funktionskeime von M in p** .

(2.33) Kommentar.

(a) Für einen Funktionskeim $s \in \mathcal{E}_p(M)$, der von $f \in \mathcal{E}(U)$ repräsentiert wird, schreiben wir $s = f_p := [f] \in \mathcal{E}_p(M)$. $\mathcal{E}_p(M)$ erbt von $\mathcal{E}(U)$, $U \in \mathfrak{A}(p)$, die Struktur einer \mathbb{R} -Algebra, in dem man diese repräsentantenweise definiert:

$$f_p + g_p := (f + g)_p, \quad \lambda f_p := (\lambda f)_p, \quad f_p \cdot g_p := (f \cdot g)_p \quad \text{für } f \in \mathcal{E}(U), g \in \mathcal{E}(\tilde{U})$$

(und $f + g, f \cdot g \in \mathcal{E}(U \cap \tilde{U})$), $\lambda \in \mathbb{R}$ und prüft (leicht) nach, dass dies wohldefiniert ist und $\mathcal{E}_p(M)$ zu einer \mathbb{R} -Algebra macht.

(b) Die \mathbb{R} -Algebra $A := \mathcal{E}_p(M)$, $p \in M$, kommt zudem mit einem Auswertungshomomorphismus $\varrho: A \rightarrow \mathbb{R}$, nämlich $f_p \mapsto f(p) =: f_p(p)$ was offensichtlich auch wohldefiniert und ein Homomorphismus ist. Man beachte, dass man einen Keim $s \in \mathcal{E}_p(M)$ nicht in Punkten $q \neq p$ auswerten kann.

(2.34) Definition. Sei M^n eine glatte Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und $\mathcal{E}_p(M)$ die \mathbb{R} -Algebra der glatten Funktionskeime in p .

(a) Ein \mathbb{R} -Vektorraumhomomorphismus $\xi: \mathcal{E}_p(M) \rightarrow \mathbb{R}$ heißt eine **Derivation** auf $\mathcal{E}_p(M)$, wenn für alle $f_p, g_p \in \mathcal{E}_p(M)$ gilt:

$$\xi(f_p g_p) = \xi(f_p) g_p(p) + f_p(p) \xi(g_p)$$

(oder: $\xi(st) = \xi(s) \varrho(t) + \varrho(s) \xi(t)$, $\forall s, t \in \mathcal{E}_p(M)$).

(b) Ein **Tangentialvektor an M in p** ist eine Derivation auf $\mathcal{E}_p(M)$. Die Menge aller Tangentialvektoren

$$TM_p := \text{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{E}_p(M), \mathbb{R}) := \{\xi: \mathcal{E}_p(M) \rightarrow \mathbb{R} : \xi \text{ ist Derivation}\}$$

heißt der **Tangentialraum von M in p** .

(2.35) Kommentar. Für jede \mathbb{R} -Algebra A mit einem Algebra-Homomorphismus $\varrho: A \rightarrow \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned} \text{Der}_{\mathbb{R}}(A, \mathbb{R}) &= \{\xi: A \rightarrow \mathbb{R}, \xi \text{ ist } \mathbb{R}\text{-linear und } \mathbf{derivativ}, \\ &\text{d.h.: } \xi(ab) = \xi(a) \varrho(b) + \varrho(a) \xi(b), \forall a, b \in A\} \end{aligned}$$

ein \mathbb{R} -Vektorraum vermöge

$$\begin{aligned}(\zeta_1 + \zeta_2)(a) &:= \zeta_1(a) + \zeta_2(a) \\ (\lambda \cdot \zeta)(a) &:= \lambda \cdot \zeta(a)\end{aligned}$$

Es ist also $TM_p = \text{Der}_R(\mathcal{E}_p(M), \mathbb{R})$ ein \mathbb{R} -Vektorraum.

(2.36) Beispiel. Ist $\varepsilon > 0$ und $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ eine glatte Kurve auf M durch p , d.h. $\alpha(0) = p$, so wird durch $\zeta: \mathcal{E}_p(M) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\zeta(f_p) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \alpha)(t)$$

ein Tangentialvektor definiert, denn ζ ist offenbar linear und auch derivativ (siehe (2.29)) und auch wohldefiniert. Wir schreiben $\dot{\alpha}(0) := \zeta \in TM_p$ und nennen dies den **Tangentenvektor der Kurve α an p** .

(2.37) Beispiel. Sei M^n glatte Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und $\varphi: U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte um p mit $\varphi(p) =: x_0 \in V$. Für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$ definiert man:

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_p : \mathcal{E}_p(M) \rightarrow \mathbb{R}, f_p \mapsto \left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_{x=x_0} (f \circ \varphi^{-1})(x)$$

Es ist $\left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_p$ offenbar \mathbb{R} -linear (denn $(f+g) \circ \varphi^{-1} = f \circ \varphi^{-1} + g \circ \varphi^{-1}$ und $(\lambda f) \circ \varphi^{-1} = \lambda(f \circ \varphi^{-1})$) und auch derivativ, denn mit LEIBNIZ ist

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_p (f_p \cdot g_p) &= \left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_{x=x_0} (fg \circ \varphi^{-1}) = \left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_{x_0} (f \circ \varphi^{-1} \cdot g \circ \varphi^{-1})(x) \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_{x_0} (f \circ \varphi^{-1})(x) \cdot g \circ \varphi^{-1}(x_0) + (f \circ \varphi^{-1})(x_0) \cdot \left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_{x_0} (g \circ \varphi^{-1})(x) \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_p (f_p) \cdot g_p(p) + f_p(p) \cdot \left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_p (g_p),\end{aligned}$$

und wohldefiniert sowieso, weil man bei solchen Ableitungsoperatoren, ähnlich wie in Beispiel (2.36), die Funktion f nur in einer „infinitesimalen“ Umgebung von p zu kennen braucht, d.h. nur den Keim f_p .

Wir nennen $\left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_p \in TM$ den **j -ten Koordinatenvektor bzgl. der Karte φ** . Beachte: Ist $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ die Kurve $\alpha(t) = \varphi^{-1}(x_0 + te_j)$ ($\varepsilon > 0$ klein genug), so ist gerade $\left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_p = \dot{\alpha}(0)$, denn

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_{x_0} (f \circ \varphi^{-1})(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 (f \circ \varphi^{-1})(x_0 + te_j).$$

(wo (e_1, \dots, e_n) die kanonische Basis von \mathbb{R}^n ist).

(2.38) Bemerkung. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und $\varphi: U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte um p . Dann ist die Familie der Tangentialvektoren $(\left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^n} \right|_p)$ linear unabhängig.

Beweis. Sei $x^j: V \rightarrow \mathbb{R}$ die j -te Koordinatenfunktion $x \mapsto x^j$ und $\pi^j: U \rightarrow \mathbb{R}$, $\pi^j := x^j \circ \varphi$. Dann gilt für $\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p: \mathcal{E}_p(M) \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p (\pi_p^j) = \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{x_0} (\pi^j \circ \varphi^{-1})(x) = \left. \frac{\partial x^j}{\partial x^i} \right|_{x_0} = \delta_j^i \left(= \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} \right).$$

Ist also

$$\lambda^1 \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p + \dots + \lambda^n \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p = 0$$

so insbesondere

$$0 = 0(\pi_p^j) = \sum_{i=1}^n \lambda^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p (\pi_p^j) = \sum_{i=1}^n \lambda^i \delta_i^j = \lambda^j,$$

also ist $(\frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p)$ linear unabhängig. □

(2.39) Vereinbarung. Wir vereinbaren ab hier die **Einsteinsche Summenkonvention**, die besagt, dass falls in einer Formel ein Index doppelt auftaucht, und einmal oben und unten steht, so wird über diesen (von 1 bis $n = \dim M$) summiert.

(2.40) Problem. Wenn $TM_p = \text{Der}(\mathcal{E}_p(M), \mathbb{R})$ wirklich ein adequates Konzept für den Tangentialraum von M an p sein soll, muss $(\frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p)$ auch Erzeugendensystem sein, also $\dim_{\mathbb{R}} TM_p = n$. Auf den ersten Blick wirkt dies vermesssen. Man beachte aber, dass die Derivations-Eigenschaft folgendes liefert:

- (a) Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\lambda_p \in \mathcal{E}_p(M)$ der von der konstanten Funktion $M \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto \lambda$, induzierte Funktionskeim, so ist für jede Derivation $\zeta: TM_p \rightarrow \mathbb{R}$

$$\zeta(\lambda_p) = \zeta(\lambda \cdot 1_p) = \lambda \zeta(1_p)$$

wegen der \mathbb{R} -Linearität und

$$\zeta(1_p) = \zeta(1_p \cdot 1_p) = \zeta(1_p) \cdot \underbrace{1_p(p)}_{=1} + \underbrace{1_p(p)}_{=1} \cdot \zeta(1_p) = 2 \cdot \zeta(1_p)$$

folgt, also

$$\zeta(\lambda_p) = 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

- (b) Sind $f_p, g_p \in \mathcal{E}_p(M)$ mit $f_p(p) = 0 = g_p(p)$, so ist

$$\zeta(f_p g_p) = \zeta(f) \cdot \underbrace{g_p(p)}_{=0} + \underbrace{f_p(p)}_{=0} \cdot \zeta(g_p) = 0.$$

Eine Derivation ζ ermittelt also gewissermaßen nur, was ein Keim „in 1.Ordnung“ (bei p) macht.

(2.41) Lemma. Sei $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ein sternförmiges Gebiet bzgl. $p = 0$, d.h.: mit jedem $x \in V$ ist auch die Strecke $\{tx \in \mathbb{R}^n : t \in [0, 1]\}$ in V . Sei $g: V \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Dann gibt es glatte Funktionen $h_1, \dots, h_n: V \rightarrow \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in V$ folgendes gilt:

$$g(x) = g(0) + h_j(x)x^j.$$

(2.42) Kommentar. Man beachte, dass nach der Produktregel

$$\frac{\partial g}{\partial x^j}(0) = h_j(0)$$

ist.

Beweis von (2.41). Man setze $h_j: V \rightarrow \mathbb{R}$,

$$h_j(x) := \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x^j}(tx) dt.$$

Dann ist h_j auch glatt und nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist:

$$\begin{aligned} g(x) - g(0) &= \int_0^1 \left(\frac{d}{dt} g(tx) \right) dt \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x^j}(tx) \cdot x^j dt \\ &= \left(\int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x^j}(tx) dt \right) \cdot x^j = h_j(x) x^j. \quad \square \end{aligned}$$

(2.43) Satz. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension n . Dann ist für jedes $p \in M$ der Tangentialraum TM_p an M in p ein reeller Vektorraum der Dimension n . Ist $\varphi: U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte in p und $\frac{\partial}{\partial x^j}|_p$ der induzierte j -te Koordinatenvektor, so ist $(\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p)$ eine Basis.

Beweis. (i) Lineare Unabhängigkeit: (2.38)

(ii) Erzeugendensystem: Sei $\xi \in TM_p$ beliebig, $\varphi: U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte um p , $\varphi(p) = 0$ und V sternförmig bzgl. $0 \in \mathbb{R}^n$. Das kann man nach einer eventuellen Translation mit der Karte und einer eventuellen Verkleinerung der Karte (z.B. auf einen Ball $V = B_\varepsilon(0)$ (mit $\varepsilon > 0$)) immer annehmen (Übung). Seien $\pi^j \in \mathcal{E}_p(U)$ die j -te Koordinatenfunktion bzgl. φ , also $\pi^j = x^j \circ \varphi$. Wir setzen $\lambda^j := \xi(\pi^j)$ und behaupten:

$$\xi = \lambda^j \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p.$$

Sei dazu $s \in \mathcal{E}_p(M)$ beliebig, $f \in \mathcal{E}(\tilde{U})$ ein Repräsentant und ohne Einschränkung nach eventueller Verkleinerung von U bzw. \tilde{U} sei $U = \tilde{U}$, also $s = f_p$. Sei $g := f \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{E}(V)$. Mit (2.41) gibt es glatte Funktionen $h_1, \dots, h_n \in \mathcal{E}(V)$ mit

$$g(x) = g(0) + h_j(x)x^j, \quad \forall x \in V.$$

Also ist:

$$f = g \circ \varphi = g \circ \varphi(p) + (h_j \circ \varphi)(x^j \circ \varphi) = f(p) + H_j \pi^j$$

mit $H_j := h_j \circ \varphi \in \mathcal{E}(U)$. Wegen $\pi^j(p) = x^j(0) = 0$ folgt nun:

$$\begin{aligned} \xi(f_p) &= \xi\left((f(p))_p + (H_j)_p \cdot \pi^j_p\right) \\ &= \underbrace{\xi(f_p(p))}_{=0} + \xi((H_j)_p) \cdot \underbrace{\pi^j_p(p)}_{=0} + (H_j)_p(p) \cdot \underbrace{\xi(\pi^j_p)}_{=\lambda^j} \end{aligned}$$

und andererseits:

$$H_j(p) = h_j(\varphi(p)) = h_j(0) \stackrel{(2.42)}{=} \frac{\partial g}{\partial x^j}(0) = \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p (f_p)$$

Für alle $f_p \in \mathcal{E}_p(M)$ gilt also:

$$\xi(f_p) = \lambda^j \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p (f_p)$$

also

$$\xi = \lambda^j \frac{\partial}{\partial x^j}. \quad \square$$

(2.44) Kommentar.

(a) Die Dimension einer Mannigfaltigkeit $M \neq \emptyset$ ist also eindeutig bestimmt:

$$\dim M = n = \dim_{\mathbb{R}} TM_p, \forall p \in M.$$

(Es ist auch richtig, dass die Dimension einer topologischen Mannigfaltigkeit eindeutig definiert ist, weil für zwei offene Mengen $V \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V' \subseteq \mathbb{R}^{n'}$ gilt: Sind V und V' homöomorph so ist $n = n'$. Das ist ein Resultat der „Algebraischen Topologie“, siehe z.B. [SZ])

(b) Jeder Tangentialvektor taucht als Tangentenvektor einer geeigneten Kurve auf. Ist nämlich $\xi \in TM_p$ beliebig, $\varphi: U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte und $\lambda^1, \dots, \lambda^n \in \mathbb{R}$ so, dass $\xi = \lambda^j \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p$ ist, so betrachte die Kurve $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$,

$$\alpha(t) = \varphi^{-1}(t\lambda)$$

($\lambda := (\lambda^1, \dots, \lambda^n) \in \mathbb{R}^n$). Es ist dann für alle $f_p \in \mathcal{E}_p(M)$:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}(0)(f_p) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f \circ \alpha)(t) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f \circ \varphi^{-1}(t\lambda)) \stackrel{\text{K.R.}}{=} \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_0 (f \circ \varphi^{-1}) \cdot \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (t\lambda^j) \\ &= \lambda^j \cdot \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p (f_p), \end{aligned}$$

also

$$\dot{\alpha}(0) = \lambda^j \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p = \xi.$$

Also:

$$TM_p = \{ \dot{\alpha}(0) \in \text{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{E}_p(M), \mathbb{R}) : \alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \text{ glatte Kurve mit } \alpha(0) = p (\varepsilon > 0) \}$$

(2.45) Vereinbarung.

(a) Ist $\varphi: U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte auf einer glatten Mannigfaltigkeit, so schreiben wir ab jetzt oft nur noch $x: U \rightarrow V$, wo „ x “ auch die Koordinate für V bezeichnet.

(b) Sind $x: U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ und $y: \tilde{U} \rightarrow \tilde{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ zwei Karten und $U \cap \tilde{U} \neq \emptyset$, so schreiben wir für den Übergang $y \circ x^{-1}: x(U \cap \tilde{U}) \rightarrow y(U \cap \tilde{U})$ ebenfalls nur kurz y (oder $y = y(x)$).

(c) Ist z.B. $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion und $x: U \rightarrow V$ eine Karte von M , so schreibt man für die lokale Beschreibung $f \circ x^{-1}: V \rightarrow \mathbb{R}$ oft ebenfalls nur f (oder $f(x)$) und benutzt keinen neuen Buchstaben.

(2.46) Bemerkung. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und seien x und y zwei Karten um p , $x_0 = x(p)$, $y_0 = y(p)$. Dann gilt für alle $i, j = 1, \dots, n$:

$$\frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \Big|_{y_0} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \quad \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \Big|_{x_0} \cdot \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p.$$

Beweis. Nenne (nochmal einmal) $\varphi = x: U \rightarrow V$, $\psi = y: \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ und ohne Einschränkung: $U = \tilde{U}$, und $\tau = \psi \circ \varphi^{-1}: V \rightarrow \tilde{V}$. Sei $s \in \mathcal{E}_p(M)$, $f \in \mathcal{E}(\tilde{U})$ mit $f_p = s$ und ohne Einschränkung: $\tilde{U} = U$. Dann ist (ohne Einschränkung $\varphi(p) = 0 = \psi(p)$, also $\tau(0) = 0$):

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p (f_p) = \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p (f \circ \varphi^{-1}) = \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_0 (f \circ \psi^{-1} \circ \tau),$$

weil $\tau \circ \varphi = \psi$ ist \implies (Kettenregel)

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p (f_p) = \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_0 (f \circ \psi^{-1}) \cdot \frac{\partial \tau^j}{\partial x^i} \Big|_0 = \frac{\partial \tau^j}{\partial x^i} (0) \cdot \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p (f_p),$$

also

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = \frac{\partial \tau^j}{\partial x^i} \Big|_0 \cdot \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p. \quad \square$$

(2.47) Kommentar. Ist M glatte Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und hat $\xi \in TM_p$ bzgl. einer Karte x die Darstellung $(\lambda^1, \dots, \lambda^n) \in \mathbb{R}^n$, d.h.: $\xi = \lambda^i \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$, und bzgl. einer Karte y die Darstellung $\xi = \mu^j \cdot \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p$, so transformieren sich die Koordinaten $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^n$ so:

$$\lambda^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} (y_0) \mu^j,$$

denn:

$$\lambda^j \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = \xi = \mu^j \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p = \mu^j \frac{\partial x^i}{\partial y^j} (y_0) \cdot \frac{\partial}{\partial x^i},$$

also nach Koeffizientenvergleich

$$\lambda^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} (y_0) \mu^j.$$

(2.48) Definition. Sei M^n eine glatte Mannigfaltigkeit und $p \in M$.

(a) Der Dualraum des Tangentialraums ist der **Cotangentialraum von M in p**:

$$TM_p^* := \{ \eta: TM \rightarrow \mathbb{R} : \eta \text{ linear} \}.$$

(b) Ist $x: U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ um p und ist $(\frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p)$ die zugeordnete Basis von TM_p aus Koordinatenvektoren, so wird mit $(dx^1 \Big|_p, \dots, dx^n \Big|_p)$ die dazu duale Basis von TM_p^* bezeichnet, also:

$$dx^i \Big|_p \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right) = \delta_j^i \quad (1 \leq i, j \leq n).$$

(2.49) Kommentar.

(a) Sind x und y zwei Karten um p , $x_0 = x(p)$, $y_0 = y(p)$ mit Übergängen $y = y(x)$ bzw. $x = x(y)$, so gilt für alle $i, j = 1, \dots, n$:

$$dy^j \Big|_p = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} (x_0) \cdot dx^i \Big|_p, \quad dx^i \Big|_p = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} (y_0) \cdot dy^j \Big|_p,$$

denn

$$dy^j|_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) = dy^j|_p \left(\frac{\partial y^k}{\partial x^i}(x_0) \cdot \frac{\partial}{\partial y^k} \Big|_p \right) = \frac{\partial y^k}{\partial x^i}(x_0) \underbrace{dy^j|_p \left(\frac{\partial}{\partial y^k} \Big|_p \right)}_{=\delta_k^j} = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(x_0)$$

(und ähnlich für $dx^i|_p$).

- (b) Ist $\eta \in TM_p^*$ ein Cotangentialvektor mit Komponenten $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ bzgl. einer Karten x und Komponenten (μ_1, \dots, μ_n) bzgl. einer Karten y , so transformieren sich diese (vergleiche (2.47)):

$$\lambda_i = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(x_0) \mu_j,$$

denn aus

$$\lambda_i dx^i|_p = \eta = \mu_j dy^j|_p = \mu_j \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(x_0) \cdot dx^i|_p$$

folgt:

$$\lambda_i = \mu_j \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(x_0) \quad (i = 1, \dots, n).$$

- (c) Man beachte die Feinheit mit der Schreibweise der Indizes oben und unten: In Matrix-Schreibweise transformieren sich die Koordinatenvektoren $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^n$ von Tangentialvektoren (kurz: Vektoren) $\xi \in TM_p$ bzw. Cotangentialvektoren (kurz: **Covektoren**) $\eta \in TM_p^*$ so:

$$\text{Sei } A = \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}(x_0) \right)_{i,j} \quad \text{und} \quad B = \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}(y_0) \right)_{i,j}.$$

Dann ist $B = A^{-1}$, denn für den Koordinaten-Wechsel $y = \tau(x)$ ist

$$\text{Jac}(\tau)(x_0) = \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}(x_0) \right)$$

und

$$\text{Jac}(\tau^{-1})(y_0) = \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}(y_0) \right)$$

und

$$\text{Jac}(\tau^{-1})(y_0) = \left(\text{Jac}(\tau)(x_0) \right)^{-1}$$

wegen $\tau \circ \tau^{-1} = \mathbb{1}$ und der Kettenregel. In Index-Schreibweise liest sich das so:

$$\frac{\partial y^i}{\partial x^k}(x_0) \cdot \frac{\partial x^k}{\partial y^j}(y_0) = \delta_j^i.$$

Also ist:

$$\lambda^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \Big|_{y_0} \mu^j \implies \lambda = B\mu = A^{-1}\mu \quad (2.47)$$

$$\lambda_i = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(x_0) \mu_j \implies {}^t\lambda = {}^t\mu A \implies \lambda = {}^tA\mu = {}^tB^{-1}\mu \quad (2.49)$$

Die Tatsache, dass man die Transformationsmatrix A (bzw. B) nicht nur invertieren, sondern auch noch transponieren muss, ist in der Indexschreibweise „versteckt“.

(2.50) Motivation. Also nächstes sollen "Felder" von Tangentialvektoren und Covektoren eingeführt werde: Setze dazu

$$TM := \sum_{p \in M} TM_p, \quad TM^* := \sum_{p \in M} TM_p^*,$$

sowie

$$\pi: TM \rightarrow M, \pi(\zeta) = p : \iff \zeta \in TM_p$$

bzw.

$$\pi: TM^* \rightarrow M, \pi(\eta) = p : \iff \eta \in TM_p^*.$$

Es heißt $\pi: TM \rightarrow M$ das **Tangentialbündel von M** und $\pi: TM^* \rightarrow M$ das **Cotangentialbündel von M**. (TM und TM^* sind hier zunächst nur Mengen.)

(2.51) Definition. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $U \subseteq M$ offen.

- (a) Eine Abbildung $X: U \rightarrow TM$ heißt **Vektorfeld auf U**, wenn für alle $p \in U$ gilt, dass $X(p) \in TM_p$ ist, also $\pi \circ X = \mathbb{1}_U$ ist.
- (b) Eine Abbildung $\omega: U \rightarrow TM^*$ heißt **Differentialformen auf U**, wenn für alle $p \in U$ gilt, dass $\omega(p) \in TM_p^*$ ist, also:

$$\pi \circ \omega = \mathbb{1}_U.$$

(2.52) Beispiel. Sei M glatte Mannigfaltigkeit, $U \subseteq M$ offen und $x: U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte. Man definiert dann die **Koordinatenvektorfelder** $\frac{\partial}{\partial x^i}: U \rightarrow TM$ ($i = 1, \dots, n$) durch

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(p) := \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$$

und die Koordinaten-Differentialformen $dx^i: U \rightarrow TM^*$,

$$dx^i(p) := dx^i \Big|_p.$$

(2.53) Kommentar.

- (a) Ist $x: U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte auf M und X ein Vektorfeld auf U , so gibt es wegen Satz (2.43) eindeutig bestimmte Funktionen $\zeta^1, \dots, \zeta^n: V \rightarrow \mathbb{R}$, so dass gilt:

$$X = \zeta^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

(Genau genommen bedeutet das mit der Kartenbezeichnung φ :

$$X = \zeta^i \circ \varphi \frac{\partial}{\partial x^i}, \text{ also: } X(p) = \zeta^i \circ \varphi(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p .)$$

- (b) Entsprechend gibt es für eine Differentialform ω auf U , wenn $x: U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte ist, eindeutig bestimmte Funktionen $\eta_1, \dots, \eta_n: V \rightarrow \mathbb{R}$, so das

$$\omega = \eta_i(x) dx^i$$

ist.

- (c) Seien $X: U \rightarrow TM$ bzw. $\omega: U \rightarrow TM^*$ ein Vektorfeld bzw. eine Differentialform auf U und x und y Karten auf U , $x: U \rightarrow V$, $y: U \rightarrow \tilde{V} \subseteq \mathbb{R}^n$, sowie

$$X = \zeta^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad X = \eta^j \frac{\partial}{\partial y^j},$$

mit $\zeta^i: V \rightarrow \mathbb{R}$ und $\eta^j: \tilde{V} \rightarrow \mathbb{R}$. Dann ist wegen (2.47)

$$\zeta^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \cdot \eta^j$$

(streng genommen: $\zeta^i \circ \tau(y) = \frac{\partial x^i}{\partial y^j}(y) \cdot \eta^j(y)$, wenn $x = \tau(y)$ der Kartenwechsel ist).

Ähnlich ist für

$$\omega = \zeta_i(x) dx^i = \eta_j(y) dy^j$$

nach (2.49):

$$\zeta_i = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \eta_j.$$

(2.54) Definition. Sei M glatte Mannigfaltigkeit und $U \subseteq M$ offen.

- (a) Ein Vektorfeld $X: U \rightarrow TM$ auf U heißt **glatt**, wenn für alle Karten $x: \tilde{U} \rightarrow \tilde{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ (mit $U \cap \tilde{U} = \emptyset$) gilt: ist $X|_{U \cap \tilde{U}} = \zeta^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ mit $\zeta^i: x(\tilde{U} \cap U) \rightarrow \mathbb{R}$, so muss ζ^i glatt sein für $i = 1, \dots, n$.
- (b) Eine Differentialform $\omega: U \rightarrow TM^*$ auf U heißt **glatt**, wenn für alle Karten $x: \tilde{U} \rightarrow \tilde{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ (mit $U \cap \tilde{U} = \emptyset$) gilt: ist $\omega|_{U \cap \tilde{U}} = \eta_i dx^i$ mit $\eta_i: x(\tilde{U} \cap U) \rightarrow \mathbb{R}$, so muss η_i glatt sein für $i = 1, \dots, n$.

(2.55) Kommentar.

- (a) Sei $U \subseteq M$ offen. Wir bezeichnen

$$\mathfrak{X}(U) := \{X: U \rightarrow TM : X \text{ glattes Vektorfeld auf } U\}$$

und

$$\Omega(U) := \{\omega: U \rightarrow TM^* : \omega \text{ glatte Differentialform auf } U\}.$$

- (b) Man beachte, dass $\mathfrak{X}(U)$ bzw. $\Omega(U)$ vermöge

$$\begin{aligned} (X_1 + X_2)(p) &:= X_1(p) + X_2(p), & (\lambda X)(p) &:= \lambda \cdot X(p), \\ (\omega_1 + \omega_2)(p) &:= \omega_1(p) + \omega_2(p), & (\lambda \omega)(p) &:= \lambda \cdot \omega(p) \end{aligned}$$

nicht nur zu einem \mathbb{R} -Vektorraum wird, sondern mit

$$(f \cdot X)(p) := f(p) \cdot X(p) \quad \text{bzw.} \quad (f \cdot \omega)(p) := f(p) \cdot \omega(p),$$

mit $f \in \mathcal{E}(U)$, sogar zu einem $\mathcal{E}(U)$ -Modul.

- (c) Ist $x: U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte, so gilt $\mathfrak{X}(U) \cong \mathcal{E}(U)^n$ bzw. $\Omega(U) \cong \mathcal{E}(U)^n$ als $\mathcal{E}(U)$ -Moduln, in dem man $X \in \mathfrak{X}(U)$ gerade seine Komponentenfunktionen $\zeta^1, \dots, \zeta^n \in \mathcal{E}(U)$ (genauer $\zeta^1 \circ x, \dots, \zeta^n \circ x$) zuordnet,

$$X = \zeta^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

(ähnlich für $\Omega(U)$). Ist $U \subseteq M$ kein Kartengebiet (z.B. wenn M kompakt und $U = M$ ist), so kann die (Modul-)Struktur von $\mathfrak{X}(U)$ bzw. $\Omega(U)$ sehr viel komplizierter sein als $\mathcal{E}(U)^n$. Zum Beispiel kann für die 2-Sphäre S^2 der $\mathcal{E}(S^2)$ -Modul $\mathfrak{X}(S^2)$ nicht frei vom Rang 2 sein, d.h.: $\mathfrak{X}(S^2) \not\cong \mathcal{E}(S^2)^2$, denn sonst gäbe es eine Basis (X_1, X_2) , d.h. $(X_1(p), X_2(p))$ müsste in jedem Punkt p eine Basis von TM_p sein (Übung). Nach dem **Igelsatz** (vgl. Anhang A) hat aber jedes glatte Vektorfeld auf S^2 eine Nullstelle.

(2.56) Definition. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $U \subseteq M$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Für jedes $p \in U$ definieren wir das **Differential von f in p** durch

$$df_p: TM_p \rightarrow \mathbb{R}, df_p(\xi) := \xi(f_p),$$

und das **(totale) Differential** durch

$$df: U \rightarrow TM^*, df(p) := df_p.$$

(2.57) Bemerkung. Sei M glatte Mannigfaltigkeit, $U \subseteq M$ offen und $f \in \mathcal{E}(U)$.

- (a) Es ist df eine glatte Differentialform, $df \in \Omega(U)$;
- (b) Ist $x: \tilde{U} \rightarrow \tilde{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte auf M und bezeichnet $f \in \mathcal{E}(V)$ mit $V := x(U \cap \tilde{U}) \subseteq \tilde{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ auch die lokale Beschreibung von f (genauer $f \circ x^{-1}$), so gilt für df die Koordinatenbeschreibung:

$$df|_{U \cap \tilde{U}} = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i.$$

Beweis. Offenbar ist $df_p: TM_p \rightarrow \mathbb{R}$, $\xi \rightarrow \xi(f_p)$, linear, also df_p ein Kovektor in p , also df eine Differentialform auf U . Ist $x: \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ eine Karte, $p \in U \cap \tilde{U}$, so ist mit $x_0 = x(p) \in V = x(U \cap \tilde{U}) \subseteq \tilde{V}$.

$$df_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) = \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{x_0} (f \circ x^{-1}) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0),$$

also $df_p = \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) dx^i|_p$, also: $df|_{U \cap \tilde{U}} = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$. Insbesondere ist df glatt, $df \in \Omega(U)$. \square

(2.58) Kommentar.

- (a) Für eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine glatte Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ betrachtet man häufig den Gradienten von f ,

$$\text{grad}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n} \right) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

als ein Vektorfeld auf U . Bemerkung (2.57) (oder die Kettenregel) zeigt aber, dass bei einem Koordinatenwechsel $x = \tau(y)$ sich die Komponenten des Gradienten der Funktion $g = f \circ \tau$ wie die Komponenten einer Differentialform (und nicht wie die eines Vektorfeldes) transformieren:

$$\frac{\partial g}{\partial y^j} = \frac{\partial f}{\partial x^i} \circ \tau \cdot \frac{\partial x^i}{\partial y^j},$$

also mit

$$\eta_j = \frac{\partial f}{\partial y^j}, \xi_i = \frac{\partial f}{\partial x^i} : \eta_j = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \xi_i.$$

Auf einer glatten Mannigfaltigkeit hat man daher *keinen* Gradienten im Sinne einer Abbildung „ $\text{grad}: \mathcal{E}(U) \rightarrow \mathfrak{X}(U)$ “, sondern nur ein totales Differential

$$d: \mathcal{E}(U) \rightarrow \Omega(U), f \mapsto df.$$

- (b) Ist $x: U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte auf M , so hat man insbesondere die Koordinatenfunktionen $f = x^i$ (früher mit $\pi^i \in \mathcal{E}(U)$ bezeichnet) und daher nun zwei Definitionen für die Ausdrücke $dx^i \in \Omega(U)$ (einmal ist $(dx^1|_p, \dots, dx^n|_p)$ duale Basis zu $(\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p)$, ein anderes Mal ist nach (2.56) $dx^i_p(\xi) = \xi(x^i_p)$), die aber übereinstimmen wegen $(x_0 = x(p))$:

$$dx^i_p \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right) = \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p (x^i_p) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j}(x_0) = \delta_j^i = dx^i|_p \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right), \quad \forall 1 \leq i, j \leq n.$$

(2.59) Definition. Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten, $\Phi: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung, $p \in M$ und $q := \Phi(p)$. Wir definieren **das Differential von Φ in p** durch

$$D\Phi_p: TM_p \rightarrow TN_q, \quad D\Phi_p(\xi)(g_q) := \xi((g \circ \Phi)_p),$$

$\xi \in TM_p, g_q \in \mathcal{E}_p(N)$ (und $g \in \mathcal{E}(U), U \subseteq N$ offene Umgebung von q, g ein Repräsentant von $s = g_q \in \mathcal{E}(N)$).

(2.60) Kommentar.

- (a) $D\Phi_p(\xi)$ ist wohldefiniert, denn repräsentiert $g \in \mathcal{E}(U)$ und $\tilde{g} \in \mathcal{E}(\tilde{U})$ den gleichen Keim in $q, g_q = \tilde{g}_q$, so repräsentieren auch $g \circ \Phi \in \mathcal{E}(\Phi^{-1}(U))$ und $\tilde{g} \circ \Phi \in \mathcal{E}(\Phi^{-1}(\tilde{U}))$ den gleichen Funktionskeim in $p, (g \circ \Phi)_p = (\tilde{g} \circ \Phi)_p$.
- (b) Es ist $D\Phi_p: TM_p \rightarrow TN_q$ eine lineare Abbildung:

$$\begin{aligned} D\Phi_p(\xi_1 + \xi_2) &= D\Phi_p(\xi_1) + D\Phi_p(\xi_2), & \xi_1, \xi_2 &\in TM_p \\ D\Phi_p(\lambda \xi) &= \lambda \cdot D\Phi_p(\xi), & \lambda &\in \mathbb{R}, \xi \in TM_p. \end{aligned}$$

(2.61) Bemerkung. Seien M^n, N^r glatt, $\Phi: M \rightarrow N$ glatt, $p \in M$ und $q = \Phi(p) \in N$. Seien $x: U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ und $y: \tilde{U} \rightarrow \tilde{V} \subseteq \mathbb{R}^r$ Karten um p bzw. $q, x_0 = x(p), y_0 = y(q)$ und $\Phi(U) \subseteq \tilde{U}$. Sei schließlich $\Phi: V \rightarrow \tilde{V}$ die Koordinatenbeschreibung von Φ bzgl. x und y (also genauer $y \circ \Phi \circ x^{-1}$). Die Matrix der linearen Abbildung $D\Phi_p$ bzgl. der Basen $(\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p)$ von TM_p und $(\frac{\partial}{\partial y^1}|_q, \dots, \frac{\partial}{\partial y^r}|_q)$ von TN_q ist dann die Jacobi-Matrix von Φ in x_0 , also:

$$D\Phi_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) = \frac{\partial \Phi^j}{\partial x^i}(x_0) \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_q.$$

Beweis. Zwei Tangentenvektoren $\eta, \tilde{\eta} \in TN_q$ sind bereits dann gleich, wenn sie auf den Keimen der Koordinatenfunktionen übereinstimmen, $\eta(y^j_q) = \tilde{\eta}(y^j_q)$ ($j = 1, \dots, r$) (vgl. Satz (2.43)),

$$\eta = \eta(y^j_q) \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_q.$$

Es ist aber für $k = 1, \dots, r$:

$$\begin{aligned} D\Phi_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) (y^k_q) &= \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p ((y^k \circ \Phi)_p) = \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{x_0} \underbrace{y^k \circ \Phi \circ x^{-1}}_{=\Phi^k} = \frac{\partial \Phi^k}{\partial x^i}(x_0) \\ &= \frac{\partial \Phi^j}{\partial x^i}(x_0) \cdot \delta_j^k = \frac{\partial \Phi^j}{\partial x^i}(x_0) \cdot \frac{\partial y^k}{\partial y^j} = \left(\frac{\partial \Phi^j}{\partial x^i}(x_0) \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_q \right) (y^k_q) \\ \implies D\Phi_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) &= \frac{\partial \Phi^j}{\partial x^i}(x_0) \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_q. \quad \square \end{aligned}$$

(2.62) Beispiel.

- (a) Sei V ein endlich-dimensionaler, reeller Vektorraum mit seiner natürlichen Mannigfaltigkeitsstruktur. Dann ist für jedes $v \in V$ der Tangentialraum TV_v *kanonisch* isomorph zu V vermöge

$$\lambda_v: V \rightarrow TV_v, \lambda_v(w) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (v + tw)$$

(d.h.: $\lambda_v(w) = \dot{\alpha}(0)$ für $\alpha(t) = v + tw, t \in \mathbb{R}$).

- (b) Identifiziert man insbesondere \mathbb{R} mit $T\mathbb{R}_t$ vermöge $\lambda_t: \mathbb{R} \rightarrow T\mathbb{R}_t$, für jedes $t \in \mathbb{R}$, so gilt für eine glatte Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ (M glatte Mannigfaltigkeit), dass

$$Df_p = \lambda_{f(p)} \circ df_p$$

(kurz: $Df_p = df_p$), Übung.

(2.63) Bemerkung. Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten, $\Phi: M \rightarrow N$ glatt, $p \in M$ und $D\Phi_p: TM_p \rightarrow TN_q$ ihr Differential in $p, q := \Phi(p)$. Ist $\zeta = \dot{\alpha}(0) \in TM_p$, für eine glatte Kurve $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ durch p , so ist:

$$D\Phi_p(\dot{\alpha}(0)) = (\Phi \circ \alpha)'(0).$$

Beweis. Sei $s = g_q \in \mathcal{E}_q(N)$ beliebig, $g \in \mathcal{E}(V)$ ein Vertreter, $V \in \mathfrak{A}(q)$ offen. Dann ist mit $\beta := \Phi \circ \alpha$:

$$\begin{aligned} D\Phi_p(\dot{\alpha}(0))(g_q) &= \dot{\alpha}(0)((g \circ \Phi)_p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} ((g \circ \Phi) \circ \alpha)(t) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 (g \circ \beta)(t) = \dot{\beta}(0)(g_q), \end{aligned}$$

also $D\Phi_p(\dot{\alpha}(0)) = \dot{\beta}(0)$. □

(2.64) Definition. Sei M^{n+k} eine glatte Mannigfaltigkeit und $N^n \subseteq M$ abgeschlossen. Es heißt N^n eine **Untermannigfaltigkeit der Codimension k von M** , wenn gilt: Für jedes $p \in N$ gibt es eine offene Umgebung $U \subseteq M$ von p und eine glatte Abbildung $F: U \rightarrow \mathbb{R}^k$, so dass gilt:

- (a) $N \cap U = \{x \in U : F(x) = 0\}$
 (b) $\text{rg}(DF_q: TM_p \rightarrow T\mathbb{R}_{F(p)}^k \cong \mathbb{R}^k) = k$.

Ist $k = 1$, so spricht man von einer **Hyperfläche**.

(2.65) Satz. Sei $N^n \subseteq M^{n+k}$ eine Untermannigfaltigkeit der Codimension k in M^{n+k} und $i: N \hookrightarrow M$ die Inklusion. Dann ist N (zusammen mit seiner Teilraumtopologie) eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension n und es gibt genau eine glatte Struktur auf N , so dass für eine beliebige stetige Abbildung $\Phi: P \rightarrow N$ (P glatte Mannigfaltigkeit) gilt: Φ ist glatt genau dann, wenn $i \circ \Phi: P \rightarrow M$ glatt ist (universelle Eigenschaft).

(2.66) Kommentar.

- (a) Insbesondere zeigt das Beispiel $\Phi = \mathbb{1}: N \rightarrow N$, dass die Inklusion $i: N \rightarrow M$ selbst glatt ist.

- (b) Für den Beweis erinnern wir an den **impliziten Funktionensatz**: Ist $U \subseteq \mathbb{R}^{n+k} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ offen, $F: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ glatt, $(x_0, y_0) \in U$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \mathbb{R}^k$, mit $F(x_0, y_0) = 0$ und

$$\det \left(\frac{\partial F^i}{\partial y^j} \right)_{1 \leq i, j \leq k} (x_0, y_0) \neq 0,$$

so gibt es offene Umgebungen $V \subseteq \mathbb{R}^n$ von x_0 , $W \subseteq \mathbb{R}^k$ von y_0 , so dass $V \times W \subseteq U$ ist und eine glatte Funktion $h: V \rightarrow W$, so dass für alle $(x, y) \in V \times W$ gilt:

$$F(x, y) = 0 \iff y = h(x).$$

Beweis von (2.65). (a) Sei $N \subseteq M$ versehen mit der Teilraumtopologie, $p \in N$ und $\tilde{U} \subseteq M$ offene Umgebung von p , sowie $F: \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^k$ mit $\tilde{U} \cap N = F^{-1}(0)$ und $\text{rg}(DF_p) = k$.

Sei (nach eventueller Verkleinerung von \tilde{U}) $\varphi: \tilde{U} \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ eine Karte um p . Dann gilt für $G := F \circ \varphi^{-1}: U \rightarrow \mathbb{R}^k$: $G(x_0, y_0) = 0$, wo $(x_0, y_0) = \varphi(p)$ sei, und

$$\det \left(\frac{\partial G^i}{\partial y^j} (x_0, y_0) \right)_{1 \leq i, j \leq k} \neq 0,$$

wenn die Anzahl der Koordinaten y^1, \dots, y^k (aus x^1, \dots, x^{n+k}) geeignet ist, denn die volle Funktionalmatrix

$$\left(\frac{\partial G^i}{\partial x^j} \right)_{\substack{1 \leq j \leq k \\ 1 \leq j \leq n+k}} (x_0, y_0) \text{ hat vollen Rang } k.$$

Wir nehmen o.E. an, dass y^1, \dots, y^k die letzten k Koordinaten von x^1, \dots, x^{n+k} ist, $y^i = x^{n+i}$ ($i = 1, \dots, k$). Nach dem impliziten Funktionensatz gibt es also offene Umgebungen $V \subseteq \mathbb{R}^n$ von x_0 , $W \subseteq \mathbb{R}^k$ von y_0 mit $V \times W \subseteq U$ und ein glattes $h: V \rightarrow W$ mit

$$G(x, y) = 0 \iff y = h(x), \quad \forall (x, y) \in V \times W.$$

Setze nun

$$\tilde{V} := N \cap \varphi^{-1}(V \times W)$$

und

$$\psi: \tilde{V} \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n, \quad \psi := \pi \circ \varphi$$

wo $\pi: \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Projektion auf die ersten n Koordinaten x^1, \dots, x^n ist. Es ist $\tilde{V} \subseteq N$ offene Umgebung von p , $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Umgebung von x_0 und $\psi: \tilde{V} \rightarrow V$ ein Homöomorphismus, denn

$$V \rightarrow \tilde{V}, \quad x \mapsto \varphi^{-1}(x, h(x))$$

ist sein stetiges Inverses. Als Teilraum von M ist N hausdorffsch und von abzählbarer Topologie. Also ist N topologische Mannigfaltigkeit der Dimension n .

- (b) Man sehe nun N mit dem Atlas

$$(\psi_p: \tilde{V}_p \rightarrow V_p)_{p \in N}$$

wie oben beschrieben. Dann sind die Übergänge $\psi_q \circ \psi_p^{-1}: \psi_p(\tilde{V}_p \cap \tilde{V}_q) \rightarrow \psi_q(\tilde{V}_p \cap \tilde{V}_q)$ alle glatt, denn: Sei o.E. $\tilde{V}_p = \tilde{V}_q =: \tilde{V} \subseteq N$ und $\tilde{V} = N \cap \tilde{U}$. Es ist dann $\psi_q \circ \psi_p: V_p \rightarrow V_q$ gegeben durch

$$\psi_q \circ \psi_p^{-1}(x) = \psi_q \circ \varphi_p^{-1}(x, h_p(x)) = \pi_q \circ \varphi_q \circ \varphi_p^{-1}(x, h_p(x)),$$

wo $\pi_q: \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Projektion auf die Koordinaten ist, mit der die Karte ψ_q gebaut ist. Da h_p glatt ist, $\varphi_q \circ \varphi_p^{-1}$ glatt ist und π_q glatt ist, ist $\psi_q \circ \psi_p^{-1}$ glatt. (Man setze dann $c = [\mathfrak{A}]$.)

- (c) Die universelle Eigenschaft folgt aus der Tatsache, dass eine stetige Abbildung $\Phi: U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, genau dann glatt ist, wenn mit einer glatten Funktion $h: V \rightarrow W \subseteq \mathbb{R}^k$ die Funktion $\Psi: U \rightarrow V \times W \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$, $z \mapsto (\Phi(z), h \circ \Phi(z))$ glatt ist (denn $\Phi = \pi \circ \Psi$). \square

(2.67) Kommentar.

- (a) Man beachte, dass $i: N \hookrightarrow M$ nach Definition der Teilraumtopologie ein Homöomorphismus auf sein Bild ist (klar), dass i injektiv ist (ist auch klar) und dass i eine **Immersion** ist (Übung), d.h.: $Di_p: TN_p \rightarrow TM_p$ injektiv ist, denn bzgl. der obigen Karten ψ von N um p und φ von M um p ist

$$\varphi \circ i \circ \psi^{-1}(x) = (x, h(x)),$$

also

$$\text{Jac}(\varphi \circ i \circ \psi^{-1})(x) = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_n \\ \text{Jac}(h)(x) \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{aligned} \dim(\ker Di_p) &= n - \text{rg}(Di_p) \\ &= n - \text{rg}(\text{Jac}(\varphi \circ i \circ \psi^{-1}))(x_0) \\ &= n - n = 0. \end{aligned}$$

- (b) Allgemein nennt man eine glatte Abbildung $\Phi: N \rightarrow M$ eine **Einbettung**, wenn Φ

- injektiv,
- immersiv,
- Homöomorphismus auf das Bild ist.

Es gilt dann, dass $\Phi(N) \subseteq M$ eine (nicht notwendig abgeschlossene) Untermannigfaltigkeit von M ist (siehe (3.40)).

(2.68) Definition. Eine glatte Abbildung $\Phi: M \rightarrow N$ heißt eine

- (a) **Immersion**, wenn $D\Phi_p: TM_p \rightarrow TN_{\Phi(p)}$ injektiv ist, für alle $p \in M$;
 (b) **Submersion**, wenn $D\Phi_p: TM_p \rightarrow TN_{\Phi(p)}$ surjektiv ist, für alle $p \in M$.

(2.69) Vorbereitung.

- (a) Sind M, N und P glatte Mannigfaltigkeiten, $\Phi: M \rightarrow N$ und $\Psi: N \rightarrow P$ glatte Abbildungen, so ist auch $\Psi \circ \Phi: M \rightarrow P$ auch glatt und für alle $p \in M$ gilt (mit $q = \Phi(p)$):

$$D(\Psi \circ \Phi)_p = D\Psi_q \circ D\Phi_p$$

(Kettenregel, Übung).

- (b) Es folgt insbesondere für jeden Diffeomorphismus $\Phi: M \rightarrow M$, dass für jedes $p \in M$ das Differential $D\Phi_p: TM_p \rightarrow TM_{\Phi(p)}$ ein Isomorphismus ist, denn $D(\mathbb{1}_M)_p = \mathbb{1}_{TM_p}$ und aus $\Phi^{-1} \circ \Phi = \mathbb{1}_M$ folgt:

$$\mathbb{1}_{TM_p} = D(\mathbb{1}_M)_p = D(\Phi^{-1})_{\Phi(p)} \circ D\Phi_p,$$

also $D\Phi_p$ Isomorphismus mit:

$$(D\Phi_p)^{-1} = D(\Phi^{-1})_{\Phi(p)}.$$

(2.70) Satz. Seien M^{n+k} und P^k glatte Mannigfaltigkeiten und $\Phi: M \rightarrow P$ eine glatte Abbildung. Sei $q \in P$, so dass $N := \Phi^{-1}(q) \neq \emptyset$ ist und $D\Phi_p: TM_p \rightarrow TP_q$ surjektiv ist, für alle $p \in N$ (q heißt dann ein regulärer Wert von Φ). Dann ist $N \subseteq M$ eine Untermannigfaltigkeit der Codimension k .

Beweis. $N = \Phi^{-1}(q) \subseteq M$ ist abgeschlossen, da Φ stetig. Sei $p \in N$ und $\varphi: U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^k$ eine Karte um $q \in P$ mit $\varphi(q) = 0 \in V$. Dann gilt für die Abbildung $F: \Phi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^k$,

$$F := \varphi \circ \Phi|_{\Phi^{-1}(U)}.$$

F ist glatt, $F^{-1}(0) = N \cap \Phi^{-1}(U)$ und

$$DF_p = D(\varphi \circ \Phi)_p = D\varphi_q \circ D\Phi_p.$$

Da $\varphi: U \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus ist, ist $D\varphi_q: TP_q \rightarrow T\mathbb{R}_0^k \cong \mathbb{R}^k$ ein Isomorphismus. Da $D\Phi_p$ surjektiv ist, ist daher auch $DF_p: TM_p \rightarrow \mathbb{R}^k$ surjektiv. Also ist $N \subseteq M$ Untermannigfaltigkeit der Codimension k . □

(2.71) Beispiel.

- (a) Ist $f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ glatt, $M = f^{-1}(0) \neq \emptyset$ und $\text{grad}(f)(x) \neq 0$, für alle $x \in M$, so ist $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ also eine Hyperfläche. Z.B. gilt das für $M = S^n$, denn für

$$f(x) = \|x\|^2 - 1$$

ist $\text{grad}(f)(x) = 2x \neq 0, \forall x \in S^n$. (Dies gibt dann eine glatte Struktur auf S^n , die mit der bekannten übereinstimmt (Übung).)

- (b) Betrachte $\Phi: \text{Mat}_n \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \text{Sym}_n \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n+1)}, \Phi(A) = {}^t A \cdot A$, wo $\text{Mat}_n \mathbb{R}$ der Vektorraum aller $(n \times n)$ -Matrizen (mit reellen Einträgen) und $\text{Sym}_n \mathbb{R}$ den Unterraum der symmetrischen Matrizen bezeichnet. Wir behaupten, dass $\mathbb{1} \in \text{Sym}_n \mathbb{R}$ ein regulärer Wert von Φ ist. (Übung: Berechne $D\Phi_{\mathbb{1}}: \text{Mat}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Sym}_n(\mathbb{R}), B \rightarrow {}^t B + B, D\Phi_{\mathbb{1}}(B) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \Phi(\mathbb{1} + tB)$.) Es folgt:

$$\mathcal{O}(n) = \Phi^{-1}(\mathbb{1}),$$

die **orthogonale Gruppe**, ist eine Untermannigfaltigkeit der Codimension $\frac{1}{2}n(n+1)$ und daher nach (2.67) eine Mannigfaltigkeit der Dimension

$$n^2 - \frac{1}{2}n(n+1) = n^2 - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n = \frac{1}{2}n(n-1).$$

3 Kapitel 3.

Dynamische Systeme

(3.1) Motivation. Ein dynamisches System auf einer glatten Mannigfaltigkeit M ordnet jedem Punkt $p \in M$ „seine Dynamik“ $\varphi(p): I(p) \rightarrow M$ zu, das ist eine glatte Kurve

$$t \mapsto \varphi(p)(t) =: \varphi^t(p),$$

wo $I(p) = (t_-(p), t_+(p))$ ein offenes Intervall in \mathbb{R} ist mit $0 \in I(p)$, also

$$t_-(p) \in [-\infty, 0), \quad t_+(p) \in (0, \infty]$$

und $\varphi^0(p) = p$ ist. Dabei verlangt man die **Verträglichkeitsbedingung**: Für alle $p \in M$ und $t \in I(p)$ gilt:

$$s \in I(\varphi^t(p)) \iff s + t \in I(p)$$

und

$$\varphi^s(\varphi^t(p)) = \varphi^{s+t}(p).$$

Außerdem soll die Zuordnung $p \mapsto \varphi(p)$ „glatt“ sein.

(3.2) Definition. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Ein **dynamisches System auf M** ist gegeben durch eine glatte Abbildung $\varphi: \Omega \rightarrow M$, so dass gilt:

- (a) $\Omega \subseteq M \times \mathbb{R}$ ist offen, $M \times \{0\} \subseteq \Omega$ und für jedes $p \in M$ ist $I(p) := \pi_2(\Omega \cap (\{p\} \times \mathbb{R}))$ zusammenhängend (wo $\pi_2: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ die Projektion auf den zweiten Faktor ist);
- (b) Für alle $p \in M$ und $t \in I(p)$ ist $s \in I(\varphi^t(p))$, genau wenn $s + t \in I(p)$ ist und dann gilt:

$$\varphi^s(\varphi^t(p)) = \varphi^{s+t}(p).$$

(3.3) Kommentar.

- (a) Da die Projektion $\pi_2: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine offene Abbildung ist, ist also $I(p) \subseteq \mathbb{R}$ offen und zusammenhängend mit $0 \in I(p)$, also $I(p)$ ein offenes Intervall

$$I(p) = (t_-(p), t_+(p))$$

mit

$$t_-(p) \in [-\infty, 0), \quad t_+(p) \in (0, \infty].$$

$t_-(p)$ heißt der **Anfang von p** , $t_+(p)$ **das Ende von p** .

(b) Beachte, dass für $p, q \in M$ die Kurven

$$C_p = \text{Im}(\varphi(\{p\} \times I(p))) \subseteq M$$

und C_q entweder gleich sind (falls es ein $t \in I(p)$ gibt mit $\varphi^t(p) = q$) oder disjunkt, $C_p \cap C_q = \emptyset$, denn ist $r \in C_p \cap C_q$ also $r = \varphi^t(p) = \varphi^s(q)$, so ist

$$\begin{aligned} q &= \varphi^0(q) = \varphi^{-s+s}(q) = \varphi^{-s}(\varphi^s(q)) = \varphi^{-s}(r) \\ &= \varphi^{-s}(\varphi^t(p)) = \varphi^{t-s}(p), \end{aligned}$$

also $q \in C_p$ und damit $C_q = C_p$.

(c) Da $\Omega \subseteq M \times \mathbb{R}$ offen ist, ist auch für jedes $t \in \mathbb{R}$

$$D_t := \{p \in M : t \in I(p)\}$$

offen, denn ist $(p, t) \in \Omega$, so gibt es offene Umgebungen $U \subseteq M$ von p und $J \subseteq \mathbb{R}$ von t , so dass $U \times J \subseteq \Omega$ und damit $(q, t) \in \Omega$, für alle $q \in U$ das ist: $q \in D_t \implies U \subseteq D_t$. Definiert man dann

$$\varphi^t: D_t \rightarrow M, p \mapsto \varphi^t(p),$$

so ist das Bild gerade $D_{-t} \subseteq M$, denn $0 \in I(p)$ und damit $-t \in I(\varphi^t(p))$, also $\text{Im}(\varphi^t) \subseteq D_{-t}$, und ist $q \in D_{-t}$, so ist $p := \varphi^{-t}(q)$ ein Urbild von q unter φ^t .

(3.4) Bemerkung. Es ist $D_0 = M$ und für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist $\varphi^t: D_t \rightarrow D_{-t}$ ein Diffeomorphismus.

Beweis. Da $0 \in I(p)$, für alle $p \in M$, folgt: $D_0 = M$. Da φ glatt ist und die Inklusion $i^t: D_t \hookrightarrow M, p \mapsto (p, t)$, auch, ist auch $\varphi^t = \varphi \circ i^t$ glatt. Schließlich ist wegen $\varphi^0 = \mathbb{1}_M$ und

$$\varphi^{-t} \circ \varphi^t(p) = \varphi^{-t}(\varphi^t(p)) \stackrel{\text{Vertr\"ag.Bed.}}{=} \varphi^{-t+t}(p) = \varphi^0(p) = p$$

und

$$\varphi^t \circ \varphi^{-t}(p) = p$$

φ^{-t} invers zu φ^t . □

(3.5) Kommentar.

(a) Ist $I(p) = \mathbb{R}$, für alle $p \in M$, also $\Omega = M \times \mathbb{R}$, so nennen wir das dynamische System **global**. In diesem Fall ist also $D_t = M$, für alle $t \in \mathbb{R}$, und

$$\varrho: \mathbb{R} \rightarrow \text{Diff}(M), t \mapsto \varphi^t$$

ein Homomorphismus, d.h. die Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ operiert auf M durch Diffeomorphismen vermöge

$$\Phi: \mathbb{R} \times M \rightarrow M, (t, p) \mapsto t.p = \varphi^t(p).$$

Beachte aber, dass hier nicht nur für jedes feste $t \in \mathbb{R}$ die Abbildung $\varphi^t: M \rightarrow M$ glatt ist, sondern sogar „das ganze Φ “. (\mathbb{R} ist eben nicht nur eine Gruppe, sondern zudem eine Mannigfaltigkeit.) Man nennt dann die Familie $(\varphi^t)_{t \in \mathbb{R}}$ eine **1-Parametergruppe** in $\text{Diff}(M)$.

(b) Im Allgemeinen (auch wenn das System nicht global ist), nennt man die Familie

$$(\varphi^t: D_t \rightarrow D_{-t})_{t \in \mathbb{R}}$$

von Diffeomorphismen den zugeordneten **Fluss von φ** .

(3.6) Definition. Sei φ ein dynamisches System auf einer glatten Mannigfaltigkeit M . Dann nennen wir $X: M \rightarrow TM$,

$$X(p) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi^t(p) \in TM_p$$

das zugehörige **Vektorfeld** auf M .

(3.7) Bemerkung. X ist glatt, $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Beweis. Sei $p \in M$ und $x: \tilde{U} \rightarrow \tilde{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte um p . Da φ stetig ist und $\varphi^0(p) = p$, existiert ein $\varepsilon > 0$ und eine Umgebung $U \subseteq M$ von p mit $\varphi^t(q) \in \tilde{U}$, für $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ und $q \in U$. Ohne Einschränkung: $U \subseteq \tilde{U}$. In der Karte (x, t) von $\Omega \subseteq M \times \mathbb{R}$ um p von M sei φ dann beschrieben durch

$$\varphi(x, t) = (\varphi^1(x, t), \dots, \varphi^n(x, t)) \in V, V := x(U) \subseteq \tilde{V}, \varphi^j \in \mathcal{E}(V \times (-\varepsilon, \varepsilon)).$$

Für die Kurven $t \mapsto \varphi^t(q)$, $q \in U$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, folgt dann in Koordinaten, dass

$$X_q = \frac{\partial \varphi^1}{\partial t}(q, 0) \left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_q + \dots + \frac{\partial \varphi^n}{\partial t}(q, 0) \left. \frac{\partial}{\partial x^n} \right|_q$$

ist (Übung). Da $\left. \frac{\partial \varphi^j}{\partial t}(-, 0) \in \mathcal{E}(V) \right.$ ist, ist also X glatt auf U , insbesondere um p . Da p beliebig war, folgt: $X \in \mathfrak{X}(M)$. □

(3.8) Bemerkung. Sei φ ein dynamisches System auf M und $X \in \mathfrak{X}(M)$ sein zugeordnetes Vektorfeld. Dann gilt für alle $p \in M$ und sogar für alle $t \in I(p)$:

$$X_{\varphi^t(p)} = \frac{d}{dt} \varphi^t(p) \left(= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=t} \varphi^s(p) \right)$$

Beweis. Sei $p \in M$ und $t \in I(p)$. Dann gilt wegen der **Flusseigenschaft** $\varphi^{s+t} = \varphi^s \circ \varphi^t$:

$$X_{\varphi^t(p)} = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \varphi^s(\varphi^t(p)) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \varphi^{t+s}(p) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=t} \varphi^s(p) = \frac{d}{dt} \varphi^t(p). \quad \square$$

(3.9) Kommentar.

(a) Ist $x: U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte auf M und $X|_U$ bzgl. dieser Karte durch

$$X|_U = \zeta^j \frac{\partial}{\partial x^j} \text{ mit } \zeta^j \in \mathcal{E}(V), j = 1, \dots, n$$

gegeben, und $\varphi|_{\tilde{U} \times (-\varepsilon, \varepsilon)}$ (mit eventuell verkleinerten U und $\varepsilon > 0$ klein genug) durch

$$\varphi(x, t) = (\varphi^1(x, t), \dots, \varphi^n(x, t)) \text{ und } \varphi^j \in \mathcal{E}(V \times (-\varepsilon, \varepsilon)), j = 1, \dots, n$$

gegeben, so lösen also die Kurven

$$(-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n, t \mapsto (\varphi^1(x, t), \dots, \varphi^n(x, t))$$

die **gewöhnliche Differentialgleichung** auf V , die durch

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= \zeta^1(x) \\ &\vdots \\ \dot{x}^n &= \zeta^n(x) \end{aligned}, \text{ kurz: } \dot{x} = \zeta(x)$$

gegeben ist, zum Anfangswert x , denn

$$\frac{d\varphi^j}{dt}(x, t) \stackrel{(3.8)}{=} \zeta^j(\varphi(x, t)), j = 1, \dots, n$$

und

$$\varphi(x, 0) = x.$$

- (b) Man hat deshalb gute Chancen das dynamische System φ auf M durch **Integration der gewöhnlichen Differentialgleichungen**.

$$\dot{p} = X(p)$$

auf M , d.h.: durch Lösen der gewöhnlichen Differentialgleichung in den Karten x von M ,

$$\dot{x} = \zeta(x)$$

(wo $\zeta = (\zeta^1, \dots, \zeta^n)$ und $X = \zeta^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ ist) zurück zu gewinnen.

(3.10) Definition. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $X \in \mathfrak{X}(M)$.

- (a) Man nennt eine glatte Kurve $\alpha: I \rightarrow M$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, eine **Integralkurve** (oder auch eine **Lösungskurve**) für X , wenn für alle $t \in I$ gilt:

$$\dot{\alpha}(t) = X_{\alpha(t)}.$$

- (b) Sie heißt **maximal**, wenn für jede Integralkurve $\beta: J \rightarrow M$ von X mit $I \subseteq J$, $J \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall in \mathbb{R} , und $\beta|_I = \alpha$ gilt: $J = I$.

(3.11) Satz. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $p \in M$. Dann gibt es genau eine maximale Integralkurve $\alpha: I \rightarrow M$ von X mit $0 \in I$ und $\alpha(0) = p$.

(3.12) Vorbereitung. Ist $x: U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$, $X|_U = \zeta^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ und $\alpha|_{\alpha^{-1}(U)}: \alpha^{-1}(U) \rightarrow U$ dort gegeben durch $x(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$, so ist α Integralkurve, wenn $t \mapsto x(t)$ die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\dot{x} = \zeta(x) \text{ auf } V$$

(für alle Karten x von M) löst. Nach dem **Existenz- und Eindeutigkeitsatz von Picard-Lindelöf** existiert eine solche Lösung zunächst auf dem Definitionsgebiet U einer Karte $x: U \rightarrow V$ um p (und dort auch maximal). Es ist aber nicht so klar, wie man diese Lösung dann (sozusagen über etliche andere Karten hinweg) zu einer maximalen Lösung auf M fortsetzt.

Beweis von (3.11). Wir notieren eine Lösung $\alpha: I \rightarrow M$ von

$$\dot{q} = X_q$$

auf M mit Anfang $\alpha(0) = p$ mit (I, α) . Es ist dabei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $0 \in I$. Nach dem Existenzsatz von Picard-Lindelöf existiert wenigstens eine solche Lösung (I_0, α_0) , in dem man auf einer Karte $x: U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ um p das System

$$\dot{x} = \zeta(x), \quad x(0) = x_0$$

mit $x_0 = x(p)$ und $X|_U = \zeta^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, löst. Seien nun (I, α) und (J, β) zwei Lösungen. Dann ist $I \cap J$ wiederum offen und zusammenhängend mit $0 \in I \cap J$, also ein Intervall um 0. Betrachte die Teilmenge

$$K := \{t \in I \cap J : \alpha(t) = \beta(t)\}.$$

Dann ist zunächst $K \neq \emptyset$, denn $0 \in K$, da $\alpha(0) = \beta(0) = p$ ist. Es ist weiter $K \subseteq I \cap J$ abgeschlossen, denn die **Diagonale**

$$\Delta := \{(p, q) \in M \times M : p = q\} \subseteq M \times M$$

in $M \times M$ ist für einen Hausdorff-Raum abgeschlossen (Übung) und die Abbildung

$$(\alpha, \beta): I \cap J \rightarrow M \times M, \quad t \mapsto (\alpha(t), \beta(t))$$

ist stetig. Deshalb ist auch

$$K = (\alpha, \beta)^{-1}(\Delta) \subseteq I \cap J$$

abgeschlossen.

Es ist $K \subseteq I \cap J$ aber auch offen, denn ist $t_0 \in K$, so wähle eine Karte $x: U \rightarrow V$ (diesmal) um $q = \alpha(t_0) = \beta(t_0)$. Dann gibt es eine Umgebung $I_0 \subseteq I \cap J$ von t_0 , so dass $\alpha|_{I_0} \subseteq U$, $\beta|_{I_0} \subseteq U$ ist, und, wenn $\alpha|_{I_0}$ durch $x(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ und $\beta|_{I_0}$ durch $(y^1(t), \dots, y^n(t))$ beschrieben werden, $x, y: I_0 \rightarrow V$ die gewöhnliche Differentialgleichung $\dot{x} = \zeta(x)$ auf V zum Anfangswert $x(t_0) = x_0$ (mit $x_0 = x(q)$) lösen (wo $\zeta = (\zeta^1, \dots, \zeta^n): V \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $X|_U = \zeta^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ ist). Nach dem Eindeigkeitsteil im Satz von Picard-Lindelöf ist damit $x(t) = y(t)$, für alle $t \in I_0$, d.h.: $I_0 \subseteq K$.

Da $I \cap J$ zusammenhängend ist, folgt: $K = I \cap J$ (also $\alpha|_{I \cap J} = \beta|_{I \cap J}$).

Sei nun $(I_j, \alpha_j)_{j \in J}$ die Familie *aller* Lösungen von X zum Anfang p (J eine Indexmenge). Man setze

$$I_{\max} := \bigcup_{j \in J} I_j, \quad \alpha_{\max}: I_{\max} \rightarrow M, \quad \alpha_{\max}(t) := \alpha_j(t)$$

für ein $j \in J$ mit $t \in I_j$. Dann ist I_{\max} tatsächlich offen, $0 \in I_{\max}$, und α_{\max} wohldefiniert in dem Sinne, dass die Definition nicht von der Auswahl von $j \in J$ abhängt, denn je zwei Lösungen $\alpha_{j_1}: I_{j_1} \rightarrow M$ und $\alpha_{j_2}: I_{j_2} \rightarrow M$ mit $t \in I_{j_1} \cap I_{j_2}$ stimmen in t überein. Ist daher $t_0 \in I_{\max}$ und $j_0 \in J$ mit $t_0 \in I_{j_0}$, so stimmt α_{\max} auf ganz I_{j_0} mit $\alpha_{j_0}: I_{j_0} \rightarrow M$ überein und ist deshalb dort Lösung von $\dot{q} = X_q$. Also ist α_{\max} (überall) Lösung.

Nach Konstruktion von $(I_{\max}, \alpha_{\max})$ ist klar, dass $(I_{\max}, \alpha_{\max})$ maximale Lösung ist und auch, dass sie die einzige maximale Lösung ist. □

(3.13) Kommentar.

(a) Wir nennen ein dynamisches System $\varphi: \Omega \rightarrow M$ auf einer glatten Mannigfaltigkeit **maximal**, wenn gilt: Ist $\psi: \tilde{\Omega} \rightarrow M$ ein weiteres dynamisches System auf M , $\tilde{\Omega} \supseteq \Omega$ und $\psi|_{\Omega} = \varphi$, so ist $\tilde{\Omega} = \Omega$.

(b) Ist nun $X \in \mathfrak{X}(M)$, so fassen wir alle maximalen Integralkurven $(I_{\max}(p), \alpha_{\max}(p))$ nun wie folgt zusammen: Setze zunächst

$$\Omega := \{(p, t) \in M \times \mathbb{R} : t \in I_{\max}(p)\} \subseteq M \times \mathbb{R}$$

und dann $\varphi: \Omega \rightarrow M$,

$$\varphi(p, t) = \varphi^t(p) := \alpha_{\max}(p)(t).$$

(3.14) Bemerkung. Sei $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $\varphi: \Omega \rightarrow M$ wie unter (3.13, b) definiert. Dann ist φ ein maximales dynamisches System auf M .

(3.15) Vorbereitung.

(a) Ist $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\zeta: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein glattes Vektorfeld, so gilt, dass die maximalen Lösungen von

$$\dot{x} = \zeta(x) \text{ auf } V \tag{3.1}$$

auch **glatt von den Anfangswerten abhängen** (vgl. Analysis III), genauer: Ist $x_0 \in V$, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine offene Umgebung $W \subseteq V$ von x_0 , so dass für alle $x \in W$ die maximale Lösungskurve von (3.1) zum Anfangswert $x \in W$, $t \mapsto \varphi^t(x)$, mindestens auf dem Intervall $(-\varepsilon, \varepsilon)$ existiert, und die Abbildung $W \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow V$, $(x, t) \mapsto \varphi^t(x)$, glatt ist.

Beweis von (3.14). Wir prüfen zunächst die Flusseigenschaft (3.2, b): Sei also $p \in M$ und $t \in I(p) := I_{\max}(p)$. Betrachte dann die Kurven

$$\alpha: I(\varphi^t(p)) \rightarrow M, \quad s \mapsto \varphi^s(\varphi^t(p))$$

und

$$\beta: (t_-(p) - t, t_+(p) - t) \rightarrow M, \quad s \mapsto \varphi^{s+t}(p),$$

wobei nun $I(p) = (t_-(p), t_+(p))$ mit $t_-(p) \in [-\infty, 0)$ und $t_+(p) \in (0, \infty]$ und wir $-\infty - t := -\infty$ und $+\infty - t := +\infty$ für alle $t \in \mathbb{R}$ verstehen wollen. Es sind nun beide Kurven Integralkurven zu X zum gleichen Anfangswert $q = \varphi^t(p)$, denn

$$\alpha'(s) = \frac{d}{ds} \varphi^s(q) = \frac{d}{ds} \alpha_{\max}(q)(s) = X_{\alpha_{\max}(q)(s)} = X_{\varphi^s(q)} = X_{\alpha(s)}$$

und

$$\beta'(s) = \frac{d}{ds} \varphi^{s+t}(p) = \frac{d}{ds} \Big|_{\sigma=s+t} \varphi^\sigma(p) = X_{\varphi^{s+t}(p)} = X_{\beta(s)}.$$

Es sind auch beide Kurven maximal: α nach Definition, weil es die maximale Integralkurve zum Anfang $q = \varphi^t(p)$ ist, und β , weil es die in der Parametrisierung um t verschobene Integralkurve zum Anfang p ist. Nach (3.11) folgt: $\alpha = \beta$, also:

$$I(\varphi^t(p)) = (t_-(p) - t, t_+(p) - t)$$

und für alle s aus diesem Intervall gilt:

$$\varphi^s \circ \varphi^t(p) = \varphi^{s+t}(p). \quad \square$$

(b) Wegen der glatten Abhängigkeit der Lösung der Differentialgleichung $\dot{x} = \zeta(x)$ auf einer offenen Menge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ (und einem glatten Vektorfeld ζ auf V) ist nun Ω zunächst offen, dann ist (p_0, t_0) so wähle man eine Karte $x: U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ um $q_0 := \varphi^{t_0}(p_0) \in M$. Wählt man dann $\varepsilon > 0$ und eine offene Umgebung $W \subseteq V$ von $x_0 := x(q)$, so dass

$$\dot{x} = \zeta(x) \text{ auf } V$$

für alle $x \in W$ Lösungen zum Anfangswert x mindestens auf dem Intervall $(-\varepsilon, \varepsilon)$ hat, so zeigt die Konstruktion der maximalen Lösungskurven $\alpha_{\max}(q)$, dass mit $\tilde{U} := x^{-1}(W) \subseteq U$ die offene Umgebungen $\varphi^{-t_0}(\tilde{U}) \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ noch ganz in Ω liegt, denn

$$\varphi^{t_0+s}(p) \stackrel{(a)}{=} \varphi^s \left(\underbrace{\varphi^{t_0}(p)}_{\in U \text{ für } p \in \varphi^{-t_0}(\tilde{U})} \right).$$

Schließlich ist nach Konstruktion $I(p) = I_{\max}(p)$, also zusammenhängend mit $0 \in I(p)$.

- (c) Da sich φ in lokalen Koordinaten durch die Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung $\dot{x} = \zeta(x)$ beschreibt, $t \mapsto \varphi^t(x)$, $W \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow V$ (vgl. (3.15)), ist $\varphi: \Omega \rightarrow M$ eine glatte Abbildung.
- (d) Ist nun $\psi: \tilde{\Omega} \rightarrow M$ ein weiteres dynamische System mit $\tilde{\Omega} \supseteq \Omega$ und $\psi|_{\Omega} = \varphi$, so hat ψ das gleiche zugehörige Vektorfeld X wie φ , denn für X_p braucht man φ nur auf einer Umgebung $U \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ von $(p, 0) \in \Omega$ zu kennen und dort stimmen φ und ψ überein. Ist nun $p \in M$ und $\tilde{I}(p)$ das Definitionsintervall von $t \mapsto \psi(t, p)$, so ist auch diese Kurve Integralkurve von X (siehe (3.8)) zum Anfangswert p , also ist $\tilde{I}(p) \subseteq I(p)$. Das gilt für alle $p \in M$ und damit $\tilde{\Omega} \subseteq \Omega$, also $\tilde{\Omega} = \Omega$. Also ist φ auch maximal. \square

(3.16) Satz. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Dann gibt es eine bijektive Zuordnung zwischen allen maximalen dynamischen Systems und allen glatten Vektorfeldern auf M , die wie folgt gegeben ist:

$$\begin{array}{ccc} \{\text{maximales dynamisches System}\} & \xleftrightarrow{1:1} & \mathfrak{X}(M) \\ \varphi & \xrightarrow{\text{Differentiation}} & X_{\varphi} \text{ mit } (X_{\varphi})_p = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi^t(p) \\ \varphi_x & \xleftarrow{\text{Integration}} & X \\ \text{mit } \varphi_x^t(p) = \alpha_{\max}(p)(t) & & \end{array}$$

Beweis.

- (i) $\varphi_{X_{\varphi}} = \varphi$, da mit (3.8) für festes $p \in M$ die Kurven $t \mapsto \varphi^t(p)$ Integralkurven von $\dot{q} = X_{\varphi}(q)$ sind und maximal müssen sie auch sein, da φ maximal ist (sonst wäre $\psi := \varphi_{X_{\varphi}}$ eine Erweiterung von φ).
- (ii) $X_{\varphi_x} = X$, da φ_x aus den (maximalen) Lösungskurven von $\dot{p} = X_p$ bestehen, insbesondere

$$X_{\varphi_x}(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_x^t(p) = X_{\varphi_x^0(p)} = X_p \quad \forall p \in M. \quad \square$$

(3.17) Kommentar. „Differentiation ist einfach, Integration ist schwer.“ Während der Übergang von φ zu X in der Regel eine einfache Rechnung ist, ist der Übergang von X zu φ häufig sehr schwer, ja in gewisser Weise gar nicht explizit möglich, sondern nur von theoretischer Natur. In der Theorie der *Dynamischen Systeme* befasst man sich daher nur mit *qualitativen Fragen*, z.B.:

- (i) Für welche Punkte $p \in M$ ist $I(p) = \mathbb{R}$?
- (ii) Gibt es *periodische Bahnen*, d.h. gibt es ein $p \in M$ mit $I(p) = \mathbb{R}$ und $T > 0$, so dass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt: $\varphi^{t+T}(p) = \varphi^t(p)$?
- (iii) Welche *Gleichgewichtslagen* (das ist ein $p \in M$ mit $I(p) = \mathbb{R}$ und $\varphi^t(p) = p \forall t \in \mathbb{R}$) sind stabil, d.h. für jede Umgebung $U \subseteq M$ von p , gibt es eine Umgebung $V \subseteq U$ von p mit $t_+(p) = \infty$, für alle $q \in V$ und $\varphi^t(q) \in U \forall t \geq 0$

(3.18) Beispiel.

- (a) Sei $M = \mathbb{R}^2$ und $\zeta \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ gegeben durch $\zeta(x, y) = (-y, x)$. Das zugehörige maximale dynamische System φ ist dann global und ist gegeben durch $\varphi: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\varphi(x, y; t) = (x \cdot \cos(t) - y \cdot \sin(t), x \cdot \sin(t) + y \cdot \cos(t)).$$

- (b) Nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz bewegen sich N punktförmige Teilchen ($N \in \mathbb{N}$) mit Massen $m_1, \dots, m_N > 0$ auf den Bahnen $x_j: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ($j = 1, \dots, N$), die der Differentialgleichung

$$m_j \ddot{x}_j = - \sum_{i \neq j} m_i m_j \frac{x_i - x_j}{\|x_i - x_j\|^3} \quad (j = 1, \dots, N)$$

genügen. Die zugehörige Mannigfaltigkeit ist also hier $M = (\mathbb{R}^{3N} \setminus \Delta) \times \mathbb{R}^{3N}$ mit

$$\Delta := \{(x_1, \dots, x_N) \in (\mathbb{R}^3)^N : x_i = x_j \text{ für ein Paar } (i, j) \text{ mit } i \neq j\}$$

und das „Gravitations-Vektorfeld“ wäre

$$X(x, y) = \left(y_1, \dots, y_N, \dots, \underbrace{- \sum_{i \neq j} m_i \frac{x_i - x_j}{\|x_i - x_j\|^3}}_{j\text{-te Stelle}}, \dots \right)$$

(mit $\dot{x}_i = y_i$). Schon das dynamische System des 3-Körper-Problems ist nicht bekannt. Man weiß nicht einmal, für welche Anfangslagen $p = (x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)$, $p \in M$, kein „Zusammenstoß“, $t_+(p) < \infty$, stattfindet.

(3.19) Vorbereitung. Sei $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\zeta: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein glattes Vektorfeld. Ist $x_0 \in V$ und $r, M > 0$, so dass $\overline{B_r(x_0)} \subseteq V$ und $\|\zeta(x)\| \leq M$, ist für alle $x \in \overline{B_r(x_0)}$, so zeigt der Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf, dass die maximale Lösung $\alpha: (t_-, t_+) \rightarrow V$ von $\dot{x} = \zeta(x)$ mit $\alpha(0) = x_0$ mindestens auf den Intervall $(-\delta, \delta)$ mit $\delta := \frac{r}{2M}$, existiert, also: $t_+ \geq \frac{r}{2M}$.

(3.20) Satz. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und φ ein maximales dynamisches System auf M . Sei weiter $p \in M$ mit $t_+(p) < \infty$ und $K \subseteq M$ ein beliebiges Kompaktum. Dann existiert ein $\tau \in (0, t_+)$, so dass für alle $t \in (\tau, t_+)$ gilt:

$$\varphi^t(p) \notin K.$$

Beweis. Angenommen es gäbe ein Kompaktum $K \subseteq M$, wo das nicht der Fall ist. Dann gibt es eine Folge (t_n) in $I = (t_-(p), t_+(p))$ mit

$$(t_n) \nearrow t_+ := t_+(p)$$

und

$$q_n := \varphi^{t_n}(p) \in K.$$

Nach Übergang zu einer Teilfolge von (t_n) , die wir wieder mit (t_n) bezeichnen, können wir annehmen, dass (q_n) gegen einen Punkt $q \in K$ konvergiert.

Nun wählen wir eine Karte $x: U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ um q , setzen $x_0 = x(q)$ und $x_n := x(q_n)$ für $n \geq n_0$ (mit n_0 groß genug). Ist $X|_U = \zeta^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ mit $\zeta^i \in \mathcal{E}(V)$, so wählen wir $r > 0$ und $M > 0$, so dass $\overline{B_r(x_0)} \subseteq U$ und $\|\zeta(x)\| \leq M$ ist, für $x \in \overline{B_r(x_0)}$ (und $\zeta = (\zeta^1, \dots, \zeta^n): V \rightarrow \mathbb{R}^n$). Sei

$n_1 \in \mathbb{N}$ so groß, dass einerseits $x_n \in B_{r/2}(x_0)$ für $n \geq n_1$ (das geht, weil $(x_n) \rightarrow x_0$) und andererseits, dass

$$t_+ - t_n < \delta := \frac{r}{4M}.$$

Ist nun $n_2 \geq n_1$ beliebig und $q_2 := \varphi^{t_{n_2}}(p)$, so müsste die Lösungskurve $t \mapsto \varphi^t(q_2)$ mindestens für $0 < t < \delta$ existieren, denn für $x_2 := x(q_2)$ ist $x_2 \in B_{r/2}(x_0)$ und damit

$$\overline{B_{r/2}(x_2)} \subseteq \overline{B_r(x_0)} \subseteq V$$

Da $\|\xi(x)\| \leq M$ für $x \in \overline{B_{r/2}}$ ist, lebt nach (3.19) die Kurve $t \mapsto \varphi^t(q_2)$ mindestens auf $(0, \delta)$ mit

$$\delta := \frac{r/2}{2M} = \frac{r}{4M} \quad (\implies t_+(q_2) \geq \delta).$$

Andererseits lebt sie aber nur bis

$$t_+(q_2) = t_+ - t_{n_2} < \delta,$$

und das ist ein Widerspruch. □

(3.21) Korollar. *Ist M ein kompakte glatte Mannigfaltigkeiten, so ist daher jedes Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ vollständig, d.h.: das zugehörige dynamische System ist global, also $I(p) = \mathbb{R}$, für alle $p \in M$.*

Beweis. Nach (3.20) verlässt $t \mapsto \varphi^t(p)$ das Kompaktum $K = M$ sicher nie, also ist $t_+(p) = +\infty$. Ähnlich sieht man (z.B. durch Übergang von X zu $-X$), dass auch $t_-(p) = -\infty$ sein muss, für alle $p \in M$. □

(3.22) Definition. Sei L ein reeller Vektorraum. Eine bilineare Abbildung $[\cdot, \cdot]: L \times L \rightarrow L$ heißt eine **Lie-Klammer auf L** , wenn gilt:

- (i) $[a, b] = -[b, a], \forall a, b \in L$ (Schiefsymmetrie)
- (ii) $[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0, \forall a, b, c \in L$ (Jacobi-Identität)

Das Paar $(L, [\cdot, \cdot])$ heißt dann eine (reelle) **Lie-Algebra**.

(3.23) Beispiel.

(a) $[\cdot, \cdot] = 0$ ist stets eine Lie-Klammer auf einen reellen Vektorraum. Man nennt L dann **abelsch**.

(b) Auf $L = \mathbb{R}^3$ setzt man für $x, y \in L$:

$$[x, y] := x \times y = (x^2y^3 - x^3y^2, x^3y^1 - x^1y^3, x^1y^2 - x^2y^1)$$

Dann ist $(L, [\cdot, \cdot]) = (\mathbb{R}^3, \times)$ eine Lie-Algebra (Übung).

(c) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $L = \text{Mat}_n \mathbb{R}$. Setzt man

$$[A, B] = AB - BA, \quad \forall A, B \in L,$$

so erhält man eine Lie-Klammer auf L (Übung).

(d) Sei A eine \mathbb{R} -Algebra. Setzt man für $a, b \in A$

$$[a, b] = ab - ba,$$

so wird dadurch eine Lie-Klammer auf A definiert.

(e) Sei V ein \mathbb{R} -Vektorraum und $A = \text{End}(V)$. Dann ist also $L = \text{End}(V)$ mit

$$[\alpha, \beta] = \alpha \circ \beta - \beta \circ \alpha$$

eine Lie-Algebra.

(3.24) Kommentar.

(a) Ist $(L, [\cdot, \cdot])$ eine Lie-Algebra, so heißt ein Unterraum $L' \subseteq L$ eine **Lie-Unteralgebra von L** , wenn für alle $a, b \in L'$ auch $[a, b] \in L'$ ist. L' wird dann mit $[\cdot, \cdot]|_{L' \times L'}$ selbst zu einer Lie-Algebra.

(b) Ist z.B. $L = \text{Mat}_n \mathbb{R}$ mit $[\cdot, \cdot]$ wie unter (3.20, b), so betrachte

$$L' := \{A \in L : A^t + A = 0\},$$

die schiefsymmetrischen Matrizen. Dann ist $L' \subseteq L$ eine Lie-Unteralgebra (Übung).

(3.25) Bemerkung. Sei A eine \mathbb{R} -Algebra und

$$\text{Der}_{\mathbb{R}}(A) := \{\varphi \in \text{End}(A) : \varphi(ab) = \varphi(a)b + a\varphi(b), \forall a, b \in A\}.$$

Dann ist $\text{Der}_{\mathbb{R}}(A) \subseteq \text{End}(A)$ eine Lie-Unteralgebra. (Sie heißt die Lie-Unteralgebra der **Derivationen auf A** .)

Beweis. Für $\varphi, \psi \in \text{Der}(A)$ und allen $a, b \in A$ gilt:

$$\begin{aligned} [\varphi, \psi](a, b) &= \varphi \circ \psi(ab) - \psi \circ \varphi(ab) = \varphi(\psi(a)b + a\psi(b)) - \psi(\varphi(a)b + a\varphi(b)) \\ &= \varphi \circ \psi(a) \cdot b + \psi(a)\varphi(b) + \varphi(a)\psi(b) + a \cdot \varphi \circ \psi(b) \\ &\quad - \psi \circ \varphi(a) \cdot b - \varphi(a)\psi(b) - \psi(a)\varphi(b) - a \cdot \psi \circ \varphi(b) \\ &= [\varphi, \psi](a) \cdot b + a \cdot [\varphi, \psi](b), \end{aligned}$$

also auch $[\varphi, \psi] \in \text{Der}(A)$. □

(3.26) Definition. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $r > 0$. Dann sei $B(r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < r\}$. Wir nennen eine glatte Funktion $\varrho: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ eine **Abschneidefunktion**, wenn gilt:

(i) $\varrho|_{\overline{B(1)}} = 1$,

(ii) $\varrho|_{\mathbb{R}^n \setminus B(2)} = 0$.

(3.27) Kommentar. Es gibt Abschneidefunktionen. Man setze etwa $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) := e^{-1/t}$ für $t > 0$ und $f(t) = 0$ für $t \leq 0$, und zunächst dann $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(t) = \frac{f(t)}{f(t) + f(1-t)}.$$

Setzt man dann $\varrho: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\varrho(x) := g(2 - \|x\|)$, so ist ϱ eine Abschneidefunktion (Übung).

(3.28) Lemma. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und $s \in \mathcal{E}_p(M)$. Dann gibt es ein $f \in \mathcal{E}(M)$ mit $f_p = s$.

Beweis. Sei $x: U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ zunächst irgendeine Karte um p und $x_0 = x(p) \in V$. Indem man x mit der Translation $t: V \rightarrow V' := V - x_0$, $x \mapsto x - x_0$, verknüpft, erhält man eine Karte $x' = t \circ x: U \rightarrow V' \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $x'(p) = 0$. (Solche Karten heißen **zentriert**.)

Als nächstes wählt man ein $\varepsilon > 0$, so dass $B(\varepsilon) \subseteq V'$ ist, setzt $U'' := x'^{-1}(B(\varepsilon))$ und erhält mit $x'': U'' \rightarrow B(\varepsilon) = V''$ eine zentrierte Karte, so dass $V'' = B(\varepsilon)$ ist.

Nun verknüpft man diese Karte noch mit der **Dilatation** $d: B(\varepsilon) \rightarrow B(3)$, $x \mapsto \frac{3}{\varepsilon}x$, und erhält mit $x''': U'' \rightarrow B(3)$, $x''' = d \circ x''$, schließlich eine zentrierte Karte um p mit Wertebereich $B(3)$. (Das kann man also stets machen.)

Sei nun $s \in \mathcal{E}_p(M)$ und s von einem $g \in \mathcal{E}(U)$, $U \in \mathfrak{A}(p)$ offen, repräsentiert, $s = g_p$. Nach eventueller Verkleinerung von U (und Einschränkung von g) dürfen wir annehmen, dass es eine Karte $\varphi: U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ auf U gibt. Nach eventueller Verkleinerung darf man nun nach obiger Manipulation annehmen, dass φ zentriert und $V = B(3) \subseteq \mathbb{R}^n$ ist.

Sei nun $\varrho: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ eine Abschneidefunktion. Wir setzen dann $\tilde{g}: U \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\tilde{g}(q) := \varrho(\varphi(q)) \cdot g(q) \quad (\text{also kurz: } \tilde{g} = \varrho \circ \varphi \cdot g).$$

Auf $U_1 := \varphi^{-1}(B(1)) \in \mathfrak{A}(p)$ stimmt dann \tilde{g} mit g überein, also ist $\tilde{g}_p = s$. Auf $U \setminus U_2$ mit $U_2 := \varphi^{-1}(B(2))$, gilt dagegen

$$\tilde{g}|_{U \setminus U_2} = 0$$

und deshalb kann \tilde{g} mit $f: M \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(q) := \begin{cases} \tilde{g}(q) & \text{für } q \in U, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

trivial in glatter Weise auf ganz M fortgesetzt werden. Es folgt:

$$f_p = \tilde{g}_p = s. \quad \square$$

(3.29) Kommentar.

(a) Da $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E}_p(M) = \infty$ ist, ist insbesondere

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E}(M) = \infty,$$

denn $\mathcal{E}(M) \rightarrow \mathcal{E}_p(M)$, $f \mapsto f_p$, ist linear und nach (3.28) surjektiv. Ähnlich sieht man auch, dass

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{X}(M) = \infty, \quad \dim_{\mathbb{R}} \Omega(M) = \infty$$

ist (Übung).

(b) Die glatten Vektorfelder $\mathfrak{X}(M)$ „operieren“ nun auf $\mathcal{E}(M)$ wie folgt: Betrachte

$$\nabla: \mathfrak{X}(M) \times \mathcal{E}(M) \rightarrow \mathcal{E}(M), \quad (X, f) \mapsto Xf$$

mit

$$(Xf)(p) := X_p(f_p).$$

Wir nennen $Xf \in \mathcal{E}(M)$ die **Ableitung von f in Richtung X** . Xf ist tatsächlich glatt, denn wird bzgl. einer Karte $x: U \rightarrow V$ die Einschränkung $f|_U$ durch die glatte Funktion $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ und $X|_U$ durch die glatten Funktionen $\zeta^1, \dots, \zeta^n: V \rightarrow \mathbb{R}$ beschrieben, $X|_U = \zeta^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, so wird $Xf|_U$ durch die glatte Funktion

$$\zeta^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \in \mathcal{E}(V)$$

beschrieben.

(c) Wir können nun jedes glatte Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ als eine Derivation der \mathbb{R} -Algebra $\mathcal{E}(M)$ auf sich selbst auffassen:

(3.30) Proposition. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $\iota: \mathfrak{X}(M) \rightarrow \text{Der}(\mathcal{E}(M), \mathcal{E}(M))$ wie folgt gegeben:

$$\iota(X)(f) = Xf.$$

Dann ist ι ein \mathbb{R} -Vektorraum-Isomorphismus, sogar ein $\mathcal{E}(M)$ -Modul-Isomorphismus.

Beweis. (a) Zunächst ist für $X \in \mathfrak{X}(M)$, $\iota(X): \mathcal{E}(M) \rightarrow \mathcal{E}(M)$ tatsächlich eine Derivation, denn $\iota(X)$ ist linear, d.h.

$$\begin{aligned} X(f_1 + f_2) &= Xf_1 + Xf_2 \\ X(\lambda f) &= \lambda Xf, \end{aligned}$$

$f \in \mathcal{E}(M)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, unmittelbar aus der Definition und auch

$$X(fg) = Xf \cdot g + f \cdot Xg, \quad \forall f, g \in \mathcal{E}(M),$$

denn X_p ist ja für jedes $p \in M$ eine Derivation, $X_p \in \text{Der}(\mathcal{E}(M), \mathbb{R})$.

Ebenso leicht sieht man, dass ι (sogar $\mathcal{E}(M)$ -) linear ist,

$$\begin{aligned} \iota(X_1 + X_2) &= \iota(X_1) + \iota(X_2), \text{ also } (X_1 + X_2)f = X_1f + X_2f, \quad \forall f. \\ \iota(fX) &= f\iota(X), \text{ also } (fX)g = f(Xg), \quad \forall g. \end{aligned}$$

(b) *Injektivität.* Ist $\iota(X) = 0$, so ist $Xf = 0$, $\forall f \in \mathcal{E}(M)$. Sei $p \in M$ beliebig und $s \in \mathcal{E}_p(M)$. Nach Lemma 3.28 gibt es $f \in \mathcal{E}(M)$ mit $f_p = s$. Es folgt:

$$X_p(s) = X_p(f_p) = (Xf)(p) = 0,$$

also $X_p = 0$, also $X = 0$.

(c) *Surjektivität.* Sei $\delta: \mathcal{E}(M) \rightarrow \mathcal{E}(M)$ eine beliebige Derivation. Nach dem folgenden Lemma hängt dann für $f \in \mathcal{E}(M)$ und $p \in M$ die Zahl $\delta(f)(p) \in \mathbb{R}$ nur von $f_p \in \mathcal{E}_p(M)$ ab. Wir setzen dann $X: M \rightarrow TM$ fest durch

$$X_p(s) := \delta(f)(p), \quad \text{für } s \in \mathcal{E}_p(M),$$

wenn $s = f_p$ ist. Dann ist X wohldefiniert, hängt glatt von p ab, denn ein Vektorfeld $X: M \rightarrow TM$ ist genau dann glatt, wenn Xf glatt ist, für alle $f \in \mathcal{E}(M)$ (Übung), und es gilt:

$$\iota(X)f(p) = Xf(p) = X_p(f_p) = \delta(f)(p), \quad \forall p \in M, \forall f \in \mathcal{E}(M),$$

also ist

$$\iota(X) = \delta. \quad \square$$

(3.31) Lemma. Sei $\delta: \mathcal{E}(M) \rightarrow \mathcal{E}(M)$ eine Derivation, $f \in \mathcal{E}(M)$ und $p \in M$. Dann hängt $\delta(f)(p) \in \mathbb{R}$ nur von $f_p \in \mathcal{E}_p(M)$ ab.

Beweis. (a) Sei $g \in \mathcal{E}(M)$ mit $g|_U = 0$ auf einer offenen Umgebung U von p . *Behauptung:* $\delta(g)(p) = 0$. *Dazu:* Ähnlich wie in (3.28) kann man nach evtl. Verkleinerung von U annehmen, dass es offene Umgebungen

$$p \in U_1 \subseteq U_2 \subseteq U$$

gibt und eine glatte Funktion $h: M \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h|_{U_1} = 1$ und $h|_{M \setminus U_2} = 0$. Es ist dann $h \cdot g = 0$ auf ganz M . Weil δ Derivation ist, folgt:

$$0 = \delta(0) = \delta(hg) = (\delta h) \cdot g + h \cdot (\delta g)$$

also in p :

$$0 = (\delta h)(p) \cdot \underbrace{g(p)}_{=0} + \underbrace{h(p)}_{=1} (\delta g)(p).$$

(b) Ist nun $f_1, f_2 \in \mathcal{E}(M)$ mit $(f_1)_p = (f_2)_p$, so gilt für $g := f_2 - f_1 \in \mathcal{E}(M)$:

$$0_p = 0 = (f_2)_p - (f_1)_p = g_p,$$

also ist $g = 0$ auf einer Umgebung $U \subseteq M$ von p . Es folgt:

$$0 = \delta(g)(p) = \delta(f_2)(p) - \delta(f_1)(p) \implies \delta(f_1)(p) = \delta(f_2)(p). \quad \square$$

(3.32) Definition. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $\iota: \mathfrak{X}(M) \rightarrow \text{Der}(\mathcal{E}(M))$, $\iota X(f) = Xf$. Man setzt dann $[\cdot, \cdot]: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$,

$$[X, Y] := \iota^{-1}([\iota X, \iota Y]).$$

(3.33) Kommentar.

- (a) Wegen (3.30) kann man den $\mathcal{E}(M)$ -Modul $\mathfrak{X}(M)$ mit dem $\mathcal{E}(M)$ -Modul $\text{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{E}(M))$ (vermöge ι) identifizieren. Nun ist aber $A := \mathcal{E}(M)$ eine \mathbb{R} -Algebra und daher trägt $\text{Der}(\mathcal{E}(M))$ -neben seiner $\mathcal{E}(M)$ -Modul-Struktur- auch eine Lie-Algebra-Struktur nach (3.23). Deshalb trägt auch $\mathfrak{X}(M)$ in natürlicher Weise eine Lie-Algebra-Struktur gemäß (3.32).
- (b) Ist $\dim M \geq 1$, so ist $\mathfrak{X}(M)$ (außer ein $\mathcal{E}(M)$ -Modul) zusammen mit $[\cdot, \cdot]$ eine unendlich dimensionale Lie-Algebra. Unterdrückt man den Isomorphismus ι (und das tut man nach einer Weile), so ist die Lie-Klammer auf $\mathfrak{X}(M)$ also gegeben durch

$$[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X.$$

Präziser bedeutet dies für jedes $p \in M$, $s \in \mathcal{E}_p(M)$ und einem $f \in \mathcal{E}(M)$ von s , $s = f_p$:

$$[X, Y]_p(s) = X_p((Yf)_p) - Y_p((Xf)_p),$$

denn

$$\begin{aligned} [X, Y]_p(s) &= \left(\iota^{-1}([\iota(X), \iota(Y)]) \right)_p (f_p) \\ &= [\iota X, \iota Y](f)(p) \\ &= (\iota(X) \circ \iota(Y) - \iota(Y) \circ \iota(X))(f)(p) \\ &= (X(Yf) - Y(Xf))(p) \\ &= X_p((Yf)_p) - Y_p((Xf)_p). \end{aligned}$$

(c) Man beachte, dass $[\cdot, \cdot]: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ in keinem der beiden Argumente $\mathcal{E}(M)$ -linear ist. Vielmehr gilt:

(3.34) Bemerkung. Sei M glatte Mannigfaltigkeit, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ und $f, g \in \mathcal{E}(M)$. Dann gilt:

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg) \cdot Y - g(Yf) \cdot X.$$

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass das Bild beider Seiten unter $\iota: \mathfrak{X}(M) \rightarrow \text{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{E}(M))$ übereinstimmt. (Übung) \square

(3.35) Bemerkung. Sei M glatte Mannigfaltigkeit, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ und sei $x: U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte. Ist nun $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x^i}$,

$$X|_U = \zeta^i \partial_i, \quad Y|_U = \eta^j \partial_j \quad \text{mit } \zeta^i, \eta^j \in \mathcal{E}(U),$$

so gilt

$$[X, Y]|_U = \left(\zeta^i \frac{\partial \eta^k}{\partial x^i} - \eta^j \frac{\partial \zeta^k}{\partial x^j} \right) \partial_k.$$

Beweis. Ist $f \in \mathcal{E}(U)$ (und die Darstellung von f bzgl. x sei wie üblich ebenfalls mit f bezeichnet), so gilt mit (3.29, b) und (3.33, b):

$$\begin{aligned} [X, Y]|_U(f) &= X|_U \left(\eta^j \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) - Y|_U \left(\zeta^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \right) \\ &= \zeta^i \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\eta^j \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) - \eta^j \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\zeta^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \right) \\ &= \zeta^i \frac{\partial \eta^j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} + \zeta^i \eta^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \eta^j \frac{\partial \zeta^i}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^i} - \eta^j \zeta^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} \\ &\stackrel{\text{H.A. Schwarz}}{=} \left(\zeta^i \frac{\partial \eta^k}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^k} - \eta^j \frac{\partial \zeta^k}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^k} \right) (f) \\ \implies [X, Y]|_U &= \left(\zeta^i \frac{\partial \eta^k}{\partial x^i} - \eta^j \frac{\partial \zeta^k}{\partial x^j} \right) \partial_k \quad \square \end{aligned}$$

(3.36) Definition. Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten und $\Phi: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung. Man nennt zwei Vektorfelder $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $Y \in \mathfrak{X}(N)$ **Φ -bezogen aufeinander**, wenn für alle $p \in M$ gilt:

$$D\Phi_p(X_p) = Y_{\Phi(p)}, \quad \text{kurz: } D\Phi \circ X = Y \circ \Phi,$$

wenn man $D\Phi$ als eine Abbildung zwischen TM und TN auffasst, $D\Phi(\xi) := D\Phi_p(\xi)$, wenn $\xi \in TM_p$ ist.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\Phi} & N \\ X \downarrow & & \downarrow Y \\ TM & \xrightarrow{D\Phi} & TN \end{array}$$

(3.37) Bemerkung. Ist $\Phi: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten M und N und sind $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ und $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(N)$, so dass X_1 und Y_1 bzw. X_2 und Y_2 Φ -bezogen sind, so sind auch $[X_1, X_2] \in \mathfrak{X}(M)$ und $[Y_1, Y_2] \in \mathfrak{X}(N)$ Φ -bezogen.

Beweis. Sei $p \in M$, $q := \Phi(p)$, $s \in \mathcal{E}_q(N)$ mit $s = g_q$ und $g \in \mathcal{E}(N)$. Dann ist:

$$\begin{aligned} D\Phi_p([X_1, X_2]_p)(s) &= [X_1, X_2]_p((g \circ \Phi)_p) && \text{(Def. von } D\Phi_p) \\ &= (X_1)_p \left((X_2(g \circ \Phi))_p \right) - (X_2)_p \left((X_1(g \circ \Phi))_p \right) && \text{(Def. von } [\cdot, \cdot]) \\ &= (X_1)_p \left((D\Phi(X_2)(g))_p \right) - (X_2)_p \left((D\Phi(X_1)(g))_p \right) && \text{(Def. von } D\Phi) \\ &= (X_1)_p \left(\underbrace{((Y_2 \circ \Phi)(g))_p}_{=Y_2 g \circ \Phi} \right) - (X_2)_p \left(\underbrace{((Y_1 \circ \Phi)(g))_p}_{=Y_1 g \circ \Phi} \right) \\ &= D\Phi_p((X_1)_p)((Y_2 g)_q) - D\Phi_p((X_2)_p)((Y_1 g)_q) \\ &= (Y_1)_q((Y_2 g)_q) - (Y_2)_q((Y_1 g)_q) \\ &= [Y_1, Y_2]_q(g_q) = [Y_1, Y_2]_{\Phi(p)}(s). \quad \square \end{aligned}$$

(3.38) Lemma. Sei $\Phi: M \rightarrow N$ glatt, $p \in M$ und $D\Phi_p: TM_p \rightarrow TN_{\Phi(p)}$ injektiv. Dann existieren offene Umgebungen $U \subseteq M$ von p und $V \subseteq N$ von $q = \Phi(p)$, so dass $\Phi(U) \subseteq V$, $\Phi|_U: U \rightarrow V$ injektiv ist und $\Phi(U) \subseteq V$ eine Untermannigfaltigkeit der Codimension $\dim N - \dim M$ ist.

Beweis. Sei zunächst $n = \dim M$, $n + k := \dim N$ (also $k \geq 0$, da aus $D\Phi_p$ injektiv folgt: $\dim M \leq \dim N$). Seien $x = (x^1, \dots, x^n): U \rightarrow U' \subseteq \mathbb{R}^n$ und $y = (y^1, \dots, y^{n+k}): V \rightarrow V' \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ Karten um p bzw. q , so dass $\Phi(U) \subseteq V$ ist. Sei $\varphi: U' \rightarrow V'$ die Beschreibung von Φ bzgl. x und y , $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^{n+k})$. Ist $x_0 = x(p) \in U'$, so folgt:

$$\text{Jac}(\varphi)(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j} \end{pmatrix}_{\substack{1 \leq j \leq n+k \\ 1 \leq i \leq n}}(x_0)$$

hat den vollen Rang n . Es gibt also

$$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq n + k,$$

so dass $\left(\frac{\partial \varphi^{i_v}}{\partial x^j}\right)_{1 \leq v, j \leq n}$ invertierbar ist. Nach evtl. Koordinaten-Vertauschung $\tau: \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$, $\varphi' = \tau \circ \varphi$, dürfen wir $i_v = v$ annehmen. Bezeichnet $\pi: \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Projektion auf die ersten n Koordinaten,

$$y = (w, z) \mapsto w, \quad w \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}^k,$$

so ist nach dem Umkehrsatz die Abbildung $\pi \circ \varphi: U' \rightarrow \pi(V') \subseteq \mathbb{R}^n$ lokal um x_0 bzw. $w_0 := \pi \circ \varphi(x_0) = y(q)$ umkehrbar. Nach Verkleinerung von U und V dürfen wir die Existenz eines glatten $\psi: \pi(V') \rightarrow U'$ annehmen mit

$$\psi \circ \pi \circ \varphi = \mathbb{1}_{U'}, \quad \pi \circ \varphi \circ \psi = \mathbb{1}_{\pi(V')}.$$

Insbesondere ist nun φ injektiv und damit auch $\Phi|_U = y^{-1} \circ \varphi \circ x$.

Es ist $\Phi(U) \subseteq V$ auch eine Untermannigfaltigkeit der Codimension k , denn auf V setzen wir nun $F: V \rightarrow \mathbb{R}^k$, $F = G \circ y$, mit $G: V' \rightarrow \mathbb{R}^k$,

$$G(w, z) = \left(z^1 - \varphi^{n+1}(\psi(w)), \dots, z^k - \varphi^{n+k}(\psi(w)) \right).$$

Wegen $\pi \circ \varphi \circ \psi(w) = w$, also

$$\varphi^j(\psi(w)) = w^j, \quad \text{für } j = 1, \dots, n,$$

ist:

$$\begin{aligned} G(w, z) = 0 &\iff z^i = \varphi^{n+i} \circ \psi(w) \quad (i = 1, \dots, k) \\ &\iff (w, z) = \varphi \circ \psi(w) \\ &\iff (w, z) = \varphi(x) \text{ für ein } x \in U' \\ &\iff (w, z) \in \text{Im}(\varphi), \end{aligned}$$

also: $F(q) = 0 \iff q \in \text{Im}(\Phi|_U)$, und wegen

$$\text{Jac}(G)(w_0, z_0) = \left(* \mid \mathbb{1}_k \right)$$

(mit $(w_0, z_0) = y(q_0)$) ist auch $\text{rg}(DF_q) = k$. $\Phi(U) \subseteq V$ ist also eine (abgeschlossene) Untermannigfaltigkeit der Codimension k . □

(3.39) Erinnerung. Ist $M \subseteq N$ eine (nicht notwendig abgeschlossene) Untermannigfaltigkeit der Codimension k , so ist die Inklusion $i: M \hookrightarrow N$ (mit der induzierten Mannigfaltigkeits-Struktur) eine **Einbettung**, d.h.:

- (a) i injektiv,
- (b) i immersiv,
- (c) $i: M \rightarrow i(M)$ ist ein Homöomorphismus.

Umgekehrt gilt nun:

(3.40) Satz. Sei $\Phi: M \rightarrow N$ eine Einbettung (also injektiv, immersiv und Homöomorphismus auf sein Bild). Dann ist $\Phi(M) \subseteq N$ eine (nicht notwendig abgeschlossene) Untermannigfaltigkeit der Codimension $\dim N - \dim M$.

Beweis. Sei $q \in \Phi(M)$ und $\Phi(p) = q$. Nach dem Lemma gibt es offene Umgebungen $U \subseteq M$ von p von $V \subseteq N$ von q , so dass $\Phi(U) \subseteq V$ und $\Phi(U) \subseteq V$ eine Untermannigfaltigkeit der Codimension k ist. Andererseits ist $\Phi: M \rightarrow \Phi(M)$ ein Homöomorphismus, also Φ offen und damit $\Phi(U)$ offen in $\Phi(M)$. Deshalb gibt es ein offenes $V' \subseteq N$ mit

$$\Phi(M) \cap V' = \Phi(U).$$

Verkleinert man die obigen $U \subseteq M$ bzw. $V \subseteq N$ gegebenenfalls so, dass $V \subseteq V'$ ist (Übergang zu $V \cap V'$ und $U' = \Phi^{-1}(V \cap V')$), so zeigt dies, dass

$$\Phi(M) \cap V = F^{-1}(0)$$

mit einem glatten $F: V \rightarrow \mathbb{R}^k$ und $DF_q: TN_q \rightarrow \mathbb{R}^k$ ($k = \dim N - \dim M$) von vollem Rang ist, d.i.: $\Phi(M) \subseteq N$ ist Untermannigfaltigkeit der Codimension k . \square

(3.41) Kommentar.

- (a) Sind M und N glatte Mannigfaltigkeiten und $\Phi: M \rightarrow N$ nur injektiv, so ist Φ i.a. nicht immersiv (geschweige denn eine Einbettung). Z.B. ist mit $M = \mathbb{R}$, $N = \mathbb{R}^2$ und $\Phi: M \rightarrow N$,

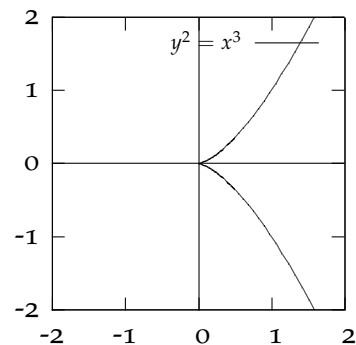
$$\Phi(t) = (t^2, t^3)$$

injektiv, aber nicht immersiv (bei $t_0 = 0$), denn

$$\dot{\Phi}(0) = (2t, 3t^2)|_{t=0} = (0, 0)$$

also $D\Phi_0: TM_0 \rightarrow TN_{(0,0)}$ nicht injektiv. Das Bild $C = \Phi(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^2$ ist

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = x^3\}$$



und heißt die **Neillsche Parabel** (Übung).

- (b) Ist $\Phi: M \rightarrow N$ immersiv, so braucht Φ nicht (global) injektiv zu sein (geschweige denn eine Einbettung). Betrachte z.B. wieder $M = \mathbb{R}$ und $N = \mathbb{R}^2$ und dieses Mal das **Cartesische Blatt**

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = x^2(x + 1)\}.$$

Es ist dann $\Phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\Phi(t) = (t^2 - 1, t^3 - t)$$

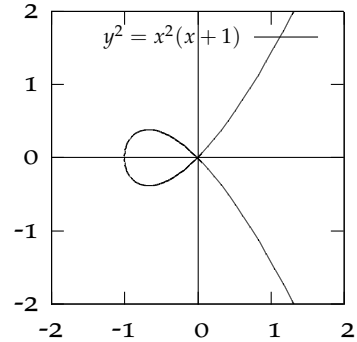
immersiv, denn

$$\dot{\Phi}(t) = (2t, 3t^2 - 1) \neq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

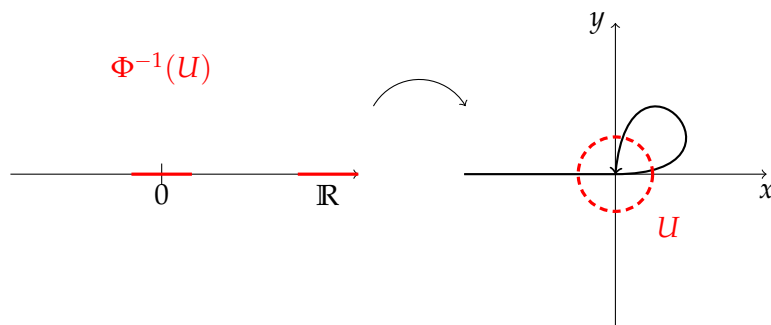
aber nicht injektiv, denn

$$\Phi(1) = (0, 0) = \Phi(-1)$$

(und $\Phi(\mathbb{R}) = C$, Übung).

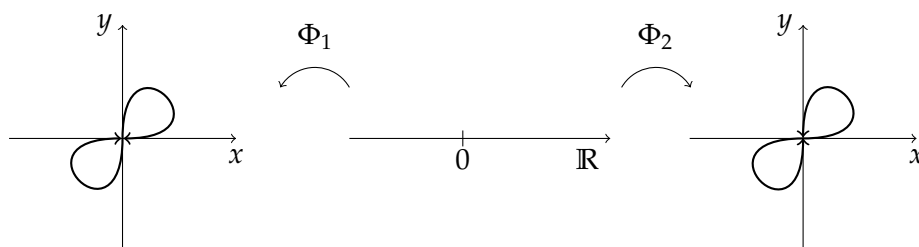


- (c) Eine injektive Immersion Φ muss i.a. auch keine Einbettung sein. Die von der Teilraumtopologie auf $\Phi(M)$ induzierte Topologie auf M induzierte Topologie auf M (via des bijektiven $\Phi: M \rightarrow \Phi(M)$) ist dann echt gröber, denn ϕ ist ja stetig. Sei z.B. wieder $M = \mathbb{R}$ und $N = \mathbb{R}^2$ und $\Phi: M \rightarrow N$ (ohne explizite Vorschrift) durch folgende Skizze gegeben:



Dann ist Φ injektiv, immersiv, aber keine Einbettung! Ist nämlich τ die von $\Phi(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^2$ induzierte Topologie auf \mathbb{R} , so ist die Menge $(-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}$ (für irgendein $\varepsilon > 0$) nicht offen (d.h. $\Phi(-\varepsilon, \varepsilon)$ ist in $\Phi(\mathbb{R})$ nicht offen und damit $\Phi: \mathbb{R} \rightarrow \Phi(\mathbb{R})$ kein Homöomorphismus), weil jede offene Umgebung $U \in \tau$ von $(0, 0)$ ein **Endstück** (α, ∞) mit $\alpha > 0$ enthalten muss.

- (d) Teilmengen C einer Mannigfaltigkeit N können also die Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M via einer injektiven Immersion $\Phi: M \rightarrow N$ mit $C = \Phi(M)$ tragen, obwohl sie keine Untermannigfaltigkeit sind und damit „sehr wild“ aussehen können. Ihre Topologie ist dann nicht mehr die Teilraumtopologie, sondern (echt) feiner (Übung). Eine gegebene Teilmenge kann auch mit verschiedenen Topologien Mannigfaltigkeiten-Strukturen tragen, wie das folgende Beispiel der Figur „Acht“ $C \subseteq \mathbb{R}^2$ zeigt:



Die Abbildung $\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist dabei nicht stetig (in 0), weil das Urbild von $(-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}$ vom Typ $(-\infty, -\alpha) \cup \{0\} \cup (\alpha, \infty)$ mit einem $\alpha > 0$ ist und damit nicht offen.

(3.42) Definition. Zwei injektive Immersionen $\Phi_1: M_1 \rightarrow N$ und $\Phi_2: M_2 \rightarrow N$ heißen **äquivalent**, wenn $\Phi_1(M_1) = \Phi_2(M_2)$ und die Abbildung $\psi: M_1 \rightarrow M_2$ mit $\Phi_2 \circ \psi = \Phi_1$ ein Diffeomorphismus ist (sei $C := \Phi(M_1) = \Phi(M_2) \subseteq N$).

$$\begin{array}{ccc} M_1 & & \\ \psi \downarrow \cong & \searrow \Phi_1 & \\ M_2 & \xrightarrow{\quad} & C \end{array}$$

(3.43) Lemma. Sei $\Phi: M \rightarrow N$ eine injektive Immersion. Sei weiter $\Psi: P \rightarrow N$ glatt mit $\Psi(P) \subseteq \Phi(M)$ und $\psi: P \rightarrow M$ gegeben durch $\Phi \circ \psi = \Psi$. Dann gilt: Ist ψ stetig, so ist ψ bereits glatt.

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\Psi} & N \\ & \searrow \psi & \uparrow \Phi \\ & & M \end{array}$$

Beweis. Sei $p \in P$, $q := \psi(p) \in M$, $r := \Phi(q) \in N$. Wir wählen Karten x um p , y um q und z um r der Mannigfaltigkeiten P, M und N , $x: U \rightarrow U'$, $y: V \rightarrow V'$, $z: W \rightarrow W'$. Es reicht zu zeigen, dass

$$\psi|_{\psi^{-1}(V)}: \psi^{-1}(V) \rightarrow M$$

glatt um p ist, denn $\psi^{-1}(V) \subseteq P$ ist offen, da ψ stetig ist.

Da $\Phi(V) \subseteq W$ eine Untermannigfaltigkeit nach Lemma (3.38) ist (für V und W klein genug), ist $\Phi|_V: V \rightarrow \Phi(V) \subseteq W$ ein Diffeomorphismus und man kann als Karte um q die Komposition $\pi \circ z \circ \Phi|_V$ verwenden, wo $\pi: \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n = \dim M$, $n+k = \dim N$) eine geeignete Koordinaten-Projektion ist. Bzgl. dieser Karte um q und der Karte x um p wird dann ψ beschrieben durch

$$(\pi \circ z \circ \Phi|_V) \circ \psi \circ x^{-1} = \pi \circ \underbrace{(z \circ \Phi|_V \circ \psi)}_{\Psi|_{\psi^{-1}(V)}} \circ x^{-1} = \pi \circ \underbrace{(z \circ \Psi|_{\psi^{-1}(V)} \circ x^{-1})}_{\text{glatt, weil } \Psi \text{ glatt ist}}$$

und damit glatt. □

(3.44) Satz. Sei N glatte Mannigfaltigkeit, $C \subseteq N$ eine Teilmenge und τ eine Topologie auf C . Dann kann es bis auf Äquivalenz höchstens eine Mannigfaltigkeit-Struktur auf C geben, die von einer injektiven Immersion $\Phi: M \rightarrow C \subseteq N$ kommt.

Beweis. Seien also $\Phi_1: M_1 \rightarrow C \subseteq N$ und $\Phi_2: M_2 \rightarrow C \subseteq N$ injektive Immersionen mit $\Phi_1(M_1) = C = \Phi_2(M_2)$, so dass Φ_1 und Φ_2 Homöomorphismen sind, falls man C mit τ topologisiert. Ist dann $\psi: M_1 \rightarrow M_2$ durch $\Phi_2 \circ \psi = \Phi_1$ gegeben, so ist sowohl $\psi = \Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$ stetig als auch $\psi^{-1} = \Phi_1^{-1} \circ \Phi_2$ und damit nach Lemma (3.43) glatt. Also ist ψ Diffeomorphismus. □

(3.45) Motivation.

(a) Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $X \in \mathfrak{X}(M)$ ohne Nullstellen, $X_p \neq 0, \forall p \in M$. Wir betrachten dann das **Linienfeld** $L = (L_p)_{p \in M}$ mit

$$L_p = \langle X_p \rangle = \mathbb{R} \cdot X_p \subseteq TM_p.$$

Ist dann p fixiert und $\varphi = \alpha(p): I = I(p) \rightarrow M$ die maximale Integralkurve von X zum Anfangswert p , also

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}(t) &= X_{\varphi(t)}, \quad \forall t \in I \\ \varphi(0) &= p,\end{aligned}$$

so ist also $\varphi: I \rightarrow M$ eine injektive Immersion (denn $\dot{\varphi}(t) \neq 0, \forall t \in I$) mit

$$D\varphi_t(TI_t) = L_{\varphi(t)},$$

denn TI_t wird von $\frac{\partial}{\partial t}\Big|_t$ und $L_{\varphi(t)}$ von $X_{\varphi(t)}$ erzeugt und

$$D\varphi_t\left(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_t\right) = \dot{\varphi}(t) = X_{\varphi(t)}.$$

Beachte auch, dass φ i.a. keine Einbettung zu sein braucht.

(**Beispiel:** $M = \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ und $X(p) = (1, \alpha)$ mit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, wenn man TM_p kanonisch mit \mathbb{R}^2 identifizieren (Übung), siehe auch (3.62))

- (b) Wir wollen nun auch „höherdimensionale Felder“ $D = (D_p)_{p \in M}$ mit $D_p \subseteq TM_p$ einem Unterraum der Dimension k mit $1 \leq k \leq n = \dim M$, vorgeben und fragen, ob es auch dann „Integralmannigfaltigkeiten“ gibt, d.h. die überall tangential an D sind.

(3.46) Definition.

- (a) Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension n und $1 \leq k \leq n$. Eine **Distribution vom Rang k auf M** ist eine Familie $D = (D_p)_{p \in M}$ von Unterräumen $D_p \subseteq TM_p$ mit $\dim D_p = k$, für alle $p \in M$.
- (b) Eine Distribution $D = (D_p)$ vom Rang k heißt **glatt**, wenn es zu jedem $p_0 \in M$ eine offene Umgebung $U \subseteq M$ von p_0 gibt und glatte Vektorfelder $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(U)$, die in jedem Punkt $p \in U$ eine Basis von D_p bilden,

$$D_p = \langle (X_1)_p, \dots, (X_k)_p \rangle$$

- (c) Eine glatte Distribution $D = (D_p)_{p \in M}$ vom Rang k auf einer glatten Mannigfaltigkeit M heißt **integrabel**, wenn es zu jedem $p_0 \in M$ eine glatte Mannigfaltigkeit N der Dimension k , ein $q_0 \in N$ und eine injektive Immersion $\varphi: N \rightarrow M$ mit $\varphi(q_0) = p_0$ gibt, so dass für alle $q \in N$ gilt:

$$D\varphi_q(TN) = D_{\varphi(q)}.$$

(3.47) Kommentar.

- (a) Ist $D = (D_p)$ eine glatte Distribution auf M , so nennen wir eine injektive Immersion $\varphi: N \rightarrow M$ mit $D\varphi_q(TN_q) = D_{\varphi(q)}$ eine **Integral-Mannigfaltigkeit für D** .
- (b) Für das Differential einer glatten Abbildung $\Phi: M \rightarrow N$ (in einem Punkt $p \in M$) notieren wir auch kurz: $\Phi_* := D\Phi_p$. Eine injektive Immersion $\varphi: N \rightarrow M$ ist also etwa integral für D , genau wenn

$$\varphi_*(TN) = D|_{\varphi(N)}$$

ist.

- (c) Ist $\text{rg}(D) = 1$, so haben wir schon gesehen (vgl. (3.45)), dass D integrabel ist. Für glatte Distributionen von höheren Rang gibt es ein Hindernis:

(3.48) Proposition. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und D eine glatte und integrable Distribution auf M . Sind dann $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, so dass $X_p, Y_p \in D_p$ ist, für alle $p \in M$, so gilt auch:

$$[X, Y]_p \in D_p, \forall p \in M.$$

(3.49) Kommentar.

(a) Ist D eine Distribution auf M , so notieren wir die glatten Vektorfelder mit Werten in D mit

$$\Gamma(D) := \{X \in \mathfrak{X}(M) : X_p \in D_p, \forall p \in M\}$$

Dann ist $\Gamma(D) \subseteq \mathfrak{X}(M)$ ein $\mathcal{E}(M)$ -Untermodule, insbesondere ein \mathbb{R} -Unterraum, von $\mathfrak{X}(M)$. Eine notwendige Bedingung für die Integrabilität von D ist dann nach (3.48), dass $\Gamma(D)$ eine Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{X}(M)$ ist,

$$[\Gamma(D), \Gamma(D)] \subseteq \Gamma(D).$$

(b) Beachte, dass auch $\Gamma(D)$ stets ein unendlich-dimensionaler Unterraum von $\mathfrak{X}(M)$ ist, falls $\dim M \geq 1$ ist (Übung).

(c) Ist $\text{rg}(D) = 1$, so ist die Bedingung, dass $\Gamma(D) \subseteq \mathfrak{X}(M)$ eine Lie-Unteralgebra ist, offenbar stets erfüllt, denn lokal kann man D mit nur einen Vektorfeld $Z \in \mathfrak{X}(U)$ erzeugen, $D_p = \langle Z_p \rangle, \forall p \in U$, so dass jedes Vektorfeld $X \in \Gamma(D|_U) \in \mathfrak{X}(U)$ von der Form $X = fZ$ mit $f \in \mathcal{E}(U)$ ist. Für $Y = gZ, g \in \mathcal{E}(U)$, ist dann aber

$$\begin{aligned} [X, Y]|_U &= [fZ, gZ] = f \cdot \underbrace{g[Z, Z]}_{=0} + (f \cdot Zg) \cdot Z - (g \cdot Zf) \cdot Z \\ &= (f \cdot Zg - g \cdot Zf)Z \in \Gamma(D|_U). \end{aligned}$$

Für Distribution von höherem Rang ist diese Bedingung i.a. nicht erfüllt (Beispiel: $M = \mathbb{R}^3, D = \langle X, Y \rangle, X = \frac{\partial}{\partial x}, Y = \frac{\partial}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial z}$ (Übung)).

Beweis von (3.48). Seien also $X, Y \in \Gamma(D)$ und $p_0 \in M$ beliebig. Sei weiter $\varphi: N \rightarrow M$ eine Integralmannigfaltigkeit für D durch p_0 und $q_0 \in N$ mit $\varphi(q_0) = p_0$. Da φ immersiv ist, können wir Vektorfelder \tilde{X}, \tilde{Y} auf N wie folgt definieren:

$$\tilde{X}_q := (D\varphi_q)^{-1}(X_{\varphi(q)})$$

und analog für Y , denn $D\varphi_q: TN_q \rightarrow D_{\varphi(q)} \subseteq TM_{\varphi(q)}$ ist ein Isomorphismus.

(a) **Behauptung:** \tilde{X} und \tilde{Y} sind glatt. Dazu: Sei $x: V \rightarrow V' \subseteq \mathbb{R}^k$ eine Karte von N um q_0 und $y = (y^1, \dots, y^n): U \rightarrow U' \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte um p_0 von M . Notieren wir dann φ bzgl. dieser Karten mit $\tau, \tau = y \circ \varphi \circ x^{-1}$, so ist mit einer geeigneten Projektion $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ die Abbildung $\pi \circ y = y': U \supseteq \varphi(V) \rightarrow \pi(U') \subseteq \mathbb{R}^k$ eine Karte für $\varphi(V) \subseteq U$, weil $\psi = \pi \circ \tau$ um q_0 ein Diffeomorphismus ist (siehe (3.38)). Insbesondere ist

$$Dy'_p: D_p = D_{\varphi(q)}(TN_q) \rightarrow T(\pi(U'))_{y'(p)} \cong \mathbb{R}^k$$

ein Isomorphismus.

Mit $X|_U \in \mathfrak{X}(U)$ ist nun auch $X|_{\varphi(V)}$ glatt (da $\varphi(V) \subseteq U$ Untermannigfaltigkeit ist), $X|_{\varphi(V)} \in \mathfrak{X}(\varphi(V))$, und ist $X|_{\varphi(V)}$ bzgl. y' durch glatte Funktionen $\eta^1, \dots, \eta^k \in \mathcal{E}(U')$ gegeben, $U'' := \pi(U')$,

$$X|_{\varphi(V)} = \eta^i \frac{\partial}{\partial y'^i},$$

so ist wegen der Kommutativität des folgenden Diagramms $\tilde{X}|_V: V \rightarrow TV$ durch die Funktionen $\zeta^1, \dots, \zeta^k: V' \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben,

$$\tilde{X}|_V = \zeta^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

die mit $\zeta := (\zeta^1, \dots, \zeta^k)$ durch

$$\zeta(x) = D\psi(x)^{-1}(\eta(\psi(x))) \quad (\text{mit } \eta = (\eta^1, \dots, \eta^k))$$

gegeben ist,

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & \varphi(V) \subseteq U \\ x \downarrow & & \downarrow y' \\ \mathbb{R}^k \supseteq V' & \xrightarrow{\psi} & U'' \subseteq \mathbb{R}^k \end{array}$$

denn:

$$\begin{aligned} \zeta(x) &= Dx_q(\tilde{X}_q) = Dx_q(D\varphi_q^{-1}(X_{\varphi(q)})) = Dx_q \circ D\varphi_q^{-1} \circ Dy'_{\varphi(p)}^{-1}(\underbrace{\eta(y' \circ \varphi(q))}_{=\psi \circ x(q) = \psi(x)}) \\ &\stackrel{\text{K.R.}}{=} D\psi(x)^{-1}(\eta(\psi(x))), \end{aligned}$$

nach der Kettenregel. Mit η (und ψ) ist deshalb auch ζ glatt (und damit \tilde{X}).

(b) Nach Definition sind nun \tilde{X} und X bzw. \tilde{Y} und Y φ -bezogen aufeinander,

$$D\varphi \circ \tilde{X} = X \circ \varphi, \quad D\varphi \circ \tilde{Y} = Y \circ \varphi$$

und daher nach (3.37) auch ihre Lie-Klammern. Es folgt:

$$\begin{aligned} [X, Y]_{p_0} &= [X, Y]_{\varphi(q_0)} = ([X, Y] \circ \varphi)(q_0) \\ &\stackrel{(3.37)}{=} D\varphi_{q_0}([\tilde{X}, \tilde{Y}]_{q_0}) \in \text{Im}(D\varphi_{q_0}) = D_{\varphi(q_0)} = D_{p_0}, \end{aligned}$$

also tatsächlich $[X, Y] \in \Gamma(D)$. □

(3.50) Definition. Wir nennen eine glatte Distribution D auf einer glatten Mannigfaltigkeit **involutiv**, wenn gilt:

$$[\Gamma(D), \Gamma(D)] \subseteq \Gamma(D).$$

(3.51) Kommentar. Integrale Distributionen sind also involutiv. Aber gibt es weitere Hindernisse als die Involutivität gegen die Integrabilität?

(3.52) Theorem (Frobenius). Eine glatte Distribution D auf einer glatten Mannigfaltigkeit ist genau dann integabel, wenn sie involutiv ist.

(3.53) Proposition. Sei M^n eine glatte Mannigfaltigkeit, $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $p \in M$ mit $X_p \neq 0$. Dann gibt es mit $W := \{x \in \mathbb{R}^n, |x^i| < 1 \ (i = 1, \dots, n)\}$, eine zentrierte Karte $\varphi: U \rightarrow W \subseteq \mathbb{R}^n$ um p , $\varphi(p) = 0$, so dass gilt:

$$X = \frac{\partial}{\partial x^1}.$$

Beweis. Da das Problem lokal ist, dürfen wir gleich $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $p = 0$ und $X = \zeta = (\zeta^1, \dots, \zeta^n): U \rightarrow \mathbb{R}^n$ annehmen. (Nehme halt irgendeine zentriert Karte y um p , so dass $X|_U = \zeta^i \frac{\partial}{\partial y^i}$ ist.) Gesucht ist nun ein Diffeomorphismus $\tau: W \rightarrow U'$ mit $\tau(0) = 0$ auf eine offene Umgebung $U' \subseteq U$ von 0 , so dass

$$\tau_* \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right) = \zeta$$

ist, also

$$D\tau_x(e_1) = \zeta(\tau(x)), \quad \forall x \in W.$$

Dazu können wir zunächst eine lineare Koordinaten-Transformation wählen, so dass nach dieser

$$\tilde{\zeta}(0) = e_1 = (1, 0, \dots, 0)$$

ist, also ohne Einschränkung:

$$\tilde{\zeta}(0) = \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_{x=0}.$$

Sei nun $\psi = (\psi^t)$ der lokale Fluss zu dem Vektorfeld $\tilde{\zeta}$ auf U , also

$$\frac{d\psi^t}{dt}(x) = \tilde{\zeta}(\psi^t(x)), \quad \psi^0(x) = x$$

Es gibt nun ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle t mit $|t| < \varepsilon$ und $x \in U$ mit $|x^i| < \varepsilon$ ($i = 1, \dots, n$) definiert ist:

$$\begin{aligned} \Phi: W_\varepsilon &\rightarrow U, \quad W_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^n : |x^i| < \varepsilon\}, \\ \Phi(x^1, x^2, \dots, x^n) &:= \psi^{x^1}(0, x^2, \dots, x^n). \end{aligned}$$

Dann gilt $\Phi(0) = \psi^0(0) = 0$ und mit $(x^1, x') := x$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^1}(x) = \frac{d}{dt} \psi^t(0, x') \Big|_{t=x^1} = \tilde{\zeta}(\psi^t(0, x')) \Big|_{t=x^1} = \tilde{\zeta}(\Phi(x)),$$

also $\Phi_*(e_1) = \tilde{\zeta}$. Andererseits ist $\Phi(0, x') = \psi^0(0, x') = (0, x')$, also

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^i}(0) = e_i \quad \text{für } i = 2, \dots, n,$$

also $D\Phi(0) = \mathbb{1}_n$ und damit invertierbar. Nach dem Umkehrsatz gibt es daher ein $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, so dass $\Phi|_{W_{\varepsilon'}}: W_{\varepsilon'} \rightarrow \Phi(W_{\varepsilon'}) =: U'$ ein Diffeomorphismus auf eine offene Umgebung $U' \subseteq U$ von 0 ist. Schaltet man noch die Dilatation $l: x \mapsto \frac{1}{\varepsilon'}x$ davor, $\tau := \Phi|_{W_{\varepsilon'}} \circ l$, so erhält man den gesuchten Diffeomorphismus. \square

(3.54) Kommentar.

(a) Ist D eine glatte Distribution vom Rang k und $p_0 \in M$, so wollen wir eine Karte $\psi: U \rightarrow W \subseteq \mathbb{R}^n$ um p_0 ein **Frobenius-Box um p_0** nennen, wenn für alle $p \in U$ der Unterraum $D_p \subseteq TM_p$ gerade von $\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^k}|_p$ aufgespannt wird,

$$D_p = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_p \right\rangle \subseteq TM_p, \quad \forall p \in U.$$

(b) Hat jeder Punkt $p_0 \in M$ eine solche Frobenius-Box, so ist D offenbar integrierbar, denn mit $N = W^k := \{x \in \mathbb{R}^k : |x^i| < 1 \ (i = 1, \dots, k)\}$ ist dann für jedes $c \in W^{n-k}$ offenbar

$$\varphi^c: W^k \rightarrow U \subseteq M, \quad x \mapsto \psi^{-1}(x, c)$$

eine integrierbare Mannigfaltigkeit, insbesondere geht φ^0 durch $p_0 = \psi^{-1}(0)$. Theorem (3.52) folgt also aus folgendem Satz:

(3.55) Satz. D involutiv und $p \in M$, dann existiert eine Frobenius-Box um p .

Beweis. Induktion über $k = \text{rg}(D)$.

$k = 1$ Proposition (3.53).

$k - 1 \mapsto k$: Sei $p \in M$ und $U \subseteq M$ Umgebungen von p mit $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(U)$, so dass

$$D_q = \langle (X_1)_q, \dots, (X_k)_q \rangle, \quad \forall q \in U.$$

Nach (3.53) kann man nun eine zentrierte Karte (nach evtl. Verkleinerung von U) $y: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n = \dim M$) wählen, so dass $X_1 = \frac{\partial}{\partial y^1}$ ist. Ist

$$X_i = \eta_i^j \frac{\partial}{\partial y^j} \quad (i = 2, \dots, k),$$

so dürfen wir nach Übergang von X_i zu $X_i - \eta_i^1 \frac{\partial}{\partial y^1}$ annehmen, dass $\eta_i^1 = 0$ ist, für $i = 2, \dots, k$. Betrachte nun die **Scheibe**

$$S := \{y \in W : y^1 = 0\} \subseteq W$$

und setze $Y_i := X_i|_S$ für $i = 2, \dots, k$. Da X_i keine $\frac{\partial}{\partial y^1}$ -Komponente hat, ist Y_i ein Vektorfeld auf S .

$$Y_i = \eta_i^j(0, y') \frac{\partial}{\partial y'^j} \quad (i = 2, \dots, k),$$

wo nun die Summation von $j = 2, \dots, n$ läuft, ($y' = (y^2, \dots, y^n)$ ist Koordinatensystem für S). Wiederum weil X_i keine $\frac{\partial}{\partial y^1}$ -Komponente hat, hat auch $[X_i, X_j]$ keine $\frac{\partial}{\partial y^1}$ -Komponente für $2 \leq i, j \leq k$. Wegen der Involutivität gibt es daher $c_{ij}^l \in \mathcal{E}(W)$ ($2 \leq i, j, l \leq k$) mit

$$[X_i, X_j] = c_{ij}^l X_l.$$

Ist $\iota: S \rightarrow W$ die Inklusion, so sind Y_i und X_i ι -bezogen, $\iota_*(Y_i) = X_i \circ \iota$, also auch $[Y_i, Y_j]$ und $[X_i, X_j]$ und daher ist

$$D' = \langle Y_2, \dots, Y_k \rangle$$

auf S eine involutive Distribution vom Rang $k - 1$,

$$\iota_*([Y_i, Y_j]) = [X_i, X_j] \circ \iota = c_{ij}^l \circ \iota (X_l \circ \iota) = c_{ij}^l \circ \iota \cdot \iota_*(Y_l),$$

also

$$[Y_i, Y_j] = c_{ij}^l \circ \iota \cdot Y_l$$

(da ι_* injektiv ist). Nach Induktionsvoraussetzung gibt es deshalb eine Koordinatentransformation $w \mapsto y'(w)$, $W' \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ (mit $W' := W^{n-1}$), so dass

$$\langle Y_2, \dots, Y_k \rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial w^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial w^k} \right\rangle, \quad \forall w \in W'$$

ist. Sei nun $\pi: W \rightarrow W'$, $(y^1, y') = y \mapsto y'$, die Projektion auf die letzten $n - 1$ Koordinaten und $y \mapsto x(y)$ der Koordinaten-Wechsel

$$\begin{aligned} x^1(y) &= y^1, \\ x^i(y) &= w^i(y') \quad (i = 2, \dots, n), \end{aligned}$$

und $x \mapsto y(x)$ seine Umkehrung, denn $y \mapsto x(y)$ ist umkehrbar, da

$$\frac{\partial x}{\partial y}(0) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \frac{\partial w}{\partial y'}(0) & \\ 0 & & & \end{array} \right) \in \text{Gl}_n(\mathbb{R})$$

ist. (Die Würfel W und W' müssen jeweils evtl. verkleinert werden.) Dann gilt für X_1, \dots, X_k in den neuen Koordinaten

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial y^1} = \underbrace{\frac{\partial x^j}{\partial y^1}}_{=\delta_1^j} \cdot \frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^1}$$

und

$$X_i = \eta_i^j \frac{\partial}{\partial y^j} = \underbrace{\eta_i^j \cdot y(x)}_{=0 \text{ für } j=1} \underbrace{\frac{\partial x^l}{\partial y^j} \cdot \frac{\partial}{\partial x^l}}_{=0 \text{ für } l=1 \text{ und } j \neq 1} \in \left\langle \frac{\partial}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right\rangle,$$

also

$$X_i = \zeta_i^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

mit

$$\zeta_i^1(x) = 0 \quad \text{für } i = 2, \dots, k$$

und

$$\zeta_i^j(0, x') = 0 \quad \text{für } i = 2, \dots, k \quad \text{und } j = k + 1, \dots, n, \quad (3.2)$$

da entlang S die Felder X_2, \dots, X_k gerade von $\frac{\partial}{\partial w^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial w^k}$ aufgespannt sind.

Behauptung: $\zeta_i^j(x^1, x') = 0$ für $i = 2, \dots, k$ und $j = k + 1, \dots, n$ sogar für alle $x^1 \in (-1, 1)$!

Dazu: Wegen der Involutivität von D gibt es nämlich $d_i^l \in \mathcal{E}(W)$ ($i = 2, \dots, k$, $l = 1, \dots, k$) mit

$$[X_1, X_i] = d_i^l X_l$$

und deshalb gilt für alle $j = k + 1, \dots, n$, $i = 2, \dots, k$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\underbrace{\zeta_i^j}_{=X_i(x^j)} \right) &= X_1(X_i(x^j)) - X_i \circ X_1(x^j) \\ &= [X_1, X_i](x^j) = d_i^l X_l(x^j) = \sum_{l=2}^k d_i^l X_l(x^j) \\ &= \sum_{l=2}^k d_i^l(x) \zeta_l^j \end{aligned} \quad (3.3)$$

da

$$X_1(x^j) = \frac{\partial x^j}{\partial x^1} = 0$$

ist.

Nun fixiere $x' \in W'$ und erkenne, dass (3.3) für festes $j = \{k + 1, \dots, n\}$ ein System linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen auf $I \times \mathbb{R}^{k-1}$ ($I = (-1, 1)$) ist:

$$\dot{\xi} = A(t)\xi, \quad (\xi = (\xi_2^j, \dots, \xi_k^j))$$

(mit $A(t) = (d_i^l(t, x'))_{2 \leq i, l \leq k}$) und deshalb auf ganz I eine eindeutig bestimmte Lösung zu gegebenen Anfangswert $\xi(0) = \xi_0$ (Übung) hat, aber $\xi(0) = 0$ wegen (3.2) und damit ist $\xi(t) = 0$, für alle $t \in I$, da $\xi = 0$ offensichtlich eine Lösung ist. Es ist damit

$$\xi_i^j(x^1, x') = 0, \quad \forall x^1 \in I, \forall x' \in W', \forall i = 2, \dots, k, \forall j = k + 1, \dots, n$$

und damit (3.55) (und also (3.52)) bewiesen. □

(3.56) Kommentar. Bisher haben wir, ähnlich wie beim lokalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf, nur die Existenz von lokalen Integralmannigfaltigkeiten bei involutiven Distributionen bewiesen. Nun wollen wir auch noch (vgl. (3.11)) die Existenz einer maximalen Integralmannigfaltigkeit und deren Eindeutigkeit.

(3.57) Definition. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und D eine involutive Distribution auf M . Wir nennen eine Integralmannigfaltigkeit $\varphi: N \rightarrow M$ **maximal**, wenn N zusammenhängend ist und folgendes gilt: Ist $\tilde{\varphi}: \tilde{N} \rightarrow M$ eine weitere Integralmannigfaltigkeit, \tilde{N} zusammenhängend und ist $\tilde{\varphi}(\tilde{N}) \supseteq \varphi(N)$, so ist bereits

$$\tilde{\varphi}(\tilde{N}) = \varphi(N).$$

(3.58) Lemma. Sei D eine involutive Distribution vom Rang k auf einer glatten Mannigfaltigkeit M und $x: U \rightarrow W \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Frobenius-Box für D . Sei weiter $\varphi: N \rightarrow U \subseteq M$ eine Integralmannigfaltigkeit für D und N zusammenhängend. Dann gibt es genau ein $c \in W^{n-k}$, so dass $\varphi(N)$ in der Scheibe

$$N^c := \{p \in U : x^j(p) = c^j, j = k + 1, \dots, n\}$$

liegt.

Beweis. Für jedes $q \in N$ liegt $D\varphi_q(TN_q) = D_{\varphi(q)}$ im Aufspann von $\frac{\partial}{\partial x^1}|_{\varphi(q)}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^k}|_{\varphi(q)}$, also im Kern von $dx^j|_{\varphi(q)} \in TM_{\varphi(q)}^*$ ($j = k + 1, \dots, n$). Es ist also

$$d(x^j \circ \varphi)_q = dx^j|_{\varphi(q)} \circ D\varphi|_q = 0$$

und damit, weil N zusammenhängend ist, ist $x^j \circ \varphi$ konstant (Übung), sagen wir $c^j \in I$ ($j = k + 1, \dots, n$). Es folgt: $x^j(\varphi(N)) = c^j$, also: $\varphi(N) \subseteq N^c$. □

(3.59) Satz. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, D eine involutive Distribution auf M und $p_0 \in M$. Dann existiert eine maximale Integralmannigfaltigkeit $\varphi: N \rightarrow M$ durch p_0 und für jede andere Integralmannigfaltigkeit $\psi: \tilde{N} \rightarrow M$ durch p_0 mit zusammenhängendem \tilde{N} , gilt:

$$\psi(\tilde{N}) \subseteq \varphi(N).$$

Beweis. Wir definieren die Teilmenge

$$C := \left\{ p \in M : \begin{array}{l} \exists \text{ (stückweise) glattes } \gamma: [0, 1] \rightarrow M \text{ mit } \gamma(0) = p_0 \text{ und } \gamma(1) = \\ p \text{ und } \dot{\gamma}(t) \in D_{\gamma(t)}, \forall t \in [0, 1] \end{array} \right\}$$

und wollen nun C mit einer Topologie und Mannigfaltigkeit-Struktur versehen, die die Inklusion $i: C \hookrightarrow M$ zu einer Integralmannigfaltigkeit von D macht.

- (a) Dazu überdecken wir gemäß (3.55) M mit Frobenius-Boxen $x_\alpha: U_\alpha \rightarrow W \subseteq \mathbb{R}^n$ und dürfen wegen der abzählbaren Topologie von M annehmen, dass wir davon nur abzählbar viele brauchen, $\alpha \in \mathbb{N}$ (vgl. Beweis von (1.56)). Für jedes $p \in C$ wählen wir nun, ein für allemal fest, ein $\alpha(p) \in \mathbb{N}$ mit $p \in U_{\alpha(p)}$ und nennen die Scheibe von $U_{\alpha(p)}$, auf der p liegt, S_p :

$$S_p := \{q \in U_{\alpha(p)} : x_\alpha^j(q) = x_\alpha^j(p), j = k+1, \dots, n\}$$

(wo $k = \text{rg}(D)$ ist). Da jede glatte Kurve in S_p integral ist (die ganze Scheibe S_p ist ja integral) und S_p (weg-)zusammenhängend ist (denn $S_p \cong W^k \subseteq \mathbb{R}^k$), ist mit $p \in C$ auch S_p in C , $S_p \subseteq C$. Es ist also

$$C = \bigcup_{p \in C} S_p.$$

Wir betrachten nun jede Scheibe S_p vermöge $x_{\alpha(p)}|_{S_p}: S_p \rightarrow W^k \subseteq \mathbb{R}^n$ als bijektiv zum (offenen) Einheitswürfel W^k und versehen S_p mit der Topologie τ_p , die $x_{\alpha(p)}|_{S_p}$ zu einem Homöomorphismus macht (d.i. die Relativtopologie von S in M). Dann setzen wir

$$\mathfrak{B} := \bigcup_{p \in C} \tau_p \subseteq \mathfrak{P}(C)$$

und behaupten, dass \mathfrak{B} eine Basis der von ihr erzeugten Topologie τ auf C ist.

Ist nämlich $V_p \subseteq S_p$ von $V_{p'} \subseteq S_{p'}$ offen ($p, p' \in C$), so muss dazu $V_p \cap V_{p'}$ Vereinigung von Elementen aus \mathfrak{B} sein. Ist $q \in V_p \cap V_{p'}$, so gibt es wegen der Offenheit von $U_{\alpha(p')}$ zunächst einen offenen k -Ball $B \subseteq V_p$ um q (via $x_{\alpha(p)}|_{S_p}$), so dass $B \subseteq U_{\alpha(p')}$ ist. Weil aber $q \in B$ ist, B integral (und zusammenhängend) ist damit nach (3.58) auch $B \subseteq S_{p'}$ und damit, nach evtl. Verkleinerung, auch in $V_{p'}$. Jedes $q \in V_p \cap V_{p'}$ liegt also in einem $B \in \mathfrak{B}$ und damit ist $V_p \cap V_{p'}$ Vereinigung von Elementen aus \mathfrak{B} . Insbesondere: Die von τ auf jedem S_p induzierte Topologie ist damit τ_p (und nicht feiner).

- (b) Diese Topologie ist hausdorffsch, denn sind $p, q \in C$ mit $p \neq q$, so wähle man zunächst offene Umgebungen $U_p \in \mathfrak{A}(p)$, $U_q \in \mathfrak{A}(q)$ in M , die disjunkt sind, $U_p \cap U_q = \emptyset$. Dann schneide man diese mit den zugehörigen Scheiben,

$$V_p := U_p \cap S_p, V_q := U_q \cap S_q.$$

Dann sind $V_p, V_q \subseteq C$ offene Umgebungen von p bzw. q und disjunkt.

C ist mit τ auch lokal euklidisch ist (von der Dimension k), denn zu $p \in C$ ist offenbar $S_p \subseteq C$ eine offene Umgebung, die via $x_{\alpha(p)}|_{S_p}$ homöomorph zu $W^k \subseteq \mathbb{R}^k$ ist.

Behauptung: (C, τ) hat abzählbare Topologie.

▮ In jeder Box U_α können sehr viele Scheiben $N_\alpha^c \subseteq U_\alpha$, $c \in W^{n-k}$, zu C gehören. Es ist gewissermaßen das Hauptproblem etwa auszuschließen, dass nicht alle dazu gehören können und damit etwa $C = M$ unmöglich wird. ▮

Da jedes $S_p \subseteq U_{\alpha(p)}$ eine abzählbare Basis hat und es nur abzählbar viele Boxen U_α gibt, reicht es zu zeigen, dass aus jeder Box U_α nur abzählbar viele Scheiben N_α^c zu C gehören können.

Sei also U_α fest und $p \in U_\alpha \cap C$. Dann gibt es also eine Integralkurve $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ von p_0 nach p . Wegen der Kompaktheit von $[0, 1]$ gibt es dann $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{N}$ und $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_r = 1$, so dass $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]} \subseteq U_{\alpha_i}$ ist. Da $[t_{i-1}, t_i]$ zusammenhängend ist, muss $\gamma([t_{i-1}, t_i])$ in nur einer Scheibe von U_{α_i} enthalten sein. Da es nur abzählbar viele Folgen $U_{\alpha_0} \subseteq U_{\alpha_1} \subseteq \dots \subseteq U_{\alpha_r} = U_\alpha$ gibt, reicht es zu zeigen, dass es für jede

solche Folge nur abzählbar viele Scheiben in U_α gibt, die man beim Durchgang durch U_{α_i} ($i = 0, \dots, r$) erreichen kann. Dazu reicht es, dass beim Übergang von U_α zu U_β (mit $\alpha = \alpha_{i-1}$, $\beta = \alpha_i$) jede Scheibe $S \subseteq U_\alpha$ an nur abzählbar viele Scheiben von U_β ankoppeln kann. Aber $S \cap U_\beta$ ist selbst eine Mannigfaltigkeit und daher von abzählbarer Topologie. Sie hat damit nur abzählbar viele (Weg-)Zusammenhangskomponenten (Übung). Jede Komponente von $S \cap U_\beta$ ist also zusammenhängend und integral in U_β und muss deshalb nach (3.58) in nur einer Scheibe von U_β liegen. Damit koppelt S an nur abzählbar viele Scheiben von U_β an und damit ist C von abzählbarer Topologie und somit eine k -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit, die nach Definition auch (weg-)zusammenhängend ist.

- (c) Als glatten Atlas für C wählt man nun die Karten $x_{\alpha(p)}|_{S_p} : S_p \rightarrow W^k \subseteq \mathbb{R}^k$ (deren Übergänge glatt sind, weil sie Einschränkungen von den Übergängen von $(x_\alpha : U_\alpha \rightarrow W)$ sind). Die Inklusion $i : C \rightarrow M$ ist nun offenbar eine injektive Immersion (weil $W^k \rightarrow W^n$, $x \mapsto (x, 0)$ immersiv ist). Schließlich ist wegen

$$TC_p = T(S_p)_p = D_p$$

auch $Di_p(TC_p) = D_p$, i also auch integrale Mannigfaltigkeit.

- (d) Ist $\varphi : N \rightarrow M$ irgendeine andere integrale Mannigfaltigkeit durch p_0 mit zusammenhängenden N , so sei $p = \varphi(q) \in \varphi(N)$ beliebig und $\varphi(q_0) = p_0$. Dann gibt es einen (stückweise) glatten Weg $\beta : [0, 1] \rightarrow N$ von q_0 nach q (denn N ist auch wegzusammenhängend und wenn es einen stetigen Weg von q_0 nach q gibt, so auch einen stückweise glatten (Übung)). Die Kurve $\gamma := \varphi \circ \beta$ ist dann stückweise glatt und auch integral, weil

$$\dot{\gamma}(t) = D\varphi_{\beta(t)}(\dot{\beta}(t)) \in \text{im}(D\varphi_{\beta(t)}) = D_{\gamma(t)}$$

ist und damit liegt p auch in C . Das zeigt, dass $i : C \rightarrow M$ maximale Integralmannigfaltigkeit ist und das Bild jeder anderen zusammenhängenden Integralmannigfaltigkeit in C enthalten ist. □

(3.60) Kommentar. Was jetzt noch fehlt, ist die Eindeutigkeit (bis auf Isomorphie), denn: ist eben $i : C \hookrightarrow M$ auch $\varphi : N \rightarrow M$ eine maximale Integral-Mannigfaltigkeit durch einen Punkt $p_0 \in M$, so ist zwar $\varphi(N) = C$ nach (3.59), weil zunächst $\varphi(N) \subseteq C$ ist, aber wegen der Maximalität von φ dann gleich C sein muss. Es könnte aber sein, dass C vermöge φ mit einer anderen Topologie versehen ist als vermöge $i : C \hookrightarrow M$, so dass die Mannigfaltigkeitsstrukturen auf C vermöge i und φ verschieden sind. Dass das nicht passiert besagt nun:

(3.61) Satz. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $D = (D_p)_{p \in M}$ eine involutive Distribution auf M und $p_0 \in M$. Dann gibt es eine (bis auf Isomorphie) eindeutig bestimmte maximale Integral-Mannigfaltigkeit durch p_0 .

Beweis. Sei $i : C \hookrightarrow M$ die maximale Integral-Mannigfaltigkeit durch p_0 nach (3.59) und $\varphi : N \rightarrow M$ eine beliebige andere. Wir wissen schon (vgl. (3.58)), dass $\varphi(N) = C$ ist, also gibt es ein eindeutig bestimmtes $\psi : N \rightarrow C$ mit $i \circ \psi = \varphi$ (nämlich $\psi = i^{-1} \circ \varphi$, wenn i als Bijektion von C auf $C \subseteq M$ betrachten).

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\varphi} & M \\ & \searrow \psi & \uparrow i \\ & & C \end{array}$$

(a) **Behauptung:** ψ ist stetig.

Sei $p \in N$ beliebig, $q := \psi(p) \in C$ und sei $V \subseteq C$ eine offene Umgebung. Zu zeigen: $\psi^{-1}(V)$ ist Umgebung von p ($\implies \psi$ ist stetig in p).

Sei dazu $x: U \rightarrow U' \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Frobenius-Box um q und $S \subseteq U$ die Scheibe in U , die q enthält. Dann sei o.E. $V \subseteq S$. Da φ stetig ist, ist $\varphi^{-1}(U) \subseteq N$ offen. Sei $W \subseteq \varphi^{-1}(U)$ die Wegkomponente, die p enthält. Dann ist auch W offen (da N lokal wegzusammenhängend ist). Da nun $\varphi|_W: W \rightarrow U \subseteq M$ Integral-Mannigfaltigkeit ist mit $q \in \text{im}(\varphi|_W)$, gilt nach (3.58), dass $\varphi(W) \subseteq S$ sein muss. Aber

$$\varphi|_W: W \rightarrow S$$

ist stetig und damit $(\varphi|_W)^{-1}(V) \subseteq W$ offen. Also ist

$$\psi^{-1}(V) \cap W = (\varphi|_W)^{-1}(V)$$

eine Umgebung von p .

(b) **Behauptung:** ψ ist sogar Diffeomorphismus.

Dazu: Nach (3.43) ist ψ nicht nur stetig, sondern sogar glatt. Es ist aber auch

$$D\psi_p = Di_q^{-1} \circ D\varphi_p$$

(wo man Di_q als Isomorphismus von TC_q nach $D_p \subseteq TM_q$ betrachtet) ein Isomorphismus, für alle $p \in N$. Nach dem Umkehrsatz ist damit ψ ein lokaler Diffeomorphismus. Aber ψ ist bijektiv und damit ein (globaler) Diffeomorphismus.

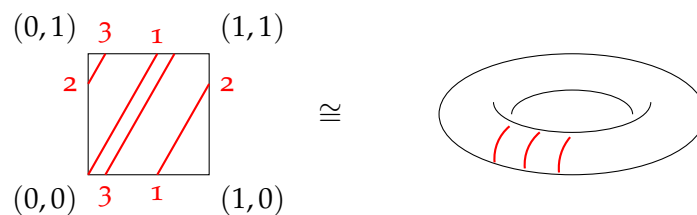
Also sind φ und i äquivalent und damit die maximale Integral-Mannigfaltigkeit $i: C \hookrightarrow M$ eindeutig bestimmt. \square

(3.62) Beispiel. Sei $M = \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Identifiziere nun zunächst $T(\mathbb{T})_p$ kanonisch mit \mathbb{R}^2 vermöge

$$D\pi_p: \mathbb{R}^2 \cong T(\mathbb{R}^2)_{\tilde{p}} \rightarrow T(\mathbb{T}^2)_p$$

(unabhängig von der Wahl des Urbildes $\tilde{p} \in \mathbb{R}^2$ unter der kanonischen Projektion $\pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$) und betrachte dann $X_\alpha \in \mathfrak{X}(\mathbb{T}^2)$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,

$$X_\alpha(p) = (1, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \cong T(\mathbb{T}^2)_p.$$



Setze $D = (D_p)$,

$$D_p = \mathbb{R}X_\alpha(p) \subseteq T(\mathbb{T}^2)_p$$

Dann ist $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^2$,

$$\varphi(t) = [(t, \alpha t)],$$

die maximale Integral-Mannigfaltigkeit durch $p_0 = [(0,0)]$ und $C = \varphi(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{T}^2$ trägt nicht die Relativtopologie von \mathbb{T}^2 (wenn man C die Mannigfaltigkeit-Struktur von \mathbb{R} gibt). C liegt nämlich dicht und die von der Teilraumtopologie von C induzierte Topologie auf \mathbb{R} ist nicht mal lokal wegzusammenhängend.

Teil II.

Differentialgeometrie II

4 Kapitel 4.

Vektorraumbündel

(4.1) Definition. Sei A eine Menge. Auf der Menge der formalen, endlichen Linearkombinationen $\sum_{a \in A} r_a a$, $r_a \in \mathbb{R}$ und $r_a = 0$ für fast alle $a \in A$ (d.h.: alle, bis auf endlich viele) definieren wir

$$\left(\sum_{a \in A} r_a a \right) + \left(\sum_{a \in A} s_a a \right) := \sum_{a \in A} (r_a + s_a) a,$$

$$\lambda \cdot \left(\sum_{a \in A} r_a a \right) := \sum_{a \in A} (\lambda r_a) a.$$

Es heißt dann

$$\mathbb{F}(A) := \left\{ \sum_{a \in A} r_a a : r_a \in \mathbb{R}, r_a = 0 \text{ für fast alle } a \in A \right\}$$

(zusammen mit diesen Operationen) **der Vektorraum über \mathbb{R} , der frei von A erzeugt wird.**

(4.2) Kommentar.

- (a) Es ist $\mathbb{F}(A)$ mit diesen Operationen tatsächlich ein \mathbb{R} -Vektorraum.
- (b) Die Elemente $1 \cdot a \in \mathbb{F}(A)$ (d.h.: alle Koeffizienten $r_b = 0$ für $b \neq a$ und $r_a = 1$) bilden eine Basis von $\mathbb{F}(A)$, denn nach Definition sind sie erzeugend und

$$\lambda^1(1a_1) + \dots + \lambda^n(1a_n) = 0 \implies \sum_{i=1}^n \lambda^i a_i = 0 \implies \lambda^i = 0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

- (c) Bezeichnet $i: A \rightarrow \mathbb{F}(A)$ die Abbildung $i(a) = 1 \cdot a = a$, so erfüllt das Paar $(\mathbb{F}(A), i)$ folgende universelle Eigenschaft: Ist V ein reeller Vektorraum und $j: A \rightarrow V$ eine Abbildung, so gibt es genau eine lineare Abbildung $T: \mathbb{F}(A) \rightarrow V$ mit $T \circ i = j$ (Übung),

$$\begin{array}{ccc} A & & \\ \downarrow i & \searrow j & \\ \mathbb{F}(A) & \xrightarrow{-T} & V. \end{array}$$

(4.3) Definition. Seien V und W reelle Vektorräume. Sei $K \subseteq \mathbb{F}(V \times W)$ der Untervektorraum von $\mathbb{F}(V \times W)$ der von allen Elementen

$$\begin{aligned} & 1 \cdot (v_1 + v_2, w) + (-1) \cdot (v_1, w) + (-1) \cdot (v_2, w) \\ & (v, w_1 + w_2) - (v, w_1) - (v, w_2) \\ & (\lambda v, w) - \lambda(v, w) \\ & (v, \lambda w) - \lambda(v, w) \end{aligned}$$

$v, v_1, v_2 \in V$, $w, w_1, w_2 \in W$, $\lambda \in \mathbb{R}$ erzeugt wird. Dann nennen wir

$$V \otimes W := \mathbb{F}(V \times W) / K$$

das Tensorprodukt von V und W. Ist $\pi: \mathbb{F}(V \times W) \rightarrow V \otimes W$ die kanonische Projektion, so bezeichnen wir

$$v \otimes w := \pi((v, w)).$$

(4.4) Kommentar.

(a) Für alle $v, v_1, v_2 \in V, w, w_1, w_2 \in W$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ist also richtig:

$$\begin{aligned} (v_1 + v_2) \otimes w &= v_1 \otimes w + v_2 \otimes w, \\ v \otimes (w_1 + w_2) &= v \otimes w_1 + v \otimes w_2, \\ (\lambda v) \otimes w &= \lambda(v \otimes w) = v \otimes (\lambda w). \end{aligned}$$

(b) Definiert man daher $s: V \times W \rightarrow V \otimes W$ durch

$$s(v, w) = v \otimes w,$$

so ist s offenbar bilinear.

(4.5) Bemerkung. Seien V, W reelle Vektorräume. Dann erfüllt $(V \otimes W, s)$ die folgende universelle Eigenschaft: Ist $\sigma: V \times W \rightarrow U$ eine bilineare Abbildung, U ein reeller Vektorraum, so gibt es genau eine lineare Abbildung $T: V \otimes W \rightarrow U$ mit $T \circ s = \sigma$,

$$\begin{array}{ccc} V \times W & & \\ \downarrow s & \searrow \sigma & \\ V \otimes W & \xrightarrow{T} & U. \end{array}$$

Beweis. Eindeutigkeit. Da $\mathbb{F}(V \times W)$ von $\{(v, w)\}_{v \in V, w \in W}$ erzeugt wird und $\pi: \mathbb{F}(V \times W) \rightarrow V \otimes W$ surjektiv ist, gibt es nur einen Kandidaten für T , nämlich

$$T\left(\sum_{\substack{v \in V \\ w \in W}} r_{v,w} v \otimes w\right) = \sum_{\substack{v \in V \\ w \in W}} r_{v,w} \sigma(v, w),$$

denn

$$T(v \otimes w) = T \circ s(v, w) = \sigma(v, w).$$

Existenz. Nach der universellen Eigenschaft von $(\mathbb{F}(V \times W), i)$ gibt es genau eine lineare Abbildung $\tilde{T}: \mathbb{F}(V \times W) \rightarrow U$ mit $\tilde{T} \circ i = \sigma$, also

$$\tilde{T}(1 \cdot (v, w)) = \sigma(v, w),$$

$$\begin{array}{ccc} V \times W & & \\ \downarrow i & \searrow \sigma & \\ \mathbb{F}(V \times W) & \xrightarrow{\tilde{T}} & U. \\ \downarrow \pi & \searrow T & \\ V \otimes W = \mathbb{F}(V \times W)/K & & \end{array}$$

Erinnere: Universelle Eigenschaft des Quotienten: V Vektorraum, $U \subseteq V$ Unterraum, $\pi: V \rightarrow V/U$ die kanonische Projektion. Dann hat $(V/U, \pi)$ folgende universelle Eigenschaft: Ist (W, f) derart, dass $f: V \rightarrow W$ mit $U \subseteq \ker(f)$, so gibt es genau eine lineare Abbildung $T: V/U \rightarrow W$ mit $T \circ \pi = f$ (siehe rechts).

$$\begin{array}{ccc} V & & \\ \downarrow \pi & \searrow f & \\ V/U & \xrightarrow{T} & W \end{array}$$

Da

$$\tilde{T}((v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w)) = \sigma(v_1 + v_2, w) - \sigma(v_1, w) - \sigma(v_2, w) = 0$$

und ähnlich für die anderen Erzeuger von K , ist $K \subseteq \ker(\tilde{T})$, und daher existiert nach der universellen Eigenschaft des Quotienten genau ein $T: V \otimes W \rightarrow U$ mit $T \circ \pi = \tilde{T}$.

$$\begin{aligned} \implies T \circ s &= T \circ \pi \circ i && \text{(weil } s = \pi \circ i) \\ &= \tilde{T} \circ i = \sigma. && \square \end{aligned}$$

(4.6) Bemerkung. Hat V die Dimension $n \in \mathbb{N}_0$ und W die Dimension $m \in \mathbb{N}_0$, so hat $V \otimes W$ die Dimension $n \cdot m$. Ist (e_1, \dots, e_n) eine Basis von V und (f_1, \dots, f_m) eine Basis von W , so ist $(e_i \otimes f_j)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ eine Basis von $V \otimes W$.

Beweis. Weil $\{1 \cdot (v, w)\}_{v \in V, w \in W}$ erzeugend für $\mathbb{F}(V \times W)$ und $\pi: \mathbb{F}(V \times W) \rightarrow V \otimes W$ surjektiv ist, ist $(v \otimes w)_{v \in V, w \in W}$ erzeugend für $v \otimes w$. Ist $v = \lambda^i e_i$, $w = \mu^j f_j$, so ist $v \otimes w = (\lambda^i e_i) \times (\mu^j f_j) = \lambda^i \mu^j e_i \otimes f_j$, also ist $(e_i \otimes f_j)_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}}$ erzeugend für $V \otimes W$.

Lineare Unabhängigkeit.

⌈ Zu $u_{kl} \in U$ ($k = 1, \dots, n$, $l = 1, \dots, m$) gibt es genau eine lineare Abbildung $\sigma: V \times W \rightarrow U$ mit $\sigma(e_k, f_l) = u_{kl}$. ⌋

Sei $\lambda^{ij} \in \mathbb{R}$ und

$$\lambda^{ij} e_i \otimes f_j = 0.$$

Sei $\sigma^{ij}: V \times W \rightarrow \mathbb{R}$ die bilineare Abbildung die durch

$$\sigma^{ij}(e_k, f_l) = \delta_k^i \cdot \delta_l^j$$

bestimmt ist. Nach der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts existiert genau eine lineare Abbildung $T^{ij}: V \otimes W \rightarrow \mathbb{R}$ mit $T^{ij} \circ s = \sigma^{ij}$, wo $s: V \times W \rightarrow V \otimes W$ die kanonische bilineare Abbildung ist. Es ist dann:

$$\begin{aligned} 0 &= T^{ij}(0) = T^{ij}(\lambda^{kl} e_k \otimes f_l) \\ &= \lambda^{kl} T^{ij}(e_k \otimes f_l) \\ &= \lambda^{kl} T^{ij} \circ s(e_k, f_l) = \lambda^{kl} \sigma^{ij}(e_k, f_l) \\ &= \lambda^{kl} \cdot \delta_k^i \delta_l^j \\ &= \lambda^{ij} \end{aligned}$$

Also ist $(e_i \otimes f_j)$ Basis. □

(4.7) Kommentar.

(a) Beachte, dass s i.A. weder injektiv noch surjektiv ist. Z.B. ist für alle $v \in V$ und $w \in W$ stets

$$v \otimes 0 = 0 = 0 \otimes w,$$

weil eine bilineare Abbildung $(v, 0)$ bzw. $(0, w)$ stets auf 0 abbildet. Auch ist etwa der Tensor $e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2 \in \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$ nicht im Bild von

$$s: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$$

(Übung).

- (b) Lineare Abbildung T aus $V \otimes W$ heraus, $T: V \otimes W \rightarrow U$, werden oft durch Angabe

$$T(v \otimes w) = \text{rechte Seite}$$

definiert, wobei die *rechte Seite* des Ausdruckes bilinear in v und w ist. Gemeint ist dann stets, dass man zunächst die bilineare Abbildung $\sigma: V \times W \rightarrow U$ mit

$$\sigma(v, w) = \text{rechte Seite}$$

betrachtet, dann die universelle Eigenschaft benutzt und $T = \Phi_\sigma$ setzt. (Keineswegs meint man, dass jedes Element in $V \otimes W$ die Form $v \otimes w$ hat und womöglich die Darstellung auch noch eindeutig ist oder dass man Wohldefiniertheit zu prüfen hätte.)

(4.8) Beispiel.

- (a) Für endlich dimensionale \mathbb{R} -Vektorräume V und W ist *kanonisch isomorph*:

$$V^* \otimes W \cong \text{Hom}(V, W).$$

„Kanonisch isomorph“ bedeutet hier, dass es einen *kanonischen Isomorphismus*, zwischen den Vektorräumen, der nicht von einer Basiswahl abhängt, gibt. (Dass $V^* \otimes W$ „isomorph“ zu $\text{Hom}(V, W)$ ist, folgt schon daraus, dass beide die gleiche Dimension $\dim V \dim W$ haben.)

Der kanonische Isomorphismus wird in der Regel angegeben (oder nach einer Zeit auch nicht mehr, weil er so kanonisch ist, dass jeder ihn selbst findet). Er ist hier für $\lambda \in V^*$, $w \in W$, $v \in V$ gegeben durch

$$T(\lambda \otimes w)(v) = \lambda(v)w.$$

Weil die rechte Seite trilinear in (λ, w, v) ist, ist nämlich zunächst die Abbildung $\sigma: V^* \times W \rightarrow \text{Hom}(V, W)$,

$$\sigma(\lambda, w)(v) = \lambda(v)w$$

wohldefiniert (d.h.: $\sigma(\lambda, w)$ liegt wirklich in $\text{Hom}(V, W)$) und dann benutzt man die universelle Eigenschaft und die Existenz von $T = \Phi_\sigma$ zu bekommen (vgl. (4.7,b)):

$$\begin{array}{ccc} V^* \times W & \xrightarrow{\sigma} & \text{Hom}(V, W) \\ \downarrow s & \nearrow T & \\ V^* \otimes W & & \end{array}$$

⌈ *Beweis*, dass T injektiv ist: Sei $t = \sum_{i=1}^r \lambda^i \otimes w_i \in V^* \otimes W$. Wir dürfen annehmen, dass (w_1, \dots, w_r) linear unabhängig ist (sonst gibt es eine kürzere Darstellung $t = \mu^j \otimes w_j$); wir sagen, dass die Darstellung *reduziert* ist.

Ist $T(t) = 0 \implies$

$$\lambda^i(v)w_i = 0$$

$\implies \lambda^i(v) = 0$ (wegen linearer Unabhängigkeit von (w_1, \dots, w_r)), $\forall v \in V$. Also sind alle $\lambda^i = 0$ und damit $t = 0$. Damit ist T injektiv. (Surjektivität folgt dann aus $\dim V^* \otimes W = \dim \text{Hom}(V, W)$.) \lrcorner

- (b) Für endlich-dimensionale \mathbb{R} -Vektorräume V und W sind kanonisch isomorph:

$$V^* \otimes W^* \cong \text{Bil}(V, W; \mathbb{R}) \cong (V \otimes W)^*.$$

Die zweite Isomorphie wird hier einfach durch $\sigma \mapsto \Phi_\sigma$ gegeben (vgl. (4.5)) und die erste Isomorphie (ähnlich wie unter (a)) durch

$$T(\lambda \otimes \mu)(v, w) = \lambda(v)\mu(w)$$

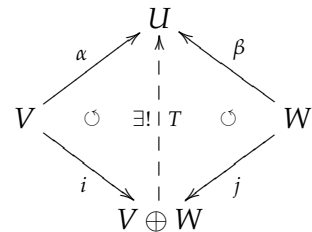
für $\lambda \in V^*$, $\mu \in W^*$, $w \in W$ (Übung).

(4.9) Erinnerung.

- (a) Man erinnere sich an die Konstruktion der **direkten Summe** zweier Vektorräume: Für V und W setze man als Menge $V \oplus W := V \times W$, versehen diese mit der Komponentenweisen Addition und Skalarmultiplikation

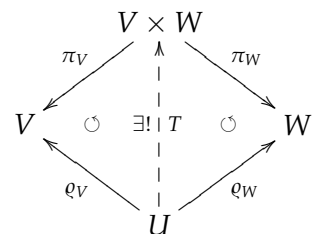
$$\lambda \cdot (v, w) := (\lambda v, \lambda w)$$

für $v \in V, w \in W$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Man hat dann die natürlichen Inklusion $i: V \rightarrow V \oplus W, v \mapsto (v, 0)$ und $j: W \rightarrow V \oplus W, w \mapsto (0, w)$ und das Tripel $(V \oplus W, i, j)$ erfüllt folgende universelle Eigenschaft: Ist (U, α, β) ein (weiteres) solches Tripel, so gibt es genau einen Homomorphismus $T: V \oplus W \rightarrow U$ mit $T \circ i = \alpha$ und $T \circ j = \beta$,



Man setze nämlich $T(v, w) = \alpha(v) + \beta(w)$. Das ist wegen $T(v, w) = T((v, 0) + (0, w)) = T(v, 0) + T(0, w) = T \circ i(v) + T \circ j(w) = \alpha(v) + \beta(w)$ der einzige Kandidat und er ist auch tatsächlich linear. ┘

- (b) Man beachte, dass zwar $V \oplus W$ als Vektorraum kanonisch isomorph zu $V \times W$ ist. Es erfüllt aber $(V \times W, \pi_V, \pi_W)$ die universelle Eigenschaft eines **Produktes**: Ist $(U, \varrho_V, \varrho_W)$ ein Vergleichstripel, so existiert genau ein Homomorphismus $T: U \rightarrow V \times W$ mit $\pi_V \circ T = \varrho_V$ und $\pi_W \circ T = \varrho_W$,
 Nämlich $T(u) := (\varrho_V(u), \varrho_W(u))$. (Übung).



Beachte aber auch, dass für unendlich viele Summanden bzw. Faktoren $V_i (i \in I)$ die Summe und das Produkt auseinanderfallen. Es ist nämlich

$$\prod_{i \in I} V_i = \{(v_i) : v_i \in V_i\} \text{ und } \pi_j: \prod_{i \in I} V_i \rightarrow V_j, (v_i)_{i \in I} \mapsto v_j,$$

allerdings

$$\bigoplus_{i \in I} V_i = \{(v_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} V_i : v_i = 0, \text{ für fast alle } i \in I\}$$

und

$$\iota_j: V_j \rightarrow \bigoplus_{i \in I} V_i, v_j \mapsto (\delta_{ij} v_i)_{i \in I}$$

(Übung).

- (c) Man prüft nun (ohne Mühe) nach, dass z.B. kanonisch isomorph ist:

$$V \otimes (W_1 \oplus W_2) \cong (V \otimes W_1) \oplus (V \otimes W_2) \quad (\text{Übung}).$$

(4.10) Kommentar.

- (a) Sei nun $r \geq 2$. In ganz ähnlicher Weise, wie wir das Studium von bilinearen Abbildungen auf $V \times W$ (für zwei \mathbb{R} -Vektorräumen V und W) auf das Studium von linearen Abbildung auf $V \otimes W$ zurückgeführt haben, gehen wir auch beim Studium von r -linearen Abbildungen auf $V_1 \times \dots \times V_r$ (bei Vektorräumen V_1, \dots, V_r) vor. Man bildet zunächst wieder den freien Vektorraum $\mathbb{F}(V_1 \times \dots \times V_r)$ über der Menge $V_1 \times \dots \times V_r$ und teilt dann einen Unterraum U (von Relationen) heraus,

$$V_1 \otimes \dots \otimes V_r := \mathbb{F}(V_1 \times \dots \times V_r) / U,$$

so dass die kanonische Abbildung $s = \pi \circ i: V_1 \times \cdots \times V_r \rightarrow V_1 \otimes \cdots \otimes V_r$ ($i: V_1 \times \cdots \times V_r \hookrightarrow \mathbb{F}(V_1 \times \cdots \times V_r)$ die kanonische Inklusion, $\pi: \mathbb{F}(V_1 \times \cdots \times V_r) \rightarrow V_1 \otimes \cdots \otimes V_r$ die kanonische Projektion) (gerade eben) r -linear wird uns setzen natürlich

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_r := s(v_1, \dots, v_r)$$

(für $v_1 \in V_1, \dots, v_r \in V_r$).

- (b) Es erfüllt dann das Paar $(V_1 \otimes \cdots \otimes V_r, s)$ die folgende universelle Eigenschaft: Ist (U, σ) ein Paar, wo U ein Vektorraum und $\sigma: V_1 \times \cdots \times V_r \rightarrow U$ r -linear ist, so gibt es genau einen Homomorphismus $T: V_1 \otimes \cdots \otimes V_r \rightarrow U$ mit $T \circ s = \sigma$,

$$\begin{array}{ccc} V_1 \times \cdots \times V_r & & \\ \downarrow s & \searrow \sigma & \\ V_1 \otimes \cdots \otimes V_r & \xrightarrow[\exists! T = \Phi_\sigma]{} & U. \end{array}$$

Die Abbildung

$$\Phi: \text{Mult}_r(V_1, \dots, V_r; U) \rightarrow \text{Hom}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_r, U), \sigma \mapsto \Phi_\sigma$$

wird dann zu einem kanonischen Isomorphismus.

$$\lceil (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \cong V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \cong V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) \rceil$$

- (c) Es ist auch klar: Ist $(e_1^k, \dots, e_{n_k}^k)$ eine Basis von V_k ($k = 1, \dots, r$), dann ist

$$(e_{i_1}^1 \otimes \cdots \otimes e_{i_r}^r)_{\substack{i_k=1, \dots, n_k \\ k=1, \dots, r}}$$

Basis von $V_1 \otimes \cdots \otimes V_r$. $\implies \dim(V_1 \otimes \cdots \otimes V_r) = \dim V_1 \cdots \dim V_r$.

- (d) Man setzt $\bigotimes_{k=1}^r V_k := V_1 \otimes \cdots \otimes V_r$.

- (e) Sei $r = p + q$. Betrachte

$$\sigma: \prod_{j=1}^{p+q} V_j \rightarrow \left(\bigotimes_{k=1}^p V_k \right) \otimes \left(\bigotimes_{l=p+1}^{p+q} V_l \right),$$

$$(v_1, \dots, v_{p+q}) \mapsto (v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) \otimes (v_{p+1} \otimes \cdots \otimes v_{p+q}).$$

Es ist σ ist $(p + q)$ -linear ist.

$$\implies \exists T = \Phi_\sigma: \bigotimes_{j=1}^{p+q} V_j \rightarrow \left(\bigotimes_{k=1}^p V_k \right) \otimes \left(\bigotimes_{l=p+1}^{p+q} V_l \right)$$

mit $T \circ s = \sigma$, also

$$T(v_1 \otimes \cdots \otimes v_{p+q}) = (v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) \otimes (v_{p+1} \otimes \cdots \otimes v_{p+q})$$

$\implies T$ ist (kanonischer) Isomorphismus (weil für Basen $(e_1^j, \dots, e_{n_j}^j)$ ($j = 1, \dots, p + q$) von V_j die induzierte Basis von $\bigotimes_{j=1}^{p+q} V_j$ in die induzierte Basis von $\bigotimes_{k=1}^p V_k \otimes \bigotimes_{l=p+1}^{p+q} V_l$ übergeht). Insbesondere gilt z.B.:

$$V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) \cong V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \cong (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3.$$

(4.11) Erinnerung.

(a) Ein Tripel $(A, +, \cdot, *)$ heißt eine **\mathbb{R} -Algebra**, wenn $(A, +, *)$ ein Ring und $(A, +, \cdot)$ ein \mathbb{R} -Vektorraum und für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $a, b \in A$ gilt:

$$\lambda \cdot (a * b) = (\lambda \cdot a) * b = a * (\lambda \cdot b).$$

(b) Sind A und B \mathbb{R} -Algebren, so heißt eine Abbildung $\Phi: A \rightarrow B$ ein Algebra-Homomorphismus, wenn Φ sowohl Ring-Homomorphismus als auch Vektorraum-Homomorphismus.

(4.12) Vorbereitung. Sei V ein Vektorraum, $p \in \mathbb{N}_0$ und setzen $V^{\otimes 0} := \mathbb{R}$ und $V^{\otimes p} = \bigotimes_{i=1}^p V$. Sei nun für $p, q \in \mathbb{N}_0$ und $\Psi: V^{\otimes p} \otimes V^{\otimes q} \rightarrow V^{\otimes(p+q)}$ der kanonische Isomorphismus (d.h. das Inverse zu T aus (4.11,d)). Beachte auch, dass $\mathbb{R} \otimes W \rightarrow W$ unter $\lambda \otimes w \mapsto \lambda \cdot w$ kanonisch isomorph ist (mit Inversen $v \mapsto 1 \otimes v$). Sei $s: V^{\otimes p} \times V^{\otimes q} \rightarrow V^{\otimes p} \otimes V^{\otimes q}$ kanonisch. Setze nun

$$\otimes := \Psi \circ s: V^{\otimes p} \times V^{\otimes q} \rightarrow V^{\otimes(p+q)}.$$

Dann ist \otimes bilinear und es gilt:

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) \otimes (v_{p+1} \otimes \cdots \otimes v_{p+q}) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_{p+q}.$$

(4.13) Definition. Sei V ein \mathbb{R} -Vektorraum. Wir versehen

$$T(V) := \bigoplus_{k \geq 0} V^{\otimes k}$$

mit der Struktur einer \mathbb{R} -Algebra, indem wir die Bilinearformen aus (4.12) bilinear auf ganz $T(V)$ ausdehnen:

$$T = \sum_{k=0}^p T_k \text{ mit } T_k \in V^{\otimes k} \quad S = \sum_{l=0}^q S_l \text{ mit } S_l \in V^{\otimes l}$$

$$T \otimes S := \sum_{j=0}^{p+q} \underbrace{\left(\sum_{k+l=j} T_k \otimes S_l \right)}_{\in V^{\otimes j}}, \quad T(V) \times T(V) \rightarrow T(V).$$

(4.14) Kommentar.

(a) $T(V)$ wird damit tatsächlich zu einer \mathbb{R} -Algebra, die i.A. nicht kommutativ ist:

- $\dim V = 0 \implies T(V) \cong \mathbb{R}$,
- $\dim V = 1 \implies T(V) \cong \mathbb{R}[X]$,
- ist $\dim V \geq 2$, so gilt für (v, w) linear unabhängig:

$$v \otimes w \neq w \otimes v \quad (\text{Übung})$$

(b) Betrachte die natürliche Inklusion

$$i: V \rightarrow T(V) = \mathbb{R} \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus \cdots, \quad i(v) = v,$$

die V mit $V^{\otimes 1} \subseteq T(V)$ identifiziert.

(4.15) Bemerkung. Das Paar $(T(V), i)$ erfüllt folgende universelle Eigenschaft: Ist (A, j) ein weiteres Paar, so gibt es genau einen Algebra-Homomorphismus $\Phi: T(V) \rightarrow A$ mit $\Phi \circ i = j$,

$$\begin{array}{ccc} V & & \\ \downarrow i & \searrow j & \\ T(V) & \xrightarrow{\exists! \Phi} & A. \end{array}$$

Beweis. Eindeutigkeit. $T(V)$ wird von $V = i(V) \subseteq T(V)$ als Algebra erzeugt. Daher gibt es nur einen Kandidaten für Φ , nämlich

$$\Phi(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) = j(v_1) \cdots j(v_p).$$

Existenz. Für jedes $p \in \mathbb{N}_0$ ist $\Phi_p: V^{\otimes p} \rightarrow A$ nach der universellen Eigenschaft von $V^{\otimes p}$ durch

$$\Phi_p(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) = j(v_1) \cdots j(v_p)$$

wohldefiniert (und linear). Nach der universellen Eigenschaft der Summe existiert ein eindeutiges $\Phi: \bigoplus_{p \geq 0} V^{\otimes p} \rightarrow A$ mit $\Phi \circ i_p = \Phi_p$, wo $i_p: V^{\otimes p} \hookrightarrow T(V)$ die natürliche Inklusion auf den Summanden vom Grad p ist.

Definition der Ringstruktur auf $T(V) \implies \Phi(V)$ Ringhomomorphismus $\implies \Phi$ ist Algebra-Homomorphismus. \square

(4.16) Definition.

(a) Sei A eine \mathbb{R} -Algebra. Eine Familie von Unterräumen $A^p \subseteq A, p \in \mathbb{Z}$, heißt **eine \mathbb{Z} -Graduierung auf A** , wenn

$$A = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} A^p$$

ist und für alle $p, q \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$A^p \cdot A^q \subseteq A^{p+q}.$$

Eine Algebra mit \mathbb{Z} -Graduierung $(A, (A^p)_{p \in \mathbb{Z}})$ heißt eine **graduierte Algebra**.

(b) Ein Algebra-Homomorphismus $\Phi: A \rightarrow B$ zwischen graduierten Algebren A und B heißt **graduiert**, wenn $\Phi(A^p) \subseteq B^p$ ist, für alle $p \in \mathbb{Z}$.

(4.17) Kommentar.

(a) Ist V ein \mathbb{R} -Vektorraum, so ist $T(V)$ offenbar eine graduierte (assoziative) \mathbb{R} -Algebra mit Eins mit

$$T^p(V) := T(V)^p = V^{\otimes p}$$

für $p \geq 0$ und $T^p(V) = (0)$ für $p < 0$.

(b) Ist $I \subseteq A$ (A eine \mathbb{R} -Algebra) ein **zweiseitiges Ideal**, d.h. ein Unterraum mit $A \cdot I \subseteq I$ und $I \cdot A \subseteq I$, so trägt der Quotientenraum $Q := A/I$ wieder eine Algebra-Struktur vermöge

$$(a + I)(b + I) := ab + I.$$

Die kanonische Projektion $\pi: A \rightarrow Q = A/I$ hat dann eine naheliegende universelle Eigenschaft (mit $\ker f \supseteq I$).

$$\begin{array}{ccc} A & & \\ \downarrow \pi & \searrow f & \\ A/I & \xrightarrow{\exists! \Phi} & B \end{array}$$

(c) Ist $I \subseteq A$ zweiseitiges Ideal und A durch $(A^p)_{p \in \mathbb{Z}}$ graduiert, so nennen wir I **homogen**, wenn für jedes $a \in I$, $a = \sum_{p \in \mathbb{Z}} a_p$ die homogene Zerlegung, gilt: $a_p \in I, \forall p \in \mathbb{Z}$. Mit $I^p := I \cap A^p$ gilt dann:

$$I = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} I^p.$$

Behauptung. Betrachte

$$\begin{array}{ccc} A^p & \xrightarrow{i_p} & A \\ \pi_p \downarrow & & \downarrow \pi \\ Q^p := A^p / I^p & \xrightarrow{j_p} & A / I = Q \end{array}$$

Da $\pi \circ i_p|_{I^p} = 0$ (da $I^p \subseteq I$) existiert eindeutige $j_p: Q^p \rightarrow Q$ mit $j_p \circ \pi_p = \pi \circ i_p$.

Behauptung.

- (i) j_p ist injektiv;
- (ii) $Q = \bigoplus j_p(Q^p)$;
- (iii) $(j_p(Q^p))_{p \in \mathbb{Z}}$ ist eine Graduierung von Q

(Übung). $\implies \pi$ ist graduiert.

(4.18) Vorbereitung. Sei V ein Vektorraum, $T(V)$ seine **Tensoralgebra** und I das 2-seitige Ideal in $T(V)$, das von allen Elementen $v \otimes v \in V^{\otimes 2} = T^2(V)$, mit $v \in V$, erzeugt wird,

$$I = \left\{ \sum_{k=1}^r s_k \otimes v_k \otimes v_k \otimes t_k : r \in \mathbb{N}_0, s_k, t_k \in T(V), v_k \in V, k = 1, \dots, r \right\}$$

$\implies I$ ist homogen.

(4.19) Definition. Sei V ein \mathbb{R} -Vektorraum, $T(V)$ seine Tensoralgebra und $I \subseteq T(V)$ das in (4.18) definierte, zweiseitige, homogene Ideal. Man nennt dann

$$\Lambda(V) := T(V) / I$$

die **Grassmann-Algebra über V** (oder auch die **äußere Algebra über V**). Für jedes $p \in \mathbb{N}_0$ heißt

$$\Lambda^p(V) := T^p(V) / I^p$$

das **p -fache äußere Produkt**. Es gilt

$$\Lambda(V) = \bigoplus_{p \geq 0} \Lambda^p(V),$$

und man notiert die Restklasse mit (sei $\pi: T(V) \rightarrow \Lambda(V)$ die kanonische Projektion)

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_p := \pi(v_1 \otimes \dots \otimes v_p).$$

(4.20) Kommentar.

(a) Für die Multiplikation in $\Lambda(V)$ benutzen wir das Symbol \wedge („Dach“). Es ist also (vgl. \otimes bei der Tensoralgebra):

$$\begin{aligned} (v_1 \wedge \dots \wedge v_p) \wedge (v_{p+1} \wedge \dots \wedge v_{p+q}) &= \pi(v_1 \otimes \dots \otimes v_p) \wedge \pi(v_{p+1} \otimes \dots \otimes v_{p+q}) \\ &= \pi_{\text{Ringhom.}} \left((v_1 \otimes \dots \otimes v_p) \otimes (v_{p+1} \otimes \dots \otimes v_{p+q}) \right) \\ &= \pi(v_1 \otimes \dots \otimes v_{p+q}) = v_1 \wedge \dots \wedge v_{p+q} \end{aligned}$$

(lasse also Klammern häufig weg).

(b) Sei nun $s^p: V^p \rightarrow T^p(V)$ und $\pi^p: T^p(V) \rightarrow \Lambda^p(V)$ die kanonischen Abbildung. Dann setzen wir $\omega^p := \pi^p \circ s^p: V^p \rightarrow \Lambda^p(V)$, also

$$\omega^p(v_1, \dots, v_p) = v_1 \wedge \dots \wedge v_p.$$

$\implies \omega^p$ ist p -linear.

(4.21) Bemerkung. $\omega^p: V^p \rightarrow \Lambda^p(V)$ ist alternierend.

Beweis.

$$\begin{aligned} 0 &= \dots \wedge (v+w) \wedge (v+w) \wedge \dots \\ &= \underbrace{\dots \wedge v \wedge v \wedge \dots}_{=0} + \dots \wedge v \wedge w \wedge \dots + \dots \wedge w \wedge v \wedge \dots + \underbrace{\dots \wedge w \wedge w \wedge \dots}_{=0} \\ &\implies \omega(\dots, v, w, \dots) = -\omega(\dots, w, v, \dots). \end{aligned}$$

$(j-i-1)$ -maliges Anwenden davon $\implies \forall 1 \leq i < j \leq p, \forall v \in V$:

$$\omega(\dots, \underbrace{v}_{i\text{-te}}, \dots, \underbrace{v}_{j\text{-te}}, \dots) = (-1)^{j-i-1} \omega(\dots, \underbrace{v}_{j-1\text{-te}}, \underbrace{v}_{j\text{-te}}, \dots) = 0. \quad \square$$

(4.22) Bemerkung. Das Paar $(\Lambda^p V, \omega^p)$ erfüllt folgende universelle Eigenschaft: Ist U ein Vektorraum und $h: V^p \rightarrow U$ p -linear und alternierend, so existiert genau ein lineares $\Phi: \Lambda^p(V) \rightarrow U$ mit $\Phi \circ \omega^p = h$,

$$\begin{array}{ccc} V^p & & \\ \omega^p \downarrow & \searrow h & \\ \Lambda^p V & \xrightarrow[\Phi]{\exists!} & U. \end{array}$$

Beweis. Eindeutigkeit. $(v_1 \wedge \dots \wedge v_p)_{v_1, \dots, v_p \in V}$ ist erzeugend für $\Lambda^p(V)$ (da kanonische Projektion $\pi^p: T^p(V) \rightarrow \Lambda^p(V)$ surjektiv ist). \implies Es gibt nun einen Kandidaten für Φ , nämlich

$$\Phi(v_1 \wedge \dots \wedge v_p) = h(v_1, \dots, v_p).$$

Existenz. Da h p -linear ist $\exists \check{\Phi}: T^p(V) \rightarrow U$ mit $\check{\Phi} \circ s^p = h$. Da

$$\check{\Phi}(\dots \otimes v \otimes v \otimes \dots) = h(\dots, v, v, \dots) = 0 \quad (\implies \check{\Phi}|I^p = 0).$$

ist, $\forall v \in V \implies \exists \Phi: \Lambda^p(V) \rightarrow U$ mit $\Phi \circ \pi^p = \check{\Phi}$.

$$\begin{array}{ccc} & V^p & \\ & \downarrow s^p & \searrow h \\ \omega^p \swarrow & T^p(V) & \xrightarrow{\check{\Phi}} U \\ & \downarrow \pi^p & \nearrow \Phi \\ & \Lambda^p(V) & \end{array}$$

Mit $\omega^p = \pi^p \circ s^p$ folgt:

$$\Phi \circ \omega^p = \Phi \circ \pi^p \circ s^p = \check{\Phi} \circ s^p = h. \quad \square$$

(4.23) Kommentar.

(a) Beachte auch hier, dass ω^p i.a. weder injektiv noch surjektiv ist, z.B. $\omega(\dots, v, v, \dots) = 0, \forall v \in V$ und für (v_1, \dots, v_4) linear unabhängig in V (also $\dim V \geq 4$) ist $v_1 \wedge v_2 + v_3 \wedge v_4$ nicht im Bild von ω^p (Übung).

(b) Ist $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ eine p -elementige Teilmenge ($0 \leq p \leq n$) und $I = \{i_1, \dots, i_p\}$ mit $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n$, so schreiben wir:

$$v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_p} =: v_I$$

(für $p = 0: v_\emptyset := 1 \in \Lambda^0(V) = \mathbb{R}$).

(4.24) Lemma. Sei (e_1, \dots, e_n) Basis von V , U ein Vektorraum und für jede Teilmenge $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ mit p Elementen sei $u_I \in U$ beliebig. Dann gibt es genau ein p -lineares, alternierendes $h: V^p \rightarrow U$ mit

$$h(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) = u_I$$

(mit $I = \{i_1, \dots, i_p\}$ und $i_1 < i_2 < \dots < i_p$).

Beweis. Sei (i_1, \dots, i_p) ein p -Tupel mit $i_k \in \{1, \dots, n\}$ ($k = 1, \dots, p$) $\implies \exists! h: V^p \rightarrow U$ p -linear mit

$$h(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) = \begin{cases} 0 & \text{für } i_k = i_l \text{ für ein } (k, l) \text{ mit } k \neq l, \\ \text{sgn}(\sigma)u_I & \text{falls } I = \{i_1, \dots, i_p\} \text{ } p \text{ Elemente hat und } \sigma \in \gamma_p \text{ ist, so} \\ & \text{dass } (i_{\sigma 1}, \dots, i_{\sigma p}) \text{ geordnet ist.} \end{cases}$$

Nun prüfe nach, dass h tatsächlich alternierend ist. Sei $p = 2$ und $v = \lambda^i e_i$

$$\begin{aligned} \implies h(v, v) &= \sum_{i=1}^n (\lambda^i)^2 \underbrace{h(e_i, e_i)}_{=0} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda^i \lambda^j \underbrace{(h(e_i, e_j) + h(e_j, e_i))}_{=0} \\ &= 0. \end{aligned}$$

(Eindeutigkeit auch klar). □

(4.25) Proposition.

(a) Sei (e_1, \dots, e_n) eine Basis von V und $p \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $(e_I)_I$ eine Basis von $\Lambda^p V$. Hierbei durchläuft I die Menge aller p -elementigen Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$.

(b) Ist $\dim V = n$, so gilt: $\Lambda^p(V) = (0)$ für $p > n$ und für $0 \leq p \leq n$ gilt:

$$\dim \Lambda^p(V) = \binom{n}{p}.$$

(4.26) Korollar. Ist V endlich dimensional, so auch $\Lambda(V)$. Genauer: Ist $\dim V = n$, so ist $\dim \Lambda(V) = 2^n$.

Beweis. Mit dem Binomischen Lehrsatz ist wegen $\Lambda(V) = \bigoplus_{p \geq 0} \Lambda^p(V) = \bigoplus_{i=0}^n \Lambda^p(V)$:

$$\dim \Lambda(V) = \sum_{p=0}^n \dim \Lambda^p(V) \stackrel{(b)}{=} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} 1^p \cdot 1^{n-p} = (1+1)^n = 2^n. \quad \square$$

Beweis von (4.25). Da $(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p})_{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n}$ $T^p(V)$ erzeugen ist, ist es auch $(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p})_{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n}$ $\Lambda^p(V)$. Ist aber $i_k = i_l$ für $k \neq l$, so ist $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} \wedge \dots \wedge e_{i_l} \wedge \dots \wedge e_{i_p} = 0$ und ist $\sigma \in \gamma_p$, so ist

$$e_{i_{\sigma 1}} \wedge \dots \wedge e_{i_{\sigma p}} = \text{sgn}(\sigma) e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}$$

$\implies (e_I) = (e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p})_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n}$ erzeugend $\Lambda^p V$. Für $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ p -elementig sei $h^I: V^p \rightarrow \mathbb{R}$ die alternierende p -Form mit

$$h^I(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}) = \delta_J^I,$$

wenn $J = \{j_1, \dots, j_p\}$ und (j_1, \dots, j_p) geordnet ist (vgl. (4.24)). Sei $\Phi^I: \Lambda^p(V) \rightarrow \mathbb{R}$ linear mit $\Phi^I \circ \omega^p = h^I$ (universelle Eigenschaft von $(\Lambda^p V, \omega^p)$) $\implies \Phi^I(e_J) = \delta_J^I$. Ist nun

$$\sum_J \lambda^J e_J = 0 \implies 0 = \Phi^I(\lambda^J e_J) = \lambda^J \underbrace{\Phi^I(e_J)}_{=\delta_J^I} = \lambda^I.$$

Also ist (e_I) auch linear unabhängig \implies (a). (b) ist dann klar. □

(4.27) Vorbereitung.

(a) Erinnere, dass $T^p(V^*) \cong (T^p(V))^*$ kanonisch (nämlich zu $\text{Mult}_p(V; \mathbb{R})$).

Frage: Ist auch $\Lambda^p(V^*) \cong (\Lambda^p(V))^*$ kanonisch?

(b) Erinnere: Eine Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **nicht-entartet**, wenn gilt:

(i) ist $\langle v, w \rangle = 0, \forall w \in V \implies v = 0$,

(ii) ist $\langle v, w \rangle = 0, \forall v \in V \implies w = 0$.

(4.28) Lemma. Für eine Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times W \rightarrow \mathbb{R}$ setzen wir $\Phi: V \rightarrow W^*$ und $\Psi: W \rightarrow V^*$ fest durch

$$\Phi(v)(w) = \langle v, w \rangle, \quad \Psi(w)(v) = \langle v, w \rangle.$$

Dann gilt: Ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ nicht entartet und V, W endlich dimensional, so sind Φ und Ψ Isomorphismen.

Beweis. Nicht-Entartung von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bedeutet Injektivität von Φ und Ψ

$$\implies \dim V^* \geq \dim W = \dim W^* \geq \dim V = \dim V^*,$$

also $\dim V = \dim W. \implies \Phi, \Psi$ Isomorphismen. □

(4.29) Vorbereitung. Sei V ein Vektorraum und $p \in \mathbb{N}_0$. Betrachte dann

$$s: V^p \times (V^*)^p \rightarrow \mathbb{R}, \quad s((v_1, \dots, v_p), (\alpha^1, \dots, \alpha^p)) = \det(\langle v_k, \alpha^l \rangle)_{k,l}$$

wo wir mit $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V^* \rightarrow \mathbb{R}$ die **natürliche Paarung**

$$\langle v, \alpha \rangle := \alpha(v)$$

bezeichnen.

$\implies s$ ist p -linear und alternierend in V^p und selbiges in $(V^*)^p$. Sind $\omega_V^p: V^p \rightarrow \Lambda^p(V)$ und $\omega_{V^*}^p: (V^*)^p \rightarrow \Lambda^p(V^*)$ die kanonische Abbildungen, so existiert genau eine Paarung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: \Lambda^p V \times \Lambda^p(V^*) \rightarrow \mathbb{R}$$

mit $\langle \cdot, \cdot \rangle \circ (\omega_V^p \times \omega_{V^*}^p) = s$, also

$$\langle v_1 \wedge \dots \wedge v_p, \alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^p \rangle = \det(\langle v_k, \alpha^l \rangle)_{k,l}.$$

(4.30) Bemerkung. Die obige natürliche Paarung zwischen $\Lambda^p V$ und $\Lambda^p(V^*)$ ist nicht entartet.

(4.31) Kommentar. Es sind also $\Lambda^p(V^*)$ und $(\Lambda^p(V))^*$ kanonisch isomorph.

Beweis. Klar, denn $\Psi: \Lambda^p(V^*) \rightarrow (\Lambda^p(V))^*$ mit

$$\Psi(\omega)(\tau) = \langle \tau, \omega \rangle, \quad \tau \in \Lambda^p(V), \omega \in \Lambda^p(V^*)$$

ist ein kanonischer Isomorphismus. □

Beweis von (4.30). Sei (e_1, \dots, e_n) Basis von V und $(\gamma^1, \dots, \gamma^n)$ duale Basis von V^* . Für $I, J \subseteq \{1, \dots, n\}$ p -elementig ist dann

$$\langle e_I, \gamma^J \rangle = \delta_I^J,$$

denn für $I \neq J$ gibt es eine Nullzeile (und auch Nullspalte) in der $p \times p$ -Matrix $(\langle e_{i_k}, \gamma^{j_l} \rangle)$ (mit $1 \leq k, l \leq p$). Für $I = J$ ist dagegen dies die Einheitsmatrix.

Ist nun $\tau \in \Lambda^p V$ beliebig $\implies \exists \lambda^I \in \mathbb{R} : \tau = \lambda^I e_I$. Sei $\langle \tau, \omega \rangle = 0 \ \forall \omega \in \Lambda^p(V^*)$, insbesondere für $\omega = \gamma^J$.

$$\implies 0 = \langle \tau, \gamma^J \rangle = \lambda^I \underbrace{\langle e_I, \gamma^J \rangle}_{\delta_I^J} = \lambda^I, \ \forall J \implies \tau = 0.$$

Ähnlich im zweiten Argument. □

(4.32) Kommentar. Bezeichnen wir mit

$$\text{Alt}_p(V) := \{ \omega : V^p \rightarrow \mathbb{R} : \omega \text{ ist } p\text{-linear und alternierend} \} \subseteq \text{Mult}_p(V)$$

so haben wir nun die kanonische Isomorphismen:

$$\text{Alt}_p(V) \underset{\text{U.E.}}{\cong} (\Lambda^p V)^* \underset{(4.31)}{\cong} \Lambda^p(V^*).$$

Jede **p-Form** $\omega \in \Lambda^p(V^*)$ kann man also als alternierende p -Linearform auf V auffassen und umgekehrt:

$$\alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^p(v_1, \dots, v_p) = \det(\langle v_i, \alpha^j \rangle)_{ij}.$$

(4.33) Definition. Sei V ein \mathbb{R} -Vektorraum mit $\dim V < \infty$. Für $p, q \in \mathbb{N}_0$ setzt man

$$T^{(p,q)}(V) := T^p(V) \otimes T^q(V^*)$$

und nennt die Elemente von $T^{(p,q)}(V)$ **Tensoren der Stufe (p, q)**. (auch: p -fach kontravariant und q -fach covariant)

$$T(V) \otimes T(V^*) := \bigoplus_{p,q \in \mathbb{N}} T^{(p,q)}(V)$$

heißt die **erweiterte Tensoralgebra von V**.

(Übung: Definiere eine Algebra-Struktur auf den Tensorprodukt von zwei Algebren $A \otimes B$ und beweise eine universelle Eigenschaft.)

(4.34) Kommentar. Wegen der kanonischen Isomorphie von V und V^{**} , $v \mapsto (\alpha \mapsto \langle v, \alpha \rangle)$ ist nun kanonisch Isomorph (vgl. Übung)

$$\begin{aligned} T^{(p,q)}(V) &= T^p(V) \otimes T^q(V^*) \cong T^q(V^*) \otimes T^p(V) \cong T^q(V^*) \otimes T^p(V^{**}) \\ &\cong T^q(V)^* \otimes T^p(V^*)^* \cong (T^q(V) \otimes T^p(V^*))^* \cong \text{Mult}_{p+q}(V^q \times (V^*)^p), \end{aligned}$$

d.h.: Jedes $T \in T^{(p,q)}$ kann als $(p+q)$ -lineare Abbildung von $V^q \times (V^*)^p$ nach \mathbb{R} aufgefasst werden.

(4.35) Vorbereitung.

(a) Ist $\langle , \rangle : V \times V^* \rightarrow \mathbb{R}$ die kanonische Paarung

$$\begin{array}{ccc} V \times V^* & \xrightarrow{\langle , \rangle} & \mathbb{R} \\ \otimes \downarrow & \nearrow \exists! \text{tr} & \\ V \otimes V^* & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} V \times V^* & \xrightarrow{(v,\alpha) \mapsto (w \mapsto \alpha(w)v)} & \text{End}(V) \\ \otimes \downarrow & \nearrow T & \\ V \otimes V^* & & \end{array}$$

so sei $\text{tr} : V \otimes V^* \rightarrow \mathbb{R}$ die induzierte linear Abbildung. Ist $S : \text{End}(V) \rightarrow V \otimes V^*$ der kanonische Isomorphismus (vgl. (4.8,a)), so ist $\text{tr} \circ S : \text{End}(V) \rightarrow \mathbb{R}$, $\text{tr} \circ S = \text{spur}$ (Übung).

(b) Sei nun $p, q \in \mathbb{N}_0$ und $1 \leq k \leq p, 1 \leq l \leq q$. Betrachte

$$s_k^l: V^p \times (V^*)^q \rightarrow T^{(p-1, q-1)}(V)$$

mit

$$s_k^l(v_1, \dots, v_p, \alpha^1, \dots, \alpha^q) = \langle v_k, \alpha^l \rangle v_1 \otimes \dots \otimes \hat{v}_k \otimes \dots \otimes v_p \otimes \alpha_1 \otimes \dots \otimes \hat{\alpha}_l \otimes \dots \otimes \alpha_q.$$

(wo „ $\hat{\cdot}$ “ meint, dass dieser Eintrag fehlt)

(4.36) Definition. Für $1 \leq k \leq p$ und $1 \leq l \leq q$ wie eben, nennen wir die von s_k^l induzierte Abbildung

$$\text{tr}_k^l: T^{(p, q)}(V) \rightarrow T^{(p-1, q-1)}(V)$$

die Verjüngung der (p, q) -Tensoren im k -Faktor V und l -Faktor V^* .

(4.37) Vorbereitung.

(a) Sei V ein \mathbb{R} -Vektorraum und (e_1, \dots, e_n) eine Basis. Sei $(\gamma^1, \dots, \gamma^n)$ die dazu duale Basis von V^* und $p, q \in \mathbb{N}_0$. Ist $T \in T^{(p, q)}(V)$, so existieren eindeutig bestimmte Elemente $\zeta_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_p} \in \mathbb{R}$, so dass gilt:

$$T = \zeta_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_p} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes \gamma^{j_1} \otimes \dots \otimes \gamma^{j_p}.$$

$\zeta_j^i = \zeta_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_p}$ mit $i = (i_1, \dots, i_p), j = (j_1, \dots, j_p)$ heißen die Koordinaten von T bzgl. (e_1, \dots, e_n) .

(b) Sei nun (f_1, \dots, f_n) eine weitere Basis und $A, B \in \text{Gl}_n(\mathbb{R})$ die Basiswechselmatrizen: $A = (a_j^i), B = (b_j^i)$

$$f_j = a_j^i e_i, e_j = b_j^i f_i,$$

also $B = A^{-1}$, bzw. $b_j^i a_k^j = \delta_k^i, a_j^i b_k^j = \delta_k^i$.

Es ist dann für die duale Basis $(\delta^1, \dots, \delta^n)$ von (f_1, \dots, f_n) . $\delta^i = b_j^i \gamma^j, \gamma^i = a_j^i \delta^j$, dann:

$$b_j^i \gamma^j(f_k) = b_j^i \gamma^j(a_k^l e_l) = b_j^i a_k^l \underbrace{\gamma^j(e_l)}_{=\delta_l^j} = b_j^i a_k^j = \delta_k^i = \delta^i(f_k), \forall k$$

$$\implies b_j^i \gamma^j = \delta^i (\forall i) (\implies \gamma^i = \delta_j^i \gamma^j = a_k^i b_j^k \gamma^j = a_k^i \delta^k).$$

Beachte: Ist $v \in V$ mit $\zeta^i e_i = v = \eta^j f_j$

$$\implies \eta^j = \delta^j(v) = b_k^j \gamma^k(v) = b_k^j \zeta^k \implies \eta = B \zeta.$$

Ist $\alpha \in V^*$ mit $\zeta_i \gamma^i = \alpha = \eta_j \delta^j$

$$\implies \eta^j = \alpha(f_j) = a_j^i \alpha(e_i) = a_j^i \zeta_i = \zeta_i a_j^i \implies \eta^t = \zeta^t A \implies \eta = A^t \zeta.$$

(4.38) Bemerkung. Sei $V, (e_1, \dots, e_n), (f_1, \dots, f_n)$ wie oben und $(\gamma^1, \dots, \gamma^n), (\delta^1, \dots, \delta^n)$ dual dazu. Sei $p, q \in \mathbb{N}_0, T \in T^{p, q}(V)$ und

$$T = \zeta_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_p} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes \gamma^{j_1} \otimes \dots \otimes \gamma^{j_p} = \eta_{l_1, \dots, l_p}^{k_1, \dots, k_p} f_{k_1} \otimes \dots \otimes f_{k_p} \otimes \delta^{l_1} \otimes \dots \otimes \delta^{l_p}.$$

Ist dann $A = (a_j^i)$ mit $f_j = a_j^i e_i$ und $B = A^{-1} = (b_j^i)$, so gilt:

$$\eta_{l_1, \dots, l_p}^{k_1, \dots, k_p} = b_{i_1}^{k_1} \dots b_{i_p}^{k_p} \zeta_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_p} a_{l_1}^{j_1} \dots a_{l_p}^{j_p}.$$

Beweis. Kürze für $i = (i_1, \dots, i_p)$ usw. ab

$$\begin{aligned}
 e_i &:= e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p}, & f_k &:= f_{k_1} \otimes \dots \otimes f_{k_p} \\
 \gamma^j &:= \gamma^{j_1} \otimes \dots \otimes \gamma^{j_q}, & \delta^l &:= \delta^{l_1} \otimes \dots \otimes \delta^{l_q} \\
 b_i^k &:= b_{i_1}^{k_1} \dots b_{i_p}^{k_p}, & \eta_l^k &:= a_{l_1}^{i_1} \dots a_{l_q}^{i_q} \\
 \zeta_j^i &:= \zeta_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p}, & \eta_l^k &:= \eta_{l_1, \dots, l_q}^{k_1, \dots, k_p}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\implies e_i = b_i^k f_k, \quad \gamma^j = a_l^j \delta^l \\
 &\implies \eta_l^k f_k \otimes \delta^l = T = \zeta_j^i e_i \otimes \gamma^j = \zeta_j^i b_i^k a_l^j f_k \otimes \delta^l \\
 &\implies (\text{Koeff.-Vergleich}) \quad \eta_l^k = b_i^k \zeta_j^i a_l^j. \quad \square
 \end{aligned}$$

(4.39) Kommentar.

(a) Für $p = q = 1$ ergibt sich für $T \in V \otimes V^* \cong \text{End}(V)$ das bekannte Verhalten:

$$\eta = A^{-1} \zeta A,$$

für $p = 0$ und $q = 2$ für $T \in V^* \otimes V^* \cong \text{Bil}(V)$

$$\eta = A^t \zeta A \quad (\text{Übung}).$$

(4.40) Vorbereitung. Sei $\dim V = n$, $0 \leq p \leq n$, (e_1, \dots, e_n) , (f_1, \dots, f_n) Basen von V mit Transformationsmatrix $A = (a_j^i)$, also $f_j = a_j^i e_i$. Für die dualen Basen $(\gamma^1, \dots, \gamma^n)$, $(\delta^1, \dots, \delta^n)$ ist dann $\gamma^i = a_j^i \delta^j$. Sei nun $\omega \in \Lambda^p(V^*)$ und

$$\omega = \zeta_I \gamma^I = \eta_J \delta^J,$$

wo I bzw. J alle p -elementige Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$ durchläuft.

Frage. Wie transformieren sich (ζ_I) und (η_J) ? Dazu:

$$\begin{aligned}
 \gamma^I &= \gamma^{i_1} \wedge \dots \wedge \gamma^{i_p} = a_{j_1}^{i_1} \dots a_{j_p}^{i_p} \delta^{j_1} \wedge \dots \wedge \delta^{j_p} \\
 &= \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq n} \left(\sum_{\sigma \in \gamma_p} a_{j_{\sigma(1)}}^{i_1} \dots a_{j_{\sigma(p)}}^{i_p} \delta^{j_{\sigma(1)}} \wedge \dots \wedge \delta^{j_{\sigma(p)}} \right) \\
 &= \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq n} \left(\sum_{\sigma \in \gamma_p} \text{sgn}(\sigma) a_{j_{\sigma(1)}}^{i_1} \dots a_{j_{\sigma(p)}}^{i_p} \right) \delta^{j_1} \wedge \dots \wedge \delta^{j_p} = \det(A_J^I) \delta^J,
 \end{aligned}$$

wo A_J^I die $(p \times p)$ -Teilmatrix von A mit den Zeilen i_1, \dots, i_p und den Spalten j_1, \dots, j_p ist. $\det(A_J^I)$ heißt dann der **IJ-Minor von A**.

(4.41) Bemerkung. Sei V , (e_1, \dots, e_n) , (f_1, \dots, f_n) wie oben und $(\gamma^1, \dots, \gamma^n)$, $(\delta^1, \dots, \delta^n)$ dual dazu. Ist $\omega \in \Lambda^p(V^*)$ ($0 \leq p \leq n$) und

$$\omega = \zeta_I \gamma^I = \eta_J \delta^J,$$

so gilt für alle J :

$$\eta_J = \det(A_J^I) \zeta_I.$$

Beweis. Es ist

$$\eta_J \delta^J = \omega = \zeta_I \gamma^I = \det(A_J^I) \delta^J.$$

\implies Koeffizienten Vergleich: $\eta_J = \det(A_J^I) \zeta_I.$ □

(4.42) Definition. Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$ und M^n und E^{n+k} glatte Mannigfaltigkeiten und $\pi: E \rightarrow M$ glatt. Eine **(Vektor-) Bündelkarte von π** ist ein Diffeomorphismus $\varphi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$, wo $U \subseteq M$ offen ist, so dass für die Projektion $\text{pr}_1: U \times \mathbb{R}^k \rightarrow U$ gilt: $\text{pr}_1 \circ \varphi = \pi|_{\pi^{-1}(U)}$,

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times \mathbb{R}^k \\ \pi|_{\pi^{-1}(U)} \downarrow & \swarrow \text{pr}_1 & \\ U & & \end{array}$$

(4.43) Kommentar.

(a) Jedes $p \in U$ ist damit ein regulärer Wert von π , denn für alle $\xi = \pi^{-1}(p)$ ist

$$D\pi_\xi = D(\text{pr}_1)_{\varphi(\xi)} \circ D\varphi_\xi$$

und $D\varphi_\xi$ ist ein Isomorphismus und $D(\text{pr}_1)_{\varphi(\xi)}$ ist surjektiv, und damit $\pi^{-1}(p) \subseteq E$ eine Untermannigfaltigkeit der Codimension n , also der Dimension k .

(b) Es ist dann

$$\varphi_p: \pi^{-1}(p) \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad \varphi_p := (\text{pr}_2) \circ \varphi|_{\pi^{-1}(p)}$$

ein Diffeomorphismus, insbesondere also $\pi^{-1}(p) \neq \emptyset$ und damit $\pi|_{\pi^{-1}(U)}: \pi^{-1}(U) \rightarrow U$ surjektiv, denn

$$\mathbb{R}^k \rightarrow \pi^{-1}(p), \quad y \mapsto \varphi^{-1}(p, y)$$

ist offenbar invers zu φ_p (und glatt), weil:

$$\varphi_p \circ \varphi^{-1}(p, y) = \text{pr}_2 \circ \varphi \circ \varphi^{-1}(p, y) = y = \mathbb{1}(y)$$

und

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(p, \varphi_p(\xi)) &= \varphi^{-1}(p, \text{pr}_2 \circ \varphi(\xi)) = \varphi^{-1}(\pi(\xi), \text{pr}_2(\varphi(\xi))) \\ &= \varphi^{-1}(\text{pr}_1(\varphi(\xi)), \text{pr}_2(\varphi(\xi))) = \varphi^{-1}(\varphi(\xi)) = \xi = \mathbb{1}(\xi) \end{aligned}$$

ist.

(4.44) Definition. Seien M^n, E^{n+k} und $\pi: E \rightarrow M$ wie oben. Eine Familie von Bündelkarten $\mathfrak{A} = (\varphi_i: \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{R}^k)_{i \in I}$ heißt ein **(Vektor-) Bündelatlas** für π , wenn (U_i) eine offene Überdeckung von M ist und für jedes Paar $(i, j) \in I \times I$ (mit $U_i \cap U_j \neq \emptyset$) gilt: Ist $p \in U_i \cap U_j$, so ist der Diffeomorphismus

$$(\varphi_i)_p \circ (\varphi_j)_p^{-1}: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$$

sogar linear.

(4.45) Kommentar.

(a) Identifizieren wir die Automorphismen von \mathbb{R}^k ,

$$\text{Aut}(\mathbb{R}^k) = \{T: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k : T \text{ ist linear Diffeomorphismus}\} \subseteq \text{Diff}(\mathbb{R}^k)$$

vermöge der kanonischen Basis (e_1, \dots, e_k) von \mathbb{R}^k mit $\text{Gl}_k(\mathbb{R})$, so ist also

$$\varphi_{ij}(p) := (\varphi_i)_p \circ (\varphi_j)_p^{-1} \in \text{Aut}(\mathbb{R}^k) \cong \text{Gl}_k(\mathbb{R})$$

für jedes $p \in U_i \cap U_j$ eine invertierbare $k \times k$ -Matrix.

(b) Es ist dann der Übergang

$$(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^k = \varphi_j(\pi^{-1}(U_i \cap U_j)) \rightarrow \varphi_i(\pi^{-1}(U_i \cap U_j)) = (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^k$$

$$(p, y) \mapsto \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(p, y)$$

gegeben durch

$$(p, y) \mapsto (p, \varphi_{ij}(p) \cdot y),$$

denn

$$\text{pr}_1 \circ \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(p, y) = \pi \circ \varphi_j^{-1}(p, y) = \text{pr}_1(p, y) = p$$

und

$$\text{pr}_2 \circ \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(p, y) = (\varphi_i)_p \circ \varphi_j^{-1}(p, y) = (\varphi_i)_p \circ (\varphi_j)_p^{-1}(y) = \varphi_{ij}(p) \cdot y.$$

Damit ist die Abbildung

$$\varphi_{ij}: U_i \cap U_j \rightarrow \text{Gl}_k(\mathbb{R}) (\subseteq \text{Mat}_k(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{k^2}), \quad p \mapsto \varphi_{ij}(p)$$

sicher glatt, weil sich jeder (r, s) -Eintrag von φ_{ij} ($1 \leq r, s \leq k$) schreiben lässt als

$$(\varphi_{ij}(p))_{rs} = \langle e_r, \text{pr}_2 \circ \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(p, e_s) \rangle$$

(wo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das kanonische Skalarprodukt auf \mathbb{R}^k sei).

(c) Die Familie

$$(\varphi_{ij}: U_i \cap U_j \rightarrow \text{Gl}_k(\mathbb{R}))_{i,j \in I}$$

heißen dann die **Übergangsfunktionen des Atlas** \mathfrak{A} .

(4.46) Definition. Sei $\pi: E \rightarrow M$ wie oben.

(a) Zwei Bündelatlantente $\mathfrak{A} = (\varphi_i)_{i \in I}$ und $\mathfrak{B} = (\psi_j)_{j \in J}$ heißen **äquivalent**, wenn auch $\mathfrak{C} := (\varphi_i, \psi_j)_{i \in I, j \in J}$ noch ein Bündelatlas ist.

(b) Eine Äquivalenzklasse $c = [\mathfrak{A}]$ von Bündelatlantente nennen wir eine **(Vektor-) Bündelstruktur auf π** .

(c) Ein Paar (π, c) , bestehend aus einer glatten Abbildung $\pi: E \rightarrow M$ und einer Bündelstruktur $c = [\mathfrak{A}]$ heißt ein (glattes) **Vektor-(raum)-Bündel vom Rang k über M** .

(4.47) Kommentar.

(a) Ist $\pi: E \rightarrow M$ ein (glattes) Vektorbündel über M (und die Struktur c wird nicht mehr eigens notiert), so ist π insbesondere surjektiv und eine Submersion (vgl. (4.43)) und jede **Faser** $E_p := \pi^{-1}(p)$ diffeomorph zu \mathbb{R}^k .

(b) Man kann nun aber auf jeder Faser $E_p \subseteq E$ ($p \in M$) die Struktur einer k -dimensionalen (reellen) Vektorraums wie folgt einführen: Man wähle einen Repräsentanten φ der Bündelstruktur c , darin ein Mitglied $\varphi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$ mit $p \in U$ und definiere mit Hilfe des induzierten Diffeomorphismus $\varphi_p: E_p \rightarrow \mathbb{R}^k$:

$$\xi +_{\varphi} \eta := \varphi_p^{-1}(\varphi_p(\xi) + \varphi_p(\eta)), \quad \lambda \cdot_{\varphi} \xi := \varphi_p^{-1}(\lambda \cdot \varphi_p(\xi))$$

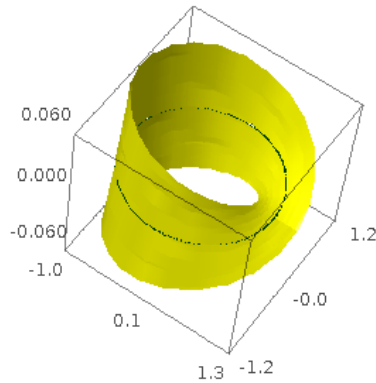


Abbildung 4.1.: Möbiusband mit Seele (dunkel)

für $\xi, \eta \in E_p$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Weil für eine weitere Bündelkarte $\psi: \pi^{-1}(\tilde{U}) \rightarrow \tilde{U} \times \mathbb{R}^k$ mit $p \in \tilde{U}$ (aus einem weiteren Atlas) der Übergang $\psi_p \circ \varphi_p^{-1}: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ linear ist, ist diese Definition unabhängig von der gewählten Karte:

$$\begin{aligned} \xi +_{\psi} \eta &= \psi_p^{-1}(\psi_p(\xi) + \psi_p(\eta)) = \psi_p^{-1}(\psi_p \circ \varphi_p^{-1} \circ \varphi_p(\xi) + \psi_p \circ \varphi_p^{-1} \circ \varphi_p(\eta)) \\ &\stackrel{\psi_p \circ \varphi_p^{-1} \text{ linear}}{=} \psi_p^{-1}(\psi_p \circ \varphi_p^{-1}(\varphi_p(\xi) + \varphi_p(\eta))) = \varphi_p^{-1}(\varphi_p(\xi) + \varphi_p(\eta)) = \xi +_{\varphi} \eta \end{aligned}$$

(und ähnlich für $\lambda \cdot \xi$).

- (c) Es ist also $E = \bigsqcup_{p \in M} E_p$ ein „Bündel von Vektorräumen über M “, zusammen mit einer Mannigfaltigkeit-Struktur derart, dass dieses Bündel **lokal trivial** ist in dem Sinne, dass jeder Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung U besitzt, so dass $E_U := \pi^{-1}(U)$ diffeomorph zu $U \times \mathbb{R}^k$ ist (mit einem Diffeomorphismus $\varphi: E_U \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$, der zudem $\text{pr}_1 \circ \varphi = \pi|_{E_U}$ erfüllt und $\varphi_p = \text{pr}_2 \circ \varphi|_{E_p}: E_p \rightarrow \mathbb{R}^k$ ein Isomorphismus ist).
- (d) Erwähnt sei aber bereits hier, dass E i.a. nicht **global trivial** sein muss, in dem Sinne, dass es einen Diffeomorphismus $\Phi: E \rightarrow M \times \mathbb{R}^k$ (mit $\text{pr}_1 \circ \Phi = \pi$ und $\Phi_p = \text{pr}_2 \circ \Phi|_{E_p}: E_p \rightarrow \mathbb{R}^k$ Isomorphismus) gibt. Z.B. ist das **Möbiusband** (genaue Definition später) E mit der Projektion $\pi: E \rightarrow S^1$ auf seine „Seele“, ein **Geradenbündel** (d.h.: ein Vektorraumbündel vom Rang 1) über S^1 , welches nicht bündel-isomorph (vgl. (4.48)) (und auch nicht diffeomorph) zum **Zylinder** $S^1 \times \mathbb{R}$ (mit $\pi = \text{pr}_1$) ist,

(4.48) Definition. Sei M^n eine glatte Mannigfaltigkeit und $\pi_1: E_1 \rightarrow M$ und $\pi_2: E_2 \rightarrow M$ Vektorbündel über M .

- (a) Eine glatte Abbildung $\Phi: E_1 \rightarrow E_2$ mit $\pi_2 \circ \Phi = \pi_1$ heißt ein **(Bündel-) Homomorphismus**, wenn für jedes $p \in M$ die induzierte Abbildung

$$\Phi_p: (E_1)_p \rightarrow (E_2)_p$$

linear bzgl. der Vektorraumstrukturen von $(E_1)_p$ und $(E_2)_p$ ist.

- (b) Ein Homomorphismus $\Phi: E_1 \rightarrow E_2$ heißt ein **(Bündel-) Isomorphismus**, wenn es einen Homomorphismus $\Psi: E_2 \rightarrow E_1$ mit

$$\Psi \circ \Phi = \mathbb{1}_{E_1}, \quad \Phi \circ \Psi = \mathbb{1}_{E_2}.$$

E_1 und E_2 heißen isomorph, $E_1 \cong E_2$, wenn es einen Isomorphismus $\Phi: E_1 \rightarrow E_2$ gibt.

(4.49) Beispiel. Sei M^n glatte Mannigfaltigkeit und $k \in \mathbb{N}$. Beachte die Produkt-Mannigfaltigkeit $E := M \times \mathbb{R}^k$, $\pi = \text{pr}_1: E \rightarrow M$. Dann ist π glatt und $\varphi: E \rightarrow M \times \mathbb{R}^k$, $\varphi = \mathbb{1}$, eine Bündelkarte (auf ganz $E = \pi^{-1}(M)$) mit $\text{pr}_1 \circ \varphi = \pi$. Der Atlas $\mathfrak{A} = (\varphi)$, der nur aus der Karte φ besteht, macht dann $\pi: E \rightarrow M$ zu einem Vektorbündel vom Rang k über M . Wir notieren dieses Vektorbündel mit $\underline{\mathbb{R}}^k$ (wenn diese Basis-Mannigfaltigkeit M klar ist).

Ein Vektorbündel $\pi: E \rightarrow M$ vom Rang k heißt **trivial**, wenn $E \cong \underline{\mathbb{R}}^k$ ist.

(4.50) Beispiel (wichtig). Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension n und

$$TM = \sum_{p \in M} TM_p \text{ mit } \pi: TM \rightarrow M, \pi(\xi) = p \iff \xi \in TM_p$$

ihr Tangentialbündel, BILD. Wir versehen nun $\pi: TM \rightarrow M$ nach und nach mit einer Vektorbündel-Struktur.

(a) Sei $\varphi: U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte (aus einem differenzierbaren Atlas \mathfrak{A}) von M . Für jedes $\xi \in \pi^{-1}(U) \subseteq TM$ gibt es genau einen Vektor $y = (y^1, \dots, y^n) \in \mathbb{R}^n$, so dass (mit $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$) gilt: $\xi = y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p$ (mit $p := \pi(\xi)$), nämlich

$$y^j = dx^j \Big|_p(\xi).$$

Es ist

$$\tilde{\varphi}: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n, \quad \tilde{\varphi}(\xi) := (\pi(\xi), dx^1 \Big|_{\pi(\xi)}(\xi), \dots, dx^n \Big|_{\pi(\xi)}(\xi))$$

eine Bijektion und damit auch

$$\hat{\varphi}: = (\varphi \times \mathbb{1}) \circ \tilde{\varphi}: \pi^{-1}(U) \rightarrow V \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{2n}$$

(und $V \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ ist offen).

(i) Man definiere nun eine Teilmenge $\tilde{M} \subseteq \tilde{M} := TM$ als offen, wenn für alle Karten $\varphi: U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ (aus einem Atlas \mathfrak{A} von M) gilt, dass

$$\tilde{\varphi}(\tilde{M} \cap \pi^{-1}(U)) \subseteq U \times \mathbb{R}^n$$

offen ist. Das macht \tilde{M} zu einem topologischen Raum, der Hausdorffsch und von abzählbarer Topologie ist (und diese Topologie ist unabhängig von der Wahl von \mathfrak{A}). Die Bijektionen $\tilde{\varphi}$ (φ Mitglied in \mathfrak{A}) werden damit zu Homöomorphismen und damit \tilde{M} (vermöge der Homöomorphismen $\hat{\varphi}: \pi^{-1}(U) \rightarrow V \times \mathbb{R}^n$) zu einer topologischen Mannigfaltigkeit der Dimension $2n$.

(ii) Sei $\mathfrak{A} = (\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow V_\alpha)_{\alpha \in I}$ nun ein differenzierbarer Atlas von M . Dann ist auch

$$\tilde{\mathfrak{A}} = (\hat{\varphi}_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow V_\alpha \times \mathbb{R}^n)_{\alpha \in I}$$

ein differenzierbarer Atlas von \tilde{M} , denn ist $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ (mit $\alpha, \beta \in I$), so ist für ein $\xi \in \pi^{-1}(p) \subseteq \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) = \pi^{-1}(U_\alpha) \cap \pi^{-1}(U_\beta)$.

$$\xi = y_\alpha^k \frac{\partial}{\partial x_\alpha^k} = y_\beta^l \frac{\partial}{\partial x_\beta^l}$$

und

$$y_\alpha^k = \underbrace{\frac{\partial x_\alpha^k}{\partial x_\beta^l}}_{=(\text{Jac}(\varphi_{\alpha\beta})(x_\beta))_i^k} \cdot y_\beta^l \quad (\text{mit } x_\beta = \varphi_\beta(p)).$$

Ist also $x_\alpha = \varphi_\alpha(p)$, $x_\beta = \varphi_\beta(p)$ und damit $x_\alpha = \varphi_{\alpha\beta}(x_\beta)$ für die glatten Übergänge $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ von \mathfrak{A} , so ist

$$\hat{\varphi}_\alpha \circ \hat{\varphi}_\beta(x_\beta, y_\beta) = \left(\varphi_{\alpha\beta}(x_\beta), (\text{Jac}(\varphi_{\alpha\beta})(x_\beta))y_\beta \right)$$

und damit glatt. Mit $\hat{\mathfrak{A}}$ wird damit \tilde{M} zu einer glatten Mannigfaltigkeit der Dimension $2n$ (und die Struktur $\hat{c} = [\hat{\mathfrak{A}}]$ hängt nur von der Struktur $c = [\mathfrak{A}]$ auf M ab).

- (iii) Schließlich ist nun $\pi: TM \rightarrow M$ eine glatte Abbildung, denn ist $\zeta \in TM$, $p = \pi(\zeta)$ und $\varphi: U \rightarrow V$ eine Karte auf M um p , d.h. $p \in U$, so gilt bzgl. der Karte $\hat{\varphi}: \pi^{-1}(U) \rightarrow V \times \mathbb{R}^n$ auf TM und φ auf M :

$$\begin{aligned} \varphi \circ \pi \circ \hat{\varphi}^{-1} &= \varphi \circ \pi \circ \tilde{\varphi}^{-1} \circ (\varphi^{-1} \times \mathbb{1}) \\ &= \varphi \circ \text{pr}_1 \circ (\varphi^{-1} \times \mathbb{1}) && \text{(da } \text{pr}_1 \circ \tilde{\varphi} = \mathbb{1} \text{)} \\ &= \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \text{pr}_1 = \text{pr}_1, && \text{(da } \text{pr}_1 \circ (f \times g) = f \circ \text{pr}_1 \text{)} \end{aligned}$$

also

$$\varphi \circ \pi \circ \hat{\varphi}^{-1}(x, y) = x$$

und damit glatt (um ζ , und damit überall).

- (b) Für jede Karte $\varphi: U \rightarrow V$ (aus einem differenzierbaren Atlas \mathfrak{A}) von M wir damit $\tilde{\varphi}: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ zu einem Diffeomorphismus, weil bzgl. der Karten $\hat{\varphi}: \pi^{-1}(U) \rightarrow V \times \mathbb{R}^n$ und $\varphi \times \mathbb{1}: U \times \mathbb{R}^n \rightarrow V \times \mathbb{R}^n$ gerade

$$(\varphi \times \mathbb{1}) \circ \tilde{\varphi} \circ \hat{\varphi}^{-1} = (\varphi \times \mathbb{1}) \circ \tilde{\varphi} \circ \tilde{\varphi}^{-1} \circ (\varphi \times \mathbb{1})^{-1} = \mathbb{1}$$

ist. Schließlich ist auch $\text{pr}_1 \circ \tilde{\varphi} = \pi$ nach Konstruktion, also $\tilde{\varphi}$ eine Bündelkarte.

Hat man nun zwei Karten $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ und $\varphi_\beta: U_\beta \rightarrow V_\beta$ (aus einem Atlas \mathfrak{A}) von M , so gilt für die zugehörigen Bündelkarten $\tilde{\varphi}_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ bzw. $\tilde{\varphi}_\beta: \pi^{-1}(U_\beta) \rightarrow U_\beta \times \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_\alpha \circ \tilde{\varphi}_\beta^{-1}(p, y_\beta) &= [(\varphi_\alpha \times \mathbb{1})^{-1} \circ \hat{\varphi}_\alpha] \circ [\hat{\varphi}_\beta^{-1} \circ (\varphi_\beta \times \mathbb{1})](p, y_\beta) \\ &= (\varphi_\alpha^{-1} \times \mathbb{1}) \circ (\hat{\varphi}_\alpha \circ \hat{\varphi}_\beta^{-1})(\varphi_\beta \times \mathbb{1})(p, y_\beta) \\ &= (\varphi_\alpha^{-1} \times \mathbb{1}) \left(\underbrace{\varphi_{\alpha\beta}}_{=\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}}(\varphi_\beta(p)), \text{Jac}(\varphi_{\alpha\beta})(\varphi_\beta(p))y_\beta \right) \\ &= \left(p, [\text{Jac}(\varphi_{\alpha\beta}) \circ \varphi_\beta(p)]y_\beta \right). \end{aligned}$$

Damit ist $\tilde{\varphi}_{\alpha\beta}(p): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ gerade durch

$$y_\beta \mapsto (\text{Jac}(\varphi_{\alpha\beta}) \circ \varphi_\beta(p))y_\beta$$

gegeben und damit linear. Der Atlas

$$\tilde{\mathfrak{A}} := (\tilde{\varphi}_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n)_{\alpha \in I}$$

(wenn $\mathfrak{A} = (\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow V_\alpha)_{\alpha \in I}$ ist) macht also $\pi: TM \rightarrow M$ zu einem Vektorbündel vom Rang n (und $[\tilde{\mathfrak{A}}] =: \tilde{c}$ hängt nur von $c = [\mathfrak{A}]$ ab: $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B} \implies \tilde{\mathfrak{A}} \sim \tilde{\mathfrak{B}}$). Die Übergangsfunktionen $(\tilde{\varphi}_{\alpha\beta})$ sind gegeben durch:

$$\tilde{\varphi}_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R}), \quad \tilde{\varphi}_{\alpha\beta} = \text{Jac}(\varphi_{\alpha\beta}) \circ \varphi_\beta.$$

(4.51) Definition. Sei $\pi: E \rightarrow M$ ein Vektorbündel über einer Mannigfaltigkeit M und $U \subseteq M$ offen. Ein (glatter) **Schnitt in E über U** ist eine glatte Abbildung

$$s: U \rightarrow E \quad \text{mit} \quad \pi \circ s = \mathbb{1}_U.$$

Ist $U = M$ und $s: M \rightarrow E$ ein Schnitt, so spricht man von einem **globalen Schnitt in E** .

(4.52) Kommentar.

(a) Ist $\varphi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$ eine Bündelkarte eines Vektorraumbündels $\pi: E \rightarrow M$ und ist $s: U \rightarrow E$ ein Schnitt in E über U , so gibt es eindeutig bestimmte glatte Funktionen $f^1, \dots, f^k: U \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\varphi \circ s(p) = (p, f^1(p), \dots, f^k(p)) \in U \times \mathbb{R}^k, \quad \forall p \in U,$$

nämlich

$$f^i = \text{pr}^i \circ \text{pr}_2 \circ \varphi \circ s \quad (i = 1, \dots, k).$$

Umgekehrt definieren glatte Funktionen $f^1, \dots, f^k \in \mathcal{E}(U)$ durch

$$s(p) := \varphi^{-1}(p, f^1(p), \dots, f^k(p))$$

einen glatten Schnitt in E über U . Bzgl. einer Bündelkarte $\varphi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$ ist also ein globaler Schnitt über U das Gleiche, wie eine glatte vektorwertige Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{R}^k$.

(b) Global gesehen ist aber ein Schnitt in einem Vektorraumbündel $\pi: E \rightarrow M$ über einer offenen Menge $U \subseteq M$ (z.B. $U = M$) eine echte Verallgemeinerung von vektorwertigen Funktionen auf U in folgendem Sinn: Ist etwa $U = U_1 \cap U_2$ und $s: U \rightarrow E$ ein Schnitt in E über U , so gilt für zwei Bündelkarten $\varphi_1: \pi^{-1}(U_1) \rightarrow U_1 \times \mathbb{R}^k$ und $\varphi_2: \pi^{-1}(U_2) \rightarrow U_2 \times \mathbb{R}^k$, dass sich die zugehörigen vektorwertigen Funktionen $f_1: U_1 \rightarrow \mathbb{R}^k$ bzw. $f_2: U_2 \rightarrow \mathbb{R}^k$ (nach (a)) auf ihrem gemeinsamen Definitionsbereich wie folgt transformieren (und nicht etwa gleich sind):

$$f_1(p) = \varphi_{12}(p) f_2(p), \quad \forall p \in U_1 \cap U_2,$$

wobei $\varphi_{12}: U_1 \cap U_2 \rightarrow \text{GL}_k(\mathbb{R})$ der Übergang von E bzgl. der Bündelkarten φ_1 und φ_2 ist, denn:

$$\begin{aligned} f_1(p) &= \text{pr}_2 \circ \varphi_1 \circ s(p) = (\varphi_1)_p \circ (\varphi_2)_p^{-1} \circ (\varphi_2)_p \circ s(p) \\ &= \varphi_{12}(p) \circ \underbrace{\text{pr}_2 \circ \varphi_2 \circ s(p)}_{=f_2} = \varphi_{12}(p) \cdot f_2(p). \end{aligned}$$

(c) Ist $\pi: E \rightarrow M$ ein Vektorraumbündel über M , so notieren wir den Raum der globalen (glatten) Schnitte mit

$$\Gamma(E) := \Gamma(M; E) := \{s: M \rightarrow E \text{ glatter Schnitt}\}.$$

Es ist im offensichtlicher Weise ein \mathbb{R} -Vektorraum (unendlicher Dimension bei $\dim M \geq 1$ und $\text{rg}(E) \geq 1$, Übung), sogar ein $\mathcal{E}(M)$ -Modul:

$$\begin{aligned} (s_1 + s_2)(p) &:= s_1(p) + s_2(p) && \text{(Addition in } E_p) \\ (f \cdot s)(p) &:= f(p) \cdot s(p) && \text{(skalare Multiplikation in } E_p), \end{aligned}$$

$$f \in \mathcal{E}(M), s, s_1, s_2 \in \Gamma(E).$$

(4.53) Beispiel.

- (a) Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit und $L = \underline{\mathbb{R}} (= M \times \mathbb{R})$ das triviale Geradenbündel, so kann man die globalen Schnitte in L offenbar mit den glatten Funktionen auf M identifizieren ($s(p) = (p, f(p))$),

$$\Gamma(L) \cong \mathcal{E}(M)$$

(und genauso, wenn $L \cong \underline{\mathbb{R}}$ ist).

- (b) Ist $\pi: E \rightarrow M$ ein Vektorraumbündel, so hat π stets einen trivialen Schnitt, nämlich den sogenannten **Nullschnitt**. Da nämlich jede Faser $E_p \subseteq E$ ein \mathbb{R} -Vektorraum ist, gibt es ein Nullelement $0_p \in E_p$, für alle $p \in M$. Der Nullschnitt ist dann durch $s: M \rightarrow E$,

$$s(p) = 0_p$$

gegeben. (Er ist glatt, weil für eine Bündelkarte $\varphi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$ $s|_U$ durch die Nullfunktion $0: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ beschrieben ist.) Er ist dann Nullelement in den $\mathcal{E}(M)$ -Modul $\Gamma(E)$.

- (c) Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit und $\pi: TM \rightarrow M$ ihr Tangentialbündel, so sind die glatten Schnitte in TM über einer offenen Menge (wegen (4.52,a)) gerade die glatten Vektorfelder auf U ,

$$\Gamma(TM_U) = \mathfrak{X}(U).$$

(4.54) Kommentar.

- (a) Man sagt, dass ein Schnitt $s: M \rightarrow E$ in einem Vektorbündel $\pi: E \rightarrow M$ **nullstellenfrei** ist, wenn $s(p) \neq 0_p$ ist, für alle $p \in M$.
- (b) Ist ein Vektorraumbündel $\pi: E \rightarrow M$ trivial, $E \cong \underline{\mathbb{R}}^k$ (mit $k = \text{rg}(E) \geq 1$), so hat $\pi: E \rightarrow M$ offenbar stets nullstellenfreie schnitt, z.B. $s: M \rightarrow E$,

$$s(p) = (p, 1, 0, \dots, 0) \in M \times \mathbb{R}^k = \underline{\mathbb{R}}^k$$

(bzw. $s(p) = \varphi^{-1}(p, 1, 0, \dots, 0)$, wenn $\varphi: E \rightarrow \underline{\mathbb{R}}^k$ ein Bündelisomorphismus ist). Hat ein Bündel $\pi: E \rightarrow M$ etwa keinen nullstellenfreien (glatten) Schnitt, so kann nicht trivial sein, $E \cong \underline{\mathbb{R}}^k$. Z.B. hat nach dem **Igelsatz Sⁿ** für n gerade kein nullstellenfreies (sogar nur stetiges) Vektorfeld, was demnach impliziert:

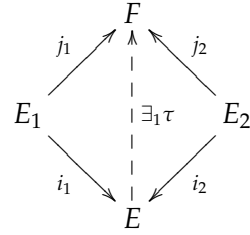
$$TS^n \not\cong \underline{\mathbb{R}}^n,$$

für n gerade.

(4.55) Motivation. Konstruktion mit Vektorräumen in der (multi-) linearen Algebra, die kanonisch sind in dem Sinne, dass sie nicht von der Wahl einer Basis abhängig sind (z.B. direkte Summe, Tensorprodukt oder p -fache Dachprodukt ($p \in \mathbb{N}_0$)), übertragen sich auf Vektorbündel, z.B.

- (a) **Direkte Summe.** Sind $\pi_1: E_1 \rightarrow M$ und $\pi_2: E_2 \rightarrow M$ Vektorbündel über M , so gibt es (bis auf geeignete Isomorphie) genau ein Tripel $(\pi: E \rightarrow M, j_1: E_1 \rightarrow E, j_2: E_2 \rightarrow E)$, wo $\pi: E \rightarrow M$ ein Vektorbündel und j_1, j_2 Bündelhomomorphismen sind, die folgende universelle Eigenschaft erfüllen:

Ist $(\varrho: F \rightarrow M, j_1, j_2)$ ein weiteres solches Tripel, so gibt es genau einen Bündelhomomorphismus $T: E \rightarrow F$ mit $T \circ i_1 = j_1, T \circ i_2 = j_2$. Man nennt (E, i_1, i_2) die **direkte Summe von E_1 und E_2** .



Konstruktion: Setze (als Menge)

$$E = \sum_{p \in M} E_p, \quad E_p := (E_1)_p \oplus (E_2)_p \quad \text{und} \quad \pi: E \rightarrow M, \quad \pi(\xi) = p \iff \xi \in E_p.$$

Setze weiter

$$i_k: E_k \rightarrow E, \quad i_k = \sum_p (i_k)_p \quad \text{mit} \quad (i_k)_p: (E_k)_p \rightarrow E$$

die kanonischen Inklusionen ($k = 1, 2$). Wähle dann eine offene Überdeckung $(U_j)_{j \in J}$ von M , so dass Bündelatlant

$$\mathfrak{A}_1 = (\varphi_j^{(1)}: \pi_1^{-1}(U_j) \rightarrow U_j \times \mathbb{R}^{k_1})_{j \in J} \quad \text{und} \quad \mathfrak{A}_2 = (\varphi_j^{(2)}: \pi_2^{-1}(U_j) \rightarrow U_j \times \mathbb{R}^{k_2})_{j \in J}$$

existieren ($k_1 = \text{rg}(E_1), k_2 = \text{rg}(E_2)$) und definiere

$$\mathfrak{A} = (\varphi_j: \pi^{-1}(U_j) \rightarrow U_j \times \mathbb{R}^{k_1+k_2})_{j \in J}$$

durch

$$\varphi_j(\xi) = (\pi(\xi), (y_1, y_2)) \iff \begin{cases} \varphi_j^{(1)}(\xi_1) &= (\pi(\xi), y_1) \\ \varphi_j^{(2)}(\xi_2) &= (\pi(\xi), y_2) \end{cases}$$

und

$$\xi = (i_1)_p(\xi_1) + (i_2)_p(\xi_2) = (\xi_1, \xi_2) \quad (\text{mit } p = \pi(\xi)).$$

Sind nun $(\varphi_{ij}^{(1)}: U_i \cap U_j \rightarrow \text{GL}_{k_1}(\mathbb{R}))_{i,j \in J}$ bzw. $(\varphi_{ij}^{(2)})$ die Übergänge von \mathfrak{A}_1 bzw. \mathfrak{A}_2 , so bekommt man für den Atlas \mathfrak{A} , dass

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(p, (y_1, y_2)) = (p, \varphi_{ij}^{(1)}(p)y_1, \varphi_{ij}^{(2)}(p)y_2) = (p, \varphi_{ij}(p) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix})$$

mit

$$\varphi_{ij}: U_i \cap U_j \rightarrow \text{GL}_{k_1+k_2}(\mathbb{R}), \quad \varphi_{ij}(p) = \left(\begin{array}{c|c} \varphi_{ij}^{(1)}(p) & 0 \\ \hline 0 & \varphi_{ij}^{(2)}(p) \end{array} \right).$$

Damit wird $\pi: E \rightarrow M$ zu einem Vektorbündel vom Rang $k_1 + k_2$, die Abbildungen $i_k: E_k \rightarrow E$ zu Bündelhomomorphismen, die auch die gewünschte universellen Eigenschaft haben. (Details sind Übungsaufgaben: z.B. Topologie und differenzierbare Struktur auf E werden mittels (φ_j) ähnlich wie bei der Konstruktion der entsprechenden Strukturen auf dem Tangentialbündel gemacht).

- (b) **Duales Bündel.** Ist $\pi: E \rightarrow M$ ein Vektorbündel vom Rang k , so versieht man leicht $\tilde{\pi}: E^* \rightarrow M$ mit

$$E^* = \sum_{p \in M} (E_p)^* \quad \text{und} \quad \tilde{\pi}(\alpha) = p \iff \alpha \in (E_p)^*$$

mit einer Vektorbündel-Struktur (so dass $(E^*)_p = (E_p)^*$ ist): Ist $\varphi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k, U \subseteq M$ offen, Vektorbündelkarte von E und $((e_1)_p, \dots, (e_k)_p)$ die Basis von E_p , gegeben durch

$$(e_j)_p = \varphi^{-1}(p, e_j)$$

(wo (e_1, \dots, e_k) die kanonische Basis von \mathbb{R}^k sei), so sei $((\lambda^1)_p, \dots, (\lambda^k)_p)$ dazu duale Basis von E_p^* . Wir setzen dann $\tilde{\varphi}: \tilde{\pi}^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$, $\tilde{\varphi}(\alpha) = (\tilde{\pi}(\alpha), z)$ mit

$$\alpha = z_j(\lambda^j)_p.$$

Es wird dann $\tilde{\pi}: E^* \rightarrow M$ zu einem Vektorbündel, denn ist $\varphi_{12}: U_1 \cap U_2 \rightarrow \text{GL}_k(\mathbb{R})$ der Übergang zwischen zwei Bündelkarten $\varphi_1: \pi^{-1}(U_1) \rightarrow U_1 \times \mathbb{R}^k$ und $\varphi_2: \pi^{-1}(U_2) \rightarrow U_2 \times \mathbb{R}^k$ von $\pi: E \rightarrow M$, so gilt für die induzierten Bündelkarten $\tilde{\varphi}_1: \tilde{\pi}^{-1}(U_1) \rightarrow U_1 \times \mathbb{R}^k$ und $\tilde{\varphi}_2: \tilde{\pi}^{-1}(U_2) \rightarrow U_2 \times \mathbb{R}^k$ von $\tilde{\pi}: E^* \rightarrow M$, dass für $p \in U_1 \cap U_2$ und $z \in \mathbb{R}^k$

$$\tilde{\varphi}_1 \circ \tilde{\varphi}_2^{-1}(p, z) = (p, \tilde{\varphi}_{12}(p) \cdot z)$$

ist mit $\tilde{\varphi}_{12}: U_1 \cap U_2 \rightarrow \text{GL}_k(\mathbb{R})$.

$$\tilde{\varphi}_{12}(p) = \varphi_{21}^t(p) = \varphi_{12}^t(p)^{-1} \quad (\text{Übung}).$$

- (c) **Homomorphismenbündel.** Sind $\pi_1: E_1 \rightarrow M$ und $\pi_2: E_2 \rightarrow M$ Vektorbündel, so führt eine nun hoffentlich offensichtliche Konstruktion zum **Homomorphismen-Bündel** $\pi: \text{Hom}(E_1, E_2) \rightarrow M$. Für das triviale Geradenbündel $\underline{\mathbb{R}}$ erhält man speziell:

$$E^* = \text{Hom}(E, \underline{\mathbb{R}}).$$

- (d) **Tensorbündel.** Sind $\pi_1: E_1 \rightarrow M$ und $\pi_2: E_2 \rightarrow M$ Vektorbündel vom Rang k_1 bzw. k_2 , so hat man mit einer ähnlichen Konstruktion das Tensorbündel $\pi: E_1 \otimes E_2 \rightarrow M$ mit einer universellen Eigenschaft, wobei hier $E_1 \times_{\pi_1 \pi_2} E_2 \rightarrow M$ **das Faserprodukt von E_1 und E_2** ist,

$$E_1 \times_{\pi_1 \pi_2} E_2 := \{(e_1, e_2) \in E_1 \times E_2 : \pi_1(e_1) = \pi_2(e_2)\} \subseteq E_1 \times E_2$$

(und $\pi(e_1, e_2) = \pi_1(e_1) = \pi_2(e_2)$)

(F Vektorbündel über M , s faserweise bilinear $E_1 \times_{\pi_1 \pi_2} E_2$ ist übrigens natürlich auch die unterliegende Mannigfaltigkeit des Bündels $E_1 \oplus E_2$).

$$\begin{array}{ccc} E_1 \times_{\pi_1 \pi_2} E_2 & \xrightarrow{s} & F \\ \otimes \downarrow & \nearrow \exists_1 T & \\ E_1 \otimes E_2 & & \end{array}$$

- (e) **Dachformenbündel.** Ist $\pi: E \rightarrow M$ ein Vektorbündel vom Rang k und $0 \leq p \leq k$, so führt eine ebenso naheliegende Konstruktion zum p -fachen Dachformenbündel $\tilde{\pi}: \Lambda^p E \rightarrow M$ und ähnliches gilt für die **Algebrenbündel** $T(E) \rightarrow M$ oder $\Lambda(E) \rightarrow M$ (Übung).

(4.56) Beispiel. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $\pi: TM \rightarrow M$ ihr Tangentialbündel. Aus den natürlichen Bündeloperationen erhält man nun:

- (a) **Das Cotangentialbündel.** $\pi: TM^* \rightarrow M$ (oder auch $T^*M = TM^*$): Ist $U \subseteq M$ offen und $\omega: U \rightarrow T^*M$ ein glatter Schnitt, so ist ω offenbar gerade eine (glatte) Differentialform auf U ,

$$\Omega(U) = \Gamma(U, T^*U).$$

- (b) **Die Tensorbündel.** $\pi: T^{(p,q)}M \rightarrow M$ für $p, q \in \mathbb{N}_0$: Hierbei ist

$$T^{(p,q)}M := \underbrace{TM \otimes \dots \otimes TM}_{p\text{-mal}} \otimes \underbrace{T^*M \otimes \dots \otimes T^*M}_{q\text{-mal}}$$

Ist $U \subseteq M$ offen und $T: U \rightarrow T^{(p,q)}M$ ein glatter Schnitt, so sprechen wir von einem **Tensorfeld (der Stufe (p, q))**. Beachte also das Transformationsverhalten von solchen Tensorfelder (vgl. (4.38)). Sind $x: U \rightarrow V_1$ und $y: U \rightarrow V_2$ Karten der Mannigfaltigkeit mit Übergang $y = y(x): V_1 \rightarrow V_2$ (bzw. $x = x(y): V_2 \rightarrow V_1$), so gilt für ein Tensorfeld $T \in \Gamma(U; T^{(p,q)}U)$, dass mit

$$\begin{aligned} T &= \xi_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q} \\ &= \eta_{l_1, \dots, l_q}^{k_1, \dots, k_p} \frac{\partial}{\partial y^{k_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial y^{k_p}} \otimes dy^{l_1} \otimes \dots \otimes dy^{l_q} \end{aligned}$$

gilt:

$$\xi_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p}(x) = \frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{k_1}} \dots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial y^{k_p}} \cdot \frac{\partial y^{l_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial y^{l_q}}{\partial x^{j_q}} \cdot \eta_{l_1, \dots, l_q}^{k_1, \dots, k_p}(y(x)).$$

- (c) **Das p -fache äußere Produkt des Cotangentialbündels.** $\pi: \Lambda^p T^*M \rightarrow M$ ($0 \leq p \leq n = \dim M$, für $p = 0$ versteht man $\Lambda^0 T^*M = \mathbb{R}$: das triviale Geradenbündel), beachte: $\Lambda^1 T^*M = T^*M$. Ist $U \subseteq M$ offen und $\omega: U \rightarrow \Lambda^p T^*M$ ein glatter Schnitt, so sprechen wir von **einer Differentialform vom Grad p über U** und setzen

$$\mathcal{E}^{(p)}(U) := \Gamma(U; \Lambda^p T^*U)$$

(so dass also $\mathcal{E}^{(0)}(U) \cong \mathcal{E}(U)$ und $\mathcal{E}^{(1)}(U) = \Omega(U)$ ist). Ist also $\omega \in \mathcal{E}^{(p)}(U)$ und $x: U \rightarrow V$ eine Karte, so gibt es eindeutig bestimmte glatte Funktionen $\eta_I \in \mathcal{E}(V)$ (I eine p -elementige Teilmenge aus $\{1, \dots, n\}: I = \{i_1, \dots, i_p\}$ mit $i_1 < i_2 < \dots < i_p$), so dass gilt:

$$\omega = \eta_I(x) dx^I \text{ mit } dx^I = dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}.$$

Sind $x: U \rightarrow V_1$ und $y: U \rightarrow V_2$ zwei Karten und

$$\omega = \xi_I dx^I = \eta_J dy^J,$$

so erhält man das Transformationsverhalten (vgl. (4.41)):

$$\xi_I(x) = \det\left(\frac{\partial y^J}{\partial x^I}\right)^1(x) \eta_J(y(x))$$

insbesondere für eine n -Form $\omega \in \mathcal{E}^{(n)}(U)$ ($n = \dim M$):

$$\omega = \xi(x) dx = \eta(y) dy :$$

(mit $dx := dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$, $dy := dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n$)

$$\xi(x) = \det\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) \cdot \eta(y(x)).$$

(4.57) Definition. Sei $\Phi: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen glatte Mannigfaltigkeiten M^n und N^r und $\pi_F: F \rightarrow N$ ein Vektorbündel vom Rang $k \in \mathbb{N}$ über N . Wir setzen

$$E := M \times_{\Phi, \pi_F} F = \{(p, \eta) \in M \times F : \Phi(p) = \pi_F(\eta)\}, \quad \pi_E: E \rightarrow M, \quad \pi_E := \text{pr}_1$$

und nennen $\Phi^*F := E$ **das Rückzugsbündel von F unter Φ** (auch: **Pullback-Bündel**)

$$\begin{array}{ccc} \Phi^*F & \xrightarrow{\text{pr}_2} & F \\ \text{pr}_1 = \pi_E \downarrow & & \downarrow \pi_F \\ M & \xrightarrow{\Phi} & N. \end{array}$$

¹Wobei es sich hier um den $J\Phi$ -Minor der Funktionalmatrix $\frac{\partial y}{\partial x} = \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right)_{1 \leq j, i \leq n}$ handelt.

(4.58) Kommentar.

(a) Man beachte, dass über $p \in M$ gerade die Faser von $\pi_F: F \rightarrow N$ über $\Phi(p)$ sitzt:

$$(\Phi^*F)_p = F_{\Phi(p)} \quad (\text{vermöge } \text{pr}_2|_{(\Phi^*F)_p}).$$

(b) Ist $\varphi: \pi_F^{-1}(V) \rightarrow V \times \mathbb{R}^k$, $V \subseteq N$ offen, eine Bündelkarte von $\pi_F: F \rightarrow N$, so induziert φ eine Bijektion

$$\psi = \psi_\varphi: \pi_E^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$$

mit $U := \Phi^{-1}(V)$ durch

$$\psi(p, \eta) = (p, \text{pr}_2 \circ \varphi(\eta))$$

denn $U \times \mathbb{R}^k \rightarrow \pi_E^{-1}(U)$,

$$(p, y) \mapsto (p, \varphi^{-1}(\Phi(p), y))$$

ist invers zu ψ :

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(\Phi(p), \text{pr}_2 \circ \varphi(\eta)) &= \varphi^{-1}(\pi_F(\eta), \text{pr}_2 \circ \varphi(\eta)) = \varphi^{-1}(\underbrace{\text{pr}_1 \circ \varphi(\eta), \text{pr}_2 \circ \varphi(\eta)}_{=\varphi(\eta)}) \\ &= \varphi^{-1} \circ \varphi(\eta) = \eta \end{aligned}$$

und

$$\text{pr}_2 \circ \varphi(\varphi^{-1}(\Phi(p), y)) = y.$$

Man versieht nun nacheinander $E = \Phi^*F$ mit der Topologie, so dass $\psi_i := \psi_{\varphi_i}$ ein Homöomorphismus ist (für alle Bündelkarten $\varphi_i: \pi_F^{-1}(V_i) \rightarrow V_i \times \mathbb{R}^k$ aus einem Bündelatlantlas $\mathfrak{A} = (\varphi_i)_{i \in I}$ von $F \rightarrow N$), dann mit einer differenzierbaren Struktur, so dass ψ_i ein Diffeomorphismus ist ($i \in I$), und schließlich mit einer Bündelstruktur, so dass

$$\mathfrak{B} = (\psi_i: \pi_E^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{R}^k)_{i \in I} \quad (\text{mit } U_i := \Phi^{-1}(V_i))$$

ein Bündelatlantlas wird. Die Übergangsfunktionen dieses Atlas' sind dann gegeben durch

$$\psi_{ij}: U_i \cap U_j \rightarrow \text{GL}_k \mathbb{R}, \quad \psi_{ij} = \varphi_{ij} \circ \Phi$$

(wo $\varphi_{ij}: V_i \cap V_j \rightarrow \text{GL}_k \mathbb{R}$ die Übergänge von $\mathfrak{A} = (\varphi_i)$ sind), denn:

$$\psi_i \circ \psi_j^{-1}(p, y) = \psi_i(p, \varphi_j^{-1}(\Phi(p), y)) = (p, \underbrace{\text{pr}_2 \circ \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}}_{\varphi_{ij}}(\Phi(p), y)) = (p, \varphi_{ij}(\Phi(p))y),$$

also

$$\psi_{ij}(p) = \varphi_{ij}(\Phi(p)).$$

(4.59) Beispiel. Ist $\Phi: M \rightarrow N$ glatt, so ist das Differential $D\Phi$ ein Bündelhomomorphismus von TM nach $\Phi^*(TN)$ (über M),

$$D\Phi \in \Gamma(M; \text{Hom}(TM, \Phi^*(TN)))$$

oder, da für zwei Bündel $E \rightarrow M$ und $F \rightarrow M$ das Homomorphismen-Bündel $\text{Hom}(E, F)$ kanonisch isomorph zu $E^* \otimes F$ ist, ist $D\Phi$ ein globaler Schnitt in $TM^* \otimes \Phi^*(TN)$,

$$D\Phi \in \Gamma(M; T^*M \otimes \Phi^*(TN)),$$

denn:

$$D\Phi_p: TM_p \rightarrow TN_{\Phi(p)} = (\Phi^*(TN))_p$$

ist ein Homomorphismus zwischen Fasern von TM und $\Phi^*(TN)$, und $p \mapsto D\Phi_p$ hängt auch glatt von p ab, da bzgl. Karten $x: U \rightarrow U' \subseteq \mathbb{R}^n$ von M um p und $y: V \rightarrow V' \subseteq \mathbb{R}^r$ von N um $\Phi(p)$ (mit $U = \Phi^{-1}(V)$) $D\Phi$ bzgl. der induzierten Bündelkarten gerade durch $U \times \mathbb{R}^n \rightarrow U \times \mathbb{R}^r$

$$(p, \xi) \mapsto (p, \text{Jac}(y)(x)\xi)$$

beschrieben wird (wenn wir mit $x \mapsto y(x)$ auch die lokale Beschreibung von Φ bzgl. x und y notieren)

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\Phi} & V \\ x \downarrow \cong & & \cong \downarrow y \\ U' & \xrightarrow{y(x)} & V' \end{array}$$

(4.60) Definition. Seien M und N glatt und $\Phi: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung. Für jedes offene $V \subseteq N$ definiert man **den Rückzug von Differentialformen**

$$\Phi^*: \mathcal{E}^{(k)}(V) \rightarrow \mathcal{E}^{(k)}(\Phi^{-1}(V))$$

($k \in \mathbb{N}_0$) wie folgt: Ist $\omega \in \mathcal{E}^{(k)}(V)$, also

$$\omega_q := \omega(q) \in \Lambda^k T^*N_q \cong \text{Alt}_k(TN_q), \text{ d.i. } \omega_q: TN_q \times \cdots \times TN_q \rightarrow \mathbb{R}$$

ist k -linear und alternierend, so setzt man $\Phi^*\omega \in \mathcal{E}^{(k)}(\Phi^{-1}(V))$ fest durch $(\Phi^*\omega)_p := \Phi^*\omega(p) \in \Lambda^k TM_p^* \cong \text{Alt}_k(TM_p)$ mit

$$(\Phi^*\omega)_p(\xi_1, \dots, \xi_k) := \omega_{\Phi(p)}(D\Phi_p(\xi_1), \dots, D\Phi_p(\xi_k)).$$

(4.61) Bemerkung. Sei $\Phi: M^n \rightarrow N^r$ glatt, $y: V \rightarrow V' \subseteq \mathbb{R}^r$ eine Karte auf N und $x: \Phi^{-1}(V) \rightarrow U' \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte auf M . Hat nun eine k -Form $\omega \in \mathcal{E}^{(k)}(V)$ die lokale Darstellung $\omega = \eta_I(y)dy^I$, so gilt für den Rückzug $\Phi^*\omega \in \mathcal{E}^{(k)}(\Phi^{-1}(V))$:

(a) $\Phi^*\omega = \det\left(\frac{\partial y^I}{\partial x^J}\right) \eta_I \circ y(x) dx^J,$

(b) $\Phi^*\omega = \eta_I \circ y(x) d(y^{i_1} \circ \Phi) \wedge \cdots \wedge d(y^{i_k} \circ \Phi).$

(4.62) Kommentar.

(a) Hierbei bezeichnet wieder $\frac{\partial y^I}{\partial x^J}$ die $k \times k$ -Untermatrix von $\text{Jac}(y)(x)$ ($x \mapsto y(x)$ die beschreibende Funktion von Φ bzgl. x und y), die aus den Zeilen i_1, \dots, i_k und den Spalten j_1, \dots, j_k besteht (wenn $I = \{i_1, \dots, i_k\}$, $i_1 < \cdots < i_k$ und $J = \{j_1, \dots, j_k\}$, $j_1 < \cdots < j_k$ ist).

(b) Das zeigt, dass $\Phi^*\omega$ tatsächlich glatt ist, wenn ω es ist.

(c) Man beachte insbesondere für den Rückzug von n -Formen, wenn $\dim M = \dim N = n$ ist: $\omega = \eta dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n$

$$\implies \Phi^*\omega = \left(\det\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) \eta \circ y(x) \right) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

Beweis. (a) Sei $\Phi^*\omega = \xi_J(x)dx^J$, also

$$\xi_J(x) = (\Phi^*\omega)_p \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \Big|_p \right)$$

(bei $x = x(p)$). Es folgt:

$$\begin{aligned} \xi_J(x) &= \omega_q \left(D\Phi_p \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \Big|_p \right), \dots, D\Phi_p \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \Big|_p \right) \right) && \text{(bei } q = \Phi(p)) \\ &= \omega_q \left(\frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{i_1}} \frac{\partial}{\partial y^{j_1}} \Big|_q, \dots, \frac{\partial y^{j_k}}{\partial x^{i_k}} \frac{\partial}{\partial y^{j_k}} \Big|_q \right) \\ &= \sum_I \sum_{\sigma \in S_k} \frac{\partial y^{\sigma(i_1)}}{\partial x^{j_1}} \cdots \frac{\partial y^{\sigma(i_k)}}{\partial x^{j_k}} \omega_q \left(\frac{\partial}{\partial y^{\sigma(i_1)}} \Big|_q, \dots, \frac{\partial}{\partial y^{\sigma(i_k)}} \Big|_q \right) \\ &= \sum_I \underbrace{\left(\sum_{\sigma \in S_k} \frac{\partial y^{\sigma(i_1)}}{\partial x^{j_1}} \cdots \frac{\partial y^{\sigma(i_k)}}{\partial x^{j_k}} \right)}_{=\det\left(\frac{\partial y^I}{\partial x^J}\right)(x)} \underbrace{\omega_q \left(\frac{\partial}{\partial y^{\sigma(i_1)}} \Big|_q, \dots, \frac{\partial}{\partial y^{\sigma(i_k)}} \Big|_q \right)}_{\eta_I(y)} \\ &= \left(\det \left(\frac{\partial y^I}{\partial x^J} \right) (x) \right) \eta_I \circ y(x) && \text{(bei } y = y(q)) \end{aligned}$$

(b) Es ist

$$\begin{aligned} d(y^m \circ \Phi) \left(\frac{\partial}{\partial x^l} \Big|_p \right) &= \frac{\partial}{\partial x^l} \Big|_p (y^m \circ \Phi)_p = \frac{\partial}{\partial x^l} (y^m \circ \Phi \circ x^{-1}) \Big|_{x_0} \\ &= \frac{\partial y^m}{\partial x^l} (x_0), \end{aligned}$$

also $d(y^m \circ \Phi) = \frac{\partial y^m}{\partial x^l} dx^l$

$$(d(y^{i_1} \circ \Phi) \wedge \cdots \wedge d(y^{i_k} \circ \Phi))_p \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \Big|_p \right) \stackrel{\text{wie in (a)}}{=} \cdots = \det \left(\frac{\partial y^I}{\partial x^J} \right) (x_0) \quad \square$$

(4.63) Erinnerung. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Wir hatten für jede offene Menge $U \subseteq M$ die Ableitung $d: \mathcal{E}(U) \rightarrow \mathcal{E}^{(1)}(U)$ definiert durch

$$df(p) = df_p: TM_p \rightarrow \mathbb{R}, \quad \xi \mapsto \xi(f_p)$$

und die lokale Beschreibung gefunden, dass, wenn $x: U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte ist, wir

$$df|_U = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

erhalten.

Eine der Hauptgründe für die Einführung von Differentialformen höherer Ordnung ist nun der folgende Satz:

(4.64) Satz. Sei M^n eine glatte Mannigfaltigkeit und $0 \leq k \leq n$. Es gibt nun einen eindeutig bestimmten Operator $d_k: \mathcal{E}^{(k)}(M) \rightarrow \mathcal{E}^{(k+1)}(M)$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) Ist $p \in M$ und $U \subseteq M$ eine beliebige Umgebung von p , so hängt für $\omega \in \mathcal{E}^{(k)}(M)$ der Wert $d_k\omega_p = d_k\omega(p) \in \Lambda^{k+1}T^*M_p$ nur von $\omega|_U$ ab (wir sagen: d_k ist ein lokaler Operator).

(b) Ist $x: U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte und $\omega|_U = \eta_I dx^I$ mit $\eta_I \in \mathcal{E}(V)$ (für alle I), so gilt:

$$d_k \omega|_U = d\eta_I \wedge dx^I = \frac{\partial \eta_I}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

(bei $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ $i_1 < \dots < i_k$).

(4.65) Kommentar.

(a) So wie für eine Funktion $f \in \mathcal{E}(M)$ kein „Gradient“ $\text{grad}(f) \in \mathfrak{X}(M) = \Gamma(M; TM)$ existiert, weil sich für Karten x und y um $p \in M$ die Gradienten von $f \circ x^{-1}$ und $f \circ y^{-1}$ nicht wie die Koeffizienten eines Vektorfeldes transformieren (sondern wie die einer 1-Form), gibt es auch keine „Hessesche“ $\text{Hess}(f) \in \Gamma(M; T^*M \otimes T^*M)$ auf M , weil sich die Hesseschen von $f \circ x^{-1}$ und $f \circ y^{-1}$ nicht wie die Koeffizienten eines $(0, 2)$ -Tensors transformieren. (Nur in kritischen Punkten $p \in M$ für f gilt das.) Was sich aber „richtig“ transformiert (d.h. wie die Koeffizienten einer 2-Form) sind die Ausdrücke

$$\alpha_{ij}(x) = \frac{\partial f_i}{\partial x^j}(x) - \frac{\partial f_j}{\partial x^i}(x),$$

wenn ω eine 1-Form mit lokaler Beschreibung $\omega = f_i dx^i$ und ähnliches für Formen höheren Grades. Das ist der Inhalt des Satzes.

(b) Ist $\omega \in \mathcal{E}^{(k)}(U)$, $x: U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte und $\omega = \eta_I dx^I$, so beachte man, dass für den Koeffizienten $\alpha_J(x)$ von $d\omega$ vor dx^J , also $d\omega = \alpha_J dx^J$ mit nun $(k+1)$ -elementigen Teilmengen $J = \{j_1, \dots, j_{k+1}\}$ gilt:

$$\alpha_J(x) = \sum_{\kappa=1}^{k+1} (-1)^{\kappa+1} \frac{\partial \eta_{J \setminus \{j_\kappa\}}}{\partial x^{j_\kappa}}.$$

Eigentlich müsste man nun für den Beweis von (4.64) folgendes prüfen: Sind $\xi = (\xi_I)$ auf $V_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\eta = (\eta_J)$ auf $V_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ gegeben, so dass gilt:

$$\xi_I(x) = \det \left(\frac{\partial y^J}{\partial x^I} \right) \eta_J(y(x)),$$

wenn $y = y(x): V_1 \rightarrow V_2$ ein Diffeomorphismus ist, denn dann beschreiben ξ und η die gleichen Differentialformen ω auf $U \subset M$, wenn $x: U \rightarrow V_1$ und $y: U \rightarrow V_2$ Karten sind, so gilt für $\alpha = (\alpha_I)$ bzw. $\beta = (\beta_J)$ mit

$$\alpha_I(x) = \sum_{\kappa=1}^{k+1} (-1)^{\kappa+1} \frac{\partial \xi_{I \setminus \{i_\kappa\}}}{\partial x^\kappa}, \quad \beta_J(y) = \sum_{\kappa=1}^{k+1} (-1)^{\kappa+1} \frac{\partial \eta_{J \setminus \{j_\kappa\}}}{\partial y^{j_\kappa}}$$

das Transformationsverhalten

$$\alpha_I(x) = \det \left(\frac{\partial y^J}{\partial x^I} \right) \beta_J(y).$$

Das ist aber zu kompliziert. Wir gehen anders vor.

Beweis von (4.64). (a) **Eindeutigkeit.** Sei $p \in M$ und $x: U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte um p . Dann ist für $\omega \in \mathcal{E}^{(k)}(M)$ gerade $\omega|_U = \eta_I(x) dx^I$ mit $\eta_I \in \mathcal{E}(V)$ und daher $d_k \omega = d\eta_I \wedge dx^I$, insbesondere

$$d_k \omega_p = (d\eta_I)_p \wedge dx_p^I \in \Lambda^{k+1} T^* M_p$$

und damit festgelegt.

(b) **Existenz.** Sei $p \in M$, $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ und $\varphi: U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte um p . Wir definieren dann:

$$d_k^\varphi: \mathcal{E}^{(k)}(U) \rightarrow \mathcal{E}^{(k+1)}(U), \quad d_k^\varphi \omega := d\eta_I \wedge dx^I.$$

Außerdem setzen wir

$$\mathcal{E}^*(U) := \bigoplus_{k=0}^n \mathcal{E}^{(k)}(U)$$

und

$$d^\varphi: \mathcal{E}^*(U) \rightarrow \mathcal{E}^*(U), \quad d^\varphi|_{\mathcal{E}^{(k)}(U)} := d_k^\varphi.$$

Wir stellen dann fest:

- (i) Für $k = 0$ ist $d^\varphi = d: \mathcal{E}^{(0)}(U) \rightarrow \mathcal{E}^{(1)}(U)$ und damit unabhängig von φ ;
- (ii) d^φ ist \mathbb{R} -linear und eine Anti-Derivation, d.h. für $\omega_1 \in \mathcal{E}^{(k)}(U)$ und $\omega_2 \in \mathcal{E}^{(k)}(U)$ ist

$$d_{k+1}^\varphi(\omega_1 \wedge \omega_2) = d_k^\varphi \omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge d_k^\varphi \omega_2. \quad (*)$$

- (iii) Es ist $d_{k+1}^\varphi \circ d_k^\varphi = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}_0$.

Dazu: (i) ist klar nach Definition.

Für (ii) sei $\omega_1 = \eta_I^{(1)} dx^I \in \mathcal{E}^{(k)}(U)$ und $\omega_2 = \eta_J^{(2)} dx^J \in \mathcal{E}^{(k)}(U)$. (Für $I \cap J \neq \emptyset$ ist $dx^I \wedge dx^J = 0$.)

$$\implies \omega_1 \wedge \omega_2 = \eta_I^{(1)} \eta_J^{(2)} dx^I \wedge dx^J,$$

also

$$\begin{aligned} d^\varphi(\omega_1 \wedge \omega_2) &= d(\eta_I^{(1)} \eta_J^{(2)}) \wedge dx^I \wedge dx^J = \frac{\partial(\eta_I^{(1)} \eta_J^{(2)})}{\partial x^m} dx^m \wedge dx^I \wedge dx^J \\ &\stackrel{\text{Leibniz-Regel}}{=} \left(\frac{\partial \eta_I^{(1)}}{\partial x^m} \eta_J^{(2)} + \frac{\partial \eta_J^{(2)}}{\partial x^m} \eta_I^{(1)} \right) dx^m \wedge dx^I \wedge dx^J \\ &= \left[\left(\frac{\partial \eta_I^{(1)}}{\partial x^m} dx^m \wedge dx^I \right) \wedge (\eta_J^{(2)} dx^J) \right] \\ &\quad + \left[(\eta_I^{(1)} dx^I) \wedge \left((-1)^k \frac{\partial \eta_J^{(2)}}{\partial x^m} dx^m \wedge dx^J \right) \right] \\ &= d^\varphi \omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge d^\varphi \omega_2 \end{aligned}$$

Für (iii) sei $\omega = \eta_I dx^I$.

$$\begin{aligned} d^\varphi \circ d^\varphi(\omega) &= d^\varphi(d\eta_I \wedge dx^I) = d^\varphi \left(\frac{\partial \eta_I}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^I \right) \\ &= \frac{\partial^2 \eta_I}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^I \\ &= \sum_{i < j} \underbrace{\left(\frac{\partial^2 \eta_I}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 \eta_I}{\partial x^j \partial x^i} \right)}_{=0 \text{ nach Schwarz}} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^I \end{aligned}$$

Ist nun $\psi: U \rightarrow \tilde{V}$, $y = \psi(p)$, eine weitere Karte um p , so erfüllt auch $d\psi: \mathcal{E}^*(U) \rightarrow \mathcal{E}^*(U)$ die Eigenschaften (i) bis (iii), und daher gilt für $\omega = \eta_I dx^I$:

$$\begin{aligned} d^\psi \omega &\stackrel{(ii)}{=} d^\psi(\eta_I \underbrace{dx^I}_{=dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}}) \\ &= \underbrace{d^\psi \eta_I}_{\stackrel{(i)}{=}d\eta_I} \wedge dx^I + \underbrace{\sum_{j=1}^k (-1)^j dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{j-1}} \wedge d^\psi(dx^{i_j}) \wedge dx^{i_{j+1}} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}}_{=0 \text{ wegen } (**)} \end{aligned}$$

Also wegen (iii) und (i) ist

$$d_1^\psi(dx^{i_j}) \stackrel{(i)}{=} d_1^\psi(d_0^\psi x^{i_j}) \stackrel{(iii)}{=} 0. \quad (**)$$

Also ist $d^\psi = d\eta_I \wedge dx^I = d^\varphi \omega$. Wir können daher für $\omega \in \mathcal{E}^{(k)}(M)$ und $p \in M$ setzen:

$$d_k \omega(p) := d_k^\varphi \omega(p),$$

wo φ eine beliebige um p ist, also $d_k \omega \in \mathcal{E}^{(k+1)}(M)$ mit den gewünschten Eigenschaften (a) und (b) aus dem Satz. □

(4.66) Kommentar.

(a) Man beachte, dass wir gleich mit bewiesen haben $d: \mathcal{E}^*(M) \rightarrow \mathcal{E}^*(M)$ ist

(i) linear und homogen vom Grad +1, d.h. $d(\mathcal{E}^{(k)}(M)) \subseteq \mathcal{E}^{(k+1)}(M)$,

(ii) d ist eine **Anti-Derivation**, d.h. für homogene Elemente ω_1 und ω_2 gilt:

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^{\deg(\omega_1)} \omega_1 \wedge d\omega_2,$$

(iii) d ist ein **Differential** (im Sinne der algebraischen Topologie), d.h. $d \circ d = 0$ (kurz: $d^2 = 0$).

(b) Zusammen mit der Eigenschaft, dass $d|_{\mathcal{E}^{(0)}(M)}$ die schon bekannte Ableitung ist, ist $d: \mathcal{E}^*(M) \rightarrow \mathcal{E}^*(M)$ durch die Eigenschaft (i) und (iii) aus Bemerkung (a) eindeutig bestimmt (koordinatenfreie Charakterisierung von d , Übung).

(c) Man nennt $d: \mathcal{E}^*(M) \rightarrow \mathcal{E}^*(M)$ die **äußere Ableitung** auf M . $A = \mathcal{E}^*(M)$ wird mit allen Strukturen zu einer **kommutativen graduierten Differentialalgebra**, wobei kommutativ in graduierte Sinn für homogene Elemente ω_1 vom Grad k und ω_2 vom Grad l bedeutet, dass

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = (-1)^{kl} \omega_2 \wedge \omega_1.$$

Sie enthält beträchtliche Informationen über die Topologie von M (vgl. Übung).

(4.67) Bemerkung. Die äußere Ableitung ist verträglich mit dem Rückzug von Differentialformen in folgenden Sinn: Ist $\Phi: M \rightarrow N$ glatt und $\omega \in \mathcal{E}^*(N)$, so gilt

$$d(\Phi^* \omega) = \Phi^*(d\omega).$$

Beweis. Sei $p \in M$ beliebig und $y: V \rightarrow \tilde{V} \subseteq \mathbb{R}^r$ eine Karte um $q := \Phi(p)$. Ist $\omega \in \mathcal{E}^{(k)}(N)$, so gibt es Funktionen $\eta_I \in \mathcal{E}(\tilde{V})$ so, dass $\omega|_V = \eta_I dy^I$ ist. Es folgt

$$d\omega = d\eta_I \wedge dy^I = \frac{\partial \eta_I}{\partial y^m} dy^m \wedge dy^I$$

und daher

$$\Phi^*(d\omega) \stackrel{(4.61,b)}{=} \frac{\partial \eta_I}{\partial y^m} \circ \Phi \cdot d(y^m \circ \Phi) \wedge d(y^{i_1} \circ \Phi) \wedge \dots \wedge d(y^{i_k} \circ \Phi)$$

auf V , insbesondere in p (bei $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ geordnet). Und andererseits ist wieder nach (4.61,b)

$$\Phi^*\omega = \eta_I \circ \Phi \cdot d(y^{i_1} \circ \Phi) \wedge \dots \wedge d(y^{i_k} \circ \Phi)$$

und daher (weil d eine Anti-Derivation und ein Differential ist)

$$\begin{aligned} d(\Phi^*\omega) &= d(\eta_I \circ \Phi) \wedge d(y^{i_1} \circ \Phi) \wedge \dots \wedge d(y^{i_k} \circ \Phi) \\ &\quad + \sum_{j=1}^k (-1)^j d(y^{i_1} \circ \Phi) \wedge \dots \wedge \underbrace{d^2(y^{i_j} \circ \Phi)}_{=0} \wedge \dots \wedge d(y^{i_k} \circ \Phi) \\ &= \frac{\partial(\eta_I \circ \Phi)}{\partial x^l} dx^l \wedge d(y^{i_1} \circ \Phi) \wedge \dots \wedge d(y^{i_k} \circ \Phi), \end{aligned}$$

wo nun $x: U \rightarrow \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte um p sei und (nach evtl. Verkleinerung) $\Phi(U) \subseteq V$. Nach der Kettenregel ist jetzt

$$\frac{\partial(\eta_I \circ \Phi)}{\partial x^l} = \frac{\partial \eta_I}{\partial y^m} \circ \Phi \cdot \frac{\partial y^m}{\partial x^l} \quad \text{und} \quad d(y^m \circ \Phi) = \frac{\partial y^m}{\partial x^l} dx^l,$$

also ist auch

$$d(\Phi^*\omega) = \frac{\partial \eta_I}{\partial y^m} \circ \Phi \cdot d(y^m \circ \Phi) \wedge d(y^{i_1} \circ \Phi) \wedge \dots \wedge d(y^{i_k} \circ \Phi)$$

in p richtig also tatsächlich überall $\Phi^*(d\omega) = d(\Phi^*\omega)$. □

5 Kapitel 5.

Liegruppe

(5.1) Definition. Ein Paar (G, \cdot) heißt eine **Liegruppe** (der Dimension $n \in \mathbb{N}_0$), wenn G eine Mannigfaltigkeit (der Dimension n) ist und $\cdot : G \times G \rightarrow G$ eine Gruppenstruktur, so dass $\cdot := \text{mult} : G \times G \rightarrow G$ und auch $\text{inv} : G \rightarrow G, g \mapsto g^{-1}$ glatte Abbildungen sind.

(5.2) Kommentar.

- (a) Dass die Gruppenverknüpfung $\text{mult} = \cdot : G \times G \rightarrow G$ glatt ist meint natürlich bzgl. der induzierten glatten Struktur auf der Produkt-Mannigfaltigkeit $G \times G$.
- (b) Das neutrale Element von G wird meist mit e (oder 1) bezeichnet. Ist die Gruppenstruktur abelsch, so wird die Verknüpfung auch mit $+$ bezeichnet, und das neutrale Element mit 0.

(5.3) Beispiel.

- (a) Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist $G = \mathbb{R}^n$ mit der Addition $+$ eine Liegruppe der Dimension n . Ebenso jeder endlich-dimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum V mit seiner additiven Struktur und seiner natürlichen Mannigfaltigkeit-Struktur.
- (b) $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist als offene Menge in $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit und $(z, w) \mapsto zw$ bzw. $z \mapsto z^{-1}$ differenzierbar. Also ist (\mathbb{C}^*, \cdot) eine 2-dimensionale Liegruppe.
- (c)

$$\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}^* : |z| = 1\}$$

ist eine Untermannigfaltigkeit von \mathbb{C}^* und eine Untergruppe von \mathbb{C}^* . Damit ist (\mathbb{S}^1, \cdot) eine Liegruppe (der Dimension 1).

Beachte, dass damit die bis auf Diffeomorphie einzigen, zusammenhängenden 1-dimensionalen Mannigfaltigkeiten (ohne Rand), nämlich $M = \mathbb{R}$ oder $M = \mathbb{S}^1$ eine natürliche Lie-Struktur tragen. Beide sind abelsch.

(d) Da

$$\text{Gl}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2} : \det A \neq 0\}$$

ist, ist $\text{Gl}_n \mathbb{R} \subseteq \text{Mat}_n \mathbb{R}$ offen und damit eine Mannigfaltigkeit der Dimension n^2 . Die Matrizenmultiplikation $(A, B) \mapsto A \cdot B$ ist glatt, sogar polynomial, denn

$$(AB)_j^i = a_k^i b_j^k \quad \text{für } 1 \leq i, j \leq n$$

mit $A = (a_j^i), B = (b_j^i)$ und auch die Inversenbildung ist nach der Formel

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^\#$$

mit der Adjunkten A^\sharp ,

$$(A^\sharp)_j^i = (-1)^{i+j} \det(A^{ji})$$

(wo A^{ji} aus A durch Streichen der j .Zeile und der i .Spalte entsteht), glatt (sogar rational). Es ist also $(\mathrm{GL}_n \mathbb{R}, \cdot)$ eine Liegruppe (der Dimension n^2).

(e) Ebenso ist $\mathrm{GL}_n \mathbb{C} \subseteq \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n^2} = \mathbb{R}^{2n^2}$ eine Liegruppe der Dimension $2n^2$.

(f) Es ist

$$\mathrm{O}(n) = \{A \in \mathrm{GL}_n \mathbb{R} : {}^tAA = \mathbb{1}\}$$

einerseits eine (abgeschlossene) Untergruppe von $\mathrm{GL}_n \mathbb{R}$ und andererseits eine Untermannigfaltigkeit von $\mathrm{GL}_n \mathbb{R}$, denn $\mathbb{1} \in \mathrm{Sym}_n \mathbb{R}$ ist ein regulärer Wert der Abbildung $\Phi: \mathrm{GL}_n \mathbb{R} \rightarrow \mathrm{Sym}_n \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n+1)}$,

$$A \mapsto {}^tAA$$

(siehe (2.71,b)). Die **orthogonale Gruppe** $\mathrm{O}(n)$ wird damit zu einer Liegruppe der Dimension

$$n^2 - \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}n(n-1).$$

(g) Es ist auch

$$\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{GL}_n \mathbb{R} : \det A > 0\}$$

eine offene Teilmenge von $\mathrm{GL}_n \mathbb{R}$ und eine Untergruppe. Auch $\mathrm{GL}_n^+ \mathbb{R}$ ist damit eine Liegruppe der Dimension n^2 . Sie ist zusammenhängend (Übung) und damit die Zusammenhangskomponente des neutralen Elementes von $\mathrm{GL}_n \mathbb{R}$.

(5.4) Bemerkung. Sei G eine Liegruppe der Dimension $n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist auch die Zusammenhangskomponente von $e \in G$, Notation: G^0 , offen und eine Untergruppe von G und ist damit auch eine Liegruppe der Dimension n .

Beweis. Als Zusammenhangskomponente eines lokal wegzusammenhängenden Raumes G ist $G^0 \subseteq G$ offen und damit selbst eine Mannigfaltigkeit der Dimension n . G^0 ist zusammenhängend und damit wegzusammenhängend (siehe (1.47)).

Sind nun $g, h \in G^0$ beliebig und $\alpha, \beta: I \rightarrow G$ Wege von e nach g bzw. h , so ist $\gamma: I \rightarrow G$,

$$\gamma(t) = \alpha(t)\beta(t)$$

ein Weg von $\gamma(0) = e$ nach $\gamma(1) = \alpha(1)\beta(1) = g \cdot h$. Es ist also auch $g \cdot h \in G^0$. Ebenso sieht man, dass mit $g \in G^0$ auch $g^{-1} \in G^0$ sein muss, indem man für $\alpha: I \rightarrow G$, $\alpha(0) = e$ und $\alpha(1) = g$ den Weg $\alpha^{-1}: I \rightarrow G$, $\alpha^{-1}(t) := \alpha(t)^{-1}$ betrachtet. $G^0 \subseteq G$ ist also eine Untergruppe und damit eine Liegruppe der Dimension n . \square

(5.5) Definition. Sei G eine Liegruppe und $g \in G$. Dann nennen wir $l_g: G \rightarrow G$, $l_g(h) = g \cdot h$ die **Linkstranslation mit g auf G** und $t_g: G \rightarrow G$, $h \mapsto h \cdot g$, die **Rechtstranslation mit g auf G** .

(5.6) Kommentar. (a) Links und Rechtstranslation auf G sind glatt, denn sie sind Kompositionen von glatten Abbildungen. Z.B. ist

$$l_g = \mathrm{mult} \circ i_g,$$

wenn $\mathrm{mult}: G \times G \rightarrow G$ die Gruppenverknüpfung ist und $i_g: G \rightarrow G \times G$, $h \mapsto (g, h)$ die Inklusion. (Für jede Mannigfaltigkeit M und jedes $p \in M$ ist $i_p: M \rightarrow M \times M$, $q \mapsto (p, q)$, glatt, denn lokal ist das $y \mapsto (x_0, y)$, $V \rightarrow V_0 \times V$, $V_0, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen)

- (b) l_g und r_g sind sogar Diffeomorphismen, denn $l_{g^{-1}}$ bzw. $r_{g^{-1}}$ sind offenbar invers zu l_g bzw. r_g :

$$l_{g^{-1}} = (l_g)^{-1}, \quad r_{g^{-1}} = (r_g)^{-1}$$

denn:

$$l_{g^{-1}} \circ l_g = \mathbb{1} = l_g \circ l_{g^{-1}},$$

weil

$$g^{-1}(gh) = (g^{-1}g)h = eh = h, \quad \forall h \in G.$$

(5.7) Definition.

- (a) Seien G und H Liegruppen. Eine Abbildung $\varphi: G \rightarrow H$ heißt ein Lie-Homomorphismus, wenn sie glatt und ein Gruppenhomomorphismus ist,

$$\varphi(g_1g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2), \quad \forall g_1, g_2 \in G.$$

(5.8) Kommentar.

- (a) Ein Lie-Isomorphismus $\varphi: G \rightarrow H$ ist also insbesondere ein Diffeomorphismus.
 (b) Ist umgekehrt $\varphi: G \rightarrow H$ ein Lie-Homomorphismus, der ein Diffeomorphismus ist, so ist φ bereits Lie-Isomorph, denn das Inverse $\psi: H \rightarrow G$ von φ ist dann automatisch homomorph:

$$\begin{aligned} \psi(h_1h_2) &= \psi(\varphi \circ \psi(h_1) \cdot \varphi \circ \psi(h_2)) \\ &\stackrel{\varphi \text{ Hom.}}{=} \psi\left(\varphi(\psi(h_1)\psi(h_2))\right) = \psi(h_1)\psi(h_2), \quad \forall h_1, h_2 \in H. \end{aligned}$$

(5.9) Beispiel.

- (a) Die **spezielle orthogonale Gruppe** $SO(n) := \{A \in O(n) : \det(A) = 1\}$ ist eine offene Untergruppe $O(n)$, denn \det nimmt auf $O(n)$ nur die Werte ± 1 an. Da $SO(n)$ zusammenhängend ist (Übung), ist $SO(n)$ damit die Zusammenhangskomponente der $\mathbb{1}$ von $O(n)$,

$$SO(n) = O(n)^0.$$

- (b) Für $n = 1$ ist $SO(1) \equiv \{e\}$, d.i. isomorph zur 0-dimensionalen trivialen Gruppe.

Für $n = 2$ gilt: $SO(2) \cong S^1$ (als Liegruppe), denn $S^1 \rightarrow SO(2)$

$$z \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(z) & -\operatorname{Im}(z) \\ \operatorname{Im}(z) & \operatorname{Re}(z) \end{pmatrix} \quad (z = e^{i\alpha})$$

ist ein Isomorphismus, weil jedes Element in $SO(2)$ von der Form $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ für ein $\alpha \in [0, 2\pi)$.

- (c) Die **unitäre Gruppe**

$$U(n) := \{A \in GL_n \mathbb{C} : {}^t\bar{A}A = \mathbb{1}\}$$

ist, ähnlich wie $O(n) \subseteq GL_n \mathbb{R}$, eine Liegruppe, weil $\mathbb{1}$ ein regulärer Wert von $\Phi: GL_n \mathbb{C} \rightarrow \operatorname{Herm}(n)$,

$$\Phi(A) = {}^t\bar{A}A,$$

ist und

$$\operatorname{Herm}(n) = \{A \in \operatorname{Mat}_n \mathbb{C} : {}^t\bar{A}A\}$$

die hermiteschen Matrizen sind. Da

$$\dim_{\mathbb{R}} \text{Herm}(n) = 2(1 + 2 + \cdots + n - 1) + n = n^2 - n + n = n^2$$

ist, hat $\mathbf{U}(n)$ die Dimension $2n^2 - n^2 = n^2$. Sie ist zusammenhängend und, genau so wie $\mathbf{O}(n)$, kompakt (der abgeschlossenes und beschränkt in $\text{Mat}_n \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^{2n^2}$ ist). Es ist $\mathbf{U}(1) \cong \mathbb{S}^1$ vermöge $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbf{U}(1), z \mapsto (z)$.

(d) Die **spezielle unitäre Gruppe**

$$\mathbf{SU}(n) := \{A \in \mathbf{U}(n) : \det A = 1\} \subseteq \mathbf{U}(n)$$

ist eine 1-codimensionale Untermannigfaltigkeit und damit eine Liegruppe der Dimension $n^2 - 1$, weil $1 \in \mathbb{S}^1$ regulärer Wert der Abbildung $\det: \mathbf{U}(n) \rightarrow \mathbb{S}^1$ ist (Übung). Auch sie ist zusammenhängend und kompakt.

(e) Die **speziellen linearen Gruppen**

$$SL_n \mathbb{R} := \{A \in GL_n \mathbb{R} : \det A = 1\}$$

und

$$SL_n \mathbb{C} := \{A \in GL_n \mathbb{C} : \det A = 1\}$$

sind Liegruppen, weil einerseits Untergruppen und andererseits der Codimension 1 bzw. 2, da $\det: GL_n \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ bzw. $\det: GL_n \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ glatt sind und 1 als regulären Wert haben. Es folgt also:

$$\dim(SL_n \mathbb{R}) = n^2 - 1, \quad \dim(SL_n \mathbb{C}) = 2n^2 - 2.$$

(f) Sei Γ eine abzählbare Gruppe. Versieht man Γ mit der diskreten Topologie, so wird Γ ein Hausdorffraum mit abzählbarer Topologie, der offenbar auch eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension 0 wird. Die offensichtlichen Abbildungen von den einpunktigen Teilmengen nach \mathbb{R}^0 machen dann Γ zu einer 0-dimensionalen glatten Mannigfaltigkeit. Zusammen mit seiner Gruppenstruktur wird Γ damit zu einer 0-dimensionalen Liegruppe.

(g) Es ist auch

$$\mathbb{R}_+ \cong GL_1^+(\mathbb{R})$$

eine Liegruppe, die aber vermöge

$$\exp: (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}_+, \cdot), \quad t \mapsto e^t$$

isomorph zu $(\mathbb{R}, +)$ ist.

Dagegen können $(\mathbb{C}, +) \cong (\mathbb{R}^2, +)$ und (\mathbb{C}^*, \cdot) nicht isomorph sein, da bereits $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ und $\mathbb{C}^* = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ als Mannigfaltigkeiten (sogar als topologische Räume) nicht diffeomorph (sogar homöomorph) sind (weil z.B. \mathbb{C} einfach zusammenhängend ist, $\pi_1(\mathbb{C}) = (1)$, aber \mathbb{C}^* nicht, $\pi_1(\mathbb{C}^*) \cong \mathbb{Z}$, vgl.(nächstes Semester)).

(h) Ist V ein reeller Vektorraum der Dimension n , so ist V als Liegruppe isomorph zu $(\mathbb{R}^n, +)$, denn ist (e_1, \dots, e_n) eine Basis von V , so liefert der induzierte Koordinaten-Isomorphismus $\iota: \mathbb{R}^n \rightarrow V$ einen Lie-Isomorphismus.

(i) Auch

$$\text{Aut}(V) = \{f \in \text{End} : f \text{ ist Isomorphismus}\}$$

ist eine Liegruppe. Ihre Mannigfaltigkeit-Struktur bekommt sie als offene Teilmenge von $\text{End}(V) \cong V^* \otimes V$. Vermöge einer Basiswahl ist aber $\text{Aut}(V)$ isomorph zu $\text{Gl}_n \mathbb{R}$,

$$\text{Aut}(V) \cong \text{Gl}_n \mathbb{R}.$$

(j) $\text{Gl}_n \mathbb{R}$ hat sehr viele abgeschlossene Untergruppen, die damit (siehe Diffgeo III) allesamt zu Liegruppen werden. Z.B. bilden die trigonalen Matrizen

$$\text{Hei}(n) := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \text{Gl}_n \mathbb{R} \right\} \cong \mathbb{R}^{\frac{1}{2}(n-1)n}$$

eine Untergruppe (prüfen!) und ist damit eine Liegruppe. Für $n = 2$ ist sie isomorph zu \mathbb{R} , für $n = 3$ erhält man:

$$\begin{pmatrix} 1 & x^1 & x^3 \\ 0 & 1 & x^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & y^1 & y^3 \\ 0 & 1 & y^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x^1 + y^1 & x^3 + y^3 + x^1 y^2 \\ 0 & 1 & x^2 + y^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

damit nicht-abelsch, weil z.B.

$$(1, 0, 0) \cdot (0, 1, 0) = (1, 1, 1), \quad (0, 1, 0) \cdot (1, 0, 0) = (1, 1, 0).$$

Es ist also $\text{Hei}(3) \not\cong A(3)$ (mit $A(n) := (\mathbb{R}^n, +)$).

(k) Viele Liegruppen lassen sich als abgeschlossene Untergruppen von $\text{Gl}_n \mathbb{R}$ (mit $n \in \mathbb{N}$ groß genug) realisieren. Z.B. ist die abelsche Liegruppe $A(n) = (\mathbb{R}^n, +)$ isomorph zu

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & & x^1 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & x^n \\ & & & 1 \end{pmatrix} \in \text{Gl}_{n+1} \mathbb{R} : x^1, \dots, x^n \in \mathbb{R} \right\} \quad (\text{Übung}).$$

(l) Sind G_1 und G_2 Liegruppe, so trägt $G_1 \times G_2$ eine natürliche Mannigfaltigkeit-Struktur und mit

$$(g_1, g_2) \cdot (h_1, h_2) = (g_1 h_1, g_2 h_2)$$

für $g_1, h_1 \in G_1, g_2, h_2 \in G_2$, auch eine natürliche Gruppenstruktur, die sich mit der Mannigfaltigkeit-Struktur verträgt. Es ist also in natürlicher Weise $G_1 \times G_2$ wieder eine Liegruppe (mit der universellen Eigenschaft eines Produktes in der Kategorie der Liegruppen). Z.B. ist der Torus

$$\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$$

also in natürlicher Weise eine Liegruppe.

(5.10) Bemerkung. Sei G eine Liegruppe und $G^0 \subseteq G$ die Zusammenhangskomponente der Eins. Ist dann $G = \bigsqcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ die Zerlegung von G in seine Zusammenhangskomponenten und $g_\alpha \in G_\alpha$, so bildet die Linkstranslation $l_{g_\alpha} G^0$ diffeomorph auf G_α ab,

$$G_\alpha \cong G^0.$$

Beweis. Da G^0 zusammenhängend ist, liegt $l_{g_\alpha}(G^0)$ ganz in einer Zusammenhangskomponente von G (da l_{g_α} stetig ist) und $g_\alpha = l_{g_\alpha}(e)$. Also ist $l_{g_\alpha}(G^0) \subseteq G_\alpha$. Aus dem gleichen Grund ist auch $l_{g_\alpha^{-1}}(G_\alpha) \subseteq G^0$. Es folgt:

$$G_\alpha = 1(G_\alpha) = l_{g_\alpha} \circ l_{g_\alpha^{-1}}(G_\alpha) \subseteq l_{g_\alpha}(G^0),$$

also

$$l_{g_\alpha}(G^0) = G_\alpha.$$

Da l_{g_α} Diffeomorphismus ist, ist es auch die Einschränkung $l_{g_\alpha}|_{G^0}: G^0 \rightarrow G_\alpha$. \square

(5.11) Vorbereitung.

(a) Sei G eine Liegruppe und $\Gamma \subseteq G$ eine diskrete Untergruppe, d.h.: die induzierte Teilraum auf Γ ist diskret. Die Wirkung von Γ auf G durch Rechts-Translation,

$$\Gamma: \Gamma \times G \rightarrow G, \quad \gamma \cdot g := g\gamma^{-1}$$

ist dann frei, eigentlich diskontinuierlich und der Quotient

$$G/\Gamma = \{g\Gamma : g \in G\}$$

der Linksnebenklassen ist hausdorffsch (Übung). Es trägt deshalb G/Γ nach (2.26) eine natürliche Mannigfaltigkeit-Struktur, so dass die kanonische Projektion $\pi: G \rightarrow G/\Gamma$ glatt ist.

(b) Sei nun $\Gamma \subseteq G$ diskret und zusätzlich ein Normalteiler, also $g\Gamma = \Gamma g, \forall g \in G$. Dann trägt G/Γ eine natürliche Gruppenstruktur, so dass π ein Gruppenhomomorphismus ist.

(5.12) Satz. Sei G eine Liegruppe und $\Gamma \subseteq G$ diskreter Normalteiler. Dann trägt der Raum der Γ -Linksnebenklassen genau eine Liestruktur, so dass gilt (universelle Eigenschaft): Ist H eine Liegruppe und $\varphi: G \rightarrow H$ ein Lie-Homomorphismus mit $\Gamma \subseteq \ker(\varphi)$, so gibt es genau einen Lie-Homomorphismus $\bar{\varphi}: G/\Gamma \rightarrow H$ mit $\bar{\varphi} \circ \pi = \varphi$,

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & H \\ \pi \downarrow & \circlearrowleft & \nearrow \\ G/\Gamma & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & \end{array}$$

Beweis. (a) Die Eindeutigkeit folgt aus der universellen Eigenschaft (Übung).

(b) Auch $\Gamma \times \Gamma \subseteq G \times G$ operiert frei, eigentlich diskontinuierlich und mit hausdorffsch Bahnenraum. Es ist also $G \times G/\Gamma \times \Gamma$ eine Mannigfaltigkeit und die natürliche Abbildung

$$G \times G/\Gamma \times \Gamma \rightarrow G/\Gamma \times G/\Gamma, \quad (g, h)\Gamma \times \Gamma \rightarrow (g\Gamma, h\Gamma)$$

ist ein Diffeomorphismus. (Benutze die universellen Eigenschaften

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow{\pi \times \pi} & G/\Gamma \times G/\Gamma \\ & \dashrightarrow & \\ G \times G/\Gamma \times \Gamma & & \end{array}$$

und dass $G \rightarrow G/\Gamma$ lokaler Diffeomorphismus ist.) Weil nun das folgende Diagramm kommutiert,

$$\begin{array}{ccc}
 G \times G & \xrightarrow{\text{mult}_G} & G \\
 \downarrow & & \downarrow \pi \\
 G \times G/\Gamma & & G/\Gamma \\
 & \nearrow \text{mult}_{G/\Gamma} & \\
 G/\Gamma \times G/\Gamma & &
 \end{array}$$

(Ebenso zeigt das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 G & \xrightarrow{\text{inv}_G} & G \\
 \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\
 G/\Gamma & \xrightarrow{\text{inv}_{G/\Gamma}} & G/\Gamma,
 \end{array}$$

dass $\text{inv}_{G/\Gamma}$ glatt ist.) Es ist also $(G/\Gamma, \text{mult}_{G/\Gamma})$ eine Liegruppe.

- (c) Ist H eine Liegruppe und $\varphi: G \rightarrow H$ Lie-Homomorphismus mit $\Gamma \subseteq \ker(\varphi)$, so gibt es zunächst einmal einen eindeutig bestimmten Gruppen-Homomorphismus $\bar{\varphi}: G/\Gamma \rightarrow H$ mit $\bar{\varphi} \circ \pi = \varphi$. Es gibt auch eine eindeutig bestimmte glatte Abbildung $\Phi: G/\Gamma \rightarrow H$ mit $\Phi \circ \pi = \varphi$. Da π surjektiv ist, muss gelten: $\bar{\varphi} = \Phi$. Es ist damit $\bar{\varphi}$ ein Lie-Homomorphismus.

□

(5.13) Kommentar.

- (a) Das produziert weitere Beispiele aus bekannten Beispielen. Z.B. ist $\mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ eine diskrete Untergruppen (manchmal auch **Gitter** genannt). Deshalb trägt $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ in natürlicher Weise eine Lie-Struktur, die aber isomorph zu der Produkt-Struktur aus (5.9,1) ist, weil

$$\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \rightarrow (\mathbb{S}^1)^n, \quad (t^1, \dots, t^n) + \mathbb{Z}^n \mapsto (e^{2\pi i t_1}, \dots, e^{2\pi i t_n})$$

ein Lie-Isomorphismus.

- (b) Die Zusammenhangskomponente G^0 der Eins einer Liegruppe G ist ein Normalteiler, denn ist $h \in G^0$ und $\alpha: [0, 1] \rightarrow G^0$ ein Weg von $e = \alpha(0)$ nach $h = \alpha(1)$, so ist auch für jedes $g \in G$ $ghg^{-1} \in G^0$, denn $\beta: I \rightarrow G$ mit

$$\beta(t) = ga(t)g^{-1}$$

ist ein Weg von $\beta(0) = e$ nach $\beta(1) = ghg^{-1}$. Also ist $gG^0g^{-1} \subseteq G^0$ und damit $G^0 \subseteq G$ normal.

Der Quotient $\Gamma := G/G^0$ trägt die diskrete Topologie (als Quotiententopologie) und ist damit eine 0-dimensionale Liegruppe (manchmal auch als **diskrete Gruppe** bezeichnet). Sie heißt die **Gruppe der Zusammenhangskomponenten von G**.

Man hat dann **exakte Sequenz von Liegruppen**

$$1 \rightarrow G^0 \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} \Gamma \rightarrow 1, \tag{*}$$

wo i die Inklusion und π die Projektion ist. (Eine Sequenz $\dots \rightarrow G_{i-1} \xrightarrow{\alpha_{i-1}} G_i \xrightarrow{\alpha_i} G_{i+1} \rightarrow \dots$ heißt **exakt**, wenn an jeder Stelle gilt: $\text{im}(\alpha_{i-1}) = \ker(\alpha_i)$) Das Studium von G wird

so in gewisser Weise auf das Studium der zusammenhängenden Liegruppe G^0 und der diskreten Liegruppe Γ aufgeteilt. (Beachte aber, dass (*) i.a. nicht impliziert, dass $G \cong G^0 \times \Gamma$ ist.)

A Anhang A.

Der Igelsatz

Siehe [Mi, §5].

(A.1) Definition.

- (a) Sei $\mathbb{H}^n := \{x \in \mathbb{R}^n : x^1 \geq 0\}$. Eine **topologische Mannigfaltigkeit M , der Dimension n mit Rand** ist ein Hausdorff-Raum mit abzählbarer Topologie, so dass jeder Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung $U \subseteq M$ hat, die homöomorph zu einer offenen Menge $V \subseteq \mathbb{H}^n$ ist.
- (b) Ein Atlas von Homöomorphismen $\mathfrak{A} = (\varphi_i: U_i \rightarrow V_i)_{i \in I}$ (also $M = \bigcup_{i \in I} U_i$) heißt **glatt**, wenn alle Übergänge

$$\varphi_{ij}: \underbrace{\varphi_j(U_i \cap U_j)}_{\subseteq \mathbb{H}^n} \rightarrow \underbrace{\varphi_i(U_i \cap U_j)}_{\subseteq \mathbb{H}^n}, x \mapsto \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(x)$$

glatt sind ($i, j \in I$). (Eine Abbildung $f: V \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $V \subseteq \mathbb{H}^n$ offen heißt **glatt**, wenn es ein offenes $\tilde{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\tilde{V} \supseteq V$ und ein glattes $\tilde{f}: \tilde{V} \rightarrow \mathbb{R}^m$ gibt mit $\tilde{f}|_V = f$)

- (c) Zwei glatte Atlanten $\mathfrak{A} = (\varphi_i)_{i \in I}$ und $\mathfrak{B} = (\psi_j)_{j \in J}$ auf M heißen **äquivalent**, wenn auch $\mathfrak{C} = (\varphi_i, \psi_j)_{i \in I, j \in J}$ noch glatt ist. Eine Äquivalenzklasse $c = [\mathfrak{A}]$ auf einer topologischen Mannigfaltigkeit M mit Rand heißt eine **glatte Struktur** und ein Paar (M, c) heißt eine **glatte Mannigfaltigkeit mit Rand der Dimension n** .

(A.2) Kommentar.

- (a) Sei (M^n, c) eine glatte Mannigfaltigkeit mit Rand und $p \in M$ ein Punkt, so dass es eine Karte $\varphi: U \rightarrow V \subseteq \mathbb{H}^n$ um p gibt (also $p \in U$), so dass $\varphi^1(p) = 0$ ist (also $\varphi(p)$ in

$$\partial\mathbb{H}^n := \{x \in \mathbb{H}^n : x^1 = 0\}$$

liegt). Für jede andere Karte $\psi: \tilde{U} \rightarrow \tilde{V} \subseteq \mathbb{H}^n$ um p gilt dies dann auch, denn wäre $\psi^1(p) > 0$, so würde der Übergang $\tau = \varphi \circ \psi^{-1}: \psi(U \cap \tilde{U}) \rightarrow \varphi(U \cap \tilde{U})$, der um $y_0 := \psi(p)$ ein Diffeomorphismus ist, eine offene Menge in $\mathbb{H}^n \setminus \partial\mathbb{H}^n$ in eine offene Menge um $x_0 = \varphi(p) \in \mathbb{R}^n$ transportieren, was er aber nicht macht, da eine solche offene Menge immer Punkte mit $x^1 < 0$ enthält.

⌈ $\sigma \circ \tau = \mathbb{1} \implies D\tau(y_0) \in \text{Gl}_n(\mathbb{R}) \implies \tau(W)$ ist Umgebung von x_0 in \mathbb{R}^n (für W klein genug): \blacktriangleright (da $\tau(W) \subseteq \mathbb{H}^n$). \lrcorner

- (b) Man nennt

$$\partial M := \{p \in M : \exists \text{ Karte } \varphi: U \rightarrow V \subseteq \mathbb{H}^n \text{ um } p \text{ mit } \varphi(p) \in \partial\mathbb{H}^n\}$$

denn **Rand von M**.

Ist $\mathfrak{A} = (\varphi_i: U_i \rightarrow V_i)_{i \in I}$ ein Atlas von M , so ist wegen (a)

$$\tilde{\mathfrak{A}} = \left(\underbrace{\varphi_i|_{U_i \cap \partial M}}_{=: \tilde{\varphi}_i} : \underbrace{U_i \cap \partial M}_{=: \tilde{U}_i} \rightarrow \underbrace{V_i \cap \overbrace{\partial \mathbb{H}^n}^{\cong \mathbb{R}^{n-1}}}_{=: \tilde{V}_i} \right)_{i \in I}$$

ein glatter Atlas von ∂M (weil für die Übergänge $\tilde{\varphi}_{ij}$ von $\tilde{\mathfrak{A}}$ gilt:

$$\tilde{\varphi}_{ij} = \varphi_{ij}|_{\tilde{\varphi}_j(\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j)},$$

und damit glatt). Ist $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$, so ist auch $\tilde{\mathfrak{A}} \sim \tilde{\mathfrak{B}}$ und damit macht $\tilde{c} = [\tilde{A}]$, ∂M zu einer glatten Mannigfaltigkeit der Dimension $n - 1$.

- (c) Eine glatte Mannigfaltigkeit M der Dimension n (im bisherigen Sinn) ist eine glatte Mannigfaltigkeit mit Rand, denn $\partial M = \emptyset$ ist zugelassen. Z.B. ist für eine glatte Mannigfaltigkeit mit Rand M sets $\partial(\partial M) = \emptyset$. $\partial M \subseteq M$ ist auch eine abgeschlossen Untermannigfaltigkeit (für den naheliegenden Begriff von Untermannigfaltigkeiten auch bei Mannigfaltigkeiten mit Rand, Übung).

(A.3) Definition. Sei V ein reeller Vektorraum der Dimension $n \in \mathbb{N}_0$.

- (a) Zwei Basen $\mathfrak{A} = (v_1, \dots, v_n)$ und $\mathfrak{B} = (w_1, \dots, w_n)$ von V heißen **gleichorientiert**, $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$, wenn für die Basiswechsellmatrix $A = (a_j^i)$, also $w_j = a_j^i v_i$, gilt: $\det A > 0$.

$$\begin{array}{ccc} \uparrow v_2 & \nearrow w_2 \\ \hookrightarrow v_1 & \hookrightarrow w_1 \end{array}$$

- (b) Eine Äquivalenzklasse $\sigma = [\mathfrak{A}]$ gleichorientierter Basen heißt eine **Orientierung auf V** und ein Paar (V, σ) heißt eine **orientierter Vektorraum**.

(A.4) Kommentar.

- (a) Gleichorientierung ist wegen $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ (und damit $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$), $\forall A, B \in \text{Gl}_n \mathbb{R}$, tatsächlich eine Äquivalenzrelation.
- (b) Zwei Basen \mathfrak{A} und \mathfrak{B} heißen **entgegen gesetzt orientiert**, wenn für ihre Basiswechsellmatrix $A \in \text{Gl}_n \mathbb{R}$ gilt: $\det A < 0$. Ist $\mathfrak{A} = (v_1, \dots, v_n)$ (und $n \in \mathbb{N}$), so ist z.B. $\mathfrak{B} := (-v_1, v_2, \dots, v_n)$ entgegen gesetzt orientiert, da

$$\det(\text{diag}(-1, 1, \dots, 1)) = -1 < 0$$

ist. Sind \mathfrak{B}_1 und \mathfrak{B}_2 entgegen gesetzt orientiert zu \mathfrak{A} , so gilt: $\mathfrak{B}_1 \sim \mathfrak{B}_2$. Deshalb gibt es bei $n \in \mathbb{N}$ genau zwei Äquivalenzklassen von Basen (von denen i.a. keine gegenüber der anderen ausgezeichnet ist). Ist eine fixiert und mit σ bezeichnet, so notieren wir die andere mit $-\sigma$.

Für $n = 0$ gibt es auf $V = (0)$ nur eine Orientierung denn V hat nur eine Basis, nämlich das leere Tupel $()$.

- (c) Sei $V = \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$). Dann nennen wir die Klasse $\sigma = [(e_1, \dots, e_n)]$ die **Standard-Orientierung von \mathbb{R}^n** .
- (d) Seien (V, σ_V) und (W, σ_W) orientierte Vektorräume (gleicher Dimension). Man nennt einen Isomorphismus $T: V \rightarrow W$ **orientierungserhaltend**, wenn für ein (und dann

jedes) $\mathfrak{A} \in \sigma$ gilt: $T(\mathfrak{A}) \in \sigma_W$. (Ist $\mathfrak{A} = (v_1, \dots, v_n)$, so sei $T(\mathfrak{A}) = (Tv_1, \dots, Tv_n)$.) Es ist dann $T(\sigma_V) = \sigma_W$. Ist $T(\mathfrak{A}) \notin \sigma_W$ für ein $\mathfrak{A} \in \sigma_V$, so ist $T(\sigma_V) = -\sigma_W$. T heißt dann **orientierungsumkehrend**. Wir schreiben: $\text{sgn}: \text{Isom}(V, W) \rightarrow \{\pm 1\}$,

$$\text{sgn}(T) := \begin{cases} +1, & \text{falls } T \text{ } \mathfrak{A}\text{-erhält,} \\ -1, & \text{falls } T \text{ } \mathfrak{A}\text{-umkehrt.} \end{cases}$$

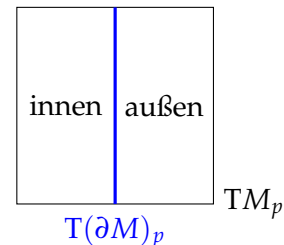
Es ist dann

$$\text{sgn}(S \circ T) = \text{sgn}(S) \cdot \text{sgn}(T), \quad \forall S, T.$$

(A.5) Definition. Sei M^n eine glatte Mannigfaltigkeit mit Rand. Eine Familie $\sigma = (\sigma_p)_{p \in M}$ von Orientierungen auf $(TM_p)_{p \in M}$ heißt eine **Orientierung auf M** , wenn es für alle $p \in M$ eine Karte $\varphi: U \rightarrow V \subseteq \mathbb{H}^n$ um p gibt, so dass $D\varphi_q: TM_q \rightarrow TV_{\varphi(q)} \cong \mathbb{R}^n$ orientierungserhaltend ist, $\forall q \in U$ (wobei man \mathbb{R}^n mit der Standard-Orientierung kan. betrachtet).

(A.6) Kommentar.

- (a) Auch ein Randpunkt $p \in \partial M \subseteq M$ hat einen „vollen“ Tangentialraum TM_p (und TM wird eine glatte Mannigfaltigkeit mit Rand der Dimension $2n$, sogar ein Vektorbündel über M). Er hat eine ausgezeichnete Hyperebene, nämlich $T(\partial M)_p$ und die beiden Komponenten von $TM_p \setminus T(\partial M)_p$ kann man in „innen“ und „außen“ unterscheiden (Übung).



⌈ $\zeta \in TM_p$ heißt **außen**, wenn es eine glatte Kurve $\alpha: (-\varepsilon, 0] \rightarrow M$ mit $\alpha(0) = p$ und $\dot{\alpha}(0) = \zeta$ und $\zeta \notin T(\partial M)_p$. ⌋

- (b) Der kanonischen Isomorphismus $\mathbb{R}^n \rightarrow TV_x$, mit $V \subseteq \mathbb{H}^n$ offen und $x \in \partial \mathbb{H}^n$,

$$\zeta \mapsto \left(t \mapsto \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (x + t\zeta) \right)$$

funktioniert immer noch, in dem man $\alpha: t \mapsto x + t\zeta$ für ζ innen auf $[0, \varepsilon)$, für ζ außen auf $(-\varepsilon, 0]$ (und für $\zeta \in T(\partial V)_x$ gar nicht) einschränkt ($\varepsilon > 0$ klein).

- (c) (A.5) macht präzise, dass die Orientierung σ_p auf TM_p ($p \in M$) glatt von Parameter p abhängen soll.
- (d) Eine Mannigfaltigkeit (mit Rand) M der Dimension $n \geq 1$ heißt **orientierbar**, wenn es eine Orientierung σ auf M gibt. Das Paar (M, σ) heißt dann eine **orientierte Mannigfaltigkeit**. Ist $\dim M \geq 1$ und M zusammenhängend und $\sigma = (\sigma_p)$ eine Orientierung auf M , so gibt es genau ein weitere Orientierung, nämlich $-\sigma := (-\sigma_p)_{p \in M}$ (Übung). Es gibt Mannigfaltigkeiten, die nicht orientierbar sind z.B. das Möbiusband oder die projektive Ebene $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ (ohne Beweis).
- (e) Eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit der Dimension 0 ist ein Punkt, $M = \{p\}$. Eine Mannigfaltigkeit der Dimension 0 ist also eine abzählbare Menge mit der diskreten Topologie, $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{p_n\}$. Eine orientierte Mannigfaltigkeit der Dimension 0 ist ein Paar (M, σ) , wobei $\sigma: M \rightarrow \{\pm 1\}$ eine (Gewichts-) Funktion auf M ist.
- (f) Ist M eine Mannigfaltigkeit mit Rand der Dimension $n \geq 1$ und ist M orientiert, so erbt ihr Rand ∂M eine Orientierung wie folgt: Sei $n \geq 2$: Für $p \in \partial M$ heißt eine Basis

$(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ von $T(\partial M)_p$ positiv orientiert, wenn es ein $\nu \in TM_p^{\text{außen}}$ gibt, so dass $(\nu, \xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ positiv orientierte Basis von TM_p ist. Das versteht ∂M tatsächlich mit einer Orientierung (Übung). Für $n = 1$ ist M eine disjunkte Vereinigung von Kreislinien und (abgeschlossenen, offenen oder halboffenen) Intervallen [Mi, Appendix].



Ist $p \in \partial M$ ein Randpunkt, so geben wir ihm das Gewicht $+1$, falls ein positiv orientierter Vektor $\xi \in TM_p$ nach außen zeigt. Zeigt er nach innen, bekommt er das Gewicht -1 .

- (g) Wir nennen eine Mannigfaltigkeit **geschlossen**, wenn sie kompakt, zusammenhängend, ohne Rand und orientiert ist.

(A.7) Vorbereitung. Seien nun M und N geschlossene Mannigfaltigkeit der Dimension $n \in \mathbb{N}$ und $\Phi: M \rightarrow N$ glatt.

- (a) Ist nun $q \in N$ ein regulärer Wert von Φ , d.h.: für alle $p \in \Phi^{-1}(q)$ ist das Differential $D\Phi_p: TM_p \rightarrow TN_q$ surjektiv und damit ein Isomorphismus, so gibt es offene Umgebungen $U_p \subseteq M$ von p und $V \subseteq N$ von $\Phi(p)$, so dass $\Phi(U_p) = V$ ist und $\Phi|_{U_p}: U_p \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus (Umkehrsatz). Kein anderer Punkt, außer p , in U_p geht also auf q , d.h. $\Phi^{-1}(q) \subseteq M$ liegt diskret. Damit muss $\Phi^{-1}(q)$ endlich sein. (Denn sonst müsste $\Phi^{-1}(q)$ einen Häufungspunkt haben, der zudem in $\Phi^{-1}(q)$ liegen würde, da $\Phi^{-1}(q)$ abgeschlossen ist. Dieser wäre aber nicht isoliert.)

- (b) Beachte auch, dass wegen der Kompaktheit von M die Teilmenge

$$\text{reg}(\Phi) := \{q \in N : q \text{ ist regulärer Wert von } \Phi\}$$

offen sein muss, denn $A := M \setminus \bigcup_{p \in \Phi^{-1}(q)} U_p$ ist abgeschlossen, also kompakt und damit auch $\Phi(A) \subseteq N$ kompakt und damit abgeschlossen und $q \notin \Phi(A)$. Nach evtl. Verkleinerung von V (und der U_p 's) liegen dann auch alle Urbilder von $\tilde{q} \in V$ auch in $\bigcup_{p \in \Phi^{-1}(q)} U_p$ und sind damit auch regulär.

- (c) Nach einem **Satz von Sard** [Mi, §3] ist $\text{reg}(\Phi) \subseteq N$ auch dicht, insbesondere nicht-leer. (Beachte: $q \notin \text{im } \Phi \implies q \in \text{reg } \Phi$)

(A.8) Definition. Seien M und N geschlossen der Dimension $n \in \mathbb{N}$ und $\Phi: M \rightarrow N$ glatt. Für jeden regulären Wert $q \in N$ definieren wir den **Abbildungsgrad von Φ (bzgl. q)** als

$$\text{deg}(\Phi; q) := \sum_{p \in \Phi^{-1}(q)} \text{sgn}(D\Phi_p) \in \mathbb{Z}.$$

(A.9) Satz. Seien M und N geschlossen gleicher Dimension und $\Phi: M \rightarrow N$ glatt. Dann hängt der Abbildungsgrad $\text{deg}(\Phi; q)$ nicht von $q \in \text{reg}(\Phi)$ ab (und wir nennen ihn den **Abbildungsgrad von Φ** , $\text{deg}(\Phi) := \text{deg}(\Phi; q)$).

(A.10) Definition. Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten (und M ohne Rand). Zwei glatte Abbildungen $f, g: M \rightarrow N$ heißen **homotop**, $f \simeq g$, wenn es eine glatte Abbildung $H: M \times [0, 1] \rightarrow N$ gibt mit

$$H(p, 0) = f(p), \quad H(p, 1) = g(p), \quad \forall p \in M.$$

(A.11) Satz. Seien M und N geschlossen von gleicher Dimension. Sind dann $f, g: M \rightarrow N$ homotop, $f \simeq g$, so gilt:

$$\deg(f) = \deg(g).$$

(A.12) Beispiel.

(a) Sei $M = N = \mathbb{S}^n$ ($n \in \mathbb{N}$), $i \in \{1, \dots, n+1\}$ und $s_i: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ die Spiegelung an der Hyperebene $H_i := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x^i = 0\}$,

$$s_i(p^1, \dots, p^{n+1}) = (p^1, \dots, p^{i-1}, -p^i, p^{i+1}, \dots, p^{n+1}).$$

\mathbb{S}^n trage die **Standardorientierung**, d.h. die die sich als Rand von $\mathbb{B}^{n+1} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ergibt. Für $i \neq n+1$ betrachte $p = (0, \dots, 0, 1)$, also $s(p) = p$ und

$$\mathbb{R}^n \cong \text{TS}_p^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x^{n+1} = 0\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

Es folgt:

$$(\text{Ds}_i)_p: \text{TS}_p^n \rightarrow \text{TS}_p^n, \zeta = (\zeta^1, \dots, \zeta^n) \mapsto (\zeta^1, \dots, -\zeta^i, \dots, \zeta^n)$$

also:

$$\text{sgn}(\text{Ds}_i)_p = -1. \quad \deg(s_i) = \deg(s_i, p) = \text{sgn}(\text{Ds}_i)_p = -1.$$

(b) Für $M = N$ und $\Phi = \mathbb{1}$ folgt: $\deg(\Phi) = +1$.

(c) Sind M, N und P geschlossen von gleicher Dimension und $f: M \rightarrow N$ und $g: N \rightarrow P$, so gilt (Übung):

$$\deg(g \circ f) = \deg(g) \cdot \deg(f).$$

(d) Insbesondere gilt für die Antipodenabbildung $d: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$, $p \mapsto -p$, weil $d = s_{n+1} \circ \dots \circ s_1$ ist:

$$\deg(d) = (-1)^{n+1}.$$

(A.13) Theorem (Igelsatz). Sei $n \in \mathbb{N}$ gerade. Dann hat jedes glatte Vektorfeld auf \mathbb{S}^n (mindestens) eine Nullstelle.

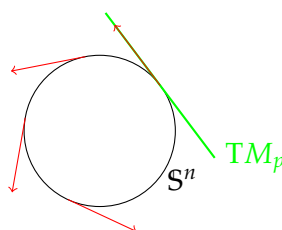
(A.14) Kommentar.

(a) Stellt man sich im Fall $n = 2$ die Sphäre als Oberfläche eines (ingerollten) Igel vor und für ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^n)$ den Tangentialvektor X_p als ein (gekämmtes) Haar an der Stelle p , so besagt (A.13): „Man kann einen Igel nicht ohne Scheitel kämmen“.

(b) Für n ungerade ist der Satz falsch, denn für $n = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{N}_0$) ist offenbar $X: \mathbb{S}^n \rightarrow \text{TS}^n \subseteq \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^{n+1} = \underline{\mathbb{R}^{n+1}}$ (wo wir nun TS^n mit $\{\zeta \in \mathbb{R}^{n+1}, \langle \zeta, p \rangle = 0\}$ identifizieren),

$$X(p^1, \dots, p^{2k+2}) = (p; -p^2, p^1, -p^4, p^3, \dots, -p^{2k+2}, p^{2k+1})$$

ein glattes Vektorfeld ohne Nullstellen.



- (c) Versuche ein Vektorfeld X auf S^n zu konstruieren (für n gerade), dass möglichst wenig Nullstellen hat (eingezeichnet sind die Flusslinien des zugehörigen Flusses, Nullstellen entsprechen hierbei Gleichgewichtslagen): Hier sind zwei Beispiele für $n = 2$



Beweis von (A.13). Sei $X: S^n \rightarrow TS^n \subseteq S^n \times \mathbb{R}^{n+1}$

$$X(p) = (p, F(p))$$

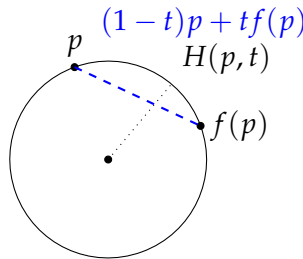
mit $F: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, ein Vektorbündel ohne Nullstellen, also $F(p) \neq 0$ und

$$\langle F(p), p \rangle = 0, \quad \forall p \in S^n$$

(TS^n ist ein Unterbündel des trivialen Bündels $\underline{\mathbb{R}^{n+1}}$ auf S^n .) Setze dann $f: S^n \rightarrow S^n$,

$$f(p) := \frac{F(p)}{\|F(p)\|}$$

(wo $\| \cdot \|$ die euklidische Norm auf \mathbb{R}^{n+1} sei, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das kanonische Skalarprodukt). Es ist (weiterhin) $\langle f(p), p \rangle = 0$, insbesondere $f(p) \neq -p$ und $f(p) \neq +p$. Deshalb ist nun



$$H: S^n \times [0, 1] \rightarrow S^n, \quad H(p, t) = \frac{(1-t)p + tf(p)}{\|(1-t)p + tf(p)\|}$$

eine Homotopie von $h_0 = \mathbb{1}$ nach $h_1 = f$ ($h_t = H(\cdot, t)$). Es ist also: $f \simeq \mathbb{1}$. Andererseits ist auch $G: S^n \times [0, 1] \rightarrow S^n$

$$G(p, t) = \frac{(1-t)(-p) + tf(p)}{\|(1-t)(-p) + tf(p)\|}$$

eine Homotopie von $g_0 = d$ nach $g_1 = f$. Also ist auch $f \simeq d$ (d die Antipodenabbildung). Nun ist aber \simeq eine Äquivalenzrelation, insbesondere transitiv (Übung), also ist auch $\mathbb{1} \simeq d$. Nach (A.11) folgt:

$$\deg(\mathbb{1}) = \deg(d).$$

Aber nach (A.12) ist $\deg(d) = (-1)^{n+1} = -1$ (bei n gerade), während $\deg(\mathbb{1}) = +1$ ist: \blacktriangledown □

(A.15) Lemma. Seien M und N geschlossen und gleicher Dimension und sei $f: M \rightarrow N$ glatt. Sei weiter X eine orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial X = M$ (als orientierte Mannigfaltigkeit) und $F: X \rightarrow N$ eine glatte Fortsetzung von f , $F|_M = f$. Dann gilt für jeden regulären Wert $q \in N$ von f :

$$\deg(f, q) = 0.$$

Beweis. Schritt 1: Wir nehmen an, dass q auch ein regulärer Wert von F ist (also auch $F^{-1}(q) \subseteq X$ keine kritischen Punkte enthält).

Dann ist $F^{-1}(q)$ eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $(n + 1) - n = 1$, wobei der Rand von $C = F^{-1}(q)$ gerade $f^{-1}(q)$ ist: $\partial C = f^{-1}(q)$

Im Inneren $X \setminus \partial X$ von X ist C glatte Mannigfaltigkeit der Dimension 1 ohne Rand, auf ∂X ist $C \cap X = f^{-1}(q)$ glatte Mannigfaltigkeit der Dimension 0 und lokal um $p \in f^{-1}(q)$ ist $f^{-1}(q)$ diffeomorph zu $[0, \varepsilon)$, weil $\ker(DF_p) \subseteq TX_p$ transversal zu $T(\partial X)_p$ liegt,

$$TX_p = T(\partial X)_p \oplus \ker(DF_p)$$

Benutze nun: Jede kompakte zusammenhängende Mannigfaltigkeit C der Dimension 1 ist diffeomorph zu S^1 (dann ist $\partial C = \emptyset$) oder zu $I = [0, 1]$ (dann ist $\partial C = \{p_1, p_2\}$ für $p_1 \neq p_2$) [Mi, Appendix S.55-57]. ⌋

Sei nun $A \subseteq C$ eine Zusammenhangskomponente mit $A \cap M \neq \emptyset \implies \partial A = \{a, b\}$ mit $a \neq b$.

Definiere nun für $x \in A$ eine Orientierung auf TA_x wie folgt: $v \in TA_x \setminus \{0\}$ heißt positiv orientiert, falls es eine Ergänzung (v, ξ_1, \dots, ξ_n) zu einer positiv orientierten Basis von TX_x , so dass $(DF_x(\xi_1), \dots, DF_x(\xi_n))$ positiv orientierte Basis von $TN_{F(x)}$ ist. $\implies \sigma = (\sigma_x)_{x \in A}$ ist Orientierung auf A . Sind nun $v_b \in TA_b$ bzw. $v_a \in TA_a$ positiv orientiert, so zeigt einer nach außen, einer nach innen, o.E.: $v_a \in TX_a^{\text{innen}}, v_b \in TX_b^{\text{außen}}$.

Ist nun (ξ_1, \dots, ξ_n) positiv orientierte Basis von $TM_b \implies (v_b, \xi_1, \dots, \xi_n)$ ist positiv orientierte Basis von TX_b (nach Definition der induzierten Orientierung auf $M = \partial X$) $\implies (Df_b(\xi_1), \dots, Df_b(\xi_n))$ ist positiv orientierte Basis von TN_q (nach Definition der Orientierung von A)

$$\implies \text{sgn}(Df_b) = +1.$$

Ähnlich sieht man: $\text{sgn}(Df_a) = -1$ (da v_a nun innen liegt). Summiert man über alle Zusammenhangskomponenten A von C auf, so folgt:

$$\text{deg}(f; q) = 0.$$

2. Schritt: Ist $\Phi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ lokaler Diffeomorphismus und $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und zusammenhängend, so ist $D\Phi_x: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ \mathfrak{A} -erhaltend, $\text{sgn}(D\Phi_x) = +1, \forall x \in U$, oder orientierend-umkehrend, $\forall x \in U$ (und nicht gemischt) (Übung: Zwischenwertsatz auf $x \mapsto \text{deg}(D\Phi_x)$). Es folgt: Für $\Phi: M \rightarrow N$ ist $\text{deg}(\Phi, -): \text{reg}(\Phi) \rightarrow \mathbb{Z}$ lokal konstant, denn ist $q_0 \in \text{reg}(\Phi)$ und $U_1, \dots, U_n \subseteq M$ disjunkte, offene und zusammenhängende Umgebungen von p_1, \dots, p_n (mit $\Phi^{-1}(q_0) = \{p_1, \dots, p_n\}$), so ist $K = \Phi(M \setminus (U_1 \cup \dots \cup U_n))$ kompakt, also abgeschlossen, also ist für $q \in N \setminus K$:

$$\Phi^{-1}(q) = \{\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_n\}$$

mit $\tilde{p}_i \in U_i$. Da $\text{sgn}(\Phi|_{U_i, p_i}) = \text{sgn}(\Phi|_{U_i, \tilde{p}_i})$ ist, folgt:

$$\text{deg}(\Phi; q) = \text{deg}(\Phi; q_0).$$

Ist nun $q_0 \in N$ regulär für $f: M \rightarrow N$, aber nicht für $F: X \rightarrow N$, so wähle in einer offenen Umgebung $V \subseteq N$, wo $\text{deg}(f; q) = \text{deg}(f; q_0)$ ist, $\forall q \in V$, einen regulären Wert (auch) von F . (Benutze: Satz von Sard, dass $\text{reg}(F) \subseteq N$ dicht liegt!)

$$\implies \text{deg}(f, q_0) = \text{deg}(f, q) \stackrel{\text{Schritt 1}}{=} 0. \quad \square$$

(A.16) Korollar. Seien M und N geschlossen von gleicher Dimension, $f, g: M \rightarrow N$ glatt und $q \in N$ ein regulärer Wert von f und von g . Dann gilt: Ist $f \simeq g$, so ist

$$\text{deg}(f; q) = \text{deg}(g; q).$$

Beweis. Das Produkt $M \times N$ von orientierten Mannigfaltigkeiten M und N trägt eine natürliche Orientierung, weil

$$T(M \times N)_{(p,q)} \cong TM_p \oplus TN_q$$

(Ist $\mathfrak{A} = (v_1, \dots, v_n)$ positiv orientiert für TM_p und $\mathfrak{B} = (w_1, \dots, w_r)$ positiv orientiert für TN_q , so sei $(v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_r)$ positiv orientiert für $T(M \times N)_{(p,q)}$.) Deshalb trägt nun $X := [0, 1] \times M$ eine natürliche Orientierung (wo $[0, 1]$ durch $\frac{\partial}{\partial x}$ orientiert sei, wenn x die Standardkarte ist). Die induzierte Orientierung auf

$$\partial X = \{0\} \times M \cup \{1\} \times M$$

ist dann auf $\{1\} \times M$ „die richtige“ auf M (d.h.: $i_1: M \rightarrow \partial X, p \mapsto (1, p)$ ist \mathfrak{A} -erhaltend) und auf $\{0\} \times M$ „die falsche“ (d.h.: $i_0: M \rightarrow \partial X, p \mapsto (0, p)$ ist \mathfrak{A} -umkehrend). Sei nun $F: X \rightarrow N$ eine Homotopie von f nach g , also $F_0 = f$ und $F_1 = g$. Dann ist $q \in N$ regulärer Wert für $F|_{\partial X}$ und es gilt:

$$0 = \deg(F|_{\partial X}; q) = \deg(g; q) + \underbrace{(-1)}_{\text{wegen Or.-wechsel}} \deg(f; q) \implies \deg(f; q) = \deg(g; q). \quad \square$$

(A.17) Lemma. Sei M eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit und $p, q \in M$. Dann gibt es einen Diffeomorphismus $\Phi: M \rightarrow M$ mit $\Phi \simeq 1$ (sogar **isotop** $\Phi \simeq_{\text{iso}} 1$) und $\Phi(p) = q$.

(A.18) Kommentar. Zwei Diffeomorphismen $f, g: M \rightarrow N$ heißen **isotop**, $f \simeq_{\text{iso}} g$, wenn es eine Homotopie $H: M \times [0, 1] \rightarrow N$ von f nach g gibt, so dass auch $h_t = H(-, t): M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus ist, $\forall t \in [0, 1]$.

Beweis. Schritt 1: Sei $p \in M$ und $\psi: U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine zentrierte Karte mit $V = B(3) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 3\}$. Sei weiter $c \in B(1) \setminus \{0\}$ und $\rho: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ eine Abschneidefunktion für $B(1) \subseteq B(2) \subseteq B(3)$, d.h.:

$$\rho|_{B(1)} \equiv 1, \quad \rho|_{B(3) \setminus B(2)} \equiv 0.$$

Setze nun zunächst $\tilde{X}: B(3) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\tilde{X}(x) = c$ (also konstant) schneide dann \tilde{X} mit ρ ab und setze danach, via ψ , \tilde{X} trivial zu einem glatten Vektorfeld auf M fort,

$$X(q) := \begin{cases} D\psi^{-1}_q(\rho \circ \psi(q) \cdot \tilde{X} \circ \psi(q)), & \text{für } q \in U \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Flusslinien $t \mapsto \varphi^t(q)$ von X existieren für alle $t \in \mathbb{R}$, da $\text{supp}(X) \subseteq \psi^{-1}(\overline{B(2)})$ kompakt ist und für den Anfang p gilt

$$\psi^{-1}(\psi^t(p)) = tc \text{ für } |t| \leq 1,$$

weil $\alpha(t) = tc$ für $|t| \leq 1$ die Differentialgleichung

$$\dot{\alpha}(t) = c = \tilde{X}(\alpha(t))$$

löst.

Der Diffeomorphismus $\Phi = \varphi^1$ transportiert deshalb p nach $\psi^{-1}(c) =: q$ und $\Phi \simeq_{\text{iso}} 1$, weil $H(q, t) = \varphi^t(q)$ eine Homotopie, sogar eine *Isotopie*, ist (weil alle $\varphi^t(-)$ Diffeomorphismen sind).

Schritt 2: Definiere nun p und q als äquivalent, $p \sim q$, wenn es einen Diffeomorphismus $\Phi: M \rightarrow M$ gibt mit $\Phi \simeq_{\text{iso}} 1$ und $\Phi(p) = q$. Dann ist \sim eine Äquivalenzrelation und Schritt 1 zeigt, dass alle Äquivalenzklassen $[p] \subseteq M$ offen sind. Aber M ist zusammenhängend. Deshalb kann es nur eine solcher Äquivalenzklasse geben \implies Behauptung des Lemmas. \square

(A.19) Beweis von (A.9). Seien q_1 und q_2 zwei reguläre Werte von $f: M \rightarrow N$. Wir wählen nach (A.17) einen Diffeomorphismus $\Phi: N \rightarrow N$ mit $\Phi \simeq_{\text{iso}} \mathbb{1}$ und $\Phi(q_1) = q_2$. Da $\Phi \simeq_{\text{iso}} \mathbb{1}$ ist, folgt: Φ ist Orientierung-erhaltend, d.h.: $\text{sgn}(D\Phi_q) = +1$, für alle $q \in N$ (Übung: weil

$$X = \{(q, t) \in M \times [0, 1] : \text{sgn}(Dh_t(q)) = +1\} \quad (\text{wo } H: \Phi \simeq_{\text{iso}} \mathbb{1}, H(-, t) = h_t)$$

ist offen, abgeschlossen (weil auch $\dots -1$ offen ist) und nicht-leer, da $(q, 1) \in X$ ist, $\forall q \in N$; also: $X = M \times [0, 1]$). Sind nun $p_1, \dots, p_r \in M$ die (paarweise verschiedenen) Urbilder von q_1 unter f , so ist

$$\begin{aligned} \deg(f; q_1) &= \sum_{i=1}^r \text{sgn}(Df_{p_i}) = \sum_{i=1}^r \underbrace{\text{sgn}(D\Phi_{q_1})}_{=1} \cdot \text{sgn}(Df_{p_i}) \\ &= \sum_{i=1}^r \text{sgn}(D\Phi_{q_1} \circ Df_{p_i}) = \sum_{i=1}^r \text{sgn}(D(\Phi \circ f)_{p_i}) = \deg(\Phi \circ f; q_2) \end{aligned}$$

denn p_1, \dots, p_n sind auch die Urbilder unter $\Phi \circ f$ von q_2 (und q_2 ist regulärer Wert für $\Phi \circ f$). Aber wegen (A.16) ist

$$\deg(\Phi \circ f, q_2) = \deg(f; q_2),$$

denn $\Phi \circ f \simeq \mathbb{1} \circ f = f$ und q_2 ist regulärer für f und für $\Phi \circ f$. Es ist also tatsächlich:

$$\deg(f; q_1) = \deg(f; q_2). \quad \square$$

(A.20) Beweis von (A.11). Da die regulären Werte von f und g jeweils dicht liegen, gibt es einen gemeinsamen regulären Wert $q \in N$, $\text{reg}(f) \cap \text{reg}(g) \neq \emptyset$. Es folgt:

$$\deg(f) \stackrel{(A.9)}{=} \deg(f; q) \stackrel{(A.16)}{=} \deg(g; q) \stackrel{(A.9)}{=} \deg(g). \quad \square$$

B

Anhang B. Der Satz von Stokes

(B.1) Motivation.

- (a) Um nun auch Integralrechnung auf Mannigfaltigkeiten betreiben zu können, erinnern wir an die **Transformationsformel für Mehrfachintegrale** (siehe Analysis IV):

Sind $\Omega, D \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Mengen und $\tau: \Omega \rightarrow D$ ein (C^∞ -) Diffeomorphismus, so gilt für eine (Lebesgue-) integrierbare Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, dass auch $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(x) := |\det D\tau(x)| \cdot f \circ \tau(x)$$

integrierbar ist, und es gilt:

$$\int_D f(y) d\mathcal{L}(y) = \int_\Omega g(x) d\mathcal{L}(x).$$

- (b) Nehmen wir nun an, M sei eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension $n \in \mathbb{N}_0$ und ω eine glatte n -Form, $\omega \in \mathcal{E}^{(n)}(M)$, deren **Träger**

$$\text{supp}(\omega) := \overline{\{p \in M : \omega_p \neq 0\}} \subseteq M$$

ganz im Definitionsgebiet einer Karte $\varphi: U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ enthalten ist. Es ist dann

$$\omega|_U = f(y) dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n,$$

genauer ist

$$(\varphi^{-1})^* \omega = f(y) dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n \in \mathcal{E}^{(n)}(V)$$

mit einer glatten Funktion $f: V \rightarrow \mathbb{R}$.

Nehmen wir nun auch noch an, dass der Träger von ω kompakt ist (i.A. sonst keine Lebesgue-Integrierbarkeit). Dann ist auch

$$L := \varphi(\text{supp}(\omega)) = \text{supp}(f) = \overline{\{y \in V : f(y) \neq 0\}} \subseteq V$$

kompakt und damit f Lebesgue-integrierbar. Man setzt nun (vorläufig)

$$\int_M \omega := \int_V (\varphi^{-1})^*(\omega) := \int_V f(y) dy := \int_V f(y) d\mathcal{L}(y) \quad (*)$$

- (c) Ist nämlich nun $\psi: \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ eine weitere Karte so, dass $\text{supp}(U) \subseteq \tilde{U}$ und kompakt ist, so ist

$$\psi^* \omega = g(x) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

mit einer glatten Funktion $g: \tilde{V} \rightarrow \mathbb{R}$, die kompakten Träger $K = \psi(\text{supp}(\omega)) \subseteq \tilde{V}$ hat und damit integrierbar ist.

Nehmen wir nun weiter an, dass der Kartenübergang $\tau: \Omega \rightarrow D$ mit $\Omega = \psi(U \cap \tilde{U})$ und $D = \varphi(U \cap \tilde{U})$ überall positive Funktionaldeterminante hat, also

$$\det D\tau(x) = |\det D\tau(x)|, \quad \forall x \in \Omega.$$

Dann gilt wegen des Transformationsverhalten von n -Formen (vgl. (4.56,c))

$$g(x) = \det(D\tau(x)) \cdot f \circ \tau(x)$$

und daher tatsächlich

$$\begin{aligned} \int_V g(x) d\mathcal{L}(y) &= \int_\Omega g(x) d\mathcal{L}(x) \stackrel{\text{Trafo.-Formel}}{=} \int_D f(y) d\mathcal{L}(y) \\ &= \int_V f(y) d\mathcal{L}(y). \end{aligned}$$

und in dem Sinne ist (*) unabhängig von der gewählten Karte.

(d) Man hat es deshalb mit folgenden Problemen zu tun:

- i) Man braucht Atlanten, deren Übergänge überall positive Funktionaldeterminante haben; \rightsquigarrow Orientierbarkeit.
- ii) Man sollte $\omega \in \mathcal{E}^{(n)}(M)$ zerlegen können in eine Summe von Formen $\omega_i \in \mathcal{E}^{(n)}(M)$,

$$\omega = \sum_{i \in I} \omega_i \quad (**)$$

so, dass $\text{supp}(\omega_i)$ ganz in einem Definitionsgebiet U_i einer Karte φ_i enthalten ist und kompakten Träger hat, die Summe (**) **lokal endlich** ist, d.h. in jedem $p \in M$ gibt es eine offene Umgebung $U \subseteq M$ so, dass $\omega_i(q) \neq 0$ für nur endlich viele $i \in I$ ist, $\forall q \in U$, damit (**) überhaupt Sinn macht.

iii) Man würde dann die Definition wagen:

$$\int_M \omega := \sum_{i \in I} \int_M \omega_i,$$

wobei man noch darauf achten muss, dass die Summe endlich ist, und natürlich auch, dass die Definition nicht von der Wahl der Zerlegung (**) abhängt.

(B.2) Bemerkung. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit (mit Rand). Dann ist M genau dann orientierbar, wenn es einen glatten Atlas von M gibt, so dass die Funktionaldeterminanten der Übergänge alle positiv sind.

Beweis. „ \implies “: Sei $\sigma = (\sigma_p)_{p \in M}$ eine Orientierung auf M und $\tilde{\mathfrak{A}} = (\tilde{\varphi}_i: \tilde{U}_i \rightarrow \tilde{V}_i)_{i \in I}$ zunächst ein beliebiger Atlas auf M . Indem wir nötigenfalls jede Karte $\tilde{\varphi}_i$ auf jeder Zusammenhangskomponente von \tilde{U}_i einschränken (und diese Einschränkung dann als neue Karten betrachten), dürfen wir annehmen, dass jedes Kartengebiet $\tilde{U}_i \subseteq M$ zusammenhängend ist. Dann ist $\tilde{\varphi}_i$ entweder orientierungserhaltend, also

$$(D\tilde{\varphi}_i)_p: TM \rightarrow (T\tilde{V}_i)_{\tilde{\varphi}_i(p)} \cong \mathbb{R}^n$$

orientierungserhaltend für alle $p \in \tilde{U}_i$, oder orientierungsumkehrend, d.h. alle $(D\tilde{\varphi}_i)_p$ sind orientierungsumkehrend. Setze nun $U_i := \tilde{U}_i$, $V_i := \tilde{V}_i$ und $\varphi_i := \tilde{\varphi}_i: U_i \rightarrow V_i$, falls $\tilde{\varphi}_i$ orientierungserhaltend ist, und $U_i := \tilde{U}_i$, $V_i := \tau(\tilde{V}_i)$ und $\varphi_i = \tau \circ \tilde{\varphi}_i: U_i \rightarrow V_i$, falls $\tilde{\varphi}_i$ orientierungsumkehrend ist. Hierbei ist τ die Einschränkung von

$$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, (x^1, \dots, x^n) \mapsto (-x^1, x^2, \dots, x^n).$$

Da τ orientierungsumkehrend ist, folgt dann wegen

$$\operatorname{sgn}(D\varphi_i)_p = \operatorname{sgn}(D\tau)_{\tilde{\varphi}_i(p)} \cdot \operatorname{sgn}(D\tilde{\varphi}_i)_p = (-1) \cdot (-1) = 1,$$

dass auch φ_i orientierungserhaltend ist.

Die Übergänge (φ_{ij}) des neuen Atlas' $\mathfrak{A} = (\varphi_i)$ haben nun alle positive Funktionaldeterminanten, denn wiederum ist

$$\operatorname{sgn}(D\varphi_{ij})_y = \operatorname{sgn}(D\varphi_i)_p \cdot \operatorname{sgn}(D\varphi_j^{-1})_y = (+1) \cdot (+1) = 1$$

und das Signum von $(D\varphi_{ij})_y: (TV_j)_y \cong \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \cong (TV_i)_x$ ($x = \varphi_{ij}(y) = \varphi_i(p)$, $y = \varphi_j(p)$) ist gerade durch das Vorzeichen von $\det(D\varphi_{ij})_y$ bestimmt.

„ \Leftarrow “: Ist andererseits $\mathfrak{A} = (\varphi_i: U_i \rightarrow V_i)_{i \in I}$ ein Atlas auf M mit $\det(D\varphi_{ij}) > 0$, für alle $i, j \in I$, so wähle man für $p \in M$ eine $j \in I$ aus, so dass $p \in U_j$ ist und setze $\sigma_p := (D\varphi_j)_p^*(\sigma_{\text{Std}})$, d.h. derart, dass

$$(D\varphi_j)_p: TM_p \rightarrow (TV_j)_{\varphi_j(p)} \cong \mathbb{R}^n$$

orientierungserhaltend wird. Das ist unabhängig von der Kartenwahl, denn ist $i \in I$ ein weiteres Element mit $p \in U_i$, so ist -mit der Wahl von σ_p via φ_j - auch

$$(D\varphi_i)_p: TM_p \rightarrow (TV_i)_{\varphi_i(p)} \cong \mathbb{R}^n$$

orientierungserhaltend, weil mit $\varphi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ auch

$$(D\varphi_i)_p = D(\varphi_{ij} \circ \varphi_j)_p = (D\varphi_{ij})_{\varphi_j(p)} \cdot (D\varphi_j)_p$$

ist und damit

$$\operatorname{sgn}(D\varphi_i)_p = \operatorname{sgn}(D\varphi_{ij})_{\varphi_j(p)} \cdot \operatorname{sgn}(D\varphi_j)_p = (+1) \cdot (+1) = +1$$

$\sigma := (\sigma_p)_{p \in M}$ wird damit zu einer Orientierung auf M . □

(B.3) Kommentar.

(a) Ist (M, σ) eine orientierte Mannigfaltigkeit (mit Rand), so nennen wir einen Atlas $\mathfrak{A} = (\varphi_i)_{i \in I}$ einen **Orientierungsatlas von M** , wenn alle Karten orientierungserhaltend sind. Ist $\mathfrak{B} = (\psi_j)_{j \in J}$ ein weiterer Orientierungsatlas von M , so ist auch $\mathfrak{C} = (\varphi_i, \psi_j)_{i \in I, j \in J}$ eine solcher und man kann so eine Orientierung σ auf M eine Äquivalenzklasse $c = [\mathfrak{A}]$ von Atlanten zuordnen, deren Übergänge positive Funktionaldeterminante haben (und natürlich $(\varphi_i) = \mathfrak{A} \sim \mathfrak{B} = (\psi_j)$, wenn auch $\mathfrak{C} = (\varphi_i, \psi_j)$ nur Übergänge mit positiver Funktionaldeterminante hat).

(b) Umgekehrt legt eine solche Struktur $c = [\mathfrak{A}]$ von derartigen Atlanten vermöge **dem induzierten σ** , so dass alle \mathfrak{A} 's Orientierungsatlanten werden, eine Orientierung auf M fest und die Zuordnungen aus (a) und (b) sind invers zueinander. Deshalb kann man eine Orientierung auf M auch als eine solche Äquivalenzklasse von Atlanten auf M betrachten.

(B.4) Bemerkung. Sei (M, σ) eine orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand und $\mathfrak{A} = (\varphi_i: U_i \rightarrow V_i \subseteq \mathbb{H}^n)_{i \in I}$ ein Orientierungsatlas. Ist dann der Rand $\tilde{M} := \partial M$ von M mit der induzierten Orientierung $\tilde{\sigma}$ versehen (vgl. (A.6,f)), so ist

$$\mathfrak{A} = \left(\underbrace{\varphi_i|_{U_i \cap \partial M}}_{=: \tilde{\varphi}_i}: \underbrace{U_i \cap \partial M}_{=: \tilde{U}_i} \rightarrow \underbrace{V_i \cap \partial \mathbb{H}^n}_{=: \tilde{V}_i} \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \right)_{i \in I}$$

ein Orientierungsatlas von $(\partial M, -\tilde{\sigma})$.

Beweis. Identifiziert man $\partial\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x^1 = 0\}$ kanonisch mit \mathbb{R}^{n-1} via $y = (y^2, \dots, y^n) \rightarrow (0, y^2, \dots, y^n)$, so induziert die Standard-Orientierung auf \mathbb{H}^n , $\text{TH}_x^n \cong \mathbb{R}^n$ kanonisch, das Negative der Standard-Orientierung auf $\partial\mathbb{H}^n \cong \mathbb{R}^{n-1}$, denn eine Basis (ξ_2, \dots, ξ_n) von $\mathbb{R}^{n-1} \cong \text{T}(\partial\mathbb{H}^n)_x$ ist positiv orientiert, genau wenn $(-e_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ positiv orientiert von $\mathbb{R}^n \cong \text{TH}_x^n$ ist, da $-e_1 \in \mathbb{R}^n \cong \text{TH}_x^n$ ein äußerer Vektor ist.

Ist daher $\varphi: U \rightarrow V \subseteq \mathbb{H}^n$ eine positiv orientierte Karte von (M, σ) , also $(D\varphi)_p$ orientierungserhaltend für $p \in \partial M$, so ist die Einschränkung

$$(D\tilde{\varphi}): \text{T}(\partial M) \rightarrow (\text{T}\tilde{V}) \cong \mathbb{R}^{n-1}$$

orientierungsumkehrend, denn ist (ξ_2, \dots, ξ_n) positiv orientierte Basis von $\text{T}(\partial M)_p$, so ist für einen äußeren Vektor $\nu \in \text{TM}_p^{\text{außen}}$ nach Definition $(\nu, \xi_2, \dots, \xi_n)$ positiv orientiert für TM_p und damit $(D\varphi_p(\nu), D\varphi_p(\xi_2), \dots, D\varphi_p(\xi_n))$ positiv orientiert für $\text{TH}_x^n \cong \mathbb{R}^n$, $x = \varphi(p)$. Da $D\varphi_p(\nu) \in (\text{TH}_x^n)^{\text{außen}}$ ist, ist daher $(D\varphi_p(\xi_2), \dots, D\varphi_p(\xi_n))$ negativ orientiert für $\text{T}(\partial\mathbb{H}^n)_x \cong \mathbb{R}^{n-1}$, also $\tilde{\varphi}: \tilde{U} \rightarrow \tilde{V} \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ positiv orientiert für $-\tilde{\sigma}$ auf ∂M . \square

Frage: Wie erreicht man

$$\omega = \sum_{\alpha \in I} \omega_\alpha$$

mit $\text{supp}(\omega_\alpha) \subseteq U_{\iota(\alpha)}$ mit $\iota: A \rightarrow I$ bei einer vorgegebenen Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$?

(B.5) Definition. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit (mit Rand) und $\mathfrak{A} = (U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von M . Eine Familie glatter Funktionen $(\lambda_\alpha)_{\alpha \in A}$, $\lambda_\alpha \in \mathcal{E}(M)$, heißt **eine \mathfrak{A} untergeordnete Teilung der Eins**, wenn gilt:

(i) Es gibt eine Abbildung $\iota: A \rightarrow I$, so dass gilt:

$$\text{supp}(\lambda_\alpha) \subseteq U_{\iota(\alpha)}, \quad \forall \alpha \in A;$$

(ii) $(\lambda_\alpha)_{\alpha \in A}$ ist **lokal endlich**, d.h. für alle $p \in M$ existiert eine offene Umgebung $U \subseteq M$ von p und $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in A$ ($r \in \mathbb{N}$), so dass gilt:

$$\lambda_\beta(q) = 0,$$

für alle $q \in U$ und allen $\beta \in A \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$;

(iii) für alle $p \in M$ gilt:

$$\sum_{\alpha \in A} \lambda_\alpha(p) = 1.$$

(B.6) Kommentar.

(a) Beachte, dass wegen (ii) für jedes $p \in M$ nur endlich viele Summanden in (iii) von Null verschieden sind.

(b) Die Funktion $f \equiv 1$ auf M wird zerlegt in Funktionen $\lambda_\alpha \in \mathcal{E}(M)$, die gegenüber f den Vorteil haben, dass sie nur auf einem Kartengebiet (eines gegebenen Atlas') „leben“. Mit ihrer Hilfe kann man globale Probleme auf M lokalisieren: z.B. kann man für eine n -Form $\omega \in \mathcal{E}^{(n)}(M)$ setzen: $\omega_\alpha := \lambda_\alpha \cdot \omega$ und man erhält wie in (B.1,d) gewünscht: $\text{supp}(\omega_\alpha) \subseteq U_{\iota(\alpha)}$ und

$$\sum_{\alpha \in A} \omega_\alpha = \omega.$$

Beispiel: Teilung der Eins auf $M = \mathbb{R}$ mit $I = A = \mathbb{Z}$, $\iota = \mathbb{1}$, und $\mathfrak{A} = (U_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, $U_n = (n-1, n+1)$.

(B.7) Lemma. Sei M ein lokal kompakter (Hausdorff-Raum) mit abzählbarer Topologie (z.B. eine Mannigfaltigkeit). Dann gibt es eine Familie offener Teilmengen $(G_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von M , so dass gilt:

- (i) $\overline{G_k}$ ist kompakt, $\forall k \in \mathbb{N}$;
- (ii) $\overline{G_k} \subseteq G_{k+1}$, $\forall k \in \mathbb{N}$;
- (iii) $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} G_k = M$.

Beweis. (a) Sei $\mathfrak{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Basis von M . Dann ist auch

$$\tilde{\mathfrak{B}} := \{B \in \mathfrak{B} : \overline{B} \text{ ist kompakt}\}$$

eine abzählbare Basis, denn ist $U \subseteq M$ eine beliebige offene Menge, so wähle man für jedes $p \in U$ zunächst offene Mengen $V_p \subseteq M$ und kompakte Mengen $K_p \subseteq M$ mit

$$p \in V_p \subseteq K_p.$$

Das geht, weil X lokal kompakt ist. Dann wähle man ein $n_p \in \mathbb{N}$ mit

$$p \in B_{n_p} \subseteq V_p \cap U$$

(was geht, da \mathfrak{B} Basis der Topologie ist). Es ist dann

$$\overline{B_{n_p}} \subseteq \overline{V_p} \subseteq K_p$$

und daher als abgeschlossene Menge (auch in K_p) eines Kompaktums selber kompakt (vgl. (1.52)). Aber nun ist

$$U = \bigcup_{p \in U} B_{n_p}$$

und $B_{n_p} \in \tilde{\mathfrak{B}}$, für alle $p \in U$. Also ist auch $\tilde{\mathfrak{B}}$ Basis.

(b) Wir nehmen nun gleich an, dass \mathfrak{B} aus **relativ kompakten Teilmengen** besteht (d.h. für $B \in \mathfrak{B}$ gilt: \overline{B} ist kompakt) und nummerieren die Elemente von \mathfrak{B} durch: $\mathfrak{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$. Setze nun $G_1 := B_1$ und nehmen an, dass wir G_k für $k \in \mathbb{N}$ schon von der Form

$$G_k = B_1 \cup \dots \cup B_{j_k}$$

für ein $j_k \in \mathbb{N}$ gewählt haben. Dann ist

$$\overline{G_k} = \overline{B_1} \cup \dots \cup \overline{B_{j_k}}$$

und daher kompakt, weil $\overline{B_1} \cup \dots \cup \overline{B_{j_k}}$ kompakt ist. Es existiert deshalb ein $j_{k+1} > j_k$ mit

$$\overline{G_k} \subseteq B_1 \cup \dots \cup B_{j_{k+1}}.$$

Wir setzen dann rekursiv:

$$G_{k+1} := B_1 \cup \dots \cup B_{j_{k+1}}$$

Dann gilt: $\overline{G_k}$ ist kompakt, $\overline{G_k} \subseteq G_{k+1}$ nach Konstruktion und

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} G_k = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_1 \cup \dots \cup B_{j_k} = \bigcup_{j_k \geq k} B_m = M. \quad \square$$

(B.8) Satz. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit mit Rand und $\mathfrak{A} = (U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung. Dann existiert eine \mathfrak{A} -untergeordnete Teilung der Eins $(\lambda_m)_{m \in \mathbb{N}}$, so dass gilt: $\text{supp}(\lambda_m) \subseteq M$ ist kompakt, für alle $m \in \mathbb{N}$.

Beweis. Sei $(G_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine **relativ-kompakte Ausschöpfung von M** wie in (B.7) und $p \in M$ beliebig. Wir setzen $G_0 := \emptyset$ und

$$k_p := \max\{k \in \mathbb{N} : p \notin \overline{G_k}\} \in \mathbb{N}_0.$$

Dann ist also $p \in \overline{G_{k_p+1}} \subseteq G_{k_p+2}$ und damit

$$p \in G_{k_p+2} \setminus \overline{G_{k_p}}.$$

Sei $i_p \in I$ so, dass $p \in U_{i_p}$ und $V_p \subseteq M$ offen, so dass

$$p \in V_p \subseteq U_{i_p} \cap (G_{k_p+2} \setminus \overline{G_{k_p}}).$$

Nach evtl. Verkleinerung von V dürfen wir annehmen, dass V das Definitionsgebiet einer Karte $\varphi: V \rightarrow B$ ist, wobei $B = B(3) \subseteq \mathbb{R}^n$ ist und $\varphi(p) = 0$. Sei nun $\tilde{q}_p: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ eine Abschneidefunktion für B (vgl. (3.26)), d.h.:

$$q_p|_{B(1)} \equiv 1, \quad q_p|_{\mathbb{R}^n \setminus B(2)} \equiv 0.$$

Wir setzen schließlich

$$W_p := \varphi^{-1}(B(1)), \quad \tilde{\lambda}_p := \begin{cases} q_p \circ \varphi & \text{auf } V \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} : M \rightarrow [0, 1]$$

Da nun $\overline{G_{k+1}} \setminus G_k$ kompakt ist, existieren endlich viele $p_1^{(k)}, \dots, p_{r_k}^{(k)} \in \overline{G_{k+1}} \setminus G_k$, so dass

$$\overline{G_{k+1}} \setminus G_k \subseteq \bigcup_{j=1}^{r_k} W_{p_j^{(k)}}$$

ist. Da

$$\text{supp}(\tilde{\lambda}_p) \subseteq V_p \subseteq G_{k_p+2} \setminus \overline{G_{k_p}}$$

ist, existiert für jedes $p \in M$ eine offene Umgebung, so dass nur endlich viele $\text{supp}(\tilde{\lambda}_{p_j^{(k)}})$ dieses U treffen ($k \in \mathbb{N}, j \in \{1, \dots, r_k\}$), nämlich z.B. $U = G_{k+2} \setminus \overline{G_{k_p}}$, welches höchstens von

$$W_{p_1^{(k_p-1)}}, \dots, W_{p_{r_{k_p+1}}^{(k_p+1)}}$$

getroffen wird. Wir nummerieren nun die Familie $(\tilde{\lambda}_{p_j^{(k)}})_{k \in \mathbb{N}, j=1, \dots, r_k}$ zu einer Folge $(\tilde{\lambda}_m)_{m \in \mathbb{N}}$ um, $m = m(k, j)$. Dann ist also $(\tilde{\lambda}_m)_{m \in \mathbb{N}}$ lokal endlich, also

$$\tilde{\lambda} := \sum_{m \in \mathbb{N}} \tilde{\lambda}_m$$

wohldefiniert und, weil $(W_m)_{m \in \mathbb{N}}$ ganz M überdecken, ist:

$$\tilde{\lambda} > 0. \quad (W_m := W_{p_j^{(k)}}, m = m(k, j))$$

$$\lceil \bigcup_{m \in \mathbb{N}} W_m = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \overline{G_{m+1}} \setminus G_m \subseteq \bigcup G_{m+1} = M. \quad \rceil$$

Setzen wir nun noch

$$\lambda_m := \frac{\tilde{\lambda}_m}{\tilde{\lambda}},$$

und $\iota: \mathbb{N} \rightarrow I$ so, dass $\iota(m) = i_{p_m}$ ($\implies \text{supp}(\lambda_m) \subseteq V_{p_m} \subseteq U_{i_{p_m}} = U_{\iota(m)}$), so ist (λ_m) die gesuchte Teilung der Eins auf M . Nach Konstruktion ist

$$\text{supp}(\lambda_m) \subseteq \varphi_{\iota(m)}^{-1}(\overline{B(2)}),$$

also auch kompakt. □

(B.9) Kommentar.

- (a) In vielen Anwendung ist es günstig, wenn man die Indexmenge A der $(U_i)_{i \in I}$ untergeordneten Teilung der Eins gleich I und die „Nummerierung“ $\iota: A \rightarrow I$ als die Identität wählen kann. Verzichtet man darauf, dass die Träger $\text{supp}(\lambda_i) \subseteq U_i$ kompakt sein sollen - und das muss man, wie das Beispiel einer nicht-kompakter Mannigfaltigkeit mit $\mathfrak{A} = (M)$ zeigt - so kann man dies wie folgt erreichen: Man setze im Beweis von (B.8) noch $\lambda_i: M \rightarrow [0, 1]$

$$\lambda_i := \sum_{\substack{m \in \mathbb{N} \\ \iota(m)=i}} \lambda_m.$$

Dann ist $(\lambda_i)_{i \in I}$ tatsächlich eine Teilung der Eins mit $\text{supp}(\lambda_i) \subseteq U_i$.

- (b) Beachte, das für überabzählbares I dabei nur abzählbar viele $i \in I$ existieren (nämlich die aus $\text{im}(\iota)$), wo $\lambda_i \neq 0$ sein kann.

(B.10) Definition. Sei (M, σ) eine orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand und ω eine glatte n -Form mit kompakten Träger, $n = \dim M$.

- (a) Gibt es eine Orientierungserhaltende Karte $\varphi: U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\text{supp}(\omega) \subseteq U$, so setzen wir

$$\int_M \omega := \int_V (\varphi^{-1})^*(\omega|U) = \int_V f(x) d\mathcal{L}(x),$$

wenn $\omega|U = f(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ mit $f \in \mathcal{E}(V)$ ist.

- (b) Sei $\mathfrak{A} = (\varphi_i: U_i \rightarrow V_i)_{i \in I}$ ein Orientierungsatlas von M und $(\lambda_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine (U_i) -untergeordnete Teilung der Eins. Wir setzen dann:

$$\int_M \omega := \sum_{m \in \mathbb{N}} \int_M \lambda_m \omega,$$

wobei die Integrale auf der rechten Seite nach (a) definiert sind, da $\text{supp}(\lambda_m \omega)$ kompakten Träger in einer Karte hat.

(B.11) Kommentar.

- (a) Wir haben schon in (B.1,c) schon geprüft, dass (B.10,a) nicht von der Wahl der orientierten Karte abhängt.
- (b) Die Summe auf der rechten Seite in (B.10,b) ist endlich, das soll hier heißen: Nur endlich viele Summanden sind von Null verschieden. Jedes $p \in M$ hat ja eine offene Umgebung $U_p \subseteq M$, die nur endlich viele der Träger von $\omega_m := \lambda_m \omega$ trifft.

$$\#\{m \in \mathbb{N} : U_p \cap \text{supp}(\omega_m) \neq \emptyset\} < \infty.$$

Da $\text{supp}(\omega) \subseteq M$ kompakt ist, ist aber

$$\text{supp}(\omega) \subseteq U_{p_1} \cup \dots \cup U_{p_r}$$

mit nur endlich vielen Punkten $p_1, \dots, p_r \in M$ ($r \in \mathbb{N}$). Also ist auch

$$\#\{m \in \mathbb{N} : \text{supp}(\omega_m) \neq \emptyset\} < \infty.$$

(c) Beachte auch, dass

$$\int_M : \mathcal{E}_{\text{cs}}^{(n)}(M) \rightarrow \mathbb{R},$$

mit

$$\mathcal{E}_{\text{cs}}^{(n)}(M) := \{\omega \in \mathcal{E}^n(M) : \omega \text{ hat kompakten Tr\"ager}\},$$

linear ist, weil die Lebesgue-Integrale $\mathcal{E}_{\text{cs}}^{(n)}(V) \rightarrow \mathbb{R}$ linear sind.

(d) Im Falle, dass $\text{supp}(\omega)$ in einem Kartengebiet ist, stimmt Definition (b) mit Definition (a) wegen $\sum_m \lambda_m = 1$ \"uberein.

(e) Es bleibt zu pr\"ufen, dass (B.10,b) nicht von der Auswahl des Orientierungsatlas \mathfrak{A} und nicht von der gew\"ahlten Teilung der Eins (λ_m) abh\"angt:

(B.12) Bemerkung. Die Definition (B.10) des Integrals \"uber n -Formen mit kompakten Tr\"ager \"uber orientierte Mannigfaltigkeiten (mit Rand) der Dimension n ist wohldefiniert.

Beweis. Seien $\mathfrak{A} = (\varphi_i : U_i \rightarrow V_i)_{i \in I}$ und $\tilde{\mathfrak{A}} = (\tilde{\varphi}_j : \tilde{U}_j \rightarrow \tilde{V}_j)_{j \in J}$ zwei Orientierungsatlanten auf M und $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ bzw. $(\tilde{\lambda}_l)_{l \in \mathbb{N}}$ ihnen untergeordnete Teilungen der Eins. Es ist dann f\"ur ein $\omega \in \mathcal{E}_{\text{cs}}^{(n)}(M)$:

$$\begin{aligned} \sum_{l \in \mathbb{N}} \int_M \tilde{\lambda}_l \omega &= \sum_{l \in \mathbb{N}} \int_M \tilde{\lambda}_l \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k \omega \right) && \text{(da } \sum \lambda_k = 1 \text{ ist)} \\ &= \sum_{l \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_M \tilde{\lambda}_l \lambda_k \omega && \left(\text{da das Lebesgue-Integral auf } \tilde{V}_{l(l)} \right. \\ & && \left. \text{linear ist, } \iota : \mathbb{N} \rightarrow J \right) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_M \lambda_k \left(\sum_{l \in \mathbb{N}} \tilde{\lambda}_l \omega \right) && \left(\text{da auch das Lebesgue-Integral auf } \right. \\ & && \left. V_{i(k)} \text{ linear ist, } \iota : \mathbb{N} \rightarrow J \right) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_M \lambda_k \omega && \text{(da } \sum \tilde{\lambda}_l = 1 \text{ ist)} \quad \square \end{aligned}$$

(B.13) Lemma. Sei $V \subseteq \mathbb{H}^n$ offen und $\omega \in \mathcal{E}_{\text{cs}}^{(n-1)}(V)$. Dann hat auch $d\omega \in \mathcal{E}^{(n)}(V)$ kompakten Tr\"ager und mit der Einbettung $\iota : V \cap \partial\mathbb{H}^n \hookrightarrow \mathbb{H}^n$, $y \mapsto (0, y)$, der Standard-Orientierung auf V und der induzierten Orientierung auf ∂V ($:= V \cap \partial\mathbb{H}^n$):

$$\int_V d\omega = \int_{\partial V} \iota^*(\omega).$$

Beweis. Seien $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{E}(V)$ die glatten Funktion mit

$$\omega = f_1 dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n + (-f_2) dx^1 \wedge dx^3 \wedge \dots \wedge dx^n + \dots + (-1)^n f_n dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1}.$$

Es ist dann einerseits:

$$\begin{aligned} d\omega &= d \left(\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} f_i dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n \right) \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{\partial f_i}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x^i} \right) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = \text{div}(f) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \end{aligned}$$

mit

$$\text{div}(f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x^i} \in \mathcal{E}(V).$$

Andererseits ist

$$\iota^* \omega = \iota^* f_1 dy^2 \wedge \cdots \wedge dy^n = f_1(0, y) dy^2 \wedge \cdots \wedge dy^n,$$

denn ist $\iota^* \omega = g(y) dy^2 \wedge \cdots \wedge dy^n$ ($y = (y^2, \dots, y^n)$) \implies

$$\begin{aligned} g(y) &= \iota^* \omega \left(\frac{\partial}{\partial y^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n} \right) \\ &= \omega \left(\iota_* \left(\frac{\partial}{\partial y^2} \right), \dots, \iota_* \left(\frac{\partial}{\partial y^n} \right) \right) = \omega \left(\frac{\partial}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right) \Big|_{i(y)} = f_1(0, y), \end{aligned}$$

da

$$\iota^* (dx^1) \left(\frac{\partial}{\partial y^j} \right) = \left\langle dx^1, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle = 0$$

für $j = 2, \dots, n$, denn $\iota_* \left(\frac{\partial}{\partial y^i} \right) = \frac{\partial}{\partial x^i}$. Nun ist zunächst

$$\text{supp} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x^i} \right) \subseteq \text{supp}(f),$$

damit $\text{supp}(d\omega) \subseteq \text{supp}(\omega)$ und damit auch kompakt. Wir können daher $a^2, \dots, a^n \in \mathbb{R}$ und $b^1, \dots, b^n \in \mathbb{R}$ wählen, so dass

$$\text{supp}(\omega) \subseteq [0, b^1] \times [a^2, b^2] \times \cdots \times [a^n, b^n].$$

Setzen wir nun noch ω trivial zu $\hat{\omega}$ auf ganz \mathbb{H}^n fort

$$\hat{\omega}(x) := \begin{cases} \omega(x) & \text{für } x \in V \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(und nennen die Fortsetzung wieder ω mit den trivial fortgesetzten f_i auf \mathbb{H}^n , die weiterhin \hat{f}_i (statt f_i) heißen mögen) so gilt mit den Satz von Fubini:

$$\begin{aligned} \int_V d\omega &= \int_{\mathbb{H}^n} d\hat{\omega} = \int_{\mathbb{H}^n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \hat{f}_i}{\partial x^i} dx^1 \cdots dx^n \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{a^n}^{b^n} \cdots \int_{a^i}^{\widehat{b^i}} \cdots \int_{a^1}^{b^1} \left(\int_{a^i}^{b^i} \frac{\partial f_i}{\partial x^i} dx^i \right) dx^1 \cdots \widehat{dx^i} \cdots dx^n \end{aligned}$$

mit $a^1 := 0$ und mit dem Hauptsatz der Differential und Integralrechnung:

$$\begin{aligned} \int_V d\omega &= \sum_{i=1}^n \int_{a^n}^{b^n} \cdots \int_{a^i}^{\widehat{b^i}} \cdots \int_{a^1}^{b^1} (f_i(x^1, \dots, x^{i-1}, b^i, x^{i+1}, \dots, x^n) \\ &\quad - f_i(x^1, \dots, x^{i-1}, a^i, x^{i+1}, \dots, x^n)) dx^1 \cdots \widehat{dx^i} \cdots dx^n. \end{aligned}$$

Da nun $\text{supp}(\omega) \subseteq [0, b^1] \times [a^2, b^2] \times \cdots \times [a^n, b^n]$ ist, gilt:

$$f_i(x^1, \dots, x^{i-1}, a^i, x^{i+1}, \dots, x^n) = f_i(x^1, \dots, x^{i-1}, b^i, x^{i+1}, \dots, x^n) = 0$$

für $i = 2, \dots, n$ und

$$f_1(b^1, x^2, \dots, x^n) = 0,$$

so dass nur noch überbleibt:

$$\begin{aligned} \int_V d\omega &= - \int_{a^n}^{b^n} \cdots \int_{a^2}^{b^2} f_1(0, x^2, \dots, x^n) dx^2 \cdots dx^n \\ &= - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \iota^* \omega = + \int_{\partial \mathbb{H}^n} \iota^* \omega = + \int_{\partial V} \iota^* \omega, \end{aligned}$$

mit der von V auf ∂V induzierten Orientierung (vgl. (B.4)). □

(B.14) Kommentar.

- (a) Der folgende Satz gilt als der Höhepunkt der Differential- und Integralrechnung. Auf der rechten müsste es genauer $\iota^*\omega$ statt ω heißen, wenn $\iota: \partial M \hookrightarrow M$ die Inklusion bezeichnet. (So ist die Formulierung ästhetischer, weil das „runde d“ vor den Integranden lediglich in das „partielle ∂ “ des Definitionsgebiet wandert)
- (b) Er enthält als Spezialfall den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (für glatte Funktionen), denn ist $M = [a, b]$ und $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ glatt, so gilt mit einer Stammfunktion $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, dass

$$\alpha := f(x)dx = F'(x)dx = d\omega$$

wenn man die Nullform $\omega \in \mathcal{E}^{(0)}(M)$ als $\omega := F$ setzt. Die Standard-Orientierung auf $[a, b]$ induziert die Gewichte -1 auf a und $+1$ auf b von $\partial M = \{a, b\}$, so dass für das Randintegral

$$\int_{\partial M} \iota^*\omega = -F(a) + F(b)$$

wird. Man erhält also:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} d\omega \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial[a,b]} \iota^*\omega = F(b) - F(a).$$

- (c) Tatsächlich haben wir in (B.13) gesehen, dass der Hauptsatz der wesentliche Bestandteil im Beweis ist, der den Spezialfall betrachtet, wo $\text{supp}(\omega)$ ganz in einem Kartengebiet liegt. Der Rest des Beweises besteht nur aus „Kartenzauber“.
- (d) Tatsächlich ist der Satz von Stokes ein Beispiel dafür, dass die Tiefe eines Satzes durchaus im Entdecken der richtigen Begriffsbildungen liegen kann, sozusagen in den Definitionen (hier z.B.: Mannigfaltigkeiten, Differentialformen und Orientierungen). Der eigentliche Beweis ist dann (mehr oder weniger) trivial.

(B.15) Theorem (Stokes). *Sei M eine orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand der Dimension n . Dann gilt für jede $(n - 1)$ -Form ω mit kompaktem Träger:*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Beweis. Wir wählen einen Orientierungsatlas $\mathfrak{A} = (\varphi_i: U_i \rightarrow V_i \subseteq \mathbb{H}^n)_{i \in I}$ (wobei wir für $n = 1$ auch $V_i \subseteq -\mathbb{H}^1$ zulassen müssen) und eine ihm untergeordnete Teilung der Eins $(\lambda_m)_{m \in \mathbb{N}}$ (mit $\iota: \mathbb{N} \rightarrow I$, so dass $\text{supp}(\lambda_m) \subseteq U_{\iota(m)}$ ist) mit kompakten Trägern $\text{supp}(\lambda_m) \subseteq U_{\iota(m)}$. Bezeichnen wir mit $\tilde{\mathfrak{A}}$ den induzierten Atlas von ∂M , dessen Karten für die induzierte Orientierung orientierungsumkehrend sind (außer bei $V_1 \subseteq -\mathbb{H}^1$), so ist $(\tilde{\lambda}_m)$ mit

$$\tilde{\lambda}_m := \lambda_m|_{\partial M}$$

eine $\tilde{\mathfrak{A}}$ -untergeordnete Teilung der Eins ist, $\tilde{\mathfrak{A}} := (\tilde{U}_i), \tilde{U}_i := U_i \cap \partial M, i \in I$ (und natürlich

ist auch $\text{supp}(\tilde{\lambda}_m)$ kompakt). Jetzt dürfen wir rechnen.

$$\begin{aligned}
 \int_M d\omega &= \sum_{m \in \mathbb{N}} \int_M d(\lambda_m \omega) && \left(\text{weil } \sum \lambda_m = 1 \text{ und } d \text{ und } \int_M - \text{ linear sind} \right) \\
 &= \sum_{m \in \mathbb{N}} \int_{V_{i(m)}} (\varphi_{i(m)}^{-1})^* (d\omega_m) && \left(\text{mit } \omega_m := \lambda_m \omega, \text{ da } d\omega_m \text{ kompakten} \right. \\
 &\stackrel{(4.67)}{=} \sum_{m \in \mathbb{N}} \int_{V_{i(m)}} d((\varphi_{i(m)}^{-1})^* \omega_m) && \left. \text{Träger in } U_{i(m)} \text{ hat.} \right) \\
 &\stackrel{(B.13)}{=} \sum_{m \in \mathbb{N}} \int_{\partial V_{i(m)}} j^* ((\varphi_{i(m)}^{-1})^* \omega_m) && \left(\text{wo } j: \tilde{V}_{i(m)} = \partial V_{i(m)} \hookrightarrow V_{i(m)} \text{ die} \right. \\
 &= \sum_{m \in \mathbb{N}} \int_{\partial V_{i(m)}} (\tilde{\varphi}_{i(m)}^{-1})^* (j^* \omega_m) && \left. \text{Inklusion bezeichnet} \right) \\
 &= \sum_{m \in \mathbb{N}} \int_{\partial M} j^* (\omega_m) && \left(\text{wo } j \text{ nun die Inklusion } \partial M \hookrightarrow M \right. \\
 &\stackrel{j \text{ ist linear}}{=} \int_{\partial M} j^* \left(\underbrace{\sum_{m \in \mathbb{N}} \omega_m}_{=\omega} \right) = \int_{\partial M} j^* \omega. && \left. \text{bezeichnet, denn es kommutieren} \right) \\
 &&& \left(\varphi_{i(m)}^{-1} \circ j = j \circ \tilde{\varphi}_{i(m)}^{-1} \right)
 \end{aligned}$$

□

(B.16) Korollar. Ist M geschlossen und $\omega \in \mathcal{E}^{(n-1)}(M)$ beliebig, so ist:

$$\int_M d\omega = 0.$$

(B.17) Proposition. Sei M^n eine Mannigfaltigkeit. Dann ist M genau dann orientierbar, wenn es eine globale n -Form ohne Nullstellen auf M gibt.

Beweis. „ \implies “: Sei $\mathfrak{A} = (\varphi_i: U_i \rightarrow V_i)_{i \in I}$ ein Orientierungsatlas von M . Auf jedem U_i definieren wir $\omega_i \in \mathcal{E}^{(n)}(U_i)$ durch

$$\tilde{\omega}_i = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Sei nun $(\lambda_i)_{i \in I}$ eine Teilung der Eins mit $\text{supp}(\lambda_i) \subseteq U_i$. Dann können wir $\lambda_i \tilde{\omega}_i \in \mathcal{E}^{(n)}(U_i)$ trivial außerhalb von U_i zu einer glatten n -Form $\omega_i \in \mathcal{E}^{(n)}(M)$ fortsetzen,

$$\omega_i(p) := \begin{cases} \lambda_i(p) \tilde{\omega}_i(p) & \text{für } p \in U_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Wir setzen dann

$$\omega = \sum_{i \in I} \omega_i$$

und stellen fest, dass für ein $p \in M$ die Summe auf der rechten Seite auf einer ganzen Umgebung von p endlich ist, damit ist ω wohldefiniert und glatt, $\omega \in \mathcal{E}^{(n)}(M)$.

Sei nun $p \in M$ beliebig und $i_0, \dots, i_r \in I$ die Indizes, wo $\lambda_i(p) \neq 0$ ist. Ist

$$\omega_{i_0} = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n,$$

so ist

$$\omega_k = f_k(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \quad (k = 1, \dots, r),$$

wo $x = \varphi_{i_0}$ ist und f_k die Funktionaldeterminante des Übergangs von φ_{i_k} zu φ_{i_0} ist und damit positiv. Es ist deshalb

$$\omega(p) = \left(\lambda_{i_0}(p) + \sum_{k=1}^r \lambda_{i_k}(p) f_k(x_k) \right) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \quad (\text{mit } x_k = \varphi_{i_k}(p))$$

und da mindestens ein $\lambda_{i_k}(p) > 0$ sein muss, weil $\sum_{k=0}^r \lambda_{i_k}(p) = 1$ ist, ist

$$\lambda_{i_0}(p) + \sum_{k=1}^r \lambda_{i_k}(p) f_k(x_k) > 0$$

„ \Leftarrow “: Sei $\omega \in \mathcal{E}^{(n)}(M)$ ohne Nullstellen. Da $\dim(\Lambda^n T^*M_p) = 1$ ist, folgt für $\alpha \in \Lambda^n T^*M_p$, dass es genau ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\alpha = \lambda \omega_p,$$

denn (ω_p) ist dann eine Basis von $\Lambda^n T^*M_p$.

Sei nun $\mathfrak{B} = (e_1, \dots, e_n)$ eine Basis von TM_p und $(\alpha^1, \dots, \alpha^n)$ die dazu duale Basis von T^*M_p . Wir nennen \mathfrak{B} positiv orientiert, wenn für $\alpha := \alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^n \in \Lambda^n T^*M_p$ gilt: Ist $\alpha = \lambda \omega_p$, so ist $\lambda > 0$. Das definiert tatsächlich eine Orientierung σ_p auf TM_p , denn ist für eine weitere Basis $\tilde{\mathfrak{B}} = (f_1, \dots, f_n)$ der Übergang zu \mathfrak{B} durch eine Matrix $S = (s_j^i) \in GL_n \mathbb{R}$ gegeben, $f_j = s_j^i e_i$ ($j = 1, \dots, n$), so gilt für die duale Basis $(\beta^1, \dots, \beta^n)$, dass $\beta^i = t_j^i \alpha^j$ ist mit $(t_j^i) =: T = S^{-1}$. Es folgt

$$\beta = \beta^1 \wedge \cdots \wedge \beta^n = \det(T) \alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^n = \det(T) \alpha.$$

Das zeigt: $\tilde{\mathfrak{B}}$ ist genau dann auch positiv orientiert, wenn $\det(S) > 0$ ist.

Es ist auch $\sigma = (\sigma_p)_{p \in M}$ dann tatsächlich eine Orientierung auf M , denn ist $\varphi: U \rightarrow V$ eine Karte um p , so dass

$$\omega|_U = f(x) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n,$$

sagen wir, $f(x_0) > 0$, so ist auch $f(x) > 0$ auf einer Umgebung von x_0 , sagen wir $\tilde{V} \subseteq V$, und damit $(\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p)$ positiv orientiert, für alle $q \in \tilde{U} = \varphi^{-1}(\tilde{V})$. Damit ist $D\varphi_q: (TM_q, \sigma_q) \rightarrow \mathbb{R}^n$ orientierungserhaltend für alle $q \in U$, denn $D\varphi_q(\frac{\partial}{\partial x^j}|_q) = e_j$ (mit der kanonischen Basis (e_1, \dots, e_n) von \mathbb{R}^n). Es ist also M orientierbar. \square

(B.18) Kommentar.

(a) Ein Geradenbündel $\pi: L \rightarrow M$ über M ist genau dann trivial, $L \cong \underline{\mathbb{R}}$, wenn es einen nullstellenfreien Schnitt hat (Übung: $s \in \Gamma(L)$ ohne Nullstelle $\implies \underline{\mathbb{R}} \rightarrow L, (p, \lambda) \rightarrow \lambda \cdot s(p)$ ist ein Isomorphismus). M ist also genau dann orientierbar, wenn ihr, so genanntes, **kanonische Bündel** $\Lambda^n T^*M$ trivial ist.

(b) Eine Orientierung auf einen (endlich-dimensionalen) \mathbb{R} -Vektorraum V kann man also als eine der beiden Zusammenhangskomponenten von

$$\Lambda^n V^* \setminus \{0\} \cong \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (n \in \mathbb{N})$$

betrachten. Ist M zusammenhängend und orientierbar, so hat also mit $L := \Lambda^n T^*M$ und dem Nullschnitt $s: M \rightarrow L$ die Mannigfaltigkeit $L \setminus s(M)$ zwei Zusammenhangskomponenten. (Im nicht orientierbaren Fall ist sie zusammenhängend, Übung)

(B.19) Definition. Sei M^n eine Mannigfaltigkeit und $\omega \in \mathcal{E}^{(n)}(M)$ ohne Nullstellen. Dann nennt man ω eine **Volumenform auf M** .

(B.20) Kommentar. Zwei Volumenformen ω_1, ω_2 induzieren nach dem Beweis von (B.17) also genau dann die gleiche Orientierung σ auf M , wenn für $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$\omega_2 = f\omega_1 \tag{*}$$

ist, gilt: $f(p) > 0$, für alle $p \in M$. Da jede Orientierung von einer Volumenform nach (B.17) auch induziert wird (man nehme zu σ das ω , welches in (B.17, „ \implies “) konstruiert wurde), kann man eine Orientierung auf M auch als eine Äquivalenzklasse von Volumenformen $[\omega]$ betrachten (mit $\omega_1 \wedge \omega_2$, genau wenn $(*)$ gilt).

(B.21) Bemerkung. Sei M^n eine kompakte Mannigfaltigkeit, $\omega \in \mathcal{E}^{(n)}(M)$ eine Volumenform und σ die von ω induzierte Orientierung auf M . Dann gilt auf (M, σ) .

$$\int_M \omega > 0.$$

Beweis. Ist $\mathfrak{A} = (\varphi_i: U_i \rightarrow V_i)_{i \in I}$ ein Orientierungsatlas von M , so ist mit

$$\omega|_{U_i} = f_i(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

offenbar $f_i > 0$, da ω_p und $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n|_p$ die gleiche Orientierung σ_p auf TM_p induzieren. Ist nun $(\lambda_i)_{i \in I}$ eine Teilung der Eins mit $\text{supp}(\lambda_i) \subseteq U_i, \forall i \in I$, so ist auch $\lambda_i f_i \geq 0$ und damit

$$\int_M \omega_i = \int_{V_i} \underbrace{\lambda_i \circ \varphi_i^{-1}(x) f_i(x)}_{\geq 0} d\mathcal{L}(x) \geq 0 \quad (\text{mit } \omega_i := \lambda_i \omega)$$

(Wir dürfen hier $A = I$ und $\iota = \mathbb{1}$ annehmen, da $\text{supp}(\lambda_i) \subseteq M$ stets kompakt ist, weil M kompakt ist.) Es folgt also zunächst

$$\int_M \omega = \sum_{i \in I} \int_M \omega_i \geq 0.$$

Zu $p \in M$ gibt es aber ein $i \in I$ mit $p \in U_i$ und $\lambda_i(p) > 0$. Da auch $f_i(x_0) > 0$ (mit $x_0 = \varphi_i(p)$) ist, ist

$$\lambda_i \circ \varphi_i^{-1}(x) f_i(x) > 0$$

auf einer ganzen Umgebung von x_0 und damit sogar

$$\int_M \omega_i > 0$$

und damit auch $\int_M \omega > 0$. □

(B.22) Kommentar.

(a) Ist $\omega \in \mathcal{E}^{(n)}(M)$ eine Volumenform, so nennt man (M, ω) auch eine **Volumen-Mannigfaltigkeit**. Ist M kompakt, so ist ihr **Volumen** dann (bzgl. der induzierten Orientierung)

$$\text{Vol}(M) := \int_M \omega \in (0, \infty).$$

(b) Sei (M, ω) eine Volumen-Mannigfaltigkeit und $A \subseteq M$ eine Borel-Menge (d.i. ein Element in der Borelschen σ -Algebra von M). Ist $\mathfrak{A} = (\varphi_i: U_i \rightarrow V_i)_{i \in I}$ ein Orientierungsatlas und $(\lambda_i)_{i \in I}$ eine untergeordnete Teilung der Eins, so setzt man für eine n -Form $\alpha \in \mathcal{E}^{(n)}(M)$ mit $\text{supp}(\alpha) \subseteq U_i$:

$$\int_A \alpha := \int_{\varphi_i(A) \cap V_i} f(x) d\mathcal{L}(x) \in [0, \infty]$$

wenn $f \geq 0$ ist. Für eine beliebige n -Form $\alpha \in \mathcal{E}^{(n)}(M)$ mit $\alpha = f\omega$ und $f \geq 0$ sei dann

$$\int_A \alpha := \sum_{i \in I} \underbrace{\int_A \lambda_i \alpha}_{\geq 0} \in [0, \infty].$$

Man setzt nun $\mu: \mathcal{L}(M) \rightarrow [0, \infty]$,

$$\mu(A) := \int_A \omega$$

μ ist dann ein Maß und macht (M, \mathcal{L}_M, μ) zu einem Maßraum. Für jede glatte Funktion (mit kompakten Träger) gilt dann (Übung):

$$\int_M f d\mu = \int_M f \omega.$$

(B.23) Definition. Sei V ein reeller Vektorraum und $p \in \mathbb{N}$. Identifiziert man $\Lambda^p V^*$ kanonisch mit $\text{Alt}_p(V)$, so nennt man für jedes $v \in V$ die Abbildung

$$\iota_v: \Lambda^p V^* \rightarrow \Lambda^{p-1} V^*$$

gegeben durch

$$(\iota_v \omega)(w_1, \dots, w_{p-1}) := \omega(v, w_1, \dots, w_{p-1}).$$

die Kontraktion von ω durch v (oder die **innere Multiplikation von ω mit v**).

(B.24) Kommentar.

- (a) Tatsächlich ist $\iota_v \omega$ $(p-1)$ -linear und alternierend, wenn ω p -linear und alternierend ist. Es ist auch ι_v tatsächlich linear und schließlich auch die Zuordnung

$$\iota: V \rightarrow \text{Hom}(\Lambda^p V^*, \Lambda^{p-1} V^*), \quad v \mapsto \iota_v$$

ist linear.

- (b) Ist nun M eine Mannigfaltigkeit, $\omega \in \mathcal{E}^{(n)}(M)$ und $X \in \mathfrak{X}(M)$, so kann man also ω mit X zu einer $(n-1)$ -Form $\iota_X \omega$ kontrahieren. Dann ist $d(\iota_X \omega)$ wieder eine n -Form. Ist nun $\omega \in \mathcal{E}^{(n)}(M)$ eine Volumenform, so gibt es ein eindeutig bestimmtes glattes $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$d(\iota_X \omega) = f \cdot \omega,$$

und dieses f hängt linear von X ab. Wir setzen:

(B.25) Definition. Sei (M, ω) eine Volumen-Mannigfaltigkeit. Dann heißt für jedes glatte Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ die Funktion $f =: \text{div}_\omega(X)$ mit

$$d\iota_X \omega = \text{div}_\omega(X) \cdot \omega$$

die **Divergenz von X** .

(B.26) Bemerkung. Sei (M, ω) eine Volumen-Mannigfaltigkeit und $x: U \rightarrow V \subseteq \mathbb{H}^n$ eine Karte. Ist dann $\omega|_U = f(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ und $\zeta^i \in \mathcal{E}(V)$ mit $X|_U = \zeta^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, so gilt für $\text{div}(X): M \rightarrow \mathbb{R}$ bzgl. der Karte x :

$$\text{div}(X) = \frac{1}{f} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} (f \zeta^i).$$

(B.27) Kommentar.

- (a) Das zeigt (erneut), dass $\operatorname{div}: \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathcal{E}(M)$ ein lokaler (linearer) Operator ist.
- (b) Ist bzgl. einer Karte x die Volumenform $\omega = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$, so stimmt div mit der üblichen Divergenz von Vektorfeldern $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$ auf offenen Teilmengen des \mathbb{R}^n überein,

$$\operatorname{div}(\xi) = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^i}.$$

Beweis. Schreiben wir $\iota_X \omega|U$ als

$$\iota_X \omega = (-1)^{i-1} \eta_i dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n$$

mit glatten Funktionen $\eta_i \in \mathcal{E}(V)$ ($i = 1, \dots, n$), so ist

$$\begin{aligned} \eta_i &= (-1)^{i-1} \iota_X \omega \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \widehat{\frac{\partial}{\partial x^i}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right) \\ &= (-1)^{i-1} \omega \left(X, \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \widehat{\frac{\partial}{\partial x^i}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right) \\ &= (-1)^{i-1} f \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \left(\xi^j \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \widehat{\frac{\partial}{\partial x^i}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right) \\ &= (-1)^{i-1} f \cdot \underbrace{(-1)^{i-1} \xi^i dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right)}_{=1} \\ &= f \xi^i. \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} d\iota_X \omega|U &= d((-1)^{i-1} \eta_i dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n) \\ &= (-1)^{i-1} \frac{\partial \eta_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n \\ &= \frac{\partial \eta_i}{\partial x^i} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \\ &= \frac{1}{f} \frac{\partial \eta_i}{\partial x^i} (f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) \\ &= \frac{1}{f} \frac{\partial \eta_i}{\partial x^i} \cdot \omega, \end{aligned}$$

also:

$$\operatorname{div}(X)|U = \frac{1}{f} \frac{\partial (f \xi^i)}{\partial x^i}. \quad \square$$

(B.28) Satz. Sei (M, ω) eine kompakte Volumen-Mannigfaltigkeit und X ein glattes Vektorfeld auf M . Dann gilt:

$$\int_M \operatorname{div}(X)\omega = \int_{\partial M} \iota_X \omega.$$

Beweis. Es ist nach Definition

$$d(\iota_X \omega) = \operatorname{div}(X)\omega,$$

also nach Stokes

$$\int_M \operatorname{div}(X)\omega = \int_M d(\iota_X \omega) = \int_{\partial M} \iota_X \omega. \quad \square$$

(B.29) Beispiel. Für $M = \mathbb{R}^n$ (und dann auch für jede offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$) ist

$$\omega := dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

eine Volumenform. Sie wird als die **Standard-Volumenform auf \mathbb{R}^n** bezeichnet.

Ist $X: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $X = (\xi^1, \dots, \xi^n)$ ein glattes Vektorfeld auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$, so ist seine Divergenz bzgl. der Standard-Volumenform also gegeben durch

$$\operatorname{div}(X) = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^i}.$$

(B.30) Erinnerung.

- (a) Eine kompakte Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ hat **glatten Rand**, wenn es für jedes $x \in \partial K$ eine offene Umgebung $U \subseteq K$ von x , ein offenes $V \subseteq \mathbb{H}^n$ und einen Diffeomorphismus $\varphi: U \rightarrow V$ gibt. Überdeckt man ∂K mit (endlich-vielen) solchen Karten und nimmt noch $\varphi_0 = \mathbb{1}: K \setminus \partial K \rightarrow K \setminus \partial K$, so wird K offenbar zu einer Mannigfaltigkeit mit Rand. Wir orientieren sie mit der Einschränkung der Standard-Volumenform auf \mathbb{R}^n .
- (b) $0 \leq k \leq n$ (sogar $k \in [0, n]$ ist erlaubt). Das k -dimensionale Hausdorff-Maß $\mathcal{H}^{k,n}$ auf der Borel-Algebra von \mathbb{R}^n (und durch Einschränkung damit auf jeder Borel-Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$) misst den k -dimensionalen Flächeninhalt einer Borel-Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{H}^{k,n}: \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty].$$

Ist $V \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, $\psi: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine **reguläre Parametrisierung**, d.h.: ψ ist eine injektive Immersion, so gilt für jede \mathcal{H}^k -integrierte Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, $M = \psi(V)$, dass $g: V \rightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch

$$g(u) := J_\psi(u) \cdot f \circ \psi(u)$$

\mathcal{L}^k -integriert auf V ($\mathcal{L}^k: \mathcal{L}(V) \rightarrow [0, \infty]$ das Lebesgue-Maß auf V) und es gilt die sogenannte **Flächenformel**

$$\int_M f(x) d\mathcal{H}^k(x) = \int_V g(u) d\mathcal{L}(u).$$

Hierbei ist $J_\psi: V \rightarrow \mathbb{R}$ die **Jacobische von ψ** , d.i.:

$$J_\psi(u) := \sqrt{\det(g_{ij}(u))_{i,j}}$$

mit

$$g_{ij}(u) := \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial u^i}, \frac{\partial \psi}{\partial u^j} \right\rangle(u) \quad (1 \leq i, j \leq k).$$

Für $g(u) = (g_{ij}(u))$ gilt also

$$g(u) = {}^t D\psi(u) \cdot D\psi(u).$$

$f: M \rightarrow \mathbb{R}$ ist z.B. dann \mathcal{H}^k -integriert, wenn f glatt ist und kompakten Träger hat.

- (c) Ist $M \subseteq \mathbb{R}^n$ der Rand eines Kompaktums K mit glatten Rand, $M = \partial K$, so gibt es ein eindeutig bestimmtes äußeres Einheits-Normalenfeld $\nu: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ (d.i. ein globaler Schnitt im $T\mathbb{R}^n|_M$, d.h.: $\nu(p) \in TK_p^{\text{außen}}$, $\|\nu(p)\|$ (bzgl. des Standard-Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ auf $TK_p \cong \mathbb{R}^n$)).

(B.31) Satz (Gauß). Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glatten Rand und X ein glattes Vektorfeld auf K . Ist $\nu: \partial K \rightarrow \mathbb{R}^n$ das äußeres Einheits-Normalenfeld entlang ∂K , so gilt:

$$\int_K \operatorname{div}(X) d\mathcal{L} = \int_{\partial K} \langle X, \nu \rangle d\mathcal{H}^{n-1}.$$

(B.32) Lemma. Seien $w_1, \dots, w_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \operatorname{Mat}(n \times (n-1), \mathbb{R})$ die Matrix, die w_1, \dots, w_{n-1} als Spalten hat. Für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ sei $A^i \in \operatorname{Mat}(n-1, \mathbb{R})$ die Untermatrix von A , bei der die i . Zeile gestrichen ist und $x^i := \det(A^i) \in \mathbb{R}$. Wir setzen

$$\nu := w_1 \times \dots \times w_{n-1} := (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n.$$

Dann gilt:

- (a) ν steht senkrecht auf w_j , $j = 1, \dots, n-1$;
 (b) es ist $\det({}^t AA) \geq 0$ und (w_1, \dots, w_{n-1}) ist linear unabhängig, genau wenn

$$J(w_1, \dots, w_{n-1}) := \sqrt{\det({}^t AA)} > 0$$

ist.

- (c) Bzgl. des Standard-Skalarproduktes auf \mathbb{R}^n ist

$$\|\nu\| = J(w_1, \dots, w_{n-1})$$

und für (w_1, \dots, w_{n-1}) linear unabhängig ist $(\nu, w_1, \dots, w_{n-1})$ eine positiv orientierte Basis von \mathbb{R}^n .

Beweis von (B.31). (a) Es reicht den Satz für ein Vektorfeld X zu beweisen, dessen Träger ganz in einer Karte $\varphi: U \rightarrow \tilde{V} \subseteq \mathbb{H}$ liegt, denn beide Seiten in (B.31) sind linear in X . Mit einer Teilung der Eins kann man dann nämlich X in eine Summe von solchen Vektorfeldern X_0, \dots, X_r zerlegen, die ihren Träger in einer Karte haben,

$$X = X_0 + \dots + X_r.$$

Gilt der Satz nun für X_i ($i = 0, \dots, r$), so auch für X :

$$\int_K \operatorname{div}(X) d\mathcal{L} = \sum_{i=0}^r \int_K \operatorname{div}(X_i) d\mathcal{L} = \sum_{i=0}^r \int_{\partial K} \langle X_i, \nu \rangle d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\partial K} \langle X, \nu \rangle d\mathcal{H}^{n-1}$$

- (b) Ist daher $\varphi: U \rightarrow \tilde{V} \subseteq \mathbb{H}^n$ eine positiv-orientierte Karte (evtl. $\subseteq -\mathcal{H}^1$ bei $n = 1$), so ist $\psi := \varphi^{-1}|_{\partial \tilde{V}} \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V := \partial \tilde{V} \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ offen, eine reguläre Parametrisierung. Setzen wir nun $\omega := dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \in \mathcal{E}^{(n)}(U)$ und

$$\alpha^i := (-1)^{i-1} dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n \in \mathcal{E}^{(n-1)}(U)$$

($i = 1, \dots, n$), so ist mit $X = (\xi^1, \dots, \xi^n) \in \mathfrak{X}(U)$ (vgl. Beweis von (B.26)):

$$\iota_X \omega = \sum_{i=1}^n \xi^i \alpha^i =: \alpha.$$

Wegen (B.27) ist dann

$$\int_K \operatorname{div}(X) d\mathcal{L} = \int_K \operatorname{div}(X) \cdot \omega = \int_K d(\iota_X \omega) = \int_{\partial K} \iota_X \omega = \int_{\partial K} \alpha = \int_V \psi^* \alpha.$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned}\psi^*(\alpha^i) &= (-1)^{i-1} d(x^1 \circ \psi) \wedge \cdots \wedge \widehat{d(x^i \circ \psi)} \wedge \cdots \wedge d(x^n \circ \psi) \\ &= (-1)^{i-1} \frac{\partial \psi^1}{\partial u^1} du^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\frac{\partial \psi^i}{\partial u^i} du^i} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial \psi^n}{\partial u^n} du^n \\ &= (-1)^{i-1} \det(A^i) du^1 \wedge \cdots \wedge du^{n-1},\end{aligned}$$

wo $A(u) \in \text{Mat}(n-1, n)$ nun die Jacobi-Matrix von ψ ist,

$$A = D\psi(u).$$

Da die Spalten $\frac{\partial \psi}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial \psi}{\partial u^{n-1}}$ von A den Tangentialraum $\text{TM}_x \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $M = \partial K$ aufspannen, ist dann wegen $J_\psi(u) = \sqrt{\det {}^t A(u) \cdot A(u)} = J\left(\frac{\partial \psi}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial \psi}{\partial u^{n-1}}\right)$:

$$\frac{\partial \psi}{\partial u^1} \times \cdots \times \frac{\partial \psi}{\partial u^{n-1}} = J_\psi(u) \cdot \nu(\psi(u))$$

$$\psi^*(\alpha^i) = J_\psi \cdot \nu^i \circ \psi \cdot du^1 \wedge \cdots \wedge du^{n-1} \quad (*)$$

Deshalb ist

$$\begin{aligned}\int_K \text{div}(X) d\mathcal{L} &= \sum_{i=1}^n \int_V J_\psi(\xi^i \circ \psi) \cdot (\nu^i \circ \psi) d\mathcal{L}(u) = \int_V \langle \xi, \nu \rangle \circ \psi \cdot J_\psi d\mathcal{L}(u) \\ &\stackrel{\text{(FF)}}{=} \int_{\partial K} \langle X, \nu \rangle d\mathcal{H}^{n-1}.\end{aligned} \quad \square$$

(B.33) Kommentar.

- (a) Ist ω eine Volumenform auf einer Mannigfaltigkeit M , so notiert man ω häufig auch als dV , weil für das Volumen $V = \text{vol}(M)$ im kompakten Fall dann gilt:

$$V = \int_M dV$$

und nennt dV das „infinitesimale Volumenelement“ auf M . Das ist etwas verwirrend, weil zumindest im kompakten Fall (und M ohne Rand) ω definitiv nicht exakt ist, weil einerseits $V = \int \omega > 0$ ist nach (B.21) und andererseits nach Stokes für eine exakte Form $d\alpha \in \mathcal{E}^{(n)}(M)$, $\alpha \in \mathcal{E}^{(n-1)}(M)$, gilt:

$$\int_M d\alpha = 0.$$

- (b) Ist $K \subseteq \mathbb{R}^n$ Kompaktum mit glatten Rand $M = \partial K$ und $\varphi: U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ eine positiv orientierte Karte auf M , so setzen sich die Formen,

$$\omega^\varphi := \varphi^*(J_\psi(u) du^1 \wedge \cdots \wedge du^{n-1})$$

mit $\psi = \varphi^{-1}$ und $J_\psi: V \rightarrow \mathbb{R}_+$ der Jacobischen von ψ , zu einer globalen Volumenform $\alpha \in \mathcal{E}^{(n-1)}(M)$ zusammen. Nach dem Beweis von (B.31) ist nämlich

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \nu^i \iota^*(\alpha_i),$$

wenn man (*) mit $v^i \circ \psi$ multipliziert, aufsummiert und $\|v\| = 1$ verwendet, und wo $\iota: M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ die Inklusion bezeichnet.

Diese Volumenform wird klassischer Weise als dS notiert und als „infinitesimales Oberflächenelement“ bezeichnet. Mit diesen Notationen liest sich der Satz von Gauß für glatte Vektorfelder auf K dann so:

$$\int_K \operatorname{div}(X) dV = \int_{\partial K} \langle X, v \rangle dS.$$

(B.34) Vorbereitung.

- (a) Sei nun $M \subseteq \mathbb{R}^3$ eine orientierte Untermannigfaltigkeit (evtl. mit Rand). Dann gibt es zu jedem $p \in M$ eine eindeutig bestimmte Einheits-Normale $v_p \in \mathbb{R}^3$, also $v_p \perp TM_p$ und $\|v_p\| = 1$ (bzgl. des kanonischen Skalarproduktes auf \mathbb{R}^3), so dass für eine positiv orientierte Basis (e_1, e_2) von TM_p gilt: (v_p, e_1, e_2) ist positiv orientierte Basis von \mathbb{R}^3 . Die Zuordnung $M \rightarrow \mathbb{R}^3, p \mapsto v_p$, ist dann ein glattes Vektorfeld auf \mathbb{R}^3 entlang M . Bzgl. einer positiv orientierten lokalen Parametrisierung $\psi: V \rightarrow U \subseteq M \subseteq \mathbb{R}^3$ wäre z.B.

$$v \circ \psi = \frac{\frac{\partial \psi}{\partial u^1} \times \frac{\partial \psi}{\partial u^2}}{\left\| \frac{\partial \psi}{\partial u^1} \times \frac{\partial \psi}{\partial u^2} \right\|}$$

und damit glatt (Übung). Wir nennen v das positivorientierte Einheitsnormalenfeld an M .

- (b) Sei nun $M \subseteq \mathbb{R}^3$ wie unter (a) und $U \subseteq \mathbb{R}^3$ eine offene Umgebung von M . Für ein glattes Vektorfeld $X = (\xi^1, \xi^2, \xi^3): U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist dessen **Rotation** erklärt durch $\operatorname{rot}(X): U \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\operatorname{rot}(X) = \left(\frac{\partial \xi^3}{\partial x^2} - \frac{\partial \xi^2}{\partial x^3}, \frac{\partial \xi^1}{\partial x^3} - \frac{\partial \xi^3}{\partial x^1}, \frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} - \frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} \right) \quad (= \vec{\nabla} \times X),$$

wobei $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^3} \right)$. Setzen wir $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathcal{E}^{(2)}(U)$,

$$\beta_1 := dx^2 \wedge dx^3, \beta_2 := dx^3 \wedge dx^1, \beta_3 := dx^1 \wedge dx^2,$$

so erhalten wir für das infinitesimale Flächenelement dS auf M , welches bzgl. einer orientierten Karte $\varphi: U \rightarrow V \subseteq \mathbb{H}^2$ gegeben ist durch

$$dS = J_\psi(u) du^1 \wedge du^2$$

mit $\psi = \varphi^{-1}$, dass

$$dS = \sum_{i=1}^3 v^i \beta^i \in \mathcal{E}^{(2)}(M)$$

⌈ $\implies \beta^i = v^i dS$ auf M ⌋
 ist. (Eigentlich $\sum_i v^i \iota^*(\beta^i)$, wo $\iota: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ die Inklusion ist, die wir aber unterdrücken.)
 Setzen wir nun $\alpha^i := dx^i \in \mathcal{E}^{(1)}(U)$ und

$$\alpha := \sum_{i=1}^3 \xi^i \alpha^i \in \mathcal{E}^{(1)}(U),$$

so gilt:

$$\begin{aligned} d\alpha &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i \\ &= \left(\frac{\partial \xi^3}{\partial x^2} - \frac{\partial \xi^2}{\partial x^3} \right) dx^2 \wedge dx^3 + \dots + \left(\frac{\partial \xi^3}{\partial x^1} - \frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2 \\ &= \sum_{i=1}^3 \text{rot}(X)^i \cdot \beta^i. \end{aligned}$$

Das zeigt, dass die Funktion $\langle \text{rot}(X), \nu \rangle: M \rightarrow \mathbb{R}$, nur von $X|_M$ abhängt, denn:

$$\langle \text{rot}(X), \nu \rangle dS = \sum_{i=1}^3 \text{rot}(X)^i \cdot \underbrace{\nu^i dS}_{=\beta^i} = d\alpha$$

auf M . Man braucht nämlich nur α auf M zu kennen (eigentlich nur $\iota^*(\alpha)$, s.o.) und dieses dann auf M differenzieren. Der Koeffizient von der dS ist dann $\langle \text{rot}(X), \nu \rangle$.

- (c) Ist nun $M \subseteq \mathbb{R}^3$ orientierte Untermannigfaltigkeit mit Rand $C = \partial M$, so sei für jedes $p \in C$ dann $\tau_p \in \text{TC}_p$ positiv orientierte Einheits-Tangentenvektor von C an p . Ist $\psi: I \rightarrow C \subseteq \mathbb{R}^3$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, eine reguläre Parametrisierung, so ist

$$\tau \circ \psi(t) = \frac{\dot{\psi}(t)}{\|\dot{\psi}(t)\|},$$

also

$$\dot{\psi} = \|\dot{\psi}\| \cdot (\tau \circ \psi) \quad (*)$$

Beachte auch, dass $t \mapsto \|\dot{\psi}(t)\|$ in diesem Fall die Jacobische von ψ ist:

$$J_\psi(t) = \sqrt{\det({}^t\dot{\psi}(t) \cdot \dot{\psi}(t))} = \sqrt{\sum \dot{\psi}^i \dot{\psi}^i} = \|\dot{\psi}\|.$$

(B.35) Satz (klassischer Satz von Stokes). Sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ eine kompakte, orientierte Untermannigfaltigkeit mit Rand, $\nu: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ ihr positives Einheitsnormalenvektorfeld und $\tau: \partial M \rightarrow \mathbb{R}^3$ ihr positives Einheitsstangentenfeld auf dem Rand. Für jedes glatte Vektorfeld X auf M gilt dann:

$$\int_M \langle \text{rot}(X), \nu \rangle d\mathcal{H}^2 = \int_{\partial M} \langle X, \tau \rangle d\mathcal{H}^1.$$

Beweis. Wir haben schon gesehen, dass mit dem allgemeinen Satz von Stokes

$$\int_M \langle \text{rot}(X), \nu \rangle d\mathcal{H}^2 = \int_M \langle \text{rot}(X), \nu \rangle dS = \int_M d\alpha = \int_{\partial M} \alpha$$

ist, wo

$$\alpha = \sum_{i=1}^3 \xi^i dx^i \in \mathcal{E}^{(1)}(M).$$

Mit einem üblichen Argument, das eine Teilung der Eins benutzt, dürfen wir annehmen, dass X seinen Träger im Definitionsgebiet einer positiv orientierten Karte $\varphi: U \rightarrow V \subseteq \mathbb{H}^2$ hat und wir nennen $\psi: I \rightarrow C$ mit $\psi := \varphi^{-1}|_{\partial V}$, $I = \partial V$. Dann ist

$$\psi^*(dx^i) = d(x^i \circ \psi) = \frac{d\psi^i}{dt} \cdot dt = \dot{\psi}^i dt,$$

also

$$\begin{aligned} \psi^*(\alpha) &= \sum_{i=1}^3 \tilde{\zeta}^i \circ \psi \cdot \psi^*(dx^i) = \sum_{i=1}^3 \tilde{\zeta}^i \circ \psi \cdot \dot{\psi}^i dt \\ &= \sum_{i=1}^3 (\tilde{\zeta}^i \circ \psi) \cdot (\tau^i \circ \psi) \cdot \|\dot{\psi}\| dt && \text{(wegen (*))} \\ &= \langle X, \tau \rangle \circ \psi J_\psi dt. \end{aligned}$$

Es folgt also:

$$\begin{aligned} \int_M \langle \text{rot}(X), \nu \rangle d\mathcal{H}^2 &= \int_{\partial M} \alpha = \int_I \psi^*(\alpha) = \int_I \langle X, \tau \rangle \circ \psi \cdot J_\psi dt \\ &= \int_{\partial M} \langle X, \tau \rangle d\mathcal{H}^1. \end{aligned} \quad \square$$

(B.36) Kommentar.

(a) Auch hier setzen sich die Elemente $\|\dot{\psi}(t)\| dt \in \mathcal{E}^{(1)}(I)$ zu einer globalen 1-Form $ds \in \mathcal{E}^{(1)}(C)$ zusammen, denn es ist

$$ds = \sum_{i=1}^3 \tau^i dx^i,$$

weil

$$\begin{aligned} \psi^*(dx^i) = \dot{\psi}^i dt &\implies \psi^*\left(\sum_i \tau^i dx^i\right) = \sum_i \frac{\dot{\psi}^i}{\|\dot{\psi}\|} \psi^*(dx^i) \\ &= \sum_i \frac{\dot{\psi}^i}{\|\dot{\psi}\|} \cdot \dot{\psi}^i dt = \|\dot{\psi}\| dt. \end{aligned}$$

Es heißt das **infinitesimale Bogenelement** von C .

(b) In Termen der induzierten Volumenelemente $dS \in \mathcal{E}^{(2)}(M)$ und $ds \in \mathcal{E}^{(1)}(C)$, $C = \partial M$, liest sich der klassische Satz von Stokes für glatte Vektorfelder $X \in \mathfrak{X}(M)$ also dann so:

$$\int_M \langle \text{rot}(X), \nu \rangle dS = \int_{\partial M} \langle X, \tau \rangle ds.$$

(B.37) Erinnerung. Ist X ein topologischer Raum, so heißt ein Teilraum $A \subseteq X$ ein **Retrakt von X** , wenn es eine stetige Abbildung $r: X \rightarrow A$ mit $r(a) = a$, für alle $a \in A$, gibt. Eine solche Abbildung heißt dann eine **Retraktion**. Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit und $N \subseteq M$ eine Untermannigfaltigkeit, so betrachten wir zunächst nur glatte Retraktionen $r: M \rightarrow N$.

(B.38) Satz (Retraktionssatz). Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es keine Retraktion von \mathbb{B}^n auf $S^{n-1} \subseteq \mathbb{B}^n$.

Beweis. Da S^{n-1} orientierbar ist, gibt es eine Volumenform $\omega \in \mathcal{E}^{(n-1)}(S^{n-1})$, z.B. $\omega = dS$, wenn dS die von \mathbb{R}^n induzierte Standard-Volumenform auf S^{n-1} ist (vgl. (B.33,b)). Da S^{n-1} auch kompakt ist, ist bzgl. der von ω induzierten Orientierung nach (B.21) einerseits

$$\int_{S^{n-1}} \omega > 0.$$

Andererseits ist natürlich $d\omega = 0$, weil jede n -Form auf S^{n-1} gleich Null sein muss, und daher wegen (4.67) auch

$$d(r^*\omega) = r^*(d\omega) = 0,$$

wenn $r: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ (doch) eine (glatte) Retraktion ist. Da für die Inklusion $i: \mathbb{S}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{B}^n$ aber $r \circ i = \mathbb{1}$ ist, ist nach dem Satz von Stokes

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \omega = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} (r \circ i)^* \omega = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} i^*(r^* \omega) \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_{\mathbb{B}^n} d(r^* \omega) = \int_{\mathbb{B}^n} 0 = 0. \quad \square$$

(B.39) Satz (Fixpunktsatz von Brouwer). Ist $\Phi: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$ eine glatte Abbildung, so hat Φ einen Fixpunkt, d.h. es gibt $\zeta \in \mathbb{B}^n$ mit $\Phi(\zeta) = \zeta$.

Beweis. Angenommen $\Phi: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$ hätten keinen Fixpunkt, also $\Phi(p) \neq p \forall p \in \mathbb{B}^n$. Sei dann $r(p) \in \mathbb{S}^{n-1}$ der Schnittpunkt des Strahls, der in $\Phi(p)$ startet und in Richtung $p - \Phi(p)$ geht, mit \mathbb{S}^{n-1} ,

$$\begin{aligned} \{r(p)\} &= \mathbb{S}^{n-1} \cap L_p, \\ L_p &= \Phi(p) + \mathbb{R}_{>0} \cdot (p - \Phi(p)). \end{aligned}$$

Dann ist $r: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ auch glatt, weil r gegeben ist durch

$$r(x) = x + t(x) \cdot u(x)$$

mit

$$u(x) = \frac{x - \Phi(x)}{\|x - \Phi(x)\|}, \quad t(x) = -\langle x, u \rangle + \underbrace{\left(1 - \|x\|^2 + \underbrace{\langle x, u \rangle^2}_{\geq 0}\right)^{1/2}}_{\geq 0}$$

und mindestens einer der Summanden ist positiv

Aber nach Konstruktion wäre $r(p) = p$, für alle $p \in \mathbb{S}^{n-1}$, also r eine Retraktion. Die gibt es aber nicht. □

(B.40) Kommentar.

(a) (B.38) und (B.39) gelten auch für stetige Abbildungen. Ist etwa in (B.39) $\Phi: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$ nur stetig, so kann man Φ nach dem **Approximationssatz von Weierstraß** gleichmäßig (bzgl. der euklidischen Norm) durch glatte Funktionen approximieren (sogar durch Polynome), da \mathbb{B}^n kompakt ist. Sei daher $f_n: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$ glatt und $\|f_n - \Phi\|_\infty \rightarrow 0$ (in der Supremumsnorm $\|f\| = \sup_{x \in \mathbb{B}^n} |f(x)|$). Ist dann $\zeta_n \in \mathbb{B}^n$ ein Fixpunkt von f_n , $f_n(\zeta_n) = \zeta_n$, so sei $\zeta \in \mathbb{B}^n$ ein Häufungspunkt von (ζ_n) und o.E.: $\lim(\zeta_n) = \zeta$ (sonst gehe zu einer geeigneten Teilfolge von (ζ_n) über). Aber dann ist für jedes $\varepsilon > 0$

$$\|\Phi(\zeta) - \zeta\| \leq \underbrace{\|\Phi(\zeta) - \Phi(\zeta_n)\|}_{< \varepsilon/3, \text{ da } \Phi \text{ stetig}} + \underbrace{\|\Phi(\zeta_n) - f_n(\zeta_n)\|}_{= \zeta_n}^{< \varepsilon/3, \text{ da } (f_n) \xrightarrow{\text{glm}} \Phi} + \underbrace{\|\zeta_n - \zeta\|}_{< \varepsilon/3, \text{ da } (\zeta_n) \rightarrow \zeta} < \varepsilon,$$

wenn $n = n(\varepsilon)$ groß genug gewählt ist. Also ist auch $\Phi(\zeta) = \zeta$.

(b) Wäre in (B.36) $r: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ eine (nur stetige) Retraktion, so könnte man $\Phi: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$ gleich $d \circ r$, wo $d: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ die Antipodenabbildung ist. Dann wäre Φ stetig ohne Fixpunkte, denn für $p \notin \mathbb{S}^{n-1}$ ist $\Phi(p) \neq p$, da $\Phi(p) \in \mathbb{S}^{n-1}$ ist, und für $p \in \mathbb{S}^{n-1}$ ist $\Phi(p) = -p \neq p$, da $\Phi(p) = d(p)$ in diesem Fall ist.

Index

- Übergangsfunktion, 17
- Übergangsfunktionen, 91
- äußere Ableitung, 105
- 1-Parametergruppe, 46

- abstandstreue, 4
- abgeschlossen, 5
- Abschneidefunktion, 54
- abzählbare Topologie, 6
- Algebra, 81
 - graduiert, 82
- Algebrenbündel, 98
- Antipoden, 10
- Atlas, 17

- Bündel
 - Homomorphismus, 92
 - Isomorphismus, 92
- Bündelatlas, 90
- Bündelkarte, 90
- Bahn, 24
- Bahnenraum, 26
- Ball, 7
- Basis, 6

- Cartesisches Blatt, 60
- Codimension, 40
- Cotangentialbündel, 36, 98
- Cotangentialraum, 34
- Covektoren, 35

- Darstellung, 24
- Derivation, 28, 29
- derivativ, 29
- Diffeomorphismus, 21
 - lokal, 23
- Differential, 38, 39, 105
 - total, 38
- Differentialform, 36
- differenzierbar, 18, 20, 21
- differenzierbare Struktur, 18
- direkten Summe, 79, 97
- diskrete Topologie, 5
- Distribution, 63
 - integrabel, 63
- Divergenz, 138
- Dreiecksungleichung, 3
- dynamisches System, 45
 - global, 46

- eigentlich diskontinuierlich, 25
- Einbettung, 10, 42
- Einpunktvereinigung, 11
- Erzeugendensystem, 7
- euklidische Raum, 3

- Faserprodukt, 98
- fein, 6, 8
- Flächenformel, 140
- Fluss, 47
- freie Vektorraum, 75
- Frobenius, 65
- Frobenius-Box, 66
- Funktionskeime, 29

- Geradenbündel, 92
 - glatt, 37, 115
 - glatte Abbildung, 28
 - glatte Funktion, 28
 - grob, 6, 7

- Häufungspunkt, 14
- hausdorffsch, 5
- Heine-Borel, 15

- Homöomorphismus, 5
 homotop, 118
 Hyperfläche, 40

 Igelsatz, 38, 96
 Immersion, 42
 impliziten Funktionensatz, 41
 indiskrete Topologie, 5
 induzierte Topologie, 5, 6
 Inklusion, 6
 innere Multiplikation, 138
 Integral-Mannigfaltigkeit, 63
 Integralkurve, 48
 involutiv, 65
 isotop, 122

 Jacobi-Identität, 53

 Karte, 17
 Kleinsche Flasche, 10
 kompakt, 13
 Kontraktion, 138
 Koordinatensysteme, 17
 Koordinatenvektor, 30
 Koordinatenvektorfelder, 36

 Lösungskurve, 48
 Lie-Algebra, 53
 abelsch, 53
 Lie-Unteralgebra, 54
 Lie-Klammer, 53
 Linienfeld, 62
 lokal wegzusammenhängend, 12
 lokal endlich, 128

 Möbiusband, 8, 92
 Mannigfaltigkeit
 differenzierbar, 18
 geschlossen, 118
 glatt, 28
 mit Rand, 115
 topologische, 17
 mit Rand, 115
 Untermannigfaltigkeit, 28, 40
 Metrik, 3
 diskrete Metrik, 3
 euklidische Metrik, 3
 induzierte euklidische Metrik, 3
 induzierte Metrik, 3
 metrischer Raum, 3
 metrisierbar, 5

 natürliche Paarung, 86
 Neillsche Parabel, 60
 nicht-entartet, 86

 offen, 3, 5, 10
 offene Überdeckung, 13
 Operation, 23
 Orbit, 24
 orientiert
 entgegen, 116
 gleich, 116
 Orientierung, 116, 117
 Orientierungsatlas, 127
 orientierungserhaltend, 116
 orientierungsumkehrend, 117
 orthogonale Gruppe, 108

 Produktes, 79
 Produkttopologie, 7
 projektive Raum, 10

 Quotienten-Topologie, 8

 Rand, 116
 Relativtopologie, 6
 Richtungsableitung, 28
 Rotation, 143

 Satz
 Sard, 118
 Schiefsymmetrie, 53
 Schnitt, 95
 global, 95
 Nullschnitt, 96
 nullstellenfrei, 96
 spezielle lineare Gruppe, 110
 spezielle orthogonale Gruppe, 109
 spezielle unitäre Gruppe, 110
 Sphäre, 7, 19
 stereographische Projektion, 20
 Standard-Orientierung, 116
 Standgruppe, 24
 stetig, 4, 5
 Subbasis, 7
 Submersion, 42
 Summentopologie, 10

 Tangentialbündel, 36
 Tangentialraum, 28, 29
 Tangentialvektor, 29, 30
 Teilraumtopologie, 6

Teilung der Eins, 128
 Tensor, 87
 Tensorbündel, 98
 Tensorfeld, 99
 Tensorprodukt, 76
 Topologie, 4
 topologischer Raum, 5
 Torus, 8
 Träger, 125
 transitiv, 24
 Translationen, 26
 Trennungssaxiom, 5
 Tychonoff, 14

 Umgebung, 5
 Umgebungsbasis, 12
 unendlich ferne Hyperebene, 10
 unitäre Gruppe, 109
 universelle Eigenschaft, 6–8, 75, 76, 79, 84,
 112

 Vektorbündel, 91
 Vektorfeld, 36
 vollständig, 53
 Verjüngung, 88
 Volumen-Mannigfaltigkeit, 137
 Volumenform, 136

 Weg, 11
 wegzusammenhängend, 11

 zusammenhängend, 11
 zweiseitiges Ideal, 82
 Zylinder, 8

Literaturverzeichnis

[Wa] *F. Warner: Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer-Verlag.

[SZ] *R. Stöcker ; H. Zieschang: Algebraische Topologie*, Teubner-Verlag.

[BC] *Bishop, Crittenden: Geometry of manifolds*, Academic Press.

[Hi] *Hirsch: Differential Topology*, Springer-Verlag.

[Mi] *J. Milnor: Topology from the Differentiable Viewpoint*, University of Virginia Press 1972.

[Sp] *Spirak: Calculus on Manifolds*.