Vorlesungsmitschrieb

Differentialgeometrie I, II & III

Prof. Dr. Frank Loose

im Wintersemester 2010/2011,
Sommersemester 2011,
und Wintersemester 2011/2012
an der Eberhard-Karls-Univerität Tübingen

gesetzt von Christian Power mit LaTeX

Letzte Änderung: 26. April 2012

Vorwort

Dieses Scriptum ist ein Mitschrieb der Vorlesungen Differentialgeometrie I - IV aus dem WS 2010/2011 (4 SWS), SS 2011 (4 SWS), WS 2011/2012 (2 SWS) und SS 2012 in Tübingen. Der Appendix A und B wurden in Differentialgeometrie II gemacht. Der Appendix C in Differentialgemetrie III.
Wer Fehler findet, schickt mir bitte ein E-mail an: power2c@aol.com.

Inhaltsverzeichnis

Teil I.

Differentialgeometrie I

1 Kapitel 1.

Mengentheoretische Topologie

(1.1) Definition. Sei M eine Menge. Eine Abbildung $d : M \times M \to [0, \infty)$ heißt eine **Metrik** auf M, wenn gilt:

(a) $d(p, q) = 0 \iff p = q$;

(b) $d(q, p) = d(p, q)$, $\forall p, q \in M$;

(c) $d(p, r) \le d(p, q) + d(q, r)$, $\forall p, q, r \in M$ (Dreiecksungleichung).

Das Paar (M, d) heißt dann ein **metrischer Raum**.

(1.2) Beispiel.

(a) Sei $\|\,.\,\|\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$, $\|x\| := \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$. Dann ist

$$d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty),\ d(x, y) := \|y - x\|$$

eine Metrik auf $\mathbb{R}^n$ (Übung). Es heißt $d = d_{\text{eukl}}$ die **euklidische Metrik** und $(\mathbb{R}^n, d_{\text{eukl}})$ der **euklidische Raum**.

(b) Sei M eine beliebige Menge. Dann ist $d : M \times M \to [0, \infty)$,

$$d(p, q) := \begin{cases} 0 & \text{für } p = q, \\ 1 & \text{für } p \neq q \end{cases}.$$

eine Metrik auf M (Übung). Sie heißt die **diskrete Metrik** auf M.

(c) Sei $V = \mathscr{C}([0, 1]) := \{f : [0, 1] \to \mathbb{R} : f \text{ ist stetig}\}$. Setze $\|f\| := \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| < \infty$, und dann $d(f, g) := \|g - f\|$. Dann ist d eine Metrik auf V (Übung).

(1.3) Beispiel. Sei (M, d) metrischer Raum und $A \subseteq M$ beliebige Teilmenge. Dann *erbt* A durch $d_A : A \times A \to [0, \infty)$, $d_A(p, q) := d(p, q)$ eine Metrik. Sie heißt die **induzierte Metrik**. Insbesondere: Ist $M \subseteq \mathbb{R}^n$ beliebige Teilmenge, so $d := d_{\text{eukl}}|M \times M$ die **induzierte euklidische Metrik**.

(1.4) Definition. Sei (M, d) ein metrischer Raum, $p \in M$, $r > 0$.

(a) Es heißt dann $B(p; r) := \{q \in M : d(q, p) < r\}$ der (offene) **Ball** *um p mit Radius r*.

(b) Es heißt eine Teilmenge $U \subseteq M$ **offen**, wenn es zu jedem $p \in U$ ein $r > 0$ gibt mit $B(p; r) \subseteq U$.

(c) Es heißt $S \subseteq M$ eine **Umgebung** *von p*, wenn es ein offenes $U \subseteq M$ gibt mit $p \in U \subseteq S$.

(1.5) Definition. Seien (M_1, d_1) und (M_2, d_2) metrische Räume.

(a) Eine Abbildung $\Phi : M_1 \to M_2$ heißt **stetig** *in* $p_1 \in M_1$, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass aus $d_1(x, p_1) < \delta$ folgt: $d_2\big(\Phi(x), \Phi(p_1)\big) < \varepsilon$.

(b) Φ heißt **stetig**, wenn Φ stetig ist in $p \in M_1$, für alle $p \in M_1$.

(1.6) Bemerkung. Sei $\Phi : M_1 \to M_2$ eine Abbildung zwischen metrischen Räumen, $p_1 \in M_1$. Dann gilt:

(a) Es ist Φ stetig in p_1 genau, wenn für jede Umgebung $S_2 \subseteq M_2$ von $p_2 := \Phi(p_1)$ gilt: $\Phi^{-1}(S_2)$ ist Umgebung von p_1.

(b) Es ist Φ stetig, genau wenn das Urbild jeder offenen Menge offen ist.

Beweis. (a) „$\Longrightarrow$“: Sei S_2 Umgebung von p_2 und $U_2 \subseteq M_2$ offen mit $p_2 \in U_2 \subseteq S_2$. Da U_2 offen ist, existiert $\varepsilon > 0$, so dass $B(p_2; \varepsilon) \subseteq U_2$. Da Φ stetig in p_1 ist, existiert nun ein $\delta > 0$ so klein, dass $\Phi\big(B(p_1; \delta)\big) \subseteq B(p_2; \varepsilon)$ ist. Also ist

$$B(p_1; \delta) \subseteq \Phi^{-1}\Big(\Phi\big(B(p_1; \delta)\big)\Big) \subseteq \Phi^{-1}\big(B(p_2; \varepsilon)\big) \subseteq \Phi^{-1}(S_2),$$

und da $B(p_1; \delta)$ offen ist (Übungsaufgabe, Blatt 1), folgt: $\Phi^{-1}(S_2)$ ist Umgebung von p_1.

„$\Longleftarrow$“: Sei $\varepsilon > 0$ und $S_2 := B(p_2; \varepsilon) \Longrightarrow S_2$ ist Umgebung von p_2, also ist auch $\Phi^{-1}(S_2)$ Umgebung von $p_1 \Longrightarrow \exists \delta > 0 : B(p_1; \delta) \subseteq \Phi^{-1}(S_2) \Longrightarrow$

$$\Phi\big(B(p; \delta)\big) \subseteq \Phi\big(\Phi^{-1}(S_2)\big) \subseteq S_2 = B(p_2; \varepsilon).$$

$\Longrightarrow \Phi$ ist stetig in p_1.

(b) Übung (Blatt 1). □

(1.7) Bemerkung. Sei M ein metrischer Raum. Dann gilt:

(a) Ist $(U_i)_{i \in I}$ beliebige Familie offener Mengen in M, so ist auch $\bigcup_{i \in I} U_i$ offen;

(b) Ist $n \in \mathbb{N}$, $U_1, \ldots, U_n \subseteq M$ offen so ist auch $\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ offen.

Beweis. (a) Sei $p \in U := \bigcup_{i \in I} U_i. \Longrightarrow \exists i_0 \in I : p \in U_{i_0}. \Longrightarrow \exists r > 0 : B(p; r) \subseteq U_{i_0} \subseteq U.$

(b) Sei $p \in U := \bigcap_{i=1}^{n} U_i \Longrightarrow \forall i, \exists r_i > 0 : B(p; r_i) \subseteq U_i$. Setze $r := \min_{i=1,\ldots,n}(r_i) > 0$. $\Longrightarrow B(p; r) \subseteq B(p; r_i) \subseteq U_i$, $\forall i = 1, \ldots, n. \Longrightarrow B(p; r) \subseteq U.$ □

(1.8) Kommentar. Stetige Abbildungen $\Phi : M_1 \to M_2$ zwischen metrischen Räumen sind viel flexibler als **abstandstreue Abbildungen** $\big($d.h.: $\forall p_1, q_1 \in M_1 : d_2\big(\Phi(p_1), \Phi(q_1)\big) = d_1(p_1, q_1)\big)$ z.B. ist für $\mathbb{S}^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ und $\mathbb{E} := \{x \in \mathbb{R}^3 : (\frac{x_1}{a_1})^2 + (\frac{x_2}{a_2})^2 + (\frac{x_3}{a_3})^2 = 1\}$ $(a_1, a_2, a_3 > 0)$ die Abbildung $\Phi : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{E}$, $\Phi(x) = (a_1 x_1, a_2 x_2, a_3 x_3)$ bijektiv, stetig und auch Φ^{-1} ist stetig, aber Φ ist im allgemeinen nicht abstandstreu. Man sagt, $\mathbb{S}^2$ und $\mathbb{E}$ haben *die gleiche Gestalt*, $\mathbb{S}^2 \simeq \mathbb{E}$. Um Räume zunächst auf ihre bloße Gestalt zu untersuchen, führt man das Konzept der topologische Räume ein.

(1.9) Definition. Sei M ein Menge. Ein System τ von Teilmengen von M, $\tau \subseteq \mathfrak{P}(M)$ $\big(\mathfrak{P}(M) :=$ Potenzmenge von $M\big)$ heißt eine **Topologie** auf M, wenn gilt:

(a) Ist I eine beliebige (Index-) Menge und $U_i \in \tau$, so ist auch $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$, die leere Menge $\emptyset \in \tau$.

(b) Ist $n \in \mathbb{N}$ und sind $U_1, \ldots, U_n \in \tau$, so ist auch $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \tau$, die volle Teilmenge $M \in \tau$.

Man nennt $U \subseteq M$ dann **offen**, wenn $U \in \tau$. Das Paar (M, τ) heißt dann ein **topologischer Raum**.

(1.10) Beispiel.

(a) Sei (M, d) ein metrischer Raum. Dann ist das System $\tau \subseteq \mathfrak{P}(M)$ aller offenen Teilmengen von M eine Topologie auf M $\big($siehe (1.7)$\big)$. Man nennt dies die von der Metrik **induzierte Topologie** auf M.

(b) Sei M eine beliebige Menge und τ die volle Potenzmenge, $\tau = \mathfrak{P}(M)$. Dann ist τ eine Topologie auf M. Sie heißt die **diskrete Topologie** auf M.

(c) Sei M eine beliebige Menge und $\tau = \{\emptyset, M\}$. Es heißt dann τ die **indiskrete Topologie** auf M.

(1.11) Definition. Sei (M, τ) ein topologischer Raum.

(a) Eine Teilmenge $A \subseteq M$ heißt **abgeschlossen**, wenn das Komplement $\complement A = M \setminus A$ offen ist;

(b) Sei $p \in M$. Eine Teilmenge $S \subseteq M$ heißt **Umgebung** von p, wenn es ein offenes $U \subseteq M$ gibt mit
$$p \in U \subseteq S.$$

(1.12) Definition. Seien M und N topologische Räume und $\Phi: M \to N$ eine Abbildung.

(a) Es heißt Φ **stetig** in p, wenn das Urbild jeder Umgebung von $\Phi(p)$ eine Umgebung von p ist;

(b) es heißt Φ **stetig**, wenn das Urbild jeder offenen Menge offen ist;

(c) es heißt Φ ein **Homöomorphismus**, wenn Φ stetig ist und es ein stetiges $\Psi: N \to M$ gibt mit
$$\Psi \circ \Phi = \mathbb{1}_M, \ \Phi \circ \Psi = \mathbb{1}_N$$
($\mathbb{1}_M$ bezeichnet die Identität auf M, $\mathbb{1}_M(p) = p$, $\forall p \in M$). M und N heißen **homöomorph**, $M \simeq N$, wenn es einen Homöomorphismus zwischen ihnen gibt.

(1.13) Kommentar. Es ist $\Phi: M \to N$ stetig, genau wenn Φ stetig in jedem Punkt $p \in M$ ist (Übung).

(1.14) Kommentar.

(a) Ist (M, d) ein metrischer Raum und $\tau \subseteq \mathfrak{P}(M)$ die induzierte Topologie, so gibt es viele andere Metriken $\tilde{d}$, die die gleiche Topologie induzieren, z.B. $\tilde{d} = \alpha \cdot d$ $(\alpha > 0)$.

(b) Ist umgekehrt (M, τ) ein topologischer Raum, so heißt (M, τ) **metrisierbar**, wenn es eine Metrik d auf M gibt, so dass τ von d induziert ist.

(1.15) Definition. Man nennt einen topologischen Raum M **hausdorffsch**, wenn er folgendes **Trennungsaxiom** erfüllt: zu je zwei verschiedenen Punkten $p, q \in M$, $p \neq q$, existieren offene Mengen $U, V \subseteq M$ mit $p \in U, q \in V$ und $U \cap V = \emptyset$.

(1.16) Bemerkung. Ist (M, d) ein metrischer Raum, so ist ihre induzierte Topologie hausdorffsch.

Beweis. Seien $p, q \in M$, $p \neq q$ und $d := d(p,q) > 0$. Wähle dann $U := B(p; \frac{d}{2})$, $V := B(q; \frac{d}{2})$. Dann ist U und V offen, $p \in U$, $q \in V$ und auch $U \cap V = \emptyset$, denn wäre $x \in U \cap V$, so wäre

$$d = d(p,q) \leq d(p,x) + d(x,q) = d(x,p) + d(x,q) < \frac{d}{2} + \frac{d}{2} = d \lightning$$ □

(1.17) Definition.

(a) Sei (M, τ) ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $\mathfrak{B} \subseteq \tau$ heißt eien **Basis** der Topologie, wenn jede offene Menge U Vereinigung von Elementen aus $\mathfrak{B}$ ist,

$$U = \bigcup_{\substack{B \in \mathfrak{B} \\ B \subseteq U}} B.$$

(b) Es heißt (M, τ) von **abzählbarer Topologie**, wenn M eine abzählbare Basis besitzt.

(1.18) Beispiel. Der euklidische Raum $\mathbb{E}^n := (\mathbb{R}^n, d_{\text{eukl}})$ hat abzählbare Topologie, denn

$$\mathfrak{B} = \left\{ B(q; \frac{1}{n}) : q \in \mathbb{Q}^n, m \in \mathbb{N} \right\}$$

ist eine abzählbare Basis (Übung).

(1.19) Definition. Ist (M, τ) ein topologischer Raum und $N \subseteq M$ eine Teilmenge. Wir definieren die **Relativtopologie** (oder auch **induzierte Topologie** oder **Teilraumtopologie**) auf N wie folgt: $V \subseteq N$ ist offen genau dann, wenn es ein $U \subseteq M$, $U \in \tau$ gibt mit $U \cap N = V$.

(1.20) Kommentar.

(a) Sei (M, τ) topologischer Raum und $N \subseteq M$ mit der Relativtopologie versehen. Dann ist die **Inklusion** $i : N \to M$, $i(p) = p$ stetig. Die Relativtopologie ist die **gröbste Topologie** auf N, so dass i stetig ist.

(b) Eine Topologie τ_1 auf N heißt **gröber** als ein Topologie τ_2 auf N, wenn $\tau_1 \subseteq \tau_2$ (und τ_2 heißt dann **feiner** als τ_1). Man beachte: Ist τ_1 **echt gröber** als τ_2, d.h.: $\tau_1 \subsetneq \tau_2$, so ist die Identität $\mathbb{1} : (N, \tau_2) \to (N, \tau_1)$ stetig und bijektiv, ihre Umkerung $\mathbb{1}^{-1} = \mathbb{1} : (N, \tau_1) \to (N, \tau_2)$ aber nicht stetig.

(c) Die Relativtopologie hat folgende **universelle Eigenschaft**: Ist P ein topologischer Raum und $\Phi : P \to N$ eine Abbildung, so ist Φ genau dann stetig, wenn $i \circ \Phi : P \to M$ stetig ist (Übung).

$$\begin{tikzcd} P \arrow[d, "\Phi"'] \arrow[dr, "i \circ \Phi"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft", near start, shift right=2ex] & \\ N \arrow[r, "i"'] & M \end{tikzcd}$$

(d) Ist M ein Hausdorffraum und $N \subseteq M$ eine Teilmenge, so ist die Teilraumtopologie auf N auch hausdorfsch.

(e) Ist M von abzählbarer Topologie, so auch N. Insbesondere ist also jede Teilmenge M des euklidischen Raumes $\mathbb{E}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) mit ihrer induzierten Topologie hausdorffsch und von abzählbarer Topologie.

(1.21) Beispiel. Sei $\mathbb{R}^n$ mit der Standard-Topologie versehen. Wir nennen

$$\mathbb{B}^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$$

zusammen mit der Teilraumtopologie den **n-dimensionalen Ball** und

$$\mathbb{S}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \ \|x\| = 1\}$$

die **n-dimensionale Sphäre**.

(1.22) Beobachtung. Sei $(\tau_i)_{i \in I}$ eine Familie von Topologien auf einer Menge M. Dann ist auch

$$\tau := \bigcap_{i \in I} \tau_i$$

eine Topologie auf M.

(1.23) Kommentar.

(a) Ist $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(M)$ eine beliebige Teilmenge (M Menge), so gibt es deshalb eine kleinste Topologie τ auf M, die $\mathfrak{A}$ enthält, nämlich

$$\tau = \bigcap \{\sigma \subseteq \mathfrak{P}(M) : \ \sigma \text{ ist Topologie, } \sigma \supseteq \mathfrak{A}\}$$

τ heißt *die von* $\mathfrak{A}$ *erzeugte Topologie* und $\mathfrak{A}$ ein **Erzeugendensystem** oder eine **Subbasis** von τ.

(b) Expliziter kann man τ so beschreiben: zunächst bilde man das System $\mathfrak{B}$ aller endlicher Durschnitte von $\mathfrak{A}$, dann das System aller (beliebigen) Vereinigungen von Elementen aus $\mathfrak{B}$.

(c) Es reicht also z.B. die Stetigkeit einer Abbildung $\Phi : \ M \to N$ auf einer Subbasis $\mathfrak{A}$ der Topologie auf N zu prüfen: f stetig $\iff f^{-1}(V)$ offen, $\forall V \in \mathfrak{A}$.

(1.24) Definition. Seien M_1 und M_2 topologische Räume, $M = M_1 \times M_2$ ihr cartesisches Produkt und $\pi_i : \ M \to M_i$ $(i = 1,2)$ die kanonische Projektionen, $\pi_i(p_1, p_2) = p_i$. Sei

$$\mathfrak{A} := \{\pi_i^{-1}(U_i) \subseteq M : \ U_i \subseteq M \text{ offen, } i = 1,2\}.$$

Die von $\mathfrak{A}$ erzeugte Topologie heißt die **Produkttopologie** auf M.

(1.25) Kommentar.

(a) Es ist also die Produkttopologie auf M die *gröbste* Topologie, bzgl. der π_1 und π_2 stetig sind.

(b) Bezeichnet

$$\mathfrak{B} := \{U_1 \times U_2 \subseteq M : \ U_i \subseteq M_i \text{ offen } (i = 1,2)\},$$

so ist also $\mathfrak{B}$ eine Basis der Produkttopologie auf M.

(c) Ist P ein weiterer topologischer Raum, so ist eine Abbildung $\Phi : P \to M = M_1 \times M_2$ genau dann stetig, wenn $\pi_i \circ \Phi : \ P \to M_i$ stetig ist $(i = 1,2)$ (universelle Eigenschaft der Produkttopologie) (Übung)

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
M_1 & & M_2 \\
 & P \arrow[uu, "\Phi"] \arrow[ul, "\pi_1\circ\Phi"] \arrow[ur, "\pi_2\circ\Phi"'] &
\end{tikzcd}$$

(d) Sind M_1 und M_2 hausdorffsch, so ist auch $M_1 \times M_2$ hausdorffsch. Sind M_1 und M_2 von abzählbarer Topologie, so auch $M_1 \times M_2$.

(1.26) Beispiel.

(a) Die Produkttopologie auf $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}^n$ (wo $\mathbb{R}$ die Standard-Topologie trage) stimmt mit der Standard-Topologie überein (Übung).

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichnet man mit

$$\mathbb{T}^n := \mathbb{S}^1 \times \ldots \times \mathbb{S}^1$$

(zusammen mit der Produkttopologie) als den **n-dimensionalen Torus**.

(1.27) Definition. Sei M ein topologischer Raum, $R \subseteq M \times M$ eine Äquivalenz-Relation $\big((p,q) \in R \iff p \sim_R q\big)$, $[p] := \{q \in M : p \sim q\}$ eine Äquivalenz-Klasse und

$$M/R = \{[p] \subseteq \mathfrak{P}(M) : \; p \in M\}$$

die Quotientenmenge. Bezeichne $\pi : \; M \to M/R$, $p \mapsto [p]$, die kanonische Projektion. Eine Teilmenge $U \subseteq M/R$ heißt *offen*, wenn $\pi^{-1}(U) \subseteq M$ offen ist.

(1.28) Kommentar.

(a) Die so definierten offenen Mengen bilden eine Topologie auf M/R.

(b) Sie ist die **feinste** Topologie auf M, so dass π stetig ist.

(c) Für einen topolgischen Raum P ist eine Abbildung $\Phi : \; M/R \to P$ genau dann stetig, wenn $\Phi \circ \pi : \; M \to P$ es ist (universelle Eigenschaft der **Quotienten-Topologie**). (Übung)

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\Phi\circ\pi"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & P \\ M/R \arrow[ur, "\Phi"'] & \end{tikzcd}$$

(1.29) Beispiel.

(a) Sei $I = [0,1]$ (mit der induzierten Topologie) und $R \subseteq I \times I$ die von $(0,1)$ *erzeugte Äquivalenz-Relation* $\big($d.h.: die kleinste, die $(0,1)$ enthält$\big)$, also

$$R = \big\{(0,1),\, (1,0),\, (p,p) : \; p \in I\big\}.$$

Dann ist $I/R \simeq \mathbb{S}^1$ vermöge

$$I/R \to \mathbb{S}^1,\; \Phi\big([t]\big) = \big(\cos(2\pi t),\, \sin(2\pi t)\big)$$

ein Homöomorphismus (Übung).

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\widetilde{\Phi}(t)=e^{2\pi i t}"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{S}^1 \\ I/R \arrow[ur, dashed, "\Phi"'] & \end{tikzcd}$$

(b) Sei R auf $M = I \times I$ die von $(0,t) \sim (1,t)$ und $(s,0) \sim (s,1)$ erzeugte Äquivalenz-Relation. Dann ist

$$\Phi : \; M/\!\sim \; \to \mathbb{T}^2 \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{C},\; \Phi\big([s,t]\big) = (e^{2\pi i s}, e^{2\pi i t})$$

ein Homöomorphismus.

(c) Sei R die Äquivalenz-Relation auf $M = I \times I$, die von $(0,t) \sim (1,t)$ erzeugt wird. Dann nennt man $Z := M/\!\sim$ den **Zylinder**.

(d) Sei nun R auf $M = I \times I$ von $(0,t) \sim (1, 1-t)$ erzeugt. Dann nennt man $M = X/\!\sim$ das **Möbiusband**.

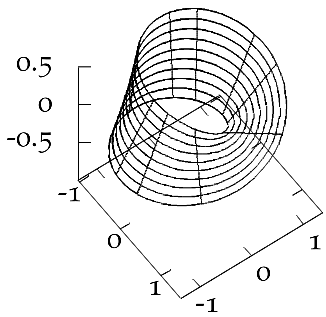


Abbildung 1.1.: Möbiusband

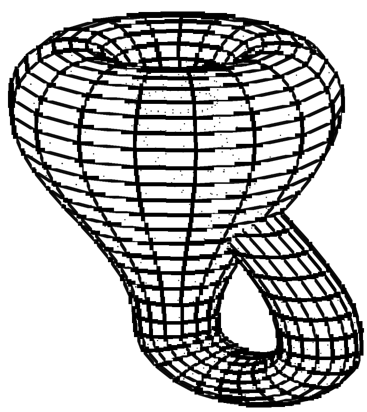


Abbildung 1.2.: kleinsche Flasche

(e) Sei schließlich R auf $M = I \times I$ von $(0,t) \sim (1,t)$ und $(s,0) \sim (1-s,1)$ erzeugt. Dann heißt $K = M/\!\sim$ die **Kleinsche Flasche**.

(1.30) Definition. Seien $p, q \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ äquivalent, wenn wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gibt mit $q = \lambda p$. Der Quotientenraum

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) := \big(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}\big) / \sim$$

heißt *der n-dimensionale* (reell-) **projektive Raum**.

(1.31) Kommentar.

(a) Für einen Punkt $[p] \in \mathbb{P}^n$ schreibt man häufig

$$[p] = (p_0 : p_1 : \ldots : p_n),$$

weil der Repräsentant $(p_0, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ bis auf ein multiplikatives Inverses eindeutig ist. Die Abbildung $j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{P}^n$,

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (1 : x_1 : \ldots : x_n)$$

ist eine **Einbettung** (d.h.: $\mathbb{R}^n \to j(R^n) \subseteq \mathbb{P}^n$ ist ein Homöomorphismus). Die Teilmenge

$$H := \big\{(x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n : \ x_0 = 0\big\},$$

also $H = \mathbb{P}^n \setminus j(\mathbb{R}^n)$ wird als **unendlich ferne Hyperebene** bezeichnet.

(b) Identifiziert man auf $\mathbb{S}^n$ **Antipoden**, $x \sim \pm x$, so ist $\mathbb{P}^n \simeq \mathbb{S}^n/\!\sim$ vermöge

$$[x] \mapsto \left[\frac{x}{\|x\|}\right] \qquad \text{(Übung).}$$

(1.32) Vorbereitung. Seien M_1 und M_2 Mengen. Dann gibt es (bis auf Isomorphie) genau eine Menge M zusammen mit injektiven Abbildungen $i_1 : M_1 \to M$, $i_2 : M_2 \to M$, so dass $M = i_1(M_1) \sqcup i_2(M_2)$ (d.h.: $i_1(M_1) \cap i_2(M_2) = \emptyset$). Diese Menge wird im folgenden mit $M_1 + M_2$ bezeichnet.

(1.33) Definition. Seien M_1 und M_2 topologische Räume und $M = M_1 + M_2$ ihre mengentheoretische Summe mit ihren natürlichen Inklusionen $i_j : M_j \to M$ $(j = 1,2)$. Wir nennen dann $U \subseteq M$ **offen**, wenn $i_j^{-1}(U) \subseteq M_j$ offen ist.

(1.34) Kommentar.

(a) Die so definierten offenen Mengen bilden eine Topologie auf M. Sie heißt die **Summentopologie** und ist die feinste Topologie auf M, so dass $i_j : M_j \to M$ stetig ist $(j = 1,2)$.

(b) Ist N ein weiterer topologischer Raum und $\Phi : M_1 + M_2 \to N$ eine Abbildung, so ist Φ stetig genau dann wenn $\Phi \circ i_j : M_j \to N$ stetig ist $(j = 1,2)$. (Übung)

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[dr, "i_1"] \arrow[drr, bend left, "\Phi\circ i_1"] & & \\
& M \arrow[r, "\Phi"] & N \\
M_2 \arrow[ur, "i_2"'] \arrow[urr, bend right, "\Phi\circ i_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

(1.35) Beispiel. Seien M und N topologische Räume, $p \in M$ und $q \in N$. Identifiziert man p mit q in $M+N$, so nennt man $M+N/\sim$ die **Einpunktvereinigung** von M und N (entlang p und q) und schreibt

$$M \vee N := M+N/\sim .$$

Zum Beispiel ist $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ die Figur "Acht".

(1.36) Definition. Ein topologischer Raum M heißt **zusammenhängend**, wenn folgendes gilt: Sind $U, V \subseteq M$ offen mit $U \cup V = M$ und $U \cap V = \emptyset$, so muss $U = \emptyset$ oder $V = \emptyset$ gelten.

(1.37) Kommentar.

(a) Ein Raum M ist also genau dann zusammenhängend, wenn die einzigen Teilmengen von M, die zugleich offen und abgeschlossen sind, nur die leere Menge $\emptyset$ und die volle Menge sind.

(b) Ein topologischer Raum ist zusammenhängend, wenn er nicht homöomorph zu der topologischen Summe $U+V$ zweier nicht-leerer Teilräume $U, V \subseteq M$ ist (Übung).

(1.38) Beispiel. Das abgeschlossene Intervall $I = [0,1]$ ist zusammenhängend.

Beweis. Sei $I = U \sqcup V$ mit $U \neq \emptyset \neq V$ und setze $a := \sup(U)$, $b := \sup(V)$ (Vollständigkeit von $\mathbb{R}$!). Da $U \subseteq I$ abgeschlossen, $I \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen $\Longrightarrow U \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen $\Longrightarrow a \in U$. Weil U offen ist $\Longrightarrow a = 1$; genau so $b = 1 \Longrightarrow U \cap V \neq \emptyset$ $\lightning$ $\Longrightarrow I$ ist zusammenhängend. $\square$

(1.39) Proposition. *Seien M und N topologischer Raum, $\Phi : M \to N$ stetig. Ist M zusammenhängend, so auch $\Phi(M) \subseteq N$.*

Beweis. O.E.: Φ surjektiv $\big($sonst betrachte $\Phi' : M \to \Phi(M)$ mit $\Phi'(p) := \Phi(p)\big)$. Seien nun $V_1, V_2 \subseteq N$ offen mit $N = V_1 \sqcup V_2$. $\Longrightarrow M = \Phi^{-1}(V_1) \sqcup \Phi^{-1}(V_2) \Longrightarrow \Phi^{-1}(V_1) = \emptyset$ oder $\Phi^{-1}(V_2) = \emptyset$. Da Φ surjektiv ist, muss also $V_1 = \emptyset$ oder $V_2 = \emptyset$, also: N zusammenhängend. $\square$

(1.40) Definition. Sei M ein topologischer Raum.

(a) Ein **Weg in** M ist eine stetige Abbildung $\alpha : I \to M$, $I = [0,1]$. Es heißt $\alpha(0)$ der **Anfangspunkt** von α und $\alpha(1)$ der **Endpunkt** von α.

(b) M heißt **wegzusammenhängend**, wenn es zu beliebigen $p, q \in M$ einen Weg α in M gibt mit $\alpha(0) = p$ und $\alpha(1) = q$.

(1.41) Beispiel. $M = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist nicht wegzusammenhängend (Zwischenwertsatz).

(1.42) Bemerkung. Ist M wegzusammenhängend, so auch zusammenhängend.

Beweis. Sei $M = U \sqcup V$ mit $U, V \subseteq M$ offen, $U \neq \emptyset \neq V$. Wähle $p \in U$, $q \in V$ und einen Weg $\alpha : I \to M$ von p nach q. $\Longrightarrow I = \alpha^{-1}(U) \sqcup \alpha^{-1}(V) \Longrightarrow$ da I zusammenhängend ist muss $\alpha^{-1}(U) = \emptyset$ oder $\alpha^{-1}(V) = \emptyset$: $\lightning$, da $0 \in \alpha^{-1}(U)$, $1 \in \alpha^{-1}(V)$. $\square$

(1.43) Beispiel. Der Teilraum

$$M = \big\{(t, \sin\frac{1}{t}) \in \mathbb{R}^2 : \ t > 0\big\} \sqcup \big\{(0,y) : \ y \in [-1,1]\big\}$$

ist zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend (Übung).

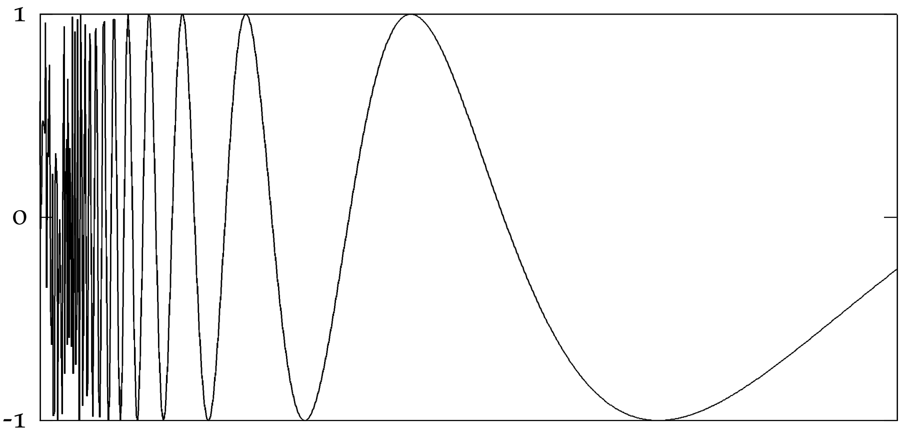


Abbildung 1.3.: Sinuskurve der Topologen

(1.44) Definition. Sei M ein topologischer Raum und $p \in M$. Das System aller Umgebungen wird mit $\mathfrak{A}(p) \subseteq \mathfrak{P}(M)$ bezeichnet. Man nennt nun ein Teilsystem $\mathfrak{B}(p) \subseteq \mathfrak{A}(p)$ eine **Umgebungsbasis von p**, wenn es zu jedem $S \in \mathfrak{A}(p)$ ein $B \in \mathfrak{B}(p)$ gibt mit $B \subseteq S$.

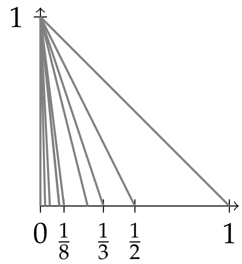
(1.45) Definition. Ein topologischer Raum heißt **lokal wegzusammenhängend**, wenn jeder Punkt $p \in M$ eine Umgebungsbasis aus wegzusammenhängenden Mengen besitzt.

(1.46) Kommentar.

(a) Ein lokal wegzusammenhängender Raum braucht nicht wegzusammenhängend sein. Beispiel: $M = \mathbb{R}^*$.

(b) Ein wegzusammenhängender Raum braucht auch nicht lokal wegzusammenhängend zu sein. Beispiel: (Übung)

$$M = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{\begin{pmatrix} 1/n \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \sqcup \overline{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \quad (\overline{pq} = \text{ Strecke von } p \text{ nach } q)$$



(1.47) Proposition. *Sei M lokal wegzusammenhängend. Dann gilt: M zusammenhängend $\Longleftrightarrow$ M wegzusammenhängend.*

Beweis. „$\Longleftarrow$“: Siehe (1.45).
„$\Longrightarrow$“: Sei $p \in M$ und $U := U(p)$ die **Wegkomponente von** p, d.h.:

$$U(p) := \{x \in M : \exists \text{ Weg von } p \text{ nach } x\}$$

(also die größte wegzusammenhängende Teilmenge von M, die p enthält). Es ist U offen, denn sei $x \in U$. Sei $V \in \mathfrak{U}(x)$, V wegzusammenhängend $\Longrightarrow V \subseteq U$. Klar ist weiter: Für $q \in M$ ist entweder $U(p) = U(q)$ oder $U(p) \cap U(q) = \emptyset$.

$$\Longrightarrow M = \underbrace{U(p)}_{\text{offen}} \sqcup \underbrace{\bigcup_{q \notin U(p)} U(q)}_{\text{offen}}.$$

$\Longrightarrow M = U(p) \Longrightarrow M$ ist wegzusammenhängend. $\square$

(1.48) Beispiel. $\mathbb{R}^n \not\approx \mathbb{R}$ für $n \geq 2$.

Beweis. Angenommen $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ ist Homöomorphismus $\Longrightarrow \Psi := \Phi|\mathbb{R}^* : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^* \setminus \{\Phi(0)\}$ ist auch Homöomorphismus. Aber $\mathbb{R}^*$ ist nicht (weg-) zusammenhängend, $\mathbb{R}^n \setminus \{p\}$ $(p = \Phi(0))$ für $n \geq 2$ aber wohl: $\lightning$. □

(1.49) Definition. Sei M ein topologischer Raum.

(a) Eine Familie $(U_i)_{i\in I}$ von Teilmengen von M heißt eine **offene Überdeckung von** M, wenn alle U_i offen sind $(i \in I)$ und $M = \bigcup_{i\in I} U_i$ ist.

(b) Es heißt M **kompakt**, wenn M hausdorffsch und jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung hat.

(1.50) Kommentar.

(a) Ist M ein topologischer Raum, $N \subseteq M$ und $(U_i)_{i\in I}$ Familie offener Mengen von M mit $N \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$, so spricht man auch von einer offenen Überdeckung von N. Es ist ja dann $V_i := U_i \cap N$ offen in N und $(V_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von N im Sinne von (1.49).

(b) Durch Komplementbildung kann man eien äquivalente Beschreibung der kompakten Räumen so bekommen: M ist hausdorffsch und ist $(A_i)_{i\in I}$ Familie abgeschlossener Teilmengen mit $\bigcap_{i\in I} A_i = \emptyset$, so gibt es $i_1, \ldots, i_n \in I$, so dass $A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_n} = \emptyset$ ist.

(1.51) Proposition. *Seien M und N Hausdorff-Räume und $\Phi : M \to N$ stetig. Ist M kompakt, so auch $\Phi(M)$.*

Beweis. O.E.: Φ ist surjektiv, $\Phi(M) = N$. Sei $N = \bigcup_{i\in I} V_i$, $V_i \subseteq N$ offen. $\Longrightarrow M = \bigcup_{i\in I} \Phi^{-1}(V_i) \Longrightarrow \exists i_1, \ldots, i_n \in I$:

$$M = \bigcup_{j=1}^{n} \Phi^{-1}(V_{i_j}) \Longrightarrow N = \bigcup_{j=1}^{n} V_{i_j}.$$ □

(1.52) Lemma.

(a) Sei M ein kompakter topologischer Raum und $A \subseteq M$ abgeschlossen. Dann ist auch A kompakt.

(b) Sei M ein Hausdorff-Raum und $K \subseteq M$ kompakt. Dann ist K abgeschlossen.

Beweis. **Zu (a):** Sei $A_i \subseteq A$ abgeschlossen, $i \in I$ und $\bigcap_{i\in I} A_i = \emptyset$. Da A abgeschlossen $\Longrightarrow A_i \subseteq M$ abgeschlossen in $M \Longrightarrow \exists i_1, \ldots, i_n \in I : \bigcap_{j=1}^{n} A_{i_j} = \emptyset$, also A kompakt.

Zu (b): Sei $p \in \complement K = M \setminus K$. Zu $x \in K$ wähle offene Mengen $U_x \in \mathfrak{U}(x)$, $V_x \in \mathfrak{U}(p)$ mit $U_x \cap V_x = \emptyset$. Weil $K = \bigcup_{x\in K} U_x \Longrightarrow \exists x_1, \ldots, x_n \in K : K \subseteq U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_n}$. Setze $V := V_{x_1} \cap \ldots \cap V_{x_n} \Longrightarrow V \in \mathfrak{U}(p)$ und $V \cap K = \emptyset \Longrightarrow \complement K$ ist offen, also K abgeschlossen. □

(1.53) Kommentar. In einem kompakten Raum ist eine Teilmenge also genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen ist.

(1.54) Proposition. *Sei M ein kompakter Raum und N hausdorffsch. Ist dann $\Phi : M \to N$ stetig und bijektiv, so ist Φ bereits ein Homöomorphismus.*

Beweis. Zeige: $A \subseteq M$ abgeschlossen impliziert $\Phi(A)$ abgeschlossen ($\Longrightarrow \forall U \subseteq M$ offen: $\Phi(U) \subseteq N$ offen $\Longrightarrow \Phi^{-1}$ ist stetig, also Φ Homöomorphismus). Sei $A \subseteq M$ abgeschlossen. Mit (1.51,a) ist A kompakt und mit (1.50) folgt, dass auch $\Phi(A)$ kompakt. Mit (1.51,b) gilt, dass auch $\Phi(A) \subseteq N$ abgeschlossen ist. □

(1.55) Definition. Sei M ein topologischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M. Ein Punkt $p \in M$ heißt **Häufungspunkt** von (x_n), wenn in jeder Umgebung von p unendlich viele Folgenglieder liegen.

(1.56) Lemma. *Ein Punkt $p \in M$ ist Häufungspunkt von (x_n) genau dann, wenn er im Abschluss aller Endstücke der Folge liegt.*

Beweis. Sei $E_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\} \subseteq M$ ($n \in \mathbb{N}$) Endstück.

„$\Longrightarrow$“: Sei p Häufungspunkt und $S \in \mathfrak{A}(p)$ beliebig. $\Longrightarrow S \cap E_n \neq \emptyset$. $\Longrightarrow p \in \overline{E_n}$, $\forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow p \in \bigcap \overline{E_n}$.

„$\Longleftarrow$“: Sei $p \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{E_n}$ und $S \in \mathfrak{A}(p) \Longrightarrow S \cap E_n \neq \emptyset \Longrightarrow S \cap E_1$ hat unendlich viele Folgenglieder, d.h.: p ist Häufungspunkt. $\square$

(1.57) Proposition. *Sei M ein Hausdorff-Raum mit abzählbarer Topologie. Dann gilt: M ist genau dann kompakt, wenn jede Folge in M einen Häufungspunkt hat.*

Beweis. „$\Longrightarrow$“: (x_n) sei Folge, $E_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$ Endstück. Für endlich viele $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ ist stets $\bigcap_{j=1}^{k} E_{n_j} \neq \emptyset$, erst recht $\bigcap_{j=1}^{k} \overline{E_{n_j}} \neq \emptyset \Longrightarrow$ (Kompaktheit) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{E_n} \neq \emptyset \Longrightarrow \exists$ Häufungspunkt von (x_n).

„$\Longleftarrow$“: Sei $(U_i)_{i\in I}$ offene Überdeckung von M. Sei $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ Basis der Topologie von M. Sei

$$J := \{k \in \mathbb{N} : \exists i_k \in I : B_k \subseteq U_{i_k}\}, \quad J = \{n_1, n_2, n_3, \ldots\}.$$

$\Longrightarrow M = \bigcup_{i\in I} U_i = \bigcup_{k\in J} B_k$, erst recht: $M = \bigcup_{k\in J} U_{i_k} = \bigcup_{j=1}^{\infty} U_{i_{n_j}}$. Also: Es existiert eine abzählbare Teilüberdeckung. O.B.d.A. sei daher: $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$, $U_n \subseteq M$ offen. Setze

$$V_n := U_1 \cup \ldots \cup U_n.$$

Angenommen: Es gibt keine endliche Teilüberdeckung $\Longrightarrow \complement V_n \neq \emptyset$; wähle $x_n \in \complement V_n$. Sei p Häufungspunkt von $(x_n) \Longrightarrow \exists m \in \mathbb{N} : p \in U_m \subseteq V_m \Longrightarrow V_m \in \mathfrak{A}(p)$, aber $x_n \notin V_m$, $\forall n \geq m$, also p kein Häufungspunkt von (x_n) $\lightning$. Es muss also doch eine endliche Teilüberdeckung existieren, also: M kompakt. $\square$

(1.58) Proposition (Tychonoff). *Sei I abzählbar (oder endlich) und $(X_i)_{i\in I}$ Familie von Hausdorff-Räumen mit abzählbarer Topologie. Das Produkt $M = \prod_{i\in I} M_i$ ist kompakt genau dann, wenn M_i kompakt ist, $\forall i \in I$.*

Beweis. M_k Hausdorffsch und hat abzählbare Topologie. Also ist auch $\prod M_k$ Hausdorff-Raum mit abzählbarer Topologie.

„$\Longrightarrow$“: M kompakt. Die kanonische Projektion $\pi_k : M \to M_k$ ist stetig und surjektiv. Damit ist auch $\pi(M) = M_k$ kompakt.

„$\Longleftarrow$“: Sei $\left(x^{(0,n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $M \Longrightarrow \left(x_1^{(0,n)}\right)$ Folge in $M_1 \Longrightarrow \exists$ Teilfolge $\left(x^{(1,n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ von $\left(x^{(0,n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$: $\left(x_1^{(1,n)}\right)$ in M_1 gegen p_1 konvergent. $\Longrightarrow \exists$ Teilfolge $\left(x^{(2,n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ von $\left(x^{(1,n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$: $\left(x_2^{(2,n)}\right)$ konvergent in M_2, sagen wir p_2 usw. Ist I endlich, $I = \{1, \ldots, N\}$, so konvergiert $\left(x^{(N,n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ in M (gegen $p = (p_1, p_2, \ldots, p_N)$. Ist $I = \mathbb{N}$, so konvergiert die Folge $\left(X^{(n,n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ in M gegen $(p_1, p_2, \ldots)$. Also ist M kompakt. $\square$

(1.59) Beispiel.

(a) Sei $M = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Nach Bolzano-Weierstraß hat jede Folge in M einen Häufungspunkt ist also kompakt.

(b) Sei $Q = [-R, R]^n \subseteq \mathbb{R}^n$. Wegen Tychonoff ist Q kompakt.

(1.60) Proposition (Heine-Borel). *Eine Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) ist kompakt, genau wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

Beweis. „$\Longrightarrow$“: $\mathbb{R}^n$ hausdorffsch, $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt. Mit (1.51,b) ist K abgeschlossen. $K \subseteq \mathbb{R}^n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B(0;n) \implies \exists n_1, \ldots, n_k \,:\, K \subseteq K \subseteq B(0;n_1) \cup \ldots \cup B(0;n_k)$. Setzte $R := \max\{n_1, \ldots, n_k\} \implies K \subseteq B(0;R) \implies K$ ist beschränkt.

„$\Longleftarrow$“: Sei K beschränkt. Also gibt es ein $R > 0 : K \subseteq [-R, R]^n = Q$ und Q kompakt; $K \subseteq Q$ abgeschlossen, also folgt mit (1.52,a), dass K kompakt ist. □

Kapitel 2.

2 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

(2.1) Definition. Sei $n \in \mathbb{N}$. Ein Hausdorff-Raum mit abzählbarer Topologie M heißt eine **n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit** , wenn jeder Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung besitzt, die homöomorph zu einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist.

(2.2) Kommentar.

(a) Man kann also eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension n (manchmal auch mit M^n notiert) mit einer Familie $(U_i)_{i\in I}$ offener Teilmengen überdecken, die homöomorph zu offenen Teilmengen $V_i \subseteq \mathbb{R}^n$ sind, $U_i \simeq V_i$,

$$M = \bigcup_{i\in I} U_i.$$

Man nennt dann eine Familie von Homöomorphismen

$$\mathfrak{A} = \big(\varphi_i : U_i \xrightarrow{\simeq} V_i\big)_{i\in I}$$

einen (topologischen) **Atlas** für M. Die Mitglieder $\varphi_i : U_i \to V_i$ heißen **Karten** und ihre Umkehrungen $\varphi_i^{-1} : V_i \to U_i$ heißen **lokale Koordinatensysteme** auf M.

(b) Ist M^n ein topologische Mannigfaltigkeit und $\mathfrak{A} = (\varphi_i : U_i \to V_i)_{i\in I}$ ein topologischer Atlas, so nennt man für jedes Paar $(i, j) \in I \times I$ (mit $U_i \cap U_j \neq \emptyset$) die Abbildung

$$\varphi_{ij} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \to \varphi_i(U_i \cap U_j), \quad \varphi_{ij}(x) := \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(x),$$

eine **Übergangsfunktion** des Atlas $\mathfrak{A}$.

(c) Lokal ist also eine topologische Mannigfaltigkeit etwas Wohlbekanntes, global kann M^n sehr kompliziert sein. Ist $\mathfrak{A} = (\varphi_i : U_i \to V_i)$ ein topologischer Atlas mit Übergangsfunktionen (φ_{ij}), so kann man sich M^n als (zunächst disjunkte) Vereinigung der offenen Mengen $V_i \subseteq \mathbb{R}^n$ vorstellen, bei denen man die Teilmengen $V_{ij} := \varphi_i(U_i \cap U_j) \subseteq V_i$ vermöge $\varphi_{ij} : V_{ji} \to V_{ij}$ „zusammenklebt“:

(2.3) Bemerkung. *Sei M^n eine topologische Mannigfaltigkeit, $\mathfrak{A} = (\varphi_i : U_i \to V_i)_{i\in I}$ ein topologischer Atlas mit Übergängen $(\varphi_{ij} : V_{ji} \to V_{ij})$. Auf der topologische Summe $\widetilde{Q} := \sum_{i\in I} V_i$ definiere man eine Äquivalenzrelation durch*

$$\iota_i(x_i) \sim \iota_j(x_j) :\Longleftrightarrow x_i = \varphi_{ij}(x_j)$$

(für $\iota_k : V_k \to \widetilde{Q}$ die kanonische Inklusionen, $x_k \in V_k$, $k \in I$). Dann gilt, dass der Quotientenraum $Q := \widetilde{Q}/\sim$ homöomorph zu M ist.

Beweis. Sei $j_k : U_k \hookrightarrow M$ die Inklusion $k \in I$. Dann induzieren die Abbildungen $j_k \circ \varphi_k^{-1} : V_k \to M$ eine (eindeutig bestimmte) Abbildung $\Phi : \widetilde{Q} \to M$ mit $\Phi \circ \iota_k = j_k \circ \varphi_k^{-1}$, welche nach der universellen Eigenschaft der Summentopologie stetig ist. Ist nun $\iota_i(x_i) \sim \iota_j(x_j)$, so ist

$$\begin{tikzcd} & M & \\ V_i \arrow[ur, "j_i \circ \varphi_i^{-1}"] \arrow[dr, "\iota_i"'] & & V_j \arrow[ul, "j_j \circ \varphi_j^{-1}"'] \arrow[dl, "\iota_j"] \\ & \widetilde{Q} \arrow[uu, dashed, "\Phi"] & \end{tikzcd}$$

$$\Phi\big(\iota_i(x_i)\big) = j_i \circ \varphi_i^{-1}(x_i) = \varphi_i^{-1}(x_i) =$$

$$\varphi_i^{-1}\big(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(x_j)\big) = \varphi_j^{-1}(x_j) = (j_j \circ \varphi_j^{-1})\,(x_j) = \Phi\big(\iota_j(x_j)\big).$$

Ist daher $Q = \widetilde{Q}/\sim$ und $\pi : \widetilde{Q} \to Q$ die kanonische Projektion, so gibt es eine eindeutig bestimmte Abbildung $\Psi : Q \to M$ mit $\Psi \circ \pi = \Phi$, welche nach der universellen Eigenschaft der Quotiententopologie stetig ist. Man prüft nun leicht nach, dass Ψ surjektiv, injektiv und auch Ψ^{-1} stetig ist (Übung). Also ist Ψ ein Homöomorphismus. □

$$\begin{tikzcd} \widetilde{Q} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M \\ Q \arrow[ur, "\Psi"'] & \end{tikzcd}$$

(2.4) Beobachtung. Ist M^n eine topologische Mannigfaltigkeit, $f : M \to \mathbb{R}$ und $p \in M$, so ist offenbar f genau dann stetig in p, wenn $f|_U \circ \varphi^{-1} : V \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 = \varphi(p) \in V \subseteq \mathbb{R}^n$ für eine Karte $\varphi : U \to V$ um p ist, denn:

$$\begin{aligned} f \text{ stetig in } p &\Longleftrightarrow f|_U \text{ stetig in } p \\ &\Longleftrightarrow f|_U \circ \varphi^{-1} \text{ stetig in } x_0 \text{ (denn } \varphi \text{ ist ja Homöomorphismus).} \end{aligned}$$

Ist nun $\mathfrak{A} = (\varphi_i : U_i \to V_i)_{i \in I}$ ein topologischer Atlas, $p \in U_i \cap U_j$ und φ_{ij} der Übergang bzgl. (i, j), so ist für $x \in V_{ji} := \varphi_j(U_i \cap U_j)$:

$$f \circ \varphi_j^{-1}(x) = f \circ \varphi_i^{-1} \circ \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(x) = (f \circ \varphi_i^{-1}) \circ \varphi_{ij}(x),$$

und deshalb (natürlich) $f|_{U_j} \circ \varphi_j^{-1} : V_j \to \mathbb{R}$ stetig in $x_j = \varphi_j(p)$ genau dann wenn $f|_{U_i} \circ \varphi_i^{-1} : V_i \to \mathbb{R}$ stetig in $x_i = \varphi_i(p)$ ist, denn $\varphi_{ij} : V_{ji} \to V_{ij}$ ist ja Homöomorphismus. Beachte nun: Für $f|_{U_i} \circ \varphi_i^{-1} : V_i \to \mathbb{R}$ macht es auch Sinn darüber zu sprechen, dass diese Abbildung **differenzierbar** in x_i ist und diese Beobachtung wäre bei Vorgabe von $\mathfrak{A}$ unabhängig von der Wahl der Karte, in der p liegt, wenn alle Übergänge $(\varphi_{ij} : V_{ji} \to V_{ij})$ nicht nur Homöomorphismen wären, sondern sogar Diffeomorphismen sind! Deshalb:

(2.5) Definition. Sei M^n eine topologische Mannigfaltigkeit.

(a) Man nennt einen (topologischen) Atlas $\mathfrak{A} = (\varphi_i)$ von M **differenzierbar**, wenn alle seine Übergänge φ_{ij} differenzierbar sind.

(b) Zwei differenzierbare Atlanten $\mathfrak{A} = (\varphi_i)_{i \in I}$ und $\mathfrak{B} = (\psi_j)_{j \in J}$ auf M heißen **äquivalent**, wenn auch $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} := (\varphi_i, \psi_j)_{i \in I, j \in J}$ ein differenzierbarer Atlas ist.

(c) Eine Äquivalenzklasse $c = [\mathfrak{A}]$ differenzierbarer Atlanten auf M heißt eine **differenzierbare Struktur auf M**. Ein Paar (M, c) heißt eine **differenzierbare Mannigfaltigkeit**.

(2.6) Kommentar.

(a) Auf einer topologischen Mannigfaltigkeit kann es sehr viele verschiedene differenzierbare Strukturen geben. Z.B. ist $M = \mathbb{R}$ sicher eine topologische Mannigfaltigkeit (der Dimension 1) und folgende beiden Atlanten sind sicher differenzierbar:

$$\mathfrak{A} = (\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \varphi(x) = x), \quad \mathfrak{B} = (\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \psi(x) = x^3).$$

Denn: $\mathfrak{A}$ ist differenzierbar, denn der einzige Übergang ist $\varphi \circ \varphi^{-1} = \mathbb{1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\mathbb{1}$ ist sicher differenzierbar. Ebenso ist $\mathfrak{B}$ differenzierbar, weil auch $\mathfrak{B}$ aus nur einer Karte besteht. Es ist aber $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = (\varphi, \psi)$ nicht mehr differenzierbar, denn $\varphi \circ \psi^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\varphi \circ \psi^{-1}(x) = \sqrt[3]{x},$$

ist nicht mehr differenzierbar (im Nullpunkt). Für die differenzierbare Strukturen $c_1 = [\mathfrak{A}]$ und $c_2 = [\mathfrak{B}]$ gilt also: $c_1 \neq c_2$.

(b) Wir werden aber bald sehen, dass $(\mathbb{R}, c_1) \cong (\mathbb{R}, c_2)$ „diffeomorph" ist, nämlich vermöge $x \mapsto \sqrt[3]{x}$. (siehe 2.12)

(2.7) Beispiel.

(a) $M = \mathbb{R}^n$ trägt die Struktur einer n-dimensionaler Mannigfaltigkeit. Man nehme den Atlas $\mathfrak{A} = (\varphi)$ mit $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\varphi = \mathbb{1}$ $\big($und setze $c = [\mathfrak{A}]\big)$. Das ist die **Standard-Struktur** auf $\mathbb{R}^n$.

(b) Ebenso wird jede offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $V := U$ und $\varphi = \mathbb{1} : U \to V$ $\big($und $\mathfrak{A} = (\varphi)$ sowie $c = [\mathfrak{A}]\big)$ zu einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit der Dimension n.

(c) Ist M^n eine Mannigfaltigkeit und $N \subseteq M$ offen, so trägt N in natürlicher Weise die Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit der Dimension n: Ist nämlich $\mathfrak{A} = (\varphi_i : U_i \to V_i)_{i \in I}$ ein Repräsentant der differenzierbare Struktur c auf M, so betrachte man einfach $\mathfrak{B} := (\widetilde{\varphi}_i : \widetilde{U}_i \to \widetilde{V}_i)_{i \in I}$ mit $\widetilde{U}_i := U_i \cap N$, $\widetilde{V}_i := \operatorname{Im}(\widetilde{\varphi}_i) \subseteq V_i \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\widetilde{\varphi}_i := \varphi_i|_{\widetilde{U}_i}$. Dann wird N zusammen mit $\tilde{c} := [\mathfrak{B}]$ zu einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit der Dimension n (und diese Struktur hängt nicht von der Wahl $\mathfrak{A} \in c$ ab).

(d) Sei V ein (abstrakter) reeller Vektorraum der Dimension n. Sei dann $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V und $\iota : V \to \mathbb{R}^n$ der zugehörige Koordinatenisomorphismus, also

$$\iota(v) = x = (x^1, \ldots, x^n) \Longleftrightarrow v = \sum_{i=1}^{n} x^i v_i.$$

(Beachte: Komponenten eines Vektors $x \in \mathbb{R}^n$ werden mit "Exponenten" bezeichnet: $x^1, \ldots, x^n$.) Versehe nun V mit der Topologie, so dass ι ein Homöomorphismus wird, d.h.: $U \subseteq V$ sei offen, genau wenn $\iota(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ offen ist. Damit ist V zunächst eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension n. $\big($Übung: Diese Topologie hängt nicht von der Basiswahl ab, weil lineare Isomorphismen $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\big(S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\big)$ Homöomorphismen sind.$\big)$ Definiere schließlich (wieder) $\mathfrak{A} := (\iota)$ und $c = [\mathfrak{A}]$. Dann hängt auch c nicht von der Basiswahl ab, weil lineare Isomorphismen sogar Diffeomorphismen sind.

(2.8) Beispiel. Betrachte die **n-Sphäre** ($n \geq 1$)

$$\mathbb{S}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$$

(mit ihrer von $\mathbb{R}^{n+1}$ induzierten Teilraumtopologie). Da $\mathbb{R}^{n+1}$ (mit der Standard-Topologie) hausdorffsch und von abzählbarer Topologie ist, ist $\mathbb{S}^n$ hausdorffsch und von abzählbarer Topologie.

Übrigens ist $\mathbb{S}^n$ auch zusammenhängend (Übung) und kompakt (nach Heine-Borel). Daher kann man $\mathbb{S}^n$ sicher nicht mit einer einzigen Karte $\varphi : \mathbb{S}^n \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ überdecken, denn eine nicht-leere offene Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ist niemals kompakt.

Betrachte nun $N := (0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{S}^n$ und $S := (0, \ldots, 0, -1) \in \mathbb{S}^n$ und die **stereographischen Projektionen**

$$\mathbb{S}^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n,\ p \mapsto \frac{1}{1 - p^{n+1}}(p^1, \ldots, p^n),$$
$$\mathbb{S}^n \setminus \{S\} \to \mathbb{R}^n,\ p \mapsto \frac{1}{1 + p^{n+1}}(p^1, \ldots, p^n).$$

Es sind φ und ψ stetig (weil Einschränkungen stetiger Abbildungen stetig sind) und auch

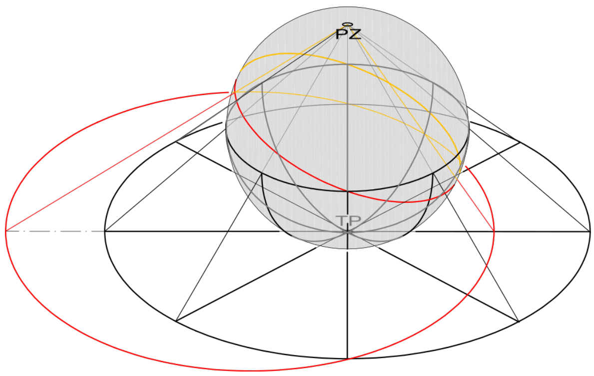


Abbildung 2.1.: stereographische Projektion der $\mathbb{S}^2$

bijektiv, denn

$$(x^1, \ldots, x^n) \mapsto \frac{1}{1 + \|x\|^2}(2x^1, \ldots, 2x^n, -1 + \|x\|^2),\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$$

bzw.

$$(x^1, \ldots, x^n) \mapsto \frac{1}{1 + \|x\|^2}(2x^1, \ldots, 2x^n, 1 - \|x\|^2),\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^n \setminus \{S\}$$

sind Inverse für φ und ψ (Übung). Sie sind offenbar auch stetig und schließlich ist

$$\mathbb{S}^n = \big(\mathbb{S}^n \setminus \{N\}\big) \cup \big(\mathbb{S}^n \setminus \{S\}\big).$$

Damit ist $\mathbb{S}^n$ eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension n.

Es ist aber $\mathfrak{A} = (\varphi, \psi)$ auch differenzierbar, denn für die Übergänge $\varphi \circ \psi^{-1}$ bzw. $\psi \circ \varphi^{-1}$ von $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ nach $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt (Übung)

$$\varphi \circ \psi^{-1}(x) = \psi \circ \varphi^{-1}(x) = \frac{x}{\|x\|^2}.$$

Also ist $\big(\mathbb{S}^n, [(\varphi, \psi)]\big)$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n.

(2.9) Definition. Sei (M, c) eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, $p \in M$. Eine stetige Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heißt **differenzierbar in p**, wenn für ein $\mathfrak{A} \in c$ und eine Karte $\varphi : U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ aus $\mathfrak{A}$ mit $p \in U$ gilt: $f \circ \varphi^{-1} : V \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar in $x_0 = \varphi(p)$. Es heißt f **differenzierbar**, wenn f differenzierbar in allen Punkten $p \in M$ ist.

(2.10) Kommentar. Wie in der Definition für den Begriff der differenzierbaren Mannigfaltigkeit bereits vermerkt, ist diese Definition nun unabhängig von der gewählten Karte um p, denn für zwei Karten $\varphi_1 : U_1 \to V_1$ und $\varphi_2 : U_2 \to V_2$ in $p \in U_1 \cap U_2$ ist ja nun

$$f \circ \varphi_2^{-1} = (f \circ \varphi_1^{-1}) \circ (\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}) \quad \text{auf } \varphi_2(U_1 \cap U_2),$$

also differenzierbar in $x_2 = \varphi_2(p)$, genau dann wenn $f \circ \varphi_1^{-1}$ differenzierbar in $x_1 = \varphi_1(p)$ ist (mit φ_1 Karte aus $\mathfrak{A}_1$, φ_2 Karte aus $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2 \in c$).

(2.11) Definition.

(a) Seien $(M^n, [\mathfrak{A}])$ und $(N^r, [\mathfrak{B}])$ differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $p \in M$. Eine stetige Abbildung $\Phi : M \to N$ heißt **differenzierbar in p**, wenn für eine (und dann jede) Wahl von Karten $\varphi : U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ um p und $\psi : \widetilde{U} \to \widetilde{V} \subseteq \mathbb{R}^r$ um $\Phi(p) = q$ gilt, dass
$$\psi \circ \Phi \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \supseteq \varphi\big(U \cap \Phi^{-1}(\widetilde{U})\big) \to \widetilde{V} \subseteq \mathbb{R}^r$$
differenzierbar in $x_0 = \varphi(p)$ ist.

(b) Es heißt Φ **differenzierbar**, wenn Φ differenzierbar in allen Punkten ist.

(c) Ist $\Phi : M \to N$ differenzierbar und bijektiv, so dass auch $\Phi^{-1} : N \to M$ differenzierbar ist, so nennt man Φ einen **Diffeomorphismus**. Es heißt M **diffeomorph zu** N, $M \cong N$, wenn es einen Diffeomorphismus zwischen M und N gibt.

(2.12) Beispiel. Wir wissen bereits, dass $c_1 = \big[(\varphi)\big]$ und $c_2 = \big[(\psi)\big]$ mit $\varphi = \mathbb{1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$, zwei verschiedene differenzierbare Strukturen auf $\mathbb{R}$ liefert. Es ist aber $(\mathbb{R}, c_1) \cong (\mathbb{R}, c_2)$ vermöge $\Phi : (\mathbb{R}, c_1) \to (\mathbb{R}, c_2)$, $p \mapsto \sqrt[3]{p}$, denn in den Karten lautet diese Abbildung ja $\psi \circ \Phi \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$\psi \circ \Phi \circ \varphi^{-1}(x) = \psi \circ \Phi(x) = \psi\big(\sqrt[3]{x}\big) = \big(\sqrt[3]{x}\big)^3 = x$$
und das ist sicher differenzierbar und auch $\varphi \circ \Phi^{-1} \circ \psi^{-1} = \mathbb{1}$. Also ist Φ Diffeomorphismus.

(2.13) Kommentar.

(a) Ist $f : M \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion im Sinne von Definition (2.9), so ist f offenbar differenzierbar im Sinne von (2.10), wenn man $\mathbb{R}$ mit seiner Standard-Struktur $\big(c = [(\mathbb{1})]\big)$ versieht und umgekehrt, denn für eine Karte φ auf M ist
$$f \circ \varphi^{-1} = \mathbb{1} \circ f \circ \varphi^{-1}.$$

(b) Jede Karte φ auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit ist selbst ein Diffeomorphismus (Übung).

(c) Es ist übrigens durchaus möglich, dass eine topologische Mannigfaltigkeit keine differenzierbare Struktur trägt und auch, dass sie paarweise nicht diffeomorphe Strukturen trägt. Ein spektakuläres Ergebnis von J. Milnor (1956) ist, dass auf der $\mathbb{S}^7$ neben der Standard-Struktur weitere (sogenannte exotische) Strukturen existieren $\big($genau 27 Stück (Kervaire/Milnor 1963)$\big)$.

(d) Ist M^n eine Mannigfaltigkeit und $N \subseteq M$ offen, so gilt offenbar für die induzierte Struktur von (2.7,c), dass die Inklusion $i : N \hookrightarrow M$ differenzierbar ist.

(2.14) Konstruktion. Seien $(M_1^{n_1}, c_1)$ und $(M_2^{n_2}, c_2)$ differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $M := M_1 \times M_2$ ihr cartesisches Produkt versehen mit der Produkttopologie.

(i) Es ist dann M eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension $n_1 + n_2$, denn zunächst ist M hausdorffsch und von abzählbarer Topologie, weil M_1 und M_2 es sind. Ist nun $p = (p_1, p_2) \in M$, so gibt es offene Umgebungen $U_1 \subseteq M_1$ von p_1, $U_2 \subseteq M_2$ von p_2 und offene Mengen $V_1 \subseteq \mathbb{R}^{n_1}$, $V_2 \subseteq \mathbb{R}^{n_2}$ sowie Homöomorphismen $\varphi_1 : U_1 \to V_1$ und $\varphi_2 : U_2 \to V_2$. Es ist dann $U := U_1 \times U_2 \subseteq M$ offene Umgebung von p, es ist $V := V_1 \times V_2 \subseteq \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} = \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ offen und es ist $\varphi := \varphi_1 \times \varphi_2 : U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$, $n := n_1 + n_2$ ein Homöomorphismus.

(ii) Ist nun $\mathfrak{A}_1 \in c_1$, $\mathfrak{A}_1 = (\varphi_1^i : U_1^i \to V_1^i \subseteq \mathbb{R}^{n_1})_{i \in I}$ ein Repräsentant für die differenzierbare Struktur c_1 auf M_1 und $\mathfrak{A}_2 = (\varphi_2^j : U_2^j \to V_2^j)_{j \in J}$, so betrachten wir

$$\mathfrak{A} := (\varphi_1^i \times \varphi_2^j : U_1^i \times U_2^j \to V_1^i \times V_2^j \subseteq \mathbb{R}^n)_{(i,j) \in I \times J}$$

und stellen fest, dass $\mathfrak{A}$ ein differenzierbarer Atlas auf M ist und $c = [\mathfrak{A}]$ nur von c_1 und c_2 abhängt (nicht von Repräsentantenwahl $\mathfrak{A}_1 \in c_1$ und $\mathfrak{A}_2 \in c_2$). Damit ist dann (M, c) eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension $n = n_1 + n_2$.

(iii) Sind $\pi_1 : M \to M_1$ und $\pi_2 : M \to M_2$ die kanonischen Projektionen, so gilt für eine Karte $\varphi_1 : U_1 \to V_1$ von M_1, $\varphi_2 : U_2 \to V_2$ von M_2 und $\varphi_1 \times \varphi_2 : U_1 \times U_2 \to V_1 \times V_2$ von M, dass z.B.

$$\varphi_1 \circ \pi_1 \circ (\varphi_1 \times \varphi_2)^{-1} : \mathbb{R}^n \supseteq V_1 \times V_2 \to V_1 \subseteq \mathbb{R}^{n_1},\ (x_1, x_2) \mapsto x_1,$$

welches differenzierbar ist. Also sind π_1 und π_2 differenzierbar.

(2.15) Beispiel.

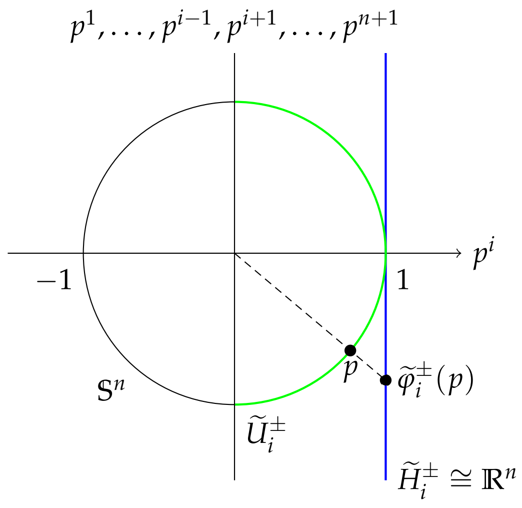
(a) Betrachte für $\widetilde{M} = \mathbb{S}^n$ den folgenden $2 \cdot (n+1)$-seitigen Atlas $\big($der dem 2-seitigen Atlas der stereographischen Projektion aus Nord- und Südpol heraus äquivalent ist (Übung)$\big)$. Sei

$$\widetilde{U}_i^{\pm} := \{p \in \mathbb{S}^n : \pm p^i > 0\}$$

und $\widetilde{V}_i^{\pm} = \mathbb{R}^n$. Betrachte nun die **Zentralprojektion** aus dem Nullpunkt heraus von $\widetilde{U}_i^{\pm}$ auf

$$\widetilde{H}_i^{\pm} = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} : p^i = \pm 1\} \cong \mathbb{R}^n = \widetilde{V}_i^{\pm} :$$

$$\widetilde{\varphi}_i : \widetilde{U}_i^{\pm} \to \widetilde{V}_i^{\pm} = \mathbb{R}^n,\ (p^1, \dots, p^{n+1}) \mapsto \pm \frac{1}{p^i}(p^1, \dots, p^{i-1}, p^{i+1}, \dots, p^{n+1})$$



$\widetilde{\varphi}_i^{\pm}$ ist bijektiv und für die Umkehrung $(\widetilde{\varphi}_i^{\pm})^{-1} : \widetilde{V}_i^{\pm} \to \widetilde{U}_i^{\pm}$ gilt:

$$(\widetilde{\varphi}_i^{\pm})^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \|x\|^2}}(x^1, \dots, x^{i-1}, 1, x^i, \dots, x^n)$$

$(i = 1, \dots, n+1)$.

(b) Setze nun für den projektiven Raum $\mathbb{P}^n = \mathbb{S}^n/\pm$:

$$U_i := \{(p^1 : \ldots : p^{n+1}) \in \mathbb{P}^n : p^i \neq 0\}.$$

Weil $\widetilde{U}_i^\pm$ kein Antipodenpaar enthält, gilt für die kanonische Projektion $\pi : \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n$, $p \mapsto [p]$, dass $\pi|_{\widetilde{U}_i^\pm} : \widetilde{U}_i^\pm \to U_i$ ein Homöomorphismus ist. Man setzt nun als Karte $\varphi_i : U_i \to V_i = \mathbb{R}^n$:

$$\varphi_i := \widetilde{\varphi}_i^+ \circ (\pi|_{\widetilde{U}_i^+})^{-1},$$

also

$$\varphi_i(p^1 : \ldots : p^{n+1}) = \frac{1}{p^i}(p^1, \ldots, p^{i-1}, p^{i+1}, \ldots, p^{n+1}).$$

Für die Übergänge φ_{ij} erhält man dann bei $i < j$, dass

$$\varphi_{ij}(x) = \frac{1}{x^i}(x^1, \ldots, x^{i-1}, x^{i+1}, \ldots, x^{j-1}, 1, x^j, \ldots, x^n)$$

(Übung, u. ä. bei $i > j$), also differenzierbar. Mit $\mathfrak{A} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1})$ wird daher $\mathbb{P}^n$ zu einer n-dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit (Übung: $\mathbb{P}^n$ ist hausdorffsch und von abzählbarer Topologie). Die kanonische Projektion $\pi : \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n$ wird mit dieser Struktur zu einer differenzierbaren Abbildung, sogar zu einem **lokalen Diffeomorphismus**, d.h.: zu jedem Punkt $p \in \mathbb{S}^n$ gibt es offene Umgebungen $U \subseteq \mathbb{S}^n$ von p und $V \subseteq \mathbb{P}^n$ von $[p] = \pi(p)$, so dass $\pi(U) = V$ ist und $\pi|_U : U \to V$ ein Diffeomorphismus ist. Für $p \in \widetilde{U}_i^\pm$ ist nämlich mit den Karten $\widetilde{\varphi}_i^\pm$ von $\mathbb{S}^n$ um p und φ_i von $\mathbb{P}^n$ um $[p]$

$$\varphi_i \circ \pi \circ (\widetilde{\varphi}_i^\pm)^{-1}(x) = \widetilde{\varphi}_i^+ \circ (\pi|_{\widetilde{U}_i^+})^{-1} \circ \pi \circ (\widetilde{\varphi}_i^\pm)^{-1}(x) = \pm x,$$

also $\pi|_{\widetilde{U}_i^\pm} : \widetilde{U}_i^\pm \to U_i$ ein Diffeomorphismus. □

(2.16) Definition. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und Γ eine Gruppe. Eine **Operation von Γ durch Diffeomorphismen** ist gegeben durch eine Abbildung $\Phi\colon \Gamma \times M \to M$,

$$\Phi(\gamma, p) =: \gamma.p,$$

so dass gilt:

(a) Für jedes $\gamma \in \Gamma$ ist die Abbildung $\Phi_\gamma\colon M \to M$, $p \mapsto \gamma.p$, differenzierbar;

(b) für alle $p \in M$ gilt: $1.p = p$;

(c) für alle $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ und $p \in M$ gilt: $(\gamma_1\gamma_2).p = \gamma_1.(\gamma_2.p)$.

(2.17) Kommentar.

(a) Jedes $\Phi_\gamma\colon M \to M$ ist tatsächlich ein Diffeomorphismus, denn für $\Phi_{\gamma^{-1}}\colon M \to M$ gilt:

$$\Phi_{\gamma^{-1}} \circ \Phi_\gamma(p) = \gamma^{-1}.(\gamma.p) = (\gamma^{-1}\gamma).p = 1.p = p = \mathbb{1}(p)$$

und ebenso

$$\Phi_\gamma \circ \Phi_{\gamma^{-1}} = \mathbb{1}.$$

Also ist Φ_γ bijektiv und $(\Phi_\gamma)^{-1} = \Phi_{\gamma^{-1}}$.

(b) Bezeichnet man mit

$$\mathrm{Diff}(M) := \{\Phi\colon M \to M \,:\, \Phi \text{ ist Diffeomorphismus}\},$$

so wird $\mathrm{Diff}(M)$ mit der Verkettung von Abbildungen zu einer Gruppe. Ist $\Phi\colon \Gamma \times M \to M$ eine Operation durch Diffeomorphismen, so ist die Abbildung

$$\Gamma \to \mathrm{Diff}(M),\ \gamma \mapsto \Phi_\gamma,$$

ein Gruppenhomomorphismus. Man spricht daher auch von einer **Darstellung von Γ** als einer **Transformationsgruppe von M**. (Man beachte aber, dass $\Gamma \to \mathrm{Diff}(M)$ nicht notwendig injektiv sein muss.)

(2.18) Beispiel.

(a) Sei V ein reeller Vektorraum der Dimension n. Sei nun

$$\Gamma = \mathrm{Aut}(V) := \{T\colon V \to V \,:\, T \text{ ist linearer Automorphismus}\}.$$

Dann operiert Γ durch Diffeomorphismen auf V durch

$$T.v := Tv.$$

(b) Sei

$$\Gamma = \mathbb{O}(n+1) = \{A \in \mathrm{Mat}_{n+1}(\mathbb{R}) \,:\, A^t \cdot A = \mathbb{1}\}$$

die orthogonale Gruppe. Dann operiert Γ auf $\mathbb{S}^n$ durch Diffeomorphismen vermöge

$$A.p := Ap,$$

denn für $A \in \mathbb{O}(n+1)$ ist $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$, für alle $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$ und dem kanonischen Skalarprodukt $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x^i y^i$, also ist mit $\langle p, p\rangle = 1$ auch $\langle Ap, Ap\rangle = 1$.

(2.19) Definition. Sei Γ eine Gruppe und M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Es operiere Γ auf M durch Diffeomorphismen.

(a) Für $p \in M$ heißt dann

$$\Gamma p := \{\gamma.p \in M \,:\, \gamma \in \Gamma\} \subseteq M$$

die Bahn (oder der **Orbit**) von **p unter Γ**.

(b) Für $p \in M$ heißt

$$\Gamma_p := \{\gamma \in \Gamma \,:\, \gamma.p = p\} \subseteq \Gamma$$

die **Standgruppe in p**.

(2.20) Kommentar.

(a) Operiert Γ auf M, $\Gamma \curvearrowright M$, so ist M disjunkte Vereinigung seiner Bahnen, denn

$$p \sim q :\Longleftrightarrow q \in \Gamma_p$$

ist eine Äquivalenzrelation $\big(p = 1.p;\ q = \gamma.p \Longrightarrow \gamma^{-1}.q = p;\ q = \gamma_1.p,\ r = \gamma_2.q \Longrightarrow r = (\gamma_1\gamma_2).p\big)$. Besteht M aus nur einer Bahn, d.h.: $\Gamma p = M$, für ein (und dann für jedes) $p \in M$, so sagt man, dass Γ **transitiv** auf M operiert.

(b) Zunächst prüft man ohne Mühe nach, dass $\Gamma_p \subseteq \Gamma$ eine Untergruppe ist (Übung). Für jede Bahn $\Gamma p \subseteq M$ erhält man dann eine bijektive Abbildung durch

$$\varrho_p \colon \Gamma / \Gamma_p \to \Gamma p,\ \varrho_p\big([\gamma]\big) = \gamma.p,$$

$$\begin{tikzcd} \Gamma \arrow[r, "\gamma \mapsto \gamma.p"] \arrow[d, "\pi"'] & \Gamma p \\ \Gamma / \Gamma_p \arrow[ur, "\varrho_p"'] & \end{tikzcd}$$

denn für zwei Repräsentanten γ_1, γ_2 der gleichen Linksnebenklasse gibt es offenbar ein $\delta \in \Gamma$, so dass $\gamma_2 = \gamma_1 \delta$ ist und daher ist

$$\gamma_2.p = (\gamma_1\delta).p = \gamma_1.\underbrace{(\delta.p)}_{=p} = \gamma_1.p,$$

also ist ϱ_p wohldefiniert. Es ist ϱ_p nach Konstruktion surjektiv und auch injektiv. Ist $\Gamma_p = \{1\}$ für alle $p \in M$, so sagt man, dass Γ **frei** (oder **fixpunktfrei**) operiert. Alle Bahnen sind dann (vermöge ϱ_p) Kopien von Γ.

(2.21) Beispiel.

(a) Die Operation von $\mathrm{Aut}(V)$ auf V für einen (endlich-dimensionalen) reellen Vektorraum V hat offenbar genau zwei Bahnen, nämlich $\{0\}$ und $V \setminus \{0\}$ (Übung).

(b) Es operiert $\mathbb{O}(n+1)$ offenbar transitiv auf $\mathbb{S}^n$, denn sind $p, q \in \mathbb{S}^n$ beliebig, so ergänze man $p =: e_1$ zu einer Orthonormal-Basis $(e_1, \ldots, e_{n+1})$ von $\big(\mathbb{R}^{n+1}, \langle -, - \rangle\big)$ und $q =: f_1$ zu einer Orthonormal-Basis $(f_1, \ldots, f_{n+1})$ und betrachte gerade das $A \in \mathbb{O}(n+1)$, welches durch $A\, e_i = f_i$ $(i = 1, \ldots, n+1)$ gegeben ist. Insbesondere ist

$$A\,p = A\,e_1 = f_1 = q.$$

(c) Die Standgruppe von $\mathbb{O}(n+1)$ auf $\mathbb{S}^n$ im Nordpol $N = (0, \ldots, 0, 1)$ ist (offenbar) gegeben durch

$$\left\{ \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & A & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right) \in \mathbb{O}(n+1) \;:\; A \in \mathbb{O}(n) \right\} \cong \mathbb{O}(n).$$

Es ist also (zunächst als Menge):

$$\mathbb{S}^n \cong \mathbb{O}(n+1) / \mathbb{O}(n).$$

(2.22) Definition. Sei $\Phi \colon \Gamma \times M \to M$ eine Operation einer Gruppe Γ auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M durch Diffeomorphismen. Man sagt, dass Γ **eigentlich diskontinuierlich** auf M operiert, wenn es zu jedem Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung $U \subseteq M$ von p gibt, so dass für alle $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ mit $\gamma \neq \gamma'$ gilt:

$$\Phi_\gamma(U) \cap \Phi_{\gamma'}(U) = \emptyset.$$

$\big($schreibe: $\gamma(U) := \Phi_\gamma(U) = \{\gamma.x \;:\; x \in U\}$.$\big)$

(2.23) Bemerkung. Ist Γ endlich und operiert Γ frei auf M, so operiert Γ eigentlich diskontinuierlich.

Beweis. Sei $p \in M$. Dann ist $\gamma.p \neq \gamma'.p$ für $\gamma \neq \gamma'$ $\big(\gamma.p = \gamma'.p \implies (\gamma'^{-1}\gamma).p = \gamma'^{-1}.(\gamma.p) = \gamma'^{-1}.(\gamma'.p) = (\gamma'^{-1}\gamma').p = 1.p = p \implies \gamma'^{-1}\gamma = 1 \implies \gamma = \gamma'\big)$. Da M hausdorffsch ist, existieren offene Umgebungen $U_\gamma \subseteq M$ von $\gamma.p$, die paarweise disjunkt sind, $U_\gamma \cap U_{\gamma'} = \emptyset$ für $\gamma \neq \gamma'$ (da Γ endlich ist). Sei nun

$$U := \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \gamma^{-1}(U_\gamma).$$

Dann ist $p \in U$, U ist offen (da Γ endlich) und

$$\gamma(U) \subseteq \gamma\gamma^{-1}(U_\gamma) \subseteq U_\gamma,$$

also

$$\gamma(U) \cap \gamma'(U) \subseteq U_\gamma \cap U_{\gamma'} = \emptyset \text{ für } \gamma \neq \gamma'.$$

Also operiert Γ eigentlich diskontinuierlich. □

(2.24) Beispiel.

(a) $\Gamma = \mathbb{Z}_2\,(= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \{\pm 1\}$ operiert auf $\mathbb{S}^n$ durch Punktspiegelung im Zentrum,

$$\pm 1.p := \pm p,$$

also eigentlich diskontinuierlich.

(b) $\Gamma = \mathbb{Z}^n$ operiert auf $M = \mathbb{R}^n$ durch **Translationen** eigentlich diskontinuierlich vermöge

$$\gamma.p := p + \gamma.$$

Ist nämlich $U := B(p; \frac{1}{2})$, so ist

$$\gamma(U) \cap \gamma'(U) = \emptyset$$

für $\gamma \neq \gamma'$ (Übung).

(2.25) Definition. Sei $\Gamma \curvearrowright M$ eine Operation einer Gruppe Γ auf eine differenzierbaren Mannigfaltigkeit M. Für $p, q \in M$ sei $p \sim q$, wenn es ein $\gamma \in \Gamma$ mit $q = \gamma.p$ gibt. Man nennt dann den Quotientenraum $M/{\sim}$ den Bahnenraum von M (unter Γ) und schreibt auch M/Γ.

(2.26) Satz. *Es operiere Γ auf einer Mannigfaltigkeit $\widetilde{M}$ eigentlich diskontinuierlich. Sei $\pi\colon \widetilde{M} \to \widetilde{M}/\Gamma$ die kanonische Projektion und sei $M := \widetilde{M}/\Gamma$ hausdorffsch. Dann gibt es auf M die Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit, so dass folgende universelle Eigenschaft erfüllt ist: Ist N differenzierbare Mannigfaltigkeit, so ist eine stetige Abbildung $\Phi\colon M \to N$ genau dann differenzierbar, wenn $\Phi \circ \pi\colon \widetilde{M} \to N$ differenzierbar ist.*

$$\begin{tikzcd} \widetilde{M} \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\Phi\circ\pi"] & \\ M \arrow[r, "\Phi"'] & N \end{tikzcd}$$

(2.27) Kommentar. Da $\Phi = \mathbb{1}\colon M \to M$ differenzierbar ist, ist insbesondere π differenzierbar.

Beweis. (i) M ist topologische Mannigfaltigkeit: M ist nach Voraussetzung hausdorffsch. Weiter ist $\pi\colon \widetilde{M} \to M$ eine offene Abbildung, denn für ein offenes $\widetilde{U} \subseteq \widetilde{M}$ gilt

$$\pi^{-1}(\pi(\widetilde{U})) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \underbrace{\gamma(\widetilde{U})}_{\substack{\text{offen, weil} \\ \Phi_\gamma\colon \widetilde{M} \to \widetilde{M} \text{ Homöo.}}}$$

Sei $(\widetilde{B}_n)$ eine abzählbare Basis von $\widetilde{M}$. Setze dann $B_n := \pi(\widetilde{B}_n)$. Dann gilt (Übung) $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Basis der Topologie auf M. Also hat auch M abzählbare Topologie. Sei weiter $p \in M$ und $\widetilde{p} \in \pi^{-1}(p)$ also $p = [\widetilde{p}]$, $\widetilde{p} = \widetilde{p}(p)$. Dann gibt es eine offene Umgebung $\widetilde{U}_{\widetilde{p}}$, so dass gilt

$$\gamma(\widetilde{U}_{\widetilde{p}}) \cap \gamma'(\widetilde{U}_{\widetilde{p}}) = \emptyset \quad \text{für } \gamma \neq \gamma'. \tag{2.1}$$

Nach eventueller Verkleinerung von $\widetilde{U}_{\widetilde{p}}$ existiert nun eine Karte $\widetilde{\varphi}_{\widetilde{p}} \colon \widetilde{U}_{\widetilde{p}} \to \widetilde{V}_{\widetilde{p}} \subseteq \mathbb{R}^n$ von $\widetilde{p}$. Setze nun $U_p := \pi(\widetilde{U}_{\widetilde{p}}) \subseteq M$. Da π offen ist, ist $U_p \subseteq M$ offen und wegen (2.1) ist $\pi|_{\widetilde{U}_{\widetilde{p}}} \colon \widetilde{U}_{\widetilde{p}} \to U_p$ zunächst injektiv. Aber surjektiv ist es sowieso, stetig auch und wegen der Offenheit damit sogar ein Homöomorphismus. Setze schließlich

$$\varphi_p \colon U_p \to V_p := \widetilde{V}_{\widetilde{p}} \subseteq \mathbb{R}^n,\ \varphi_p := \widetilde{\varphi}_{\widetilde{p}} \circ (\pi|_{\widetilde{U}_{\widetilde{p}}})^{-1}.$$

Damit ist also M eine topologische Mannigfaltigkeit $\big($der Dimension $n = \dim(\widetilde{M})\big)$ und $\mathfrak{A} = (\varphi_p \colon U_p \to V_p)_{p\in M}$ ein topologischer Atlas.

(ii) Behauptung: $\mathfrak{A}$ ist sogar differenzierbarer Atlas. Seien nun $p_1, p_2 \in M$, so dass $U_0 := U_{p_1} \cap U_{p_2} \neq \emptyset$ und $p_0 \in U_{p_1} \cap U_{p_2}$. Sei $\widetilde{U}_1 := \widetilde{U}_{\widetilde{p}_1} \cap \pi^{-1}(U_0)$, $\widetilde{U}_2 := \widetilde{U}_{\widetilde{p}_2} \cap \pi^{-1}(U_0)$, $\widetilde{p}_0 := (\pi|_{U_1})^{-1}(p_0)$, $\widetilde{\widetilde{p}}_0 := (\pi|_{\widetilde{U}_2})^{-1}(p_0)$. Da $\pi(\widetilde{p}_0) = p_0 = \pi(\widetilde{\widetilde{p}}_0)$ ist, existiert ein $\gamma \in \Gamma$ mit $\widetilde{\widetilde{p}}_0 = \gamma.\widetilde{p}_0$. Es ist nun $\pi|_{\widetilde{U}_2} \circ \gamma = \pi|_{\widetilde{U}_1}$ (in einer Umgebung von p_0) und mit $\varphi_1 := \varphi_{p_1}$, $\varphi_2 := \varphi_{p_2}$, $\widetilde{\varphi}_1 := \widetilde{\varphi}_{\widetilde{p}_1}$ und $\widetilde{\varphi}_2 := \widetilde{\varphi}_{\widetilde{p}_2}$ gilt dann

$$\begin{aligned}\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(x) &= \big(\widetilde{\varphi}_2 \circ (\pi|_{\widetilde{U}_2})^{-1}\big) \circ \big(\widetilde{\varphi}_1 \circ (\pi|_{\widetilde{U}_1})^{-1}\big)^{-1}(x) \\ &= \widetilde{\varphi}_2 \circ \underbrace{(\pi|_{\widetilde{U}_2})^{-1} \circ (\pi|_{\widetilde{U}_1})}_{=\gamma} \circ \widetilde{\varphi}_1^{-1}(x),\end{aligned}$$

für alle x aus einer Umgebung von p_0. Also ist $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ differenzierbar in $x_0 = \varphi_1(p_0)$, weil $\widetilde{\varphi}_1, \widetilde{\varphi}_2$ und γ Diffeomorphismen sind. Also ist $\mathfrak{A}$ ein differenzierbarer Atlas.

(iii) Noch zu zeigen: $\Phi \colon M \to N$ differenzierbar $\Longleftrightarrow$ $\Phi \circ \pi \colon \widetilde{M} \to N$ differenzierbar.

"$\Longrightarrow$" Mit der eben definierten Struktur $c = [\mathfrak{A}]$ wird $\pi \colon \widetilde{M} \to M$ differenzierbar, denn für $\widetilde{\widetilde{p}} \in \widetilde{M}$ und $p := \pi(\widetilde{\widetilde{p}}) \in M$ existiert ein $\gamma \in \Gamma$, so dass $\widetilde{\widetilde{p}} = \gamma.\widetilde{p}$ $\big($wo $\widetilde{p} = \widetilde{p}(p)\big)$. In den Karten φ um p, $\widetilde{\varphi}$ um $\widetilde{p}$ und $\widetilde{\varphi} \circ \gamma^{-1} =: \widetilde{\widetilde{\varphi}}$ um $\widetilde{\widetilde{p}}$ wird die Abbildung π bzgl. $\widetilde{\widetilde{\varphi}}$ und φ:

$$\begin{aligned}\varphi \circ \pi \circ \widetilde{\widetilde{\varphi}}^{-1} &= \varphi \circ \pi \circ (\widetilde{\varphi} \circ \gamma^{-1})^{-1} \\ &= \big(\widetilde{\varphi} \circ (\pi|_{\widetilde{U}})^{-1}\big) \circ \underbrace{\pi \circ \gamma}_{=\pi} \circ \widetilde{\varphi}^{-1} = \mathbb{1},\end{aligned}$$

also differenzierbar. Da Kompositionen von differenzierbaren Abbildungen wieder differenzierbar sind (Übung), folgt, dass mit einem differenzierbaren Φ auch $\Phi \circ \pi$ differenzierbar ist.

"$\Longleftarrow$" Ist $\Phi \colon M \to N$ stetig, so dass $\Phi \circ \pi$ differenzierbar ist und $p \in M$, so ist Φ in p differenzierbar, weil für die Karte $\varphi := \varphi_p$ um p, eine beliebige Karte ψ um $q := \Phi(p) \in N$ und der Karte $\widetilde{\varphi}_{\widetilde{p}}$ um $\widetilde{p} = \widetilde{p}(p) \in \widetilde{M}$ gilt:

$$\begin{aligned}\psi \circ \Phi \circ \varphi^{-1} &= \psi \circ \Phi \circ \underbrace{\big(\pi \circ (\pi|_{\widetilde{U}})^{-1}\big)}_{=\mathbb{1}} \circ \varphi^{-1} \\ &= \psi \circ (\Phi \circ \pi) \circ \big(\underbrace{\varphi \circ (\pi|_{\widetilde{U}})}_{=\widetilde{\varphi}}\big)^{-1} = \psi \circ (\Phi \circ \pi) \circ \widetilde{\varphi}^{-1}\end{aligned}$$

denn $\Phi \circ \pi$ ist in $\widetilde{p}$ differenzierbar. $\square$

(2.28) Beispiel.

(a) Für $\widetilde{M} = \mathbb{S}^n$ und $\Gamma = \mathbb{Z}_2$, sowie der natürlichen Wirkung von Γ auf $\widetilde{M}$, erhält man für $\widetilde{M}/\Gamma$ gerade den projektiven Raum $\mathbb{P}^n$ (vergleiche die Konstruktion in (2.15) und (2.26)).

(b) Sei $\widetilde{M} = \mathbb{R}^n$ und $\Gamma = \mathbb{Z}^n$ operiere durch Translation. Dann ist also $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und vermöge

$$\Phi\colon \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \to \mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \ldots \times \mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C}^n,\ \big[(t_1,\ldots,t_n)\big] \mapsto (e^{2\pi i t_1},\ldots,e^{2\pi i t_n}),$$

ist $\mathbb{T}^n \cong \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ (Übung).

(2.29) Motivation. Eine **Untermannigfaltigkeit** $M^n \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ der Dimension n ist eine abgeschlossene Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$, so dass jeder Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ besitzt mit einer differenzierbaren Abbildung $F\colon U \to \mathbb{R}^k$, so dass gilt

(i) $F^{-1}(0) = M \cap U$,

(ii) $\mathrm{D}F_p\colon \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^k$ hat den Rang k.

Es heißt dann $\mathrm{T}M_p := \ker(DF_p) \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ der **Tangentialraum von M in p** und es war

$$\mathrm{T}M_p = \big\{\dot\alpha(0) \in \mathbb{R}^{n+k} \,:\, \alpha\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to M^n \text{ glatt } (C^\infty),\ \alpha(0) = p\big\} \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$$

der Raum der Tangentenvektoren an Kurven auf M durch p.

Problem: Wie soll man “$\mathrm{T}M_p$” an eine abstrakte Mannigfaltigkeit definieren?

Idee: Fasse jeden Tangentialvektor $\xi = \dot\alpha(0) \in \mathrm{T}M_p \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ als eine **Richtungsableitung** von Funktionen $f\colon W \to \mathbb{R}$ auf, die auf einer offenen Umgebung $W \subseteq M$ von p definiert sind,

$$\xi(f) := \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (f \circ \alpha)(t)$$

Beachte: ξ ist $\mathbb{R}$-linear und eine **Derivation**, d.h.

$$\xi(fg) = \xi(f)\cdot g(p) + f(p)\cdot \xi(g),$$

denn mit Leibniz ist

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \big((fg)\circ\alpha\big)(t) &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \big((f\circ\alpha)\cdot(g\circ\alpha)\big)(t)\\ &= (f \dot\circ \alpha)(0)\cdot(g\circ\alpha)(0) + (f\circ\alpha)(0)\cdot(g \dot\circ \alpha)(0)\\ &= \xi(f)g(p) + f(p)\xi(g).\end{aligned}$$

(2.30) Definition. Sei M^n eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension n. Ein differenzierbarer Atlas $\mathfrak{A} = (\varphi_i\colon U_i \to V_i)_{i\in I}$ heißt **C^∞-Atlas**, wenn alle Übergänge φ_{ij} C^∞-Abbildungen sind. Zwei C^∞-Atlanten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heißen äquivalent, wenn $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ auch noch C^∞-Atlas ist. Eine Äquivalenzklasse $c = [\mathfrak{A}]$ ist eine C^∞-Struktur auf M. Ein Paar (M, c) heißt dann **eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension n**.

(2.31) Kommentar.

(a) In offensichtlicher Weise definiert man nun **glatte Funktionen** $f\colon M \to \mathbb{R}$ und **glatte Abbildung** $\Phi\colon M \to N$ für glatte Mannigfaltigkeiten M und N.

(b) Für jede offene Teilmenge $U \subseteq M$, M eine glatte Mannigfaltigkeit, schreiben wir:

$$\mathcal{E}(U) := \{f\colon U \to \mathbb{R} \,:\, f \text{ ist glatt}\} \quad \big(\text{auch } C^\infty(U) = \mathcal{E}(U)\big).$$

Es ist $\mathcal{E}(U)$ eine $\mathbb{R}$-Algebra vermöge:

$$\begin{aligned}(f+g)(p) :=& f(p)+g(p), \quad (f\cdot g)(p) := f(p)\cdot g(p),\\ (\lambda f)(p) :=& \lambda f(p), \qquad\qquad f,g \in \mathcal{E}(U),\ \lambda \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

(2.32) Definition. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Auf der mengentheoretischen Summe $\sum_{\substack{U\in\mathfrak{A}(p)\\ U \text{ offen}}} \mathcal{E}(U)$ definieren wir folgende Äquivalenzrelation: Für $f \in \mathcal{E}(U)$ und $g \in \mathcal{E}(\widetilde{U})$ sei $f \sim g$, wenn es ein offenes $W \in \mathfrak{A}(p)$ mit $W \subseteq U \cap \widetilde{U}$ gibt, so dass $f|_W = g|_W$ ist. Die Quotientenmenge $\mathcal{E}_p(M) := \big(\sum \mathcal{E}(U)\big)/\!\sim$ heißt der **Raum der glatten Funktionskeime von M in p**.

(2.33) Kommentar.

(a) Für einen Funktionskeim $s \in \mathcal{E}_p(M)$, der von $f \in \mathcal{E}(U)$ repräsentiert wird, schreiben wir $s = f_p := [f] \in \mathcal{E}_p(M)$. $\mathcal{E}_p(M)$ erbt von $\mathcal{E}(U)$, $U \in \mathfrak{A}(p)$, die Struktur einer $\mathbb{R}$-Algebra, in dem man diese repräsentantenweise definiert:

$$f_p + g_p := (f+g)_p,\ \lambda f_p := (\lambda f)_p,\ f_p \cdot g_p := (f\cdot g)_p \ \text{ für } f \in \mathcal{E}(U),\ g \in \mathcal{E}(\widetilde{U})$$

$\big($und $f+g, fg \in \mathcal{E}(U \cap \widetilde{U})\big)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ und prüft (leicht) nach, dass dies wohldefiniert ist und $\mathcal{E}_p(M)$ zu einer $\mathbb{R}$-Algebra macht.

(b) Die $\mathbb{R}$-Algebra $A := \mathcal{E}_p(M)$, $p \in M$, kommt zudem mit einem Auswertungshomomorphismus $\varrho\colon A \to \mathbb{R}$, nämlich $f_p \mapsto f(p) =: f_p(p)$ was offensichtlich auch wohldefiniert und ein Homomorphismus ist. Man beachte, dass man einen Keim $s \in \mathcal{E}_p(M)$ nicht in Punkten $q \neq p$ auswerten kann.

(2.34) Definition. Sei M^n eine glatte Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und $\mathcal{E}_p(M)$ die $\mathbb{R}$-Algebra der glatten Funktionskeime in p.

(a) Ein $\mathbb{R}$-Vektorraumhomomorphismus $\xi\colon \mathcal{E}_p(M) \to \mathbb{R}$ heißt eine **Derivation** auf $\mathcal{E}_p(M)$, wenn für alle $f_p, g_p \in \mathcal{E}_p(M)$ gilt:

$$\xi(f_p g_p) = \xi(f_p) g_p(p) + f_p(p)\xi(g_p)$$

$\big($oder: $\xi(st) = \xi(s)\varrho(t) + \varrho(s)\xi(t)$, $\forall s,t \in \mathcal{E}_p(M)\big)$.

(b) Ein **Tangentialvektor an M in p** ist eine Derivation auf $\mathcal{E}_p(M)$. Die Menge aller Tangentialvektoren

$$\mathrm{T}M_p := \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}\big(\mathcal{E}_p(M), \mathbb{R}\big) := \{\xi\colon \mathcal{E}_p(M) \to \mathbb{R} \,:\, \xi \text{ ist Derivation}\}$$

heißt der **Tangentialraum von M in p**.

(2.35) Kommentar. Für jede $\mathbb{R}$-Algebra A mit einem Algebra-Homomorphismus $\varrho\colon A \to \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned}\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(A,\mathbb{R}) = \{\xi\colon A \to \mathbb{R},\ &\xi \text{ ist } \mathbb{R}\text{-linear und } \textbf{derivativ},\\ &\text{d.h.: } \xi(ab) = \xi(a)\varrho(b) + \varrho(a)\xi(b),\ \forall a,b \in A\}\end{aligned}$$

ein $\mathbb{R}$-Vektorraum vermöge

$$(\xi_1 + \xi_2)(a) := \xi_1(a) + \xi_2(a)$$
$$(\lambda \cdot \xi)(a) := \lambda \cdot \xi(a)$$

Es ist also $\mathrm{T}M_p = \mathrm{Der}_R\big(\mathcal{E}_p(M), \mathbb{R}\big)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(2.36) Beispiel. Ist $\varepsilon > 0$ und $\alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ eine glatte Kurve auf M durch p, d.h. $\alpha(0) = p$, so wird durch $\xi\colon \mathcal{E}_p(M) \to \mathbb{R}$,

$$\xi(f_p) := \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (f \circ \alpha)(t)$$

ein Tangentialvektor definiert, denn ξ ist offenbar linear und auch derivativ (siehe (2.29)) und auch wohldefiniert. Wir schreiben $\dot{\alpha}(0) := \xi \in \mathrm{T}M_p$ und nennen dies den **Tangentialvektor der Kurve α an p**.

(2.37) Beispiel. Sei M^n glatte Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und $\varphi\colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte um p mit $\varphi(p) =: x_0 \in V$. Für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$ definiert man:

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p : \mathcal{E}_p(M) \to \mathbb{R},\ f_p \mapsto \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_{x=x_0} (f \circ \varphi^{-1})(x)$$

Es ist $\frac{\partial}{\partial x^j}\big|_p$ offenbar $\mathbb{R}$-linear $\big($denn $(f+g) \circ \varphi^{-1} = f \circ \varphi^{-1} + g \circ \varphi^{-1}$ und $(\lambda f) \circ \varphi^{-1} = \lambda(f \circ \varphi^{-1})\big)$ und auch derivativ, denn mit Leibniz ist

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p (f_p \cdot g_p) &= \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_{x=x_0} (fg \circ \varphi^{-1}) = \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_{x_0} (f \circ \varphi^{-1} \cdot g \circ \varphi^{-1})(x) \\
&= \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_{x_0} (f \circ \varphi^{-1})(x) \cdot g \circ \varphi^{-1}(x_0) + (f \circ \varphi^{-1})(x_0) \cdot \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_{x_0} (g \circ \varphi^{-1})(x) \\
&= \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p (f_p) \cdot g_p(p) + f_p(p) \cdot \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p (g_p),
\end{aligned}$$

und wohldefiniert sowieso, weil man bei solchen Ableitungsoperatoren, ähnlich wie in Beispiel (2.36), die Funktion f nur in einer „infinitesimalen“ Umgebung von p zu kennen braucht, d.h. nur den Keim f_p.

Wir nennen $\frac{\partial}{\partial x^j}|_p \in \mathrm{T}M$ **den j-ten Koordinatenvektor bzgl. der Karte φ**. Beachte: Ist $\alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ die Kurve $\alpha(t) = \varphi^{-1}(x_0 + te_j)$ ($\varepsilon > 0$ klein genug), so ist gerade $\frac{\partial}{\partial x^j}\big|_p = \dot{\alpha}(0)$, denn

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_{x_0} (f \circ \varphi^{-1})(x) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 (f \circ \varphi^{-1})(x_0 + te_j).$$

(wo $(e_1, \dots, e_n)$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^n$ ist).

(2.38) Bemerkung. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und $\varphi\colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte um p. Dann ist die Familie der Tangentialvektoren $\big(\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p\big)$ linear unabhängig.

Beweis. Sei $x^j\colon V \to \mathbb{R}$ die j-te Koordinatenfunktion $x \mapsto x^j$ und $\pi^j\colon U \to \mathbb{R}$, $\pi^j := x^j \circ \varphi$. Dann gilt für $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p\colon \mathcal{E}_p(M) \to \mathbb{R}$:

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p (\pi^j_p) = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{x_0} (\pi^j \circ \varphi^{-1})(x) = \left.\frac{\partial x^i}{\partial x^j}\right|_{x_0} = \delta^i_j \left(= \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} \right).$$

Ist also

$$\lambda^1 \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p + \ldots + \lambda^n \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p = 0$$

so insbesondere

$$0 = 0(\pi^j_p) = \sum_{i=1}^n \lambda^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p (\pi^j_p) = \sum_{i=1}^n \lambda^i \delta^j_i = \lambda^j,$$

also ist $(\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p)$ linear unabhängig. □

(2.39) Vereinbarung. Wir vereinbaren ab hier die **Einsteinsche Summenkonvention**, die besagt, dass falls in einer Formel ein Index doppelt auftaucht, und einmal oben und unten steht, so wird über diesen (von 1 bis $n = \dim M$) summiert.

(2.40) Problem. Wenn $\mathrm{T}M_p = \mathrm{Der}\big(\mathcal{E}_p(M), \mathbb{R}\big)$ wirklich ein adequates Konzept für den Tangentialraum von M an p sein soll, muss $(\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p)$ auch Erzeugendensystem sein, also $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{T}M_p = n$. Auf den ersten Blick wirkt dies vermessen. Man beachte aber, dass die Derivations-Eigenschaft folgendes liefert:

(a) Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\lambda_p \in \mathcal{E}_p(M)$ der von der konstanten Funktion $M \to \mathbb{R}$, $p \mapsto \lambda$, induzierte Funktionskeim, so ist für jede Derivation $\xi\colon \mathrm{T}M_p \to \mathbb{R}$

$$\xi(\lambda_p) = \xi(\lambda \cdot 1_p) = \lambda\, \xi(1_p)$$

wegen der $\mathbb{R}$-Linearität und

$$\xi(1_p) = \xi(1_p \cdot 1_p) = \xi(1_p) \cdot \underbrace{1_p(p)}_{=1} + \underbrace{1_p(p)}_{=1} \cdot \xi(1_p) = 2 \cdot \xi(1_p)$$

folgt, also

$$\xi(\lambda_p) = 0, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

(b) Sind $f_p, g_p \in \mathcal{E}_p(M)$ mit $f_p(p) = 0 = g_p(p)$, so ist

$$\xi(f_p g_p) = \xi(f) \cdot \underbrace{g_p(p)}_{=0} + \underbrace{f_p(p)}_{=0} \cdot \xi(g_p) = 0.$$

Eine Derivation ξ ermittelt also gewissermaßen nur, was ein Keim „in 1.Ordnung“ (bei p) macht.

(2.41) Lemma. *Sei $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ein sternförmiges Gebiet bzgl. $p = 0$, d.h.: mit jedem $x \in V$ ist auch die Strecke $\big\{tx \in \mathbb{R}^n \ : \ t \in [0,1]\big\}$ in V. Sei $g\colon V \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Dann gibt es glatte Funktionen $h_1, \ldots, h_n\colon V \to \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in V$ folgendes gilt:*

$$g(x) = g(0) + h_j(x) x^j.$$

(2.42) Kommentar. Man beachte, dass nach der Produktregel

$$\frac{\partial g}{\partial x^j}(0) = h_j(0)$$

ist.

***Beweis von* (2.41).** Man setze $h_j \colon V \to \mathbb{R}$,

$$h_j(x) := \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x^j}(tx)\mathrm{d}t.$$

Dann ist h_j auch glatt und nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist:

$$\begin{aligned} g(x) - g(0) &= \int_0^1 \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g(tx) \right) \mathrm{d}t \underset{\text{Kettenregel}}{=} \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x^j}(tx) \cdot x^j \mathrm{d}t \\ &= \left(\int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x^j}(tx)\mathrm{d}t \right) \cdot x^j = h_j(x)x^j. \end{aligned}$$

□

(2.43) Satz. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension n. Dann ist für jedes $p \in M$ der Tangentialraum $\mathrm{T}M_p$ an M in p ein reeller Vektorraum der Dimension n. Ist $\varphi \colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte in p und $\frac{\partial}{\partial x^j}|_p$ der induzierte j-te Koordinatenvektor, so ist $(\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p)$ eine Basis.*

Beweis. (i) Lineare Unabhängigkeit: (2.38)

(ii) Erzeugendensystem: Sei $\xi \in \mathrm{T}M_p$ beliebig, $\varphi \colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte um p, $\varphi(p) = 0$ und V sternförmig bzgl. $0 \in \mathbb{R}^n$. Das kann man nach einer eventuellen Translation mit der Karte und einer eventuellen Verkleinerung der Karte (z.B. auf einen Ball $V = B_\varepsilon(0)$ (mit $\varepsilon > 0$)) immer annehmen (Übung). Seien $\pi^j \in \mathcal{E}_p(U)$ die j-te Koordinatenfunktion bzgl. φ, also $\pi^j = x^j \circ \varphi$. Wir setzen $\lambda^j := \xi(\pi^j_p)$ und behaupten:

$$\xi = \lambda^j \frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_p .$$

Sei dazu $s \in \mathcal{E}_p(M)$ beliebig, $f \in \mathcal{E}(\widetilde{U})$ ein Repräsentant und ohne Einschränkung nach eventueller Verkleinerung von U bzw. $\widetilde{U}$ sei $U = \widetilde{U}$, also $s = f_p$. Sei $g := f \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{E}(V)$. Mit (2.41) gibt es glatte Funktionen $h_1, \ldots, h_n \in \mathcal{E}(V)$ mit

$$g(x) = g(0) + h_j(x)x^j, \ \forall x \in V.$$

Also ist:

$$f = g \circ \varphi = g \circ \varphi(p) + (h_j \circ \varphi)(x^j \circ \varphi) = f(p) + H_j \pi^j$$

mit $H_j := h_j \circ \varphi \in \mathcal{E}(U)$. Wegen $\pi^j(p) = x^j(0) = 0$ folgt nun:

$$\begin{aligned} \xi(f_p) &= \xi\Big(\big(f(p)\big)_p + (H_j)_p \cdot \pi^j_p \Big) \\ &= \underbrace{\xi\big(f_p(p)\big)}_{=0} + \xi\big((H_j)_p\big) \cdot \underbrace{\pi^j_p(p)}_{=0} + (H_j)_p(p) \cdot \underbrace{\xi(\pi^j_p)}_{=\lambda^j} \end{aligned}$$

und andererseits:

$$H_j(p) = h_j\big(\varphi(p)\big) = h_j(0) \overset{(2.42)}{=} \frac{\partial g}{\partial x^j}(0) = \frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_p (f_p)$$

Für alle $f_p \in \mathcal{E}_p(M)$ gilt also:

$$\xi(f_p) = \lambda^j \frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_p (f_p)$$

also

$$\xi = \lambda^j \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

□

(2.44) Kommentar.

(a) Die Dimension einer Mannigfaltigkeit $M \neq \emptyset$ ist also eindeutig bestimmt:

$$\dim M = n = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{T}M_p,\ \forall p \in M.$$

(Es ist auch richtig, dass die Dimension einer topologischen Mannigfaltigkeit eindeutig definiert ist, weil für zwei offene Mengen $V \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V' \subseteq \mathbb{R}^{n'}$ gilt: Sind V und V' homöomorph so ist $n = n'$. Das ist ein Resultat der „Algebraischen Topologie“, siehe z.B. [SZ])

(b) Jeder Tangentialvektor taucht als Tangentenvektor einer geeigneten Kurve auf. Ist nämlich $\xi \in \mathrm{T}M_p$ beliebig, $\varphi\colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte und $\lambda^1, \dots, \lambda^n \in \mathbb{R}$ so, dass $\xi = \lambda^j \frac{\partial}{\partial x^j}\big|_p$ ist, so betrachte die Kurve $\alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$,

$$\alpha(t) = \varphi^{-1}(t\lambda)$$

$\big(\lambda := (\lambda^1, \dots, \lambda^n) \in \mathbb{R}^n\big)$. Es ist dann für alle $f_p \in \mathcal{E}_p(M)$:

$$\begin{aligned}\dot\alpha(0)(f_p) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} (f \circ \alpha)(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} \big(f \circ \varphi^{-1}(t\lambda)\big) \overset{\text{K.R.}}{=} \frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_0 (f \circ \varphi^{-1}) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} (t\lambda^j) \\ &= \lambda^j \cdot \frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_p (f_p),\end{aligned}$$

also

$$\dot\alpha(0) = \lambda^j \frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_p = \xi.$$

Also:

$$\mathrm{T}M_p = \{\dot\alpha(0) \in \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}\big(\mathcal{E}_p(M), \mathbb{R}\big)\ :\ \alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \text{ glatte Kurve mit } \alpha(0) = p\ (\varepsilon > 0)\}$$

(2.45) Vereinbarung.

(a) Ist $\varphi\colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte auf einer glatten Mannigfaltigkeit, so schreiben wir ab jetzt oft nur noch $x\colon U \to V$, wo “x” auch die Koordinate für V bezeichnet.

(b) Sind $x\colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ und $y\colon \widetilde{U} \to \widetilde{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ zwei Karten und $U \cap \widetilde{U} \neq \emptyset$, so schreiben wir für den Übergang $y \circ x^{-1}\colon x(U \cap \widetilde{U}) \to y(U \cap \widetilde{U})$ ebenfalls nur kurz y $\big($oder $y = y(x)\big)$.

(c) Ist z.B. $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion und $x\colon U \to V$ eine Karte von M, so schreibt man für die lokale Beschreibung $f \circ x^{-1}\colon V \to \mathbb{R}$ oft ebenfalls nur f $\big($oder $f(x)\big)$ und benutzt keinen neuen Buchstaben.

(2.46) Bemerkung. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und seien x und y zwei Karten um p, $x_0 = x(p)$, $y_0 = y(p)$. Dann gilt für alle $i, j = 1, \dots, n$:

$$\frac{\partial}{\partial y^j}\bigg|_p = \frac{\partial x^i}{\partial y^j}\bigg|_{y_0} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p, \quad \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\bigg|_{x_0} \cdot \frac{\partial}{\partial y^j}\bigg|_p.$$

Beweis. Nenne (nochmal einmal) $\varphi = x \colon U \to V$, $\psi = y \colon \widetilde{U} \to \widetilde{V}$ und ohne Einschränkung: $U = \widetilde{U}$, und $\tau = \psi \circ \varphi^{-1} \colon V \to \widetilde{V}$. Sei $s \in \mathcal{E}_p(M)$, $f \in \mathcal{E}(\widetilde{\widetilde{U}})$ mit $f_p = s$ und ohne Einschränkung: $\widetilde{\widetilde{U}} = U$. Dann ist $\big($ohne Einschränkung $\varphi(p) = 0 = \psi(p)$, also $\tau(0) = 0\big)$:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p (f_p) = \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p (f \circ \varphi^{-1}) = \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_0 (f \circ \psi^{-1} \circ \tau),$$

weil $\tau \circ \varphi = \psi$ ist $\Longrightarrow$ (Kettenregel)

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p (f_p) = \frac{\partial}{\partial y^j}\bigg|_0 (f \circ \psi^{-1}) \cdot \frac{\partial \tau^j}{\partial x^i}\bigg|_0 = \frac{\partial \tau^j}{\partial x^i}(0) \cdot \frac{\partial}{\partial y^j}\bigg|_p (f_p),$$

also

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p = \frac{\partial \tau^j}{\partial x^i}\bigg|_0 \cdot \frac{\partial}{\partial y^j}\bigg|_p. \qquad \square$$

(2.47) Kommentar. Ist M glatte Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und hat $\xi \in \mathrm{T}M_p$ bzgl. einer Karte x die Darstellung $(\lambda^1, \dots, \lambda^n) \in \mathbb{R}^n$, d.h.: $\xi = \lambda^i \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$, und bzgl. einer Karte y die Darstellung $\xi = \mu^j \cdot \frac{\partial}{\partial y^j}|_p$, so transformieren sich die Koordinaten $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^n$ so:

$$\lambda^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^j}(y_0)\mu^j,$$

denn:

$$\lambda^j \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p = \xi = \mu^j \frac{\partial}{\partial y^j}\bigg|_p = \mu^j \frac{\partial x^i}{\partial y^j}(y_0) \cdot \frac{\partial}{\partial x^i},$$

also nach Koeffizientenvergleich

$$\lambda^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^j}(y_0)\mu^j.$$

(2.48) Definition. Sei M^n eine glatte Mannigfaltigkeit und $p \in M$.

(a) Der Dualraum des Tangentialraums ist der **Cotangentialraum von M in p:**

$$\mathrm{T}M_p^* := \{\eta \colon \mathrm{T}M \to \mathbb{R} \,:\, \eta \text{ linear}\}.$$

(b) Ist $x \colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ um p und ist $(\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p)$ die zugeordnete Basis von $\mathrm{T}M_p$ aus Koordinatenvektoren, so wird mit $(\mathrm{d}x^1|_p, \dots, \mathrm{d}x^n|_p)$ die dazu duale Basis von $\mathrm{T}M_p^*$ bezeichnet, also:

$$\mathrm{d}x^i|_p \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_p \right) = \delta^i_j \quad (1 \le i, j \le n).$$

(2.49) Kommentar.

(a) Sind x und y zwei Karten um p, $x_0 = x(p)$, $y_0 = y(p)$ mit Übergängen $y = y(x)$ bzw. $x = x(y)$, so gilt für alle $i, j = 1, \dots, n$:

$$\mathrm{d}y^j|_p = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(x_0) \cdot \mathrm{d}x^i|_p, \quad \mathrm{d}x^i|_p = \frac{\partial x^i}{\partial y^j}(y_0) \cdot \mathrm{d}y^j|_p,$$

denn

$$\mathrm{d}y^j|_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right) = \mathrm{d}y^j|_p\left(\frac{\partial y^k}{\partial x^i}(x_0)\cdot\left.\frac{\partial}{\partial y^k}\right|_p\right) = \frac{\partial y^k}{\partial x^i}(x_0)\underbrace{\mathrm{d}y^j|_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial y^k}\right|_p\right)}_{=\delta^j_k} = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(x_0)$$

(und ähnlich für $\mathrm{d}x^i|_p$).

(b) Ist $\eta \in \mathrm{T}M_p^*$ ein Cotangentialvektor mit Komponenten $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ bzgl. einer Karten x und Komponenten $(\mu_1,\dots,\mu_n)$ bzgl. einer Karten y, so transformieren sich diese (vergleiche (2.47)):

$$\lambda_i = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(x_0)\mu_j,$$

denn aus

$$\lambda_i \mathrm{d}x^i|_p = \eta = \mu_j \mathrm{d}y^j|_p = \mu_j\frac{\partial y^j}{\partial x^i}(x_0)\cdot \mathrm{d}x^i|_p$$

folgt:

$$\lambda_i = \mu_j\frac{\partial y^j}{\partial x^i}(x_0) \quad (i = 1,\dots,n).$$

(c) Man beachte die Feinheit mit der Schreibweise der Indizes oben und unten: In Matrix-Schreibweise transformieren sich die Koordinatenvektoren $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^n$ von Tangentialvektoren (kurz: Vektoren) $\xi \in \mathrm{T}M_p$ bzw. Cotangentialvektoren (kurz: **Covektoren**) $\eta \in \mathrm{T}M_p^*$ so:

$$\text{Sei } A = \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}(x_0)\right)_{i,j} \quad \text{und} \quad B = \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}(y_0)\right)_{i,j}.$$

Dann ist $B = A^{-1}$, denn für den Koordinaten-Wechsel $y = \tau(x)$ ist

$$\mathrm{Jac}(\tau)(x_0) = \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}(x_0)\right)$$

und

$$\mathrm{Jac}(\tau^{-1})(y_0) = \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}(y_0)\right)$$

und

$$\mathrm{Jac}(\tau^{-1})(y_0) = \Big(\mathrm{Jac}(\tau)(x_0)\Big)^{-1}$$

wegen $\tau\circ\tau^{-1} = \mathbb{1}$ und der Kettenregel. In Index-Schreibweise liest sich das so:

$$\frac{\partial y^i}{\partial x^k}(x_0)\cdot\frac{\partial x^k}{\partial y^j}(y_0) = \delta^i_j.$$

Also ist:

$$\lambda^i = \left.\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right|_{y_0}\mu^j \Longrightarrow \lambda = B\mu = A^{-1}\mu \quad (2.47)$$

$$\lambda_i = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(x_0)\mu_j \Longrightarrow {}^t\lambda = {}^t\mu\, A \Longrightarrow \lambda = {}^tA\mu = {}^tB^{-1}\,\mu \quad (2.49)$$

Die Tatsache, dass man die Transformationsmatrix A (bzw. B) nicht nur invertieren, sondern auch noch transponieren muss, ist in der Indexschreibweise „versteckt“.

(2.50) Motivation. Also nächstes sollen "Felder" von Tangentialvektoren und Covektoren eingeführt werde: Setze dazu

$$\mathrm{T}M := \sum_{p \in M} \mathrm{T}M_p, \quad \mathrm{T}M^* := \sum_{p \in M} \mathrm{T}M_p^*,$$

sowie

$$\pi\colon \mathrm{T}M \ \to M,\ \pi(\xi) = p :\Longleftrightarrow \xi \in \mathrm{T}M_p$$

bzw.

$$\pi\colon \mathrm{T}M^* \to M,\ \pi(\eta) = p :\Longleftrightarrow \eta \in \mathrm{T}M_p^*.$$

Es heißt $\pi\colon \mathrm{T}M \to M$ das **Tangentialbündel von M** und $\pi\colon \mathrm{T}M^* \to M$ das **Cotangentialbündel von M**. ($\mathrm{T}M$ und $\mathrm{T}M^*$ sind hier zunächst nur Mengen.)

(2.51) Definition. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $U \subseteq M$ offen.

(a) Eine Abbildung $X\colon U \to \mathrm{T}M$ heißt **Vektorfeld auf U**, wenn für alle $p \in U$ gilt, dass $X(p) \in \mathrm{T}M_p$ ist, also $\pi \circ X = \mathbb{1}_U$ ist.

(b) Eine Abbildung $\omega\colon U \to \mathrm{T}M^*$ heißt **Differentialformen auf U**, wenn für alle $p \in U$ gilt, dass $\omega(p) \in \mathrm{T}M_p^*$ ist, also:
$$\pi \circ \omega = \mathbb{1}_U.$$

(2.52) Beispiel. Sei M glatte Mannigfaltigkeit, $U \subseteq M$ offen und $x\colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte. Man definiert dann die **Koordinatenvektorfelder** $\frac{\partial}{\partial x^i}\colon U \to \mathrm{T}M$ ($i = 1, \dots, n$) durch

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(p) := \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$$

und die Koordinaten-Differentialformen $\mathrm{d}x^i\colon U \to \mathrm{T}M^*$,

$$\mathrm{d}x^i(p) := \mathrm{d}x^i|_p.$$

(2.53) Kommentar.

(a) Ist $x\colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte auf M und X ein Vektorfeld auf U, so gibt es wegen Satz (2.43) eindeutig bestimmte Funktionen $\xi^1, \dots, \xi^n\colon V \to \mathbb{R}$, so dass gilt:

$$X = \xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

(Genau genommen bedeutet das mit der Kartenbezeichnung φ:

$$X = \xi^i \circ \varphi \frac{\partial}{\partial x^i}, \text{ also: } X(p) = \xi^i \circ \varphi(p) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p .)$$

(b) Entsprechend gibt es für eine Differentialform ω auf U, wenn $x\colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte ist, eindeutig bestimmte Funktionen $\eta_1, \dots, \eta_n\colon V \to \mathbb{R}$, so das

$$\omega = \eta_i(x)\mathrm{d}x^i$$

ist.

(c) Seien $X\colon U \to TM$ bzw. $\omega\colon U \to TM^*$ ein Vektorfeld bzw. eine Differentialform auf U und x und y Karten auf U, $x\colon U \to V$, $y\colon U \to \widetilde{V} \subseteq \mathbb{R}^n$, sowie

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i},\ X = \eta^j \frac{\partial}{\partial y^j},$$

mit $\xi^i\colon V \to \mathbb{R}$ und $\eta^j\colon \widetilde{V} \to \mathbb{R}$. Dann ist wegen (2.47)

$$\xi^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \cdot \eta^j$$

$\big($streng genommen: $\xi^i \circ \tau(y) = \frac{\partial \tau^i}{\partial y^j}(y) \cdot \eta^j(y)$, wenn $x = \tau(y)$ der Kartenwechsel ist$\big)$. Ähnlich ist für

$$\omega = \xi_i(x)\mathrm{d}x^i = \eta_j(y)\mathrm{d}y^j$$

nach (2.49):

$$\xi_i = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\eta_j.$$

(2.54) Definition. Sei M glatte Mannigfaltigkeit und $U \subseteq M$ offen.

(a) Ein Vektorfeld $X\colon U \to TM$ auf U heißt **glatt**, wenn für alle Karten $x\colon \widetilde{U} \to \widetilde{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ (mit $U \cap \widetilde{U} = \emptyset$) gilt: ist $X|_{U\cap\widetilde{U}} = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ mit $\xi^i\colon x(\widetilde{U} \cap U) \to \mathbb{R}$, so muss ξ^i glatt sein für $i = 1, \ldots, n$.

(b) Eine Differentialform $\omega\colon U \to TM^*$ auf U heißt **glatt**, wenn für alle Karten $x\colon \widetilde{U} \to \widetilde{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ (mit $U \cap \widetilde{U} = \emptyset$) gilt: ist $\omega|_{U\cap\widetilde{U}} = \eta_i \mathrm{d}x^i$ mit $\eta_i\colon x(\widetilde{U} \cap U) \to \mathbb{R}$, so muss η_i glatt sein für $i = 1, \ldots, n$.

(2.55) Kommentar.

(a) Sei $U \subseteq M$ offen. Wir bezeichnen

$$\mathfrak{X}(U) := \{X\colon U \to TM \ :\ X \text{ glattes Vektorfeld auf } U\}$$

und

$$\Omega(U) := \{\omega\colon U \to TM^* \ :\ \omega \text{ glatte Differentialform auf } U\}.$$

(b) Man beachte, dass $\mathfrak{X}(U)$ bzw. $\Omega(U)$ vermöge

$$(X_1 + X_2)(p) := X_1(p) + X_2(p),\ (\lambda X)(p) := \lambda \cdot X(p),$$
$$(\omega_1 + \omega_2)(p) := \omega_1(p) + \omega_2(p),\ (\lambda\omega)(p) := \lambda \cdot \omega(p)$$

nicht nur zu einem $\mathbb{R}$-Vektorraum wird, sondern mit

$$(f \cdot X)(p) := f(p) \cdot X(p) \quad \text{bzw.} \quad (f \cdot \omega)(p) := f(p) \cdot \omega(p),$$

mit $f \in \mathcal{E}(U)$, sogar zu einem $\mathcal{E}(U)$-Modul.

(c) Ist $x\colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte, so gilt $\mathfrak{X}(U) \cong \mathcal{E}(U)^n$ bzw. $\Omega(U) \cong \mathcal{E}(U)^n$ als $\mathcal{E}(U)$-Moduln, in dem man $X \in \mathfrak{X}(U)$ gerade seine Komponentenfunktionen $\xi^1, \ldots, \xi^n \in \mathcal{E}(U)$ (genauer $\xi^1 \circ x, \ldots, \xi^n \circ x$) zuordnet,

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$\big($ähnlich für $\Omega(U)\big)$. Ist $U \subseteq M$ kein Kartengebiet (z.B. wenn M kompakt und $U = M$ ist), so kann die (Modul-)Struktur von $\mathfrak{X}(U)$ bzw. $\Omega(U)$ sehr viel komplizierter sein als $\mathcal{E}(U)^n$. Zum Beispiel kann für die 2-Sphäre $\mathbb{S}^2$ der $\mathcal{E}(\mathbb{S}^2)$-Modul $\mathfrak{X}(\mathbb{S}^2)$ nicht frei vom Rang 2 sein, d.h.: $\mathfrak{X}(\mathbb{S}^2) \not\cong \mathcal{E}(\mathbb{S}^2)^2$, denn sonst gäbe es eine Basis (X_1, X_2), d.h. $\big(X_1(p), X_2(p)\big)$ müsste in jedem Punkt p eine Basis von $\mathrm{T}M_p$ sein (Übung). Nach dem **Igelsatz** (vgl. Anhang A) hat aber jedes glatte Vektorfeld auf $\mathbb{S}^2$ eine Nullstelle.

(2.56) Definition. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $U \subseteq M$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Für jedes $p \in U$ definieren wir das **Differential von f in p** durch

$$\mathrm{d}f_p\colon \mathrm{T}M_p \to \mathbb{R},\ \mathrm{d}f_p(\xi) := \xi(f_p),$$

und **das (totale) Differential** durch

$$\mathrm{d}f\colon U \to \mathrm{T}M^*,\ \mathrm{d}f(p) := \mathrm{d}f_p.$$

(2.57) Bemerkung. Sei M glatte Mannigfaltigkeit, $U \subseteq M$ offen und $f \in \mathcal{E}(U)$.

(a) Es ist $\mathrm{d}f$ eine glatte Differentialform, $\mathrm{d}f \in \Omega(U)$;

(b) Ist $x\colon \widetilde{U} \to \widetilde{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte auf M und bezeichnet $f \in \mathcal{E}(V)$ mit $V := x(U \cap \widetilde{U}) \subseteq \widetilde{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ auch die lokale Beschreibung von f (genauer $f \circ x^{-1}$), so gilt für $\mathrm{d}f$ die Koordinatenbeschreibung:
$$\mathrm{d}f|_{U\cap\widetilde{U}} = \frac{\partial f}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i.$$

Beweis. Offenbar ist $\mathrm{d}f_p\colon \mathrm{T}M_p \to \mathbb{R}$, $\xi \to \xi(f_p)$, linear, also $\mathrm{d}f_p$ ein Covektor in p, also $\mathrm{d}f$ eine Differentialform auf U. Ist $x\colon \widetilde{U} \to \widetilde{V}$ eine Karte, $p \in U \cap \widetilde{U}$, so ist mit $x_0 = x(p) \in V = x(U \cap \widetilde{U}) \subseteq \widetilde{V}$.

$$\mathrm{d}f_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right) = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{x_0}(f \circ x^{-1}) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0),$$

also $\mathrm{d}f_p = \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)\mathrm{d}x^i|_p$, also: $\mathrm{d}f|_{U\cap\widetilde{U}} = \frac{\partial f}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i$. Insbesondere ist $\mathrm{d}f$ glatt, $\mathrm{d}f \in \Omega(U)$. $\square$

(2.58) Kommentar.

(a) Für eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine glatte Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}$ betrachtet man häufig den Gradienten von f,
$$\mathrm{grad}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}\right) : U \to \mathbb{R}^n$$
als ein Vektorfeld auf U. Bemerkung (2.57) (oder die Kettenregel) zeigt aber, dass bei einem Koordinatenwechsel $x = \tau(y)$ sich die Komponenten des Gradienten der Funktion $g = f \circ \tau$ wie die Komponenten einer Differentialform (und nicht wie die eines Vektorfeldes) transformieren:
$$\frac{\partial g}{\partial y^j} = \frac{\partial f}{\partial x^i} \circ \tau \cdot \frac{\partial x^i}{\partial y^j},$$
also mit
$$\eta_j = \frac{\partial f}{\partial y^i},\ \xi_i = \frac{\partial f}{\partial x^i} :\ \eta_j = \frac{\partial x^i}{\partial y^i}\xi_i.$$
Auf einer glatten Mannigfaltigkeit hat man daher *keinen* Gradienten im Sinne einer Abbildung „grad: $\mathcal{E}(U) \to \mathfrak{X}(U)$“, sondern nur ein totales Differential
$$\mathrm{d}\colon \mathcal{E}(U) \to \Omega(U),\ f \mapsto \mathrm{d}f.$$

(b) Ist $x\colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte auf M, so hat man insbesondere die Koordinatenfunktionen $f = x^i$ $\big($früher mit $\pi^i \in \mathcal{E}(U)$ bezeichnet$\big)$ und daher nun zwei Definitionen für die Ausdrücke $\mathrm{d}x^i \in \Omega(U)$ $\big($einmal ist $(\mathrm{d}x^1|_p, \dots, \mathrm{d}x^n|_p)$ duale Basis zu $(\frac{\partial}{\partial x^i}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p)$, ein anderes Mal ist nach (2.56) $\mathrm{d}x^i_p(\xi) = \xi(x^i_p)\big)$, die aber übereinstimmen wegen $\big(x_0 = x(p)\big)$:

$$\mathrm{d}x^i_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p\right) = \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p (x^i_p) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j}(x_0) = \delta^i_j = \mathrm{d}x^i|_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p\right), \ \forall 1 \leq i,j \leq n.$$

(2.59) Definition. Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten, $\Phi\colon M \to N$ eine glatte Abbildung, $p \in M$ und $q := \Phi(p)$. Wir definieren **das Differential von Φ in p** durch

$$\mathrm{D}\Phi_p\colon \mathrm{T}M_p \to \mathrm{T}N_q,\ \mathrm{D}\Phi_p(\xi)(g_q) := \xi\big((g \circ \Phi)_p\big),$$

$\xi \in \mathrm{T}M_q$, $g_q \in \mathcal{E}_p(N)$ $\big($und $g \in \mathcal{E}(U)$, $U \subseteq N$ offene Umgebung von q, g ein Repräsentant von $s = g_q \in \mathcal{E}(N)\big)$.

(2.60) Kommentar.

(a) $\mathrm{D}\Phi_p(\xi)$ ist wohldefiniert, denn repräsentiert $g \in \mathcal{E}(U)$ und $\widetilde{g} \in \mathcal{E}(\widetilde{U})$ den gleichen Keim in q, $g_q = \widetilde{g}_q$, so repräsentieren auch $g \circ \Phi \in \mathcal{E}\big(\Phi^{-1}(U)\big)$ und $\widetilde{g} \circ \Phi \in \mathcal{E}\big(\Phi^{-1}(\widetilde{U})\big)$ den gleichen Funktionskeim in p, $(g \circ \Phi)_p = (\widetilde{g} \circ \Phi)_p$.

(b) Es ist $\mathrm{D}\Phi_p\colon \mathrm{T}M_p \to \mathrm{T}N_q$ eine lineare Abbildung:

$$\begin{aligned} \mathrm{D}\Phi_p(\xi_1 + \xi_2) &= \mathrm{D}\Phi_p(\xi_1) + \mathrm{D}\Phi_p(\xi_2), && \xi_1, \xi_2 \in \mathrm{T}M_p \\ \mathrm{D}\Phi_p(\lambda\xi) &= \lambda \cdot \mathrm{D}\Phi_p(\xi), && \lambda \in \mathbb{R},\ \xi \in \mathrm{T}M_p. \end{aligned}$$

(2.61) Bemerkung. Seien M^n, N^r glatt, $\Phi\colon M \to N$ glatt, $p \in M$ und $q = \Phi(p) \in N$. Seien $x\colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ und $y\colon \widetilde{U} \to \widetilde{V} \subseteq \mathbb{R}^r$ Karten um p bzw. q, $x_0 = x(p)$, $y_0 = y(q)$ und $\Phi(U) \subseteq \widetilde{U}$. Sei schließlich $\Phi\colon V \to \widetilde{V}$ die Koordinatenbeschreibung von Φ bzgl. x und y (also genauer $y \circ \Phi \circ x^{-1}$). Die Matrix der linearen Abbildung $\mathrm{D}\Phi_p$ bzgl. der Basen $(\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p)$ von $\mathrm{T}M_p$ und $(\frac{\partial}{\partial y^1}|_q, \dots, \frac{\partial}{\partial y^r}|_q)$ von $\mathrm{T}N_q$ ist dann die Jacobi-Matrix von Φ in x_0, also:

$$\mathrm{D}\Phi_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right) = \frac{\partial \Phi^j}{\partial x^i}(x_0)\left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_q.$$

Beweis. Zwei Tangentenvektoren $\eta, \widetilde{\eta} \in \mathrm{T}N_q$ sind bereits dann gleich, wenn sie auf den Keimen der Koordinatenfunktionen übereinstimmen, $\eta(y^j_q) = \widetilde{\eta}(y^j_q)$ $(j = 1, \dots, r)$ $\big($vgl. Satz (2.43)$\big)$,

$$\eta = \eta(y^j_q)\left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_q.$$

Es ist aber für $k = 1, \dots, r$:

$$\begin{aligned} \mathrm{D}\Phi_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right)(y^k_q) &= \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \big((y^k \circ \Phi)_p\big) = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{x_0} \underbrace{y^k \circ \Phi \circ x^{-1}}_{=\Phi^k} = \frac{\partial \Phi^k}{\partial x^i}(x_0) \\ &= \frac{\partial \Phi^j}{\partial x^i}(x_0) \cdot \delta^k_j = \frac{\partial \Phi^j}{\partial x^i}(x_0) \cdot \frac{\partial y^k}{\partial y^j} = \left(\frac{\partial \Phi^j}{\partial x^i}(x_0)\left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_q\right)(y^k_q) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \mathrm{D}\Phi_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right) = \frac{\partial \Phi^j}{\partial x^i}(x_0)\left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_q. \qquad \square$$

(2.62) Beispiel.

(a) Sei V ein endlich-dimensionaler, reeller Vektorraum mit seiner natürlichen Mannigfaltigkeit-Struktur. Dann ist für jedes $v \in V$ der Tangentialraum $\mathrm{T}V_v$ *kanonisch* isomorph zu V vermöge

$$\lambda_v\colon V \to \mathrm{T}V_v,\ \lambda_v(w) := \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (v + tw)$$

$\big($d.h.: $\lambda_v(w) = \dot\alpha(0)$ für $\alpha(t) = v + tw,\ t \in \mathbb{R}\big)$.

(b) Identifiziert man insbesondere $\mathbb{R}$ mit $\mathrm{T}\mathbb{R}_t$ vermöge $\lambda_t\colon \mathbb{R} \to \mathrm{T}\mathbb{R}_t$, für jedes $t \in \mathbb{R}$, so gilt für eine glatte Funktion $f\colon M \to \mathbb{R}$ (M glatte Mannigfaltigkeit), dass

$$\mathrm{D}f_p = \lambda_{f(p)} \circ \mathrm{d}f_p$$

(kurz: $\mathrm{D}f_p = \mathrm{d}f_p$), Übung.

(2.63) Bemerkung. Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten, $\Phi\colon M \to N$ glatt, $p \in M$ und $\mathrm{D}\Phi_p\colon \mathrm{T}M_p \to \mathrm{T}N_q$ ihr Differential in $p, q := \Phi(p)$. Ist $\xi = \dot\alpha(0) \in \mathrm{T}M_p$, für eine glatte Kurve $\alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ durch p, so ist:

$$\mathrm{D}\Phi_p\big(\dot\alpha(0)\big) = (\Phi \dot\circ \alpha)(0).$$

Beweis. Sei $s = g_q \in \mathcal{E}_q(N)$ beliebig, $g \in \mathcal{E}(V)$ ein Vertreter, $V \in \mathfrak{A}(q)$ offen. Dann ist mit $\beta := \Phi \circ \alpha$:

$$\begin{aligned}\mathrm{D}\Phi_p\big(\dot\alpha(0)\big)(g_q) = \dot\alpha(0)\big((g \circ \Phi)_p\big) &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \big((g \circ \Phi) \circ \alpha\big)(t) \\ &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{0} (g \circ \beta)(t) = \dot\beta(0)(g_q),\end{aligned}$$

also $\mathrm{D}\Phi_p\big(\dot\alpha(0)\big) = \dot\beta(0)$. □

(2.64) Definition. Sei M^{n+k} eine glatte Mannigfaltigkeit und $N^n \subseteq M$ abgeschlossen. Es heißt N^n eine **Untermannigfaltigkeit der Codimension k von M**, wenn gilt: Für jedes $p \in N$ gibt es eine offene Umgebung $U \subseteq M$ von p und eine glatte Abbildung $F\colon U \to \mathbb{R}^k$, so dass gilt:

(a) $N \cap U = \{x \in U \,:\, F(x) = 0\}$

(b) $\operatorname{rg}(\mathrm{D}F_q\colon \mathrm{T}M_p \to \mathrm{T}\mathbb{R}^k_{F(p)} \cong \mathbb{R}^k) = k$.

Ist $k = 1$, so spricht man von einer **Hyperfläche**.

(2.65) Satz. *Sei $N^n \subseteq M^{n+k}$ eine Untermannigfaltigkeit der Codimension k in M^{n+k} und $i\colon N \hookrightarrow M$ die Inklusion. Dann ist N (zusammen mit seiner Teilraumtopologie) eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension n und es gibt genau eine glatte Struktur auf N, so dass für eine beliebige stetige Abbildung $\Phi\colon P \to N$ (P glatte Mannigfaltigkeit) gilt: Φ ist glatt genau dann, wenn $i \circ \Phi\colon P \to M$ glatt ist (universelle Eigenschaft).*

(2.66) Kommentar.

(a) Insbesondere zeigt das Beispiel $\Phi = \mathbb{1}\colon N \to N$, dass die Inklusion $i\colon N \to M$ selbst glatt ist.

(b) Für den Beweis erinnern wir an den **impliziten Funktionensatz**: Ist $U \subseteq \mathbb{R}^{n+k} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ offen, $F\colon U \to \mathbb{R}^k$ glatt, $(x_0, y_0) \in U$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \mathbb{R}^k$, mit $F(x_0, y_0) = 0$ und

$$\det \left(\frac{\partial F^i}{\partial y^j} \right)_{1 \le i,j \le k} (x_0, y_0) \neq 0,$$

so gibt es offene Umgebungen $V \subseteq \mathbb{R}^n$ von x_0, $W \subseteq \mathbb{R}^k$ von y_0, so dass $V \times W \subseteq U$ ist und eine glatte Funktion $h\colon V \to W$, so dass für alle $(x, y) \in V \times W$ gilt:

$$F(x, y) = 0 \Longleftrightarrow y = h(x).$$

***Beweis von* (2.65).** (a) Sei $N \subseteq M$ versehen mit der Teilraumtopologie, $p \in N$ und $\widetilde{U} \subseteq M$ offene Umgebung von p, sowie $F\colon \widetilde{U} \to \mathbb{R}^k$ mit $\widetilde{U} \cap N = F^{-1}(0)$ und $\operatorname{rg}(\mathrm{D}F_p) = k$.

Sei (nach eventueller Verkleinerung von $\widetilde{U}$) $\varphi\colon \widetilde{U} \to U \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ eine Karte um p. Dann gilt für $G := F \circ \varphi^{-1}\colon U \to \mathbb{R}^k$: $G(x_0, y_0) = 0$, wo $(x_0, y_0) = \varphi(p)$ sei, und

$$\det \left(\frac{\partial G^i}{\partial y^j} (x_0, y_0) \right)_{1 \le i,j \le k} \neq 0,$$

wenn die Anzahl der Koordinaten $y^1, \dots, y^k$ (aus $x^1, \dots, x^{n+k}$) geeignet ist, denn die volle Funktionalmatrix

$$\left(\frac{\partial G^i}{\partial x^j} \right)_{\substack{1 \le j \le k \\ 1 \le j \le n+k}} (x_0, y_0) \quad \text{hat vollen Rang } k.$$

Wir nehmen o.E. an, dass $y^1, \dots, y^k$ die letzten k Koordinaten von $x^1, \dots, x^{n+k}$ ist, $y^i = x^{n+i}$ $(i = 1, \dots, k)$. Nach dem impliziten Funktionensatz gibt es also offene Umgebungen $V \subseteq \mathbb{R}^n$ von x_0, $W \subseteq \mathbb{R}^k$ von y_0 mit $V \times W \subseteq U$ und ein glattes $h\colon V \to W$ mit

$$G(x, y) = 0 \Longleftrightarrow y = h(x), \quad \forall (x, y) \in V \times W.$$

Setze nun

$$\widetilde{V} := N \cap \varphi^{-1}(V \times W)$$

und

$$\psi\colon \widetilde{V} \to V \subseteq \mathbb{R}^n,\ \psi := \pi \circ \varphi$$

wo $\pi\colon \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^n$ die Projektion auf die ersten n Koordinaten $x^1, \dots, x^n$ ist. Es ist $\widetilde{V} \subseteq N$ offene Umgebung von p, $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Umgebung von x_0 und $\psi\colon \widetilde{V} \to V$ ein Homöomorphismus, denn

$$V \to \widetilde{V},\ x \mapsto \varphi^{-1}\big(x, h(x)\big)$$

ist sein stetiges Inverses. Als Teilraum von M ist N hausdorffsch und von abzählbarer Topologie. Also ist N topologische Mannigfaltigkeit der Dimension n.

(b) Man versehe nun N mit dem Atlas

$$(\psi_p\colon \widetilde{V}_p \to V_p)_{p \in N}$$

wie oben beschrieben. Dann sind die Übergänge $\psi_q \circ \psi_p^{-1}\colon \psi_p(\widetilde{V}_p \cap \widetilde{V}_q) \to \psi_q(\widetilde{V}_p \cap \widetilde{V}_q)$ alle glatt, denn: Sei o.E. $\widetilde{V}_p = \widetilde{V}_q =: \widetilde{V} \subseteq N$ und $\widetilde{V} = N \cap \widetilde{U}$. Es ist dann $\psi_q \circ \psi_p\colon V_p \to V_q$ gegeben durch

$$\psi_q \circ \psi_p^{-1}(x) = \psi_q \circ \varphi_p^{-1}\big(x, h_p(x)\big) = \pi_q \circ \varphi_q \circ \varphi_p^{-1}\big(x, h_p(x)\big),$$

wo $\pi_q\colon \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^n$ die Projektion auf die Koordinaten ist, mit der die Karte ψ_q gebaut ist. Da h_p glatt ist, $\varphi_q \circ \varphi_q^{-1}$ glatt ist und π_q glatt ist, ist $\psi_q \circ \psi_p^{-1}$ glatt. (Man setze dann $c = [\mathfrak{A}]$.)

(c) Die universelle Eigenschaft folgt aus der Tatsache, dass eine stetige Abbildung $\Phi\colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, genau dann glatt ist, wenn mit einer glatten Funktion $h\colon V \to W \subseteq \mathbb{R}^k$ die Funktion $\Psi\colon U \to V \times W \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$, $z \mapsto \big(\Phi(z), h \circ \Phi(z)\big)$ glatt ist $\big($denn $\Phi = \pi \circ \Psi\big)$. $\square$

(2.67) Kommentar.

(a) Man beachte, dass $i\colon N \hookrightarrow M$ nach Definition der Teilraumtopologie ein Homöomorphismus auf sein Bild ist (klar), dass i injektiv ist (ist auch klar) und dass i eine **Immersion** ist (Übung), d.h.: $\mathrm{D}i_p\colon \mathrm{T}N_p \to \mathrm{T}M_P$ injektiv ist, denn bzgl. der obigen Karten ψ von N um p und φ von M um p ist

$$\varphi \circ i \circ \psi^{-1}(x) = \big(x, h(x)\big),$$

also

$$\mathrm{Jac}(\varphi \circ i \circ \psi^{-1})(x) = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_n \\ \hline \mathrm{Jac}(h)(x) \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{aligned} \dim(\ker \mathrm{D}i_p) &= n - \mathrm{rg}(\mathrm{D}i_p) \\ &= n - \mathrm{rg}\big(\mathrm{Jac}(\varphi \circ i \circ \psi^{-1})\big)(x_0) \\ &= n - n = 0. \end{aligned}$$

(b) Allgemein nennt man eine glatte Abbildung $\Phi\colon N \to M$ eine **Einbettung**, wenn Φ

- injektiv,
- immersiv,
- Homöomorphismus auf das Bild ist.

Es gilt dann, dass $\Phi(N) \subseteq M$ eine (nicht notwendig abgeschlossene) Untermannigfaltigkeit von M ist $\big($siehe (3.40)$\big)$.

(2.68) Definition. Eine glatte Abbildung $\Phi\colon M \to N$ heißt eine

(a) **Immersion**, wenn $\mathrm{D}\Phi_p\colon \mathrm{T}M_p \to \mathrm{T}N_{\Phi(p)}$ injektiv ist, für alle $p \in M$;

(b) **Submersion**, wenn $\mathrm{D}\Phi_p\colon \mathrm{T}M_p \to \mathrm{T}N_{\Phi(p)}$ surjektiv ist, für alle $p \in M$.

(2.69) Vorbereitung.

(a) Sind M, N und P glatte Mannigfaltigkeiten, $\Phi\colon M \to N$ und $\Psi\colon N \to P$ glatte Abbildungen, so ist auch $\Psi \circ \Phi\colon M \to P$ auch glatt und für alle $p \in M$ gilt $\big($mit $q = \Phi(p)\big)$:

$$\mathrm{D}(\Psi \circ \Phi)_p = \mathrm{D}\Psi_q \circ \mathrm{D}\Phi_p$$

(*Kettenregel*, Übung).

(b) Es folgt insbesondere für jeden Diffeomorphismus $\Phi\colon M \to M$, dass für jedes $p \in M$ das Differential $\mathrm{D}\Phi_p\colon \mathrm{T}M_p \to \mathrm{T}M_{\Phi(p)}$ ein Isomorphismus ist, denn $\mathrm{D}(\mathbb{1}_M)_p = \mathbb{1}_{\mathrm{T}M_p}$ und aus $\Phi^{-1} \circ \Phi = \mathbb{1}_M$ folgt:

$$\mathbb{1}_{\mathrm{T}M_p} = \mathrm{D}(\mathbb{1}_M)_p = \mathrm{D}(\Phi^{-1})_{\Phi(p)} \circ \mathrm{D}\Phi_p,$$

also $\mathrm{D}\Phi_p$ Isomorphismus mit:

$$(\mathrm{D}\Phi_p)^{-1} = \mathrm{D}(\Phi^{-1})_{\Phi(p)}.$$

(2.70) Satz. *Seien M^{n+k} und P^k glatte Mannigfaltigkeiten und $\Phi\colon M \to P$ eine glatte Abbildung. Sei $q \in P$, so dass $N := \Phi^{-1}(q) \neq \emptyset$ ist und $\mathrm{D}\Phi_p\colon \mathrm{T}M_p \to \mathrm{T}P_q$ surjektiv ist, für alle $p \in N$ (q heißt dann ein regulärer Wert von Φ). Dann ist $N \subseteq M$ eine Untermannigfaltigkeit der Codimension k.*

Beweis. $N = \Phi^{-1}(q) \subseteq M$ ist abgeschlossen, da Φ stetig. Sei $p \in N$ und $\varphi\colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^k$ eine Karte um $q \in P$ mit $\varphi(q) = 0 \in V$. Dann gilt für die Abbildung $F\colon \Phi^{-1}(U) \to \mathbb{R}^k$,

$$F := \varphi \circ \Phi|_{\Phi^{-1}(U)}.$$

F ist glatt, $F^{-1}(0) = N \cap \Phi^{-1}(U)$ und

$$\mathrm{D}F_p = \mathrm{D}(\varphi \circ \Phi)_p = \mathrm{D}\varphi_q \circ \mathrm{D}\Phi_p.$$

Da $\varphi\colon U \to V$ ein Diffeomorphismus ist, ist $\mathrm{D}\varphi_q\colon \mathrm{T}P_q \to \mathrm{T}\mathbb{R}^k_0 \cong \mathbb{R}^k$ ein Isomorphismus. Da $\mathrm{D}\Phi_p$ surjektiv ist, ist daher auch $\mathrm{D}F_p\colon \mathrm{T}M_p \to \mathbb{R}^k$ surjektiv. Also ist $N \subseteq M$ Untermannigfaltigkeit der Codimension k. □

(2.71) Beispiel.

(a) Ist $f\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ glatt, $M = f^{-1}(0) \neq \emptyset$ und $\operatorname{grad}(f)(x) \neq 0$, für alle $x \in M$, so ist $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ also eine Hyperfläche. Z.B. gilt das für $M = \mathbb{S}^n$, denn für

$$f(x) = \|x\|^2 - 1$$

ist $\operatorname{grad}(f)(x) = 2x \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{S}^n$. (Dies gibt dann eine glatte Struktur auf $\mathbb{S}^n$, die mit der bekannten übereinstimmt (Übung).)

(b) Betrachte $\Phi\colon \operatorname{Mat}_n \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^{n^2} \to \operatorname{Sym}_n \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n+1)}$, $\Phi(A) = {}^tA \cdot A$, wo $\operatorname{Mat}_n \mathbb{R}$ der Vektorraum aller $(n \times n)$-Matrizen (mit reellen Einträgen) und $\operatorname{Sym}_n \mathbb{R}$ den Unterraum der symmetrischen Matrizen bezeichnet. Wir behaupten, das $\mathbb{1} \in \operatorname{Sym}_n \mathbb{R}$ ein regulärer Wert von Φ ist. (Übung: Berechne $\mathrm{D}\Phi_{\mathbb{1}}\colon \operatorname{Mat}_n(\mathbb{R}) \to \operatorname{Sym}_n(\mathbb{R}), B \to {}^tB + B$, $\mathrm{D}\Phi_{\mathbb{1}}(B) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0}\Phi(\mathbb{1} + tB)$.) Es folgt:

$$\mathbb{O}(n) = \Phi^{-1}(\mathbb{1}),$$

die **orthogonale Gruppe**, ist eine Untermannigfaltigkeit der Codimension $\frac{1}{2}n(n+1)$ und daher nach (2.67) eine Mannigfaltigkeit der Dimension

$$n^2 - \frac{1}{2}n(n+1) = n^2 - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n = \frac{1}{2}n(n-1).$$

3 Kapitel 3.
Dynamische Systeme

(3.1) Motivation. Ein dynamisches System auf einer glatten Mannigfaltigkeit M ordnet jedem Punkt $p \in M$ „seine Dynamik“ $\varphi(p) \colon I(p) \to M$ zu, dass ist eine glatte Kurve

$$t \mapsto \varphi(p)(t) =: \varphi^t(p),$$

wo $I(p) = \big(t_-(p), t_+(p)\big)$ ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$ ist mit $0 \in I(p)$, also

$$t_-(p) \in [-\infty, 0), \quad t_+ \in (0, \infty]$$

und $\varphi^0(p) = p$ ist. Dabei verlangt man die **Verträglichkeitsbedingung**: Für alle $p \in M$ und $t \in I(p)$ gilt:

$$s \in I\big(\varphi^t(p)\big) \iff s + t \in I(p)$$

und

$$\varphi^s\big(\varphi^t(p)\big) = \varphi^{s+t}(p).$$

Außerdem soll die Zuordnung $p \mapsto \varphi(p)$ „glatt“ sein.

(3.2) Definition. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Ein **dynamisches System auf M** ist gegeben durch eine glatte Abbildung $\varphi \colon \Omega \to M$, so dass gilt:

(a) $\Omega \subseteq M \times \mathbb{R}$ ist offen, $M \times \{0\} \subseteq \Omega$ und für jedes $p \in M$ ist $I(p) := \pi_2\big(\Omega \cap (\{p\} \times \mathbb{R})\big)$ zusammenhängend (wo $\pi_2 \colon \Omega \to \mathbb{R}$ die Projektion auf den zweiten Faktor ist);

(b) Für alle $p \in M$ und $t \in I(p)$ ist $s \in I\big(\varphi^t(p)\big)$, genau wenn $s + t \in I(p)$ ist und dann gilt:

$$\varphi^s\big(\varphi^t(p)\big) = \varphi^{s+t}(p).$$

(3.3) Kommentar.

(a) Da die Projektion $\pi_2 \colon \Omega \to \mathbb{R}$ eine offene Abbildung ist, ist also $I(p) \subseteq \mathbb{R}$ offen und zusammenhängend mit $0 \in I(p)$, also $I(p)$ ein offenes Intervall

$$I(p) = \big(t_-(p), t_+(p)\big)$$

mit

$$t_-(p) = [-\infty, 0), \quad t_+(p) \in (0, \infty].$$

$t_-(p)$ heißt der **Anfang von p**, $t_+(p)$ **das Ende von p**.

(b) Beachte, dass für $p, q \in M$ die Kurven

$$C_p = \mathrm{Im}\Big(\varphi\big(\{p\} \times I(p)\big)\Big) \subseteq M$$

und C_q entweder gleich sind (falls es ein $t \in I(p)$ gibt mit $\varphi^t(p) = q$) oder disjunkt, $C_p \cap C_q = \emptyset$, denn ist $r \in C_p \cap C_q$ also $r = \varphi^t(p) = \varphi^s(q)$, so ist

$$\begin{aligned} q = \varphi^0(q) &= \varphi^{-s+s}(q) = \varphi^{-s}\big(\varphi^s(q)\big) = \varphi^{-s}(r) \\ &= \varphi^{-s}\big(\varphi^t(p)\big) = \varphi^{t-s}(p), \end{aligned}$$

also $q \in C_p$ und damit $C_q = C_p$.

(c) Da $\Omega \subseteq M \times \mathbb{R}$ offen ist, ist auch für jedes $t \in \mathbb{R}$

$$D_t := \{p \in M \,:\, t \in I(p)\}$$

offen, denn ist $(p, t) \in \Omega$, so gibt es offene Umgebungen $U \subseteq M$ von p und $J \subseteq \mathbb{R}$ von t, so dass $U \times J \subseteq \Omega$ und damit $(q, t) \in \Omega$, für alle $q \in U$ das ist: $q \in D_t \Longrightarrow U \subseteq D_t$. Definiert man dann

$$\varphi^t \colon D_t \to M,\ p \mapsto \varphi^t(p),$$

so ist das Bild gerade $D_{-t} \subseteq M$, denn $0 \in I(p)$ und damit $-t \in I\big(\varphi^t(p)\big)$, also $\mathrm{Im}(\varphi^t) \subseteq D_{-t}$, und ist $q \in D_{-t}$, so ist $p := \varphi^{-t}(q)$ ein Urbild von q unter φ^t.

(3.4) Bemerkung. Es ist $D_0 = M$ und für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist $\varphi^t \colon D_t \to D_{-t}$ ein Diffeomorphismus.

Beweis. Da $0 \in I(p)$, für alle $p \in M$, folgt: $D_0 = M$. Da φ glatt ist und die Inklusion $i^t \colon D_t \hookrightarrow M,\ p \mapsto (p, t)$, auch, ist auch $\varphi^t = \varphi \circ i^t$ glatt. Schließlich ist wegen $\varphi^0 = \mathbb{1}_M$ und

$$\varphi^{-t} \circ \varphi^t(p) = \varphi^{-t}\big(\varphi^t(p)\big) \overset{\text{Verträg.Bed.}}{=} \varphi^{-t+t}(p) = \varphi^0(p) = p$$

und

$$\varphi^t \circ \varphi^{-t}(p) = p$$

φ^{-t} invers zu φ^t. □

(3.5) Kommentar.

(a) Ist $I(p) = \mathbb{R}$, für alle $p \in M$, also $\Omega = M \times \mathbb{R}$, so nennen wir das dynamische System **global**. In diesem Fall ist also $D_t = M$, für alle $t \in \mathbb{R}$, und

$$\varrho \colon \mathbb{R} \to \mathrm{Diff}(M),\ t \mapsto \varphi^t$$

ein Homomorphismus, d.h. die Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ operiert auf M durch Diffeomorphismen vermöge

$$\Phi \colon \mathbb{R} \times M \to M,\ (t, p) \mapsto t.p = \varphi^t(p).$$

Beachte aber, dass hier nicht nur für jedes feste $t \in \mathbb{R}$ die Abbildung $\varphi^t \colon M \to N$ glatt ist, sondern sogar „das ganze Φ". ($\mathbb{R}$ ist eben nicht nur eine Gruppe, sondern zudem eine Mannigfaltigkeit.) Man nennt dann die Familie $(\varphi^t)_{t \in \mathbb{R}}$ eine **1-Parametergruppe** in $\mathrm{Diff}(M)$.

(b) Im Allgemeinen (auch wenn das System nicht global ist), nennt man die Familie

$$(\varphi^t \colon D_t \to D_{-t})_{t\in\mathbb{R}}$$

von Diffeomorphismen den zugeordneten **Fluss von $\boldsymbol{\varphi}$**.

(3.6) Definition. Sei φ ein dynamisches System auf einer glatten Mannigfaltigkeit M. Dann nennen wir $X\colon M \to \mathrm{T}M$,

$$X(p) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} \varphi^t(p) \in \mathrm{T}M_p$$

das **zugehörige Vektorfeld** auf M.

(3.7) Bemerkung. X ist glatt, $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Beweis. Sei $p \in M$ und $x\colon \widetilde{U} \to \widetilde{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte um p. Da φ stetig ist und $\varphi^0(p) = p$, existiert ein $\varepsilon > 0$ und eine Umgebung $U \subseteq M$ von p mit $\varphi^t(q) \in \widetilde{U}$, für $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ und $q \in U$. Ohne Einschränkung: $U \subseteq \widetilde{U}$. In der Karte (x, t) von $\Omega \subseteq M \times \mathbb{R}$ um p von M sei φ dann beschrieben durch

$$\varphi(x,t) = \big(\varphi^1(x,t), \dots, \varphi^n(x,t)\big) \in V,\ V := x(U) \subseteq \widetilde{V},\ \varphi^j \in \mathcal{E}\big(V \times (-\varepsilon,\varepsilon)\big).$$

Für die Kurven $t \mapsto \varphi^t(q)$, $q \in U$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, folgt dann in Koordinaten, dass

$$X_q = \frac{\partial \varphi^1}{\partial t}(q,0)\, \frac{\partial}{\partial x^1}\bigg|_q + \dots + \frac{\partial \varphi^n}{\partial t}(q,0)\, \frac{\partial}{\partial x^n}\bigg|_q$$

ist (Übung). Da $\frac{\partial \varphi^j}{\partial t}(-,0) \in \mathcal{E}(V)$ ist, ist also X glatt auf U, insbesondere um p. Da p beliebig war, folgt: $X \in \mathfrak{X}(M)$. □

(3.8) Bemerkung. Sei φ ein dynamisches System auf M und $X \in \mathfrak{X}(M)$ sein zugeordnetes Vektorfeld. Dann gilt für alle $p \in M$ und sogar für alle $t \in I(p)$:

$$X_{\varphi^t(p)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi^t(p) \left(= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\bigg|_{s=t} \varphi^s(p) \right)$$

Beweis. Sei $p \in M$ und $t \in I(p)$. Dann gilt wegen der **Flusseigenschaft** $\varphi^{s+t} = \varphi^s \circ \varphi^t$:

$$X_{\varphi^t(p)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\bigg|_{s=0} \varphi^s\big(\varphi^t(p)\big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\bigg|_{s=0} \varphi^{t+s}(p) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\bigg|_{s=t} \varphi^s(p) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi^t(p). \qquad \square$$

(3.9) Kommentar.

(a) Ist $x\colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte auf M und $X|_U$ bzgl. dieser Karte durch

$$X|_U = \xi^j \frac{\partial}{\partial x^j} \text{ mit } \xi^j \in \mathcal{E}(V),\ j = 1, \dots, n$$

gegeben, und $\varphi|_{\widetilde{U}\times(-\varepsilon,\varepsilon)}$ (mit eventuell verkleinerten U und $\varepsilon > 0$ klein genug) durch

$$\varphi(x,t) = \big(\varphi^1(x,t), \dots, \varphi^n(x,t)\big) \text{ und } \varphi^j \in \mathcal{E}\big(V \times (-\varepsilon,\varepsilon)\big),\ j = 1, \dots, n$$

gegeben, so lösen also die Kurven

$$(-\varepsilon,\varepsilon) \to V \subseteq \mathbb{R}^n,\ t \mapsto \big(\varphi^1(x,t), \dots, \varphi^n(x,t)\big)$$

die **gewöhnliche Differentialgleichung** auf V, die durch

$$\begin{rcases} \dot{x}^1 = \xi^1(x) \\ \vdots \\ \dot{x}^n = \xi^n(x) \end{rcases}, \text{ kurz: } \dot{x} = \xi(x)$$

gegeben ist, zum Anfangswert x, denn

$$\frac{\mathrm{d}\varphi^j}{\mathrm{d}t}(x,t) \overset{(3.8)}{=} \xi^j\big(\varphi(x,t)\big),\ j = 1,\dots,n$$

und

$$\varphi(x,0) = x.$$

(b) Man hat deshalb gute Chancen das dynamische System φ auf M durch **Integration der gewöhnlichen Differentialgleichungen**.

$$\dot{p} = X(p)$$

auf M, d.h.: durch Lösen der gewöhnlichen Differentialgleichung in den Karten x von M,

$$\dot{x} = \xi(x)$$

$\big($wo $\xi = (\xi^1,\dots,\xi^n)$ und $X = \xi^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ ist$\big)$ zurück zu gewinnen.

(3.10) Definition. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $X \in \mathfrak{X}(M)$.

(a) Man nennt eine glatte Kurve $\alpha\colon I \to M$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, eine **Integralkurve** (oder auch eine **Lösungskurve**) für X, wenn für alle $t \in I$ gilt:

$$\dot{\alpha}(t) = X_{\alpha(t)}.$$

(b) Sie heißt **maximal**, wenn für jede Integralkurve $\beta\colon J \to M$ von X mit $I \subseteq J$, $J \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall in $\mathbb{R}$, und $\beta|_I = \alpha$ gilt: $J = I$.

(3.11) Satz. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $p \in M$. Dann gibt es genau eine maximale Integralkurve $\alpha\colon I \to M$ von X mit $0 \in I$ und $\alpha(0) = p$.*

(3.12) Vorbereitung. Ist $x\colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$, $X|_U = \xi^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ und $\alpha|_{\alpha^{-1}(U)}\colon \alpha^{-1}(U) \to U$ dort gegeben durch $x(t) = \big(x^1(t),\dots,x^n(t)\big)$, so ist α Integralkurve, wenn $t \mapsto x(t)$ die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\dot{x} = \xi(x) \text{ auf } V$$

(für alle Karten x von M) löst. Nach dem **Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf** existiert eine solche Lösung zunächst auf dem Definitionsgebiet U einer Karte $x\colon U \to V$ um p (und dort auch maximal). Es ist aber nicht so klar, wie man diese Lösung dann (sozusagen über etliche andere Karten hinweg) zu einer maximalen Lösung auf M fortsetzt.

Beweis von (3.11). Wir notieren eine Lösung $\alpha\colon I \to M$ von

$$\dot{q} = X_q$$

auf M mit Anfang $\alpha(0) = p$ mit (I, α). Es ist dabei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $0 \in I$. Nach dem Existenzsatz von Picard-Lindelöf existiert wenigstens eine solche Lösung (I_0, α_0), in dem man auf einer Karte $x\colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ um p das System

$$\dot{x} = \xi(x),\ x(0) = x_0$$

mit $x_0 = x(p)$ und $X|_U = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, löst. Seien nun (I, α) und (J, β) zwei Lösungen. Dann ist $I \cap J$ wiederum offen und zusammenhängend mit $0 \in I \cap J$, also ein Intervall um 0. Betrachte die Teilmenge

$$K := \{t \in I \cap J \,:\, \alpha(t) = \beta(t)\}.$$

Dann ist zunächst $K \neq \emptyset$, denn $0 \in K$, da $\alpha(0) = \beta(0) = p$ ist. Es ist weiter $K \subseteq I \cap J$ abgeschlossen, denn die **Diagonale**

$$\Delta := \big\{(p, q) \in M \times M \,:\, p = q\big\} \subseteq M \times M$$

in $M \times M$ ist für einen Hausdorff-Raum abgeschlossen (Übung) und die Abbildung

$$(\alpha, \beta)\colon I \cap J \to M \times M, \quad t \mapsto \big(\alpha(t), \beta(t)\big)$$

ist stetig. Deshalb ist auch

$$K = (\alpha, \beta)^{-1}(\Delta) \subseteq I \cap J$$

abgeschlossen.

Es ist $K \subseteq I \cap J$ aber auch offen, denn ist $t_0 \in K$, so wähle eine Karte $x\colon U \to V$ (diesmal) um $q = \alpha(t_0) = \beta(t_0)$. Dann gibt es eine Umgebung $I_0 \subseteq I \cap J$ von t_0, so dass $\alpha(I_0) \subseteq U$, $\beta(I_0) \subseteq U$ ist, und, wenn $\alpha|_{I_0}$ durch $x(t) = \big(x^1(t), \dots, x^n(t)\big)$ und $\beta|_{I_0}$ durch $\big(y^1(t), \dots, y^n(t)\big)$ beschrieben werden, $x, y\colon I_0 \to V$ die gewöhnliche Differentialgleichung $\dot{x} = \xi(x)$ auf V zum Anfangswert $x(t_0) = x_0$ $\big($mit $x_0 = x(q)\big)$ lösen $\big($wo $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)\colon V \to \mathbb{R}^n$ mit $X|_U = \xi \frac{\partial}{\partial x^i}$ ist$\big)$. Nach dem Eindeutigkeitsteil im Satz von Picard-Lindelöf ist damit $x(t) = y(t)$, für alle $t \in I_0$, d.h.: $I_0 \subseteq K$.

Da $I \cap J$ zusammenhängend ist, folgt: $K = I \cap J$ (also $\alpha|_{I \cap J} = \beta|_{I \cap J}$).

Sei nun $(I_j, \alpha_j)_{j \in J}$ die Familie *aller* Lösungen von X zum Anfang p (J eine Indexmenge). Man setze

$$I_{\max} := \bigcup_{j \in J} I_j, \quad \alpha_{\max}\colon I_{\max} \to M,\ \alpha_{\max}(t) := \alpha_j(t)$$

für ein $j \in J$ mit $t \in I_j$. Dann ist $I_{\max}$ tatsächlich offen, $0 \in I_{\max}$, und $\alpha_{\max}$ wohldefiniert in dem Sinne, dass die Definition nicht von der Auswahl von $j \in J$ abhängt, denn je zwei Lösungen $\alpha_{j_1}\colon I_{j_1} \to M$ und $\alpha_{j_2}\colon I_{j_2} \to M$ mit $t \in I_{j_1} \cap I_{j_2}$ stimmen in t überein. Ist daher $t_0 \in I_{\max}$ und $j_0 \in J$ mit $t_0 \in I_{j_0}$, so stimmt $\alpha_{\max}$ auf ganz I_{j_0} mit $\alpha_{j_0}\colon I_{j_0} \to M$ überein und ist deshalb dort Lösung von $\dot{q} = X_q$. Also ist $\alpha_{\max}$ (überall) Lösung.

Nach Konstruktion von $(I_{\max}, \alpha_{\max})$ ist klar, dass $(I_{\max}, \alpha_{\max})$ maximale Lösung ist und auch, dass sie die einzige maximale Lösung ist. $\square$

(3.13) Kommentar.

(a) Wir nennen ein dynamisches System $\varphi\colon \Omega \to M$ auf einer glatten Mannigfaltigkeit **maximal**, wenn gilt: Ist $\psi\colon \widetilde{\Omega} \to M$ ein weiteres dynamisches System auf $M, \widetilde{\Omega} \supseteq \Omega$ und $\psi|_\Omega = \varphi$, so ist $\widetilde{\Omega} = \Omega$.

(b) Ist nun $X \in \mathfrak{X}(M)$, so fassen wir alle maximalen Integralkurven $\big(I_{\max}(p), \alpha_{\max}(p)\big)$ nun wie folgt zusammen: Setze zunächst

$$\Omega := \big\{(p, t) \in M \times \mathbb{R} \,:\, t \in I_{\max}(p)\big\} \subseteq M \times \mathbb{R}$$

und dann $\varphi\colon \Omega \to M$,

$$\varphi(p,t) = \varphi^t(p) := \alpha_{\max}(p)(t).$$

(3.14) Bemerkung. Sei $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $\varphi\colon \Omega \to M$ wie unter (3.13, b) definiert. Dann ist φ ein maximales dynamisches System auf M.

(3.15) Vorbereitung.

(a) Ist $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\xi\colon V \to \mathbb{R}^n$ ein glattes Vektorfeld, so gilt, dass die maximalen Lösungen von

$$\dot{x} = \xi(x) \text{ auf } V \tag{3.1}$$

auch **glatt von den Anfangswerten abhängen** (vgl. Analysis III), genauer: Ist $x_0 \in V$, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine offene Umgebung $W \subseteq V$ von x_0, so dass für alle $x \in W$ die maximale Lösungskurve von (3.1) zum Anfangswert $x \in W$, $t \mapsto \varphi^t(x)$, mindestens auf dem Intervall $(-\varepsilon, \varepsilon)$ existiert, und die Abbildung $W \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to V$, $(x,t) \mapsto \varphi^t(x)$, glatt ist.

Beweis von (3.14)**.** Wir prüfen zunächst die Flusseigenschaft (3.2, b): Sei also $p \in M$ und $t \in I(p) := I_{\max}(p)$. Betrachte dann die Kurven

$$\alpha\colon I\big(\varphi^t(p)\big) \to M, \quad s \mapsto \varphi^s\big(\varphi^t(p)\big)$$

und

$$\beta\colon \big(t_-(p) - t, t_+(p) - t\big) \to M, \quad s \mapsto \varphi^{s+t}(p),$$

wobei nun $I(p) = \big(t_-(p), t_+(p)\big)$ mit $t_-(p) \in [-\infty, 0)$ und $t_+(p) \in (0, \infty]$ und wir $-\infty - t := -\infty$ und $+\infty - t := +\infty$ für alle $t \in \mathbb{R}$ verstehen wollen. Es sind nun beide Kurven Integralkurven zu X zum gleichen Anfangswert $q = \varphi^t(p)$, denn

$$\alpha'(s) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\varphi^s(q) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\alpha_{\max}(q)(s) = X_{\alpha_{\max}(q)(s)} = X_{\varphi^s(q)} = X_{\alpha(s)}$$

und

$$\beta'(s) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\varphi^{s+t}(p) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\bigg|_{\sigma = s+t}\varphi^\sigma(p) = X_{\varphi^{s+t}(p)} = X_{\beta(s)}.$$

Es sind auch beide Kurven maximal: α nach Definition, weil es die maximale Integralkurve zum Anfang $q = \varphi^t(p)$ ist, und β, weil es die in der Parametrisierung um t verschobene Integralkurve zum Anfang p ist. Nach (3.11) folgt: $\alpha = \beta$, also:

$$I\big(\varphi^t(p)\big) = \big(t_-(p) - t, t_+(p) - t\big)$$

und für alle s aus diesem Intervall gilt:

$$\varphi^s \circ \varphi^t(p) = \varphi^{s+t}(p). \qquad \square$$

(b) Wegen der glatten Abhängigkeit der Lösung der Differentialgleichung $\dot{x} = \xi(x)$ auf einer offenen Menge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ (und einem glatten Vektorfeld ξ auf V) ist nun Ω zunächst offen, dann ist (p_0, t_0) so wähle man eine Karte $x\colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ um $q_0 := \varphi^{t_0}(p_0) \in M$. Wählt man dann $\varepsilon > 0$ und eine offene Umgebung $W \subseteq V$ von $x_0 := x(q)$, so dass

$$\dot{x} = \xi(x) \text{ auf } V$$

für alle $x \in W$ Lösungen zum Anfangswert x mindestens auf dem Intervall $(-\varepsilon, \varepsilon)$ hat, so zeigt die Konstruktion der maximalen Lösungskurven $\alpha_{\max}(q)$, dass mit $\widetilde{U} := x^{-1}(W) \subseteq U$ die offene Umgebungen $\varphi^{-t_0}(\widetilde{U}) \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ noch ganz in Ω liegt, denn

$$\varphi^{t_0+s}(p) \overset{(a)}{=} \varphi^s(\underbrace{\varphi^{t_0}(p)}_{\in U \text{ für } p \in \varphi^{-t_0}(\widetilde{U})}).$$

Schließlich ist nach Konstruktion $I(p) = I_{\max}(p)$, also zusammenhängend mit $0 \in I(p)$.

(c) Da sich φ in lokalen Koordinaten durch die Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung $\dot{x} = \xi(x)$ beschreibt, $t \mapsto \varphi^t(x)$, $W \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to V$ (vgl. (3.15)), ist $\varphi\colon \Omega \to M$ eine glatte Abbildung.

(d) Ist nun $\psi\colon \widetilde{\Omega} \to M$ ein weiteres dynamische System mit $\widetilde{\Omega} \supseteq \Omega$ und $\psi|_\Omega = \varphi$, so hat ψ das gleiche zugehörige Vektorfeld X wie φ, denn für X_p braucht man φ nur auf einer Umgebung $U \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ von $(p, 0) \in \Omega$ zu kennen und dort stimmen φ und ψ überein. Ist nun $p \in M$ und $\widetilde{I}(p)$ das Definitionsintervall von $t \mapsto \psi(t, p)$, so ist auch diese Kurve Integralkurve von X (siehe (3.8)) zum Anfangswert p, also ist $\widetilde{I}(p) \subseteq I(p)$. Das gilt für alle $p \in M$ und damit $\widetilde{\Omega} \subseteq \Omega$, also $\widetilde{\Omega} = \Omega$. Also ist φ auch maximal. □

(3.16) Satz. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Dann gibt es eine bijektive Zuordnung zwischen allen maximalen dynamisches Systems und allen glatten Vektorfeldern auf M, die wie folgt gegeben ist:*

$$\begin{array}{rcl}
\{\textit{maximales dynamisches System}\} & \overset{1:1}{\longleftrightarrow} & \mathfrak{X}(M) \\
\varphi & \overset{\textit{Differentiation}}{\longmapsto} & X_\varphi \textit{ mit } (X_\varphi)_p = \left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \varphi^t(p) \\
\varphi_X & \overset{\textit{Integration}}{\longleftarrow\!\shortmid} & X \\
\textit{mit } \varphi_X^t(p) = \alpha_{\max}(p)(t) & &
\end{array}$$

Beweis.

(i) $\varphi_{X_\varphi} = \varphi$, da mit (3.8) für festes $p \in M$ die Kurven $t \mapsto \varphi^t(p)$ Integralkurven von $\dot{q} = X_\varphi(q)$ sind und maximal müssen sie auch sein, da φ maximal ist (sonst wäre $\psi := \varphi_{X_\varphi}$ eine Erweiterung von φ).

(ii) $X_{\varphi_X} = X$, da φ_X aus den (maximalen) Lösungskurven von $\dot{p} = X_p$ bestehen, insbesondere

$$X_{\varphi_X}(p) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \varphi_X^t(p) = X_{\varphi_X^0(p)} = X_p \quad \forall p \in M.$$ □

(3.17) Kommentar. „Differentiation ist einfach, Integration ist schwer.“ Während der Übergang von φ zu X in der Regel eine einfache Rechnung ist, ist der Übergang von X zu φ häufig sehr schwer, ja in gewisser Weise gar nicht explizit möglich, sondern nur von theoretischer Natur. In der Theorie der *Dynamischen Systeme* befasst man sich daher nur mit *qualitativen Fragen*, z.B.:

(i) Für welche Punkte $p \in M$ ist $I(p) = \mathbb{R}$?

(ii) Gibt es *periodische Bahnen*, d.h. gibt es ein $p \in M$ mit $I(p) = \mathbb{R}$ und $T > 0$, so dass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt: $\varphi^{t+T}(p) = \varphi^t(p)$?

(iii) Welche *Gleichgewichtslagen* (das ist ein $p \in M$ mit $I(p) = \mathbb{R}$ und $\varphi^t(p) = p \,\forall t \in \mathbb{R}$) sind stabil, d.h. für jede Umgebung $U \subseteq M$ von p, gibt es eine Umgebung $V \subseteq U$ von p mit $t_+(p) = \infty$, für alle $q \in V$ und $\varphi^t(q) \in U \,\forall t \geq 0$

(3.18) Beispiel.

(a) Sei $M = \mathbb{R}^2$ und $\xi \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ gegeben durch $\xi(x, y) = (-y, x)$. Das zugehörige maximale dynamische System φ ist dann global und ist gegeben durch $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$,

$$\varphi(x, y; t) = \big(x \cdot \cos(t) - y \cdot \sin(t), x \cdot \sin(t) + y \cdot \cos(t)\big).$$

(b) Nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz bewegen sich N punktförmige Teilchen ($N \in \mathbb{N}$) mit Massen $m_1, \dots, m_N > 0$ auf den Bahnen $x_j\colon I \to \mathbb{R}^3$ ($j = 1, \dots, N$), die der Differentialgleichung

$$m_j \ddot{x}_j = -\sum_{i \neq j} m_i m_j \frac{x_i - x_j}{\|x_i - x_j\|^3} \qquad (j = 1, \dots, N)$$

genügen. Die zugehörige Mannigfaltigkeit ist also hier $M = (\mathbb{R}^{3N} \setminus \Delta) \times \mathbb{R}^{3N}$ mit

$$\Delta := \big\{(x_1, \dots, x_N) \in (\mathbb{R}^3)^N \;:\; x_i = x_j \text{ für ein Paar } (i, j) \text{ mit } i \neq j\big\}$$

und das „Gravitations-Vektorfeld" wäre

$$X(x, y) = \Big(y_1, \dots, y_N, \dots, \underbrace{-\sum_{i \neq j} m_i \frac{x_i - x_j}{\|x_i - x_j\|}}_{j\text{-te Stelle}}, \dots\Big)$$

(mit $\dot{x}_i = y_i$). Schon das dynamische System des 3-Körper-Problems ist nicht bekannt. Man weiß nicht einmal, für welche Anfangslagen $p = (x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)$, $p \in M$, kein „Zusammenstoß", $t_+(p) < \infty$, stattfindet.

(3.19) Vorbereitung. Sei $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\xi\colon V \to \mathbb{R}^n$ ein glattes Vektorfeld. Ist $x_0 \in V$ und $r, M > 0$, so dass $\overline{B_r(x_0)} \subseteq V$ und $\|\xi(x)\| \leq M$, ist für alle $x \in \overline{B_r(x_0)}$, so zeigt der Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf, dass die maximale Lösung $\alpha\colon (t_-, t_+) \to V$ von $\dot{x} = \xi(x)$ mit $\alpha(0) = x_0$ mindestens auf den Intervall $(-\delta, \delta)$ mit $\delta := \frac{r}{2M}$, existiert, also: $t_+ \geq \frac{r}{2M}$.

(3.20) Satz. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und φ ein maximales dynamisches System auf M. Sei weiter $p \in M$ mit $t_+(p) < \infty$ und $K \subseteq M$ ein beliebiges Kompaktum. Dann existiert ein $\tau \in (0, t_+)$, so dass für alle $t \in (\tau, t_+)$ gilt:*

$$\varphi^t(p) \notin K.$$

Beweis. Angenommen es gäbe ein Kompaktum $K \subseteq M$, wo das nicht der Fall ist. Dann gibt es eine Folge (t_n) in $I = \big(t_-(p), t_+(p)\big)$ mit

$$(t_n) \nearrow t_+ := t_+(p)$$

und

$$q_n := \varphi^{t_n}(p) \in K.$$

Nach Übergang zu einer Teilfolge von (t_n), die wir wieder mit (t_n) bezeichnen, können wir annehmen, dass (q_n) gegen einen Punkt $q \in K$ konvergiert.

Nun wählen wir eine Karte $x\colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ um q, setzen $x_0 = x(q)$ und $x_n := x(q_n)$ für $n \geq n_0$ (mit n_0 groß genug). Ist $X|_U = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ mit $\xi^i \in \mathcal{E}(V)$, so wählen wir $r > 0$ und $M > 0$, so dass $\overline{B_r(x_0)} \subseteq V$ und $\|\xi(x)\| \leq M$ ist, für $x \in \overline{B_r(x_0)}$ $\big($und $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)\colon V \to \mathbb{R}^n\big)$. Sei

$n_1 \in \mathbb{N}$ so groß, dass einerseits $x_n \in B_{r/2}(x_0)$ für $n \geq n_1$ $\big($das geht, weil $(x_n) \to x_0\big)$ und andererseits, dass

$$t_+ - t_n < \delta := \frac{r}{4M}.$$

Ist nun $n_2 \geq n_1$ beliebig und $q_2 := \varphi^{t_{n_2}}(p)$, so müsste die Lösungskurve $t \mapsto \varphi^t(q_2)$ mindestens für $0 < t < \delta$ existieren, denn für $x_2 := x(q_2)$ ist $x_2 \in B_{r/2}(x_0)$ und damit

$$\overline{B_{r/2}(x_2)} \subseteq \overline{B_r(x_0)} \subseteq V$$

Da $\|\xi(x)\| \leq M$ für $x \in \overline{B_{r/2}}$ ist, lebt nach (3.19) die Kurve $t \mapsto \varphi^t(q_2)$ mindestens auf $(0, \delta)$ mit

$$\delta := \frac{r/2}{2M} = \frac{r}{4M} \qquad (\Longrightarrow t_+(q_2) \geq \delta)\,.$$

Andererseits lebt sie aber nur bis

$$t_+(q_2) = t_+ - t_{n_2} < \delta,$$

und das ist ein Widerspruch. □

(3.21) Korollar. *Ist M ein kompakte glatte Mannigfaltigkeiten, so ist daher jedes Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ **vollständig**, d.h.: das zugehörige dynamische System ist global, also $I(p) = \mathbb{R}$, für alle $p \in M$.*

Beweis. Nach (3.20) verlässt $t \mapsto \varphi^t(p)$ das Kompaktum $K = M$ sicher nie, also ist $t_+(p) = +\infty$. Ähnlich sieht man (z.B. durch Übergang von X zu $-X$), dass auch $t_-(p) = -\infty$ sein muss, für alle $p \in M$. □

(3.22) Definition. Sei L ein reeller Vektorraum. Eine bilineare Abbildung $[\,\cdot\,,\,\cdot\,] \colon L \times L \to L$ heißt eine **Lie-Klammer auf L**, wenn gilt:

(i) $[a, b] = -[b, a]$, $\forall a, b \in L$ (Schiefsymmetrie)

(ii) $\big[a, [b, c]\big] + \big[b, [c, a]\big] + \big[c, [a, b]\big] = 0, \quad \forall a, b, c \in L$ (Jacobi-Identität)

Das Paar $\big(L, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]\big)$ heißt dann eine (reelle) **Lie-Algebra**.

(3.23) Beispiel.

(a) $[\,\cdot\,,\,\cdot\,] = 0$ ist stets eine Lie-Klammer auf einen reellen Vektorraum. Man nennt L dann **abelsch**.

(b) Auf $L = \mathbb{R}^3$ setzt man für $x, y \in L$:

$$[x, y] := x \times y = (x^2y^3 - x^3y^2, x^3y^1 - x^1y^3, x^1y^2 - x^2y^1)$$

Dann ist $\big(L, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]\big) = (\mathbb{R}^3, \times)$ eine Lie-Algebra (Übung).

(c) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $L = \operatorname{Mat}_n \mathbb{R}$. Setzt man

$$[A, B] = AB - BA, \quad \forall A, B \in L,$$

so erhält man eine Lie-Klammer auf L (Übung).

(d) Sei A eine $\mathbb{R}$-Algebra. Setzt man für $a, b \in A$

$$[a, b] = ab - ba,$$

so wird dadurch eine Lie-Klammer auf A definiert.

(e) Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $A = \operatorname{End}(V)$. Dann ist also $L = \operatorname{End}(V)$ mit

$$[\alpha, \beta] = \alpha \circ \beta - \beta \circ \alpha$$

eine Lie-Algebra.

(3.24) Kommentar.

(a) Ist $\big(L, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]\big)$ eine Lie-Algebra, so heißt ein Unterraum $L' \subseteq L$ eine **Lie-Unteralgebra von L**, wenn für alle $a, b \in L'$ auch $[a, b] \in L'$ ist. L' wird dann mit $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]|_{L' \times L'}$ selbst zu einer Lie-Algebra.

(b) Ist z.B. $L = \operatorname{Mat}_n \mathbb{R}$ mit $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ wie unter (3.20, b), so betrachte

$$L' := \{A \in L \,:\, A^t + A = 0\},$$

die schiefsymmetrischen Matrizen. Dann ist $L' \subseteq L$ eine Lie-Unteralgebra (Übung).

(3.25) Bemerkung. Sei A eine $\mathbb{R}$-Algebra und

$$\operatorname{Der}_{\mathbb{R}}(A) := \{\varphi \in \operatorname{End}(A) \,:\, \varphi(ab) = \varphi(a)b + a\varphi(b),\ \forall a, b \in A\}.$$

Dann ist $\operatorname{Der}_{\mathbb{R}}(A) \subseteq \operatorname{End}(A)$ eine Lie-Unteralgebra. (Sie heißt die Lie-Unteralgebra der **Derivationen auf A**.)

Beweis. Für $\varphi, \psi \in \operatorname{Der}(A)$ und allen $a, b \in A$ gilt:

$$\begin{aligned}
[\varphi, \psi](a, b) &= \varphi \circ \psi(ab) - \psi \circ \varphi(ab) = \varphi\big(\psi(a)b + a\psi(b)\big) - \psi\big(\varphi(a)b + a\varphi(b)\big) \\
&= \varphi \circ \psi(a) \cdot b + \psi(a)\varphi(b) + \varphi(a)\psi(b) + a \cdot \varphi \circ \psi(b) \\
&\quad - \psi \circ \varphi(a) \cdot b - \varphi(a)\psi(b) - \psi(a)\varphi(b) - a \cdot \psi \circ \varphi(b) \\
&= [\varphi, \psi](a) \cdot b + a \cdot [\varphi, \psi](b),
\end{aligned}$$

also auch $[\varphi, \psi] \in \operatorname{Der}(A)$. $\square$

(3.26) Definition. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $r > 0$. Dann sei $B(r) = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, \|x\| < r\}$. Wir nennen eine glatte Funktion $\varrho\colon \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ eine **Abschneidefunktion**, wenn gilt:

(i) $\varrho|_{\overline{B(1)}} = 1$,

(ii) $\varrho|_{\mathbb{R}^n \setminus B(2)} = 0$.

(3.27) Kommentar. Es gibt Abschneidefunktionen. Man setze etwa $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) := e^{-1/t}$ für $t > 0$ und $f(t) = 0$ für $t \leq 0$, und zunächst dann $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(t) = \frac{f(t)}{f(t) + f(1 - t)}.$$

Setzt man dann $\varrho\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\varrho(x) := g\big(2 - \|x\|\big)$, so ist ϱ eine Abschneidefunktion (Übung).

(3.28) Lemma. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und $s \in \mathcal{E}_p(M)$. Dann gibt es ein $f \in \mathcal{E}(M)$ mit $f_p = s$.*

Beweis. Sei $x\colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ zunächst irgendeine Karte um p und $x_0 = x(p) \in V$. Indem man x mit der Translation $t\colon V \to V' := V - x_0$, $x \mapsto x - x_0$, verknüpft, erhält man eine Karte $x' = t \circ x\colon U \to V' \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $x'(p) = 0$. (Solche Karten heißen **zentriert**.)

Als nächstes wählt man ein $\varepsilon > 0$, so dass $B(\varepsilon) \subseteq V'$ ist, setzt $U'' := x'^{-1}\big(B(\varepsilon)\big)$ und erhält mit $x''\colon U'' \to B(\varepsilon) = V''$ eine zentrierte Karte, so dass $V'' = B(\varepsilon)$ ist.

Nun verknüpft man diese Karte noch mit der **Dilatation** $d\colon B(\varepsilon) \to B(3)$, $x \mapsto \frac{3}{\varepsilon}x$, und erhält mit $x'''\colon U'' \to B(3)$, $x''' = d \circ x''$, schließlich eine zentrierte Karte um p mit Wertebereich $B(3)$. (Das kann man also stets machen.)

Sei nun $s \in \mathcal{E}_p(M)$ und s von einem $g \in \mathcal{E}(U)$, $U \in \mathfrak{U}(p)$ offen, repräsentiert, $s = g_p$. Nach eventueller Verkleinerung von U (und Einschränkung von g) dürfen wir annehmen, dass es eine Karte $\varphi\colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ auf U gibt. Nach eventueller Verkleinerung darf man nun nach obiger Manipulation annehmen, dass φ zentriert und $V = B(3) \subseteq \mathbb{R}^n$ ist.

Sei nun $\varrho\colon \mathbb{R}^n \to [0,1]$ eine Abschneidefunktion. Wir setzen dann $\widetilde{g}\colon U \to \mathbb{R}$,

$$\widetilde{g}(q) := \varrho\big(\varphi(q)\big) \cdot g(q) \quad \text{(also kurz: } \widetilde{g} = \varrho \circ \varphi \cdot g\text{)}.$$

Auf $U_1 := \varphi^{-1}\big(B(1)\big) \in \mathfrak{U}(p)$ stimmt dann $\widetilde{g}$ mit g überein, also ist $\widetilde{g}_p = s$. Auf $U \setminus U_2$ mit $U_2 := \varphi^{-1}\big(B(2)\big)$, gilt dagegen

$$\widetilde{g}|_{U\setminus U_2} = 0$$

und deshalb kann $\widetilde{g}$ mit $f\colon M \to \mathbb{R}$,

$$f(q) := \begin{cases} \widetilde{g}(q) & \text{für } q \in U, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

trivial in glatter Weise auf ganz M fortgesetzt werden. Es folgt:

$$f_p = \widetilde{g}_p = s. \qquad \square$$

(3.29) Kommentar.

(a) Da $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E}_p(M) = \infty$ ist, ist insbesondere

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E}(M) = \infty,$$

denn $\mathcal{E}(M) \to \mathcal{E}_p(M)$, $f \mapsto f_p$, ist linear und nach (3.28) surjektiv. Ähnlich sieht man auch, dass

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{X}(M) = \infty, \ \dim_{\mathbb{R}} \Omega(M) = \infty$$

ist (Übung).

(b) Die glatten Vektorfelder $\mathfrak{X}(M)$ „operieren“ nun auf $\mathcal{E}(M)$ wie folgt: Betrachte

$$\nabla\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathcal{E}(M) \to \mathcal{E}(M), \quad (X, f) \mapsto Xf$$

mit

$$(Xf)(p) := X_p(f_p).$$

Wir nennen $Xf \in \mathcal{E}(M)$ die **Ableitung von f in Richtung X**. Xf ist tatsächlich glatt, denn wird bzgl. einer Karte $x\colon U \to V$ die Einschränkung $f|_U$ durch die glatte Funktion $f\colon V \to \mathbb{R}$ und $X|_U$ durch die glatten Funktionen $\xi^1, \dots, \xi^n\colon V \to \mathbb{R}$ beschrieben, $X|_U = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, so wird $Xf|_U$ durch die glatte Funktion

$$\xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \in \mathcal{E}(V)$$

beschrieben.

(c) Wir können nun jedes glatte Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ als eine Derivation der $\mathbb{R}$- Algebra $\mathcal{E}(M)$ auf sich selbst auffassen:

(3.30) Proposition. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $\iota\colon \mathfrak{X}(M) \to \mathrm{Der}\big(\mathcal{E}(M), \mathcal{E}(M)\big)$ wie folgt gegeben:*

$$\iota(X)(f) = Xf.$$

Dann ist ι ein $\mathbb{R}$-Vektorraum-Isomorphismus, sogar ein $\mathcal{E}(M)$-Modul-Isomorphismus.

Beweis. (a) Zunächst ist für $X \in \mathfrak{X}(M)$, $\iota(X)\colon \mathcal{E}(M) \to \mathcal{E}(M)$ tatsächlich eine Derivation, denn $\iota(X)$ ist linear, d.h.

$$X(f_1 + f_2) = Xf_1 + Xf_2$$
$$X(\lambda f) = \lambda Xf,$$

$f \in \mathcal{E}(M)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, unmittelbar aus der Definition und auch

$$X(fg) = Xf \cdot g + f \cdot Xg, \quad \forall f, g \in \mathcal{E}(M),$$

denn X_p ist ja für jedes $p \in M$ eine Derivation, $X_p \in \mathrm{Der}\big(\mathcal{E}(M), \mathbb{R}\big)$.

Ebenso leicht sieht man, dass ι $\big($sogar $\mathcal{E}(M)$-$\big)$ linear ist,

$$\iota(X_1 + X_2) = \iota(X_1) + \iota(X_2), \text{ also } (X_1 + X_2)f = X_1 f + X_2 f, \quad \forall f.$$
$$\iota(fX) = f\iota(X), \text{ also } (fX)g = f(Xg), \quad \forall g.$$

(b) *Injektivität*. Ist $\iota(X) = 0$, so ist $Xf = 0$, $\forall f \in \mathcal{E}(M)$. Sei $p \in M$ beliebig und $s \in \mathcal{E}_p(M)$. Nach Lemma 3.28 gibt es $f \in \mathcal{E}(M)$ mit $f_p = s$. Es folgt:

$$X_p(s) = X_p(f_p) = (Xf)(p) = 0,$$

also $X_p = 0$, also $X = 0$.

(c) *Surjektivtät*. Sei $\delta\colon \mathcal{E}(M) \to \mathcal{E}(M)$ eine beliebige Derivation. Nach dem folgenden Lemma hängt dann für $f \in \mathcal{E}(M)$ und $p \in M$ die Zahl $\delta(f)(p) \in \mathbb{R}$ nur von $f_p \in \mathcal{E}_p(M)$ ab. Wir setzen dann $X\colon M \to TM$ fest durch

$$X_p(s) := \delta(f)(p), \quad \text{für } s \in \mathcal{E}_p(M),$$

wenn $s = f_p$ ist. Dann ist X wohldefiniert, hängt glatt von p ab, denn ein Vektorfeld $X\colon M \to TM$ ist genau dann glatt, wenn Xf glatt ist, für alle $f \in \mathcal{E}(M)$ (Übung), und es gilt:

$$\iota(X)f(p) = Xf(p) = X_p(f_p) = \delta(f)(p), \quad \forall p \in M, \forall f \in \mathcal{E}(M),$$

also ist

$$\iota(X) = \delta. \qquad \square$$

(3.31) Lemma. *Sei $\delta\colon \mathcal{E}(M) \to \mathcal{E}(M)$ eine Derivation, $f \in \mathcal{E}(M)$ und $p \in M$. Dann hängt $\delta(f)(p) \in \mathbb{R}$ nur von $f_p \in \mathcal{E}_p(M)$ ab.*

Beweis. (a) Sei $g \in \mathcal{E}(M)$ mit $g|_U = 0$ auf einer offenen Umgebung U von p. *Behauptung:* $\delta(g)(p) = 0$. *Dazu:* Ähnlich wie in (3.28) kann man nach evtl. Verkleinerung von U annehmen, dass es offene Umgebungen

$$p \in U_1 \subseteq U_2 \subseteq U$$

gibt und eine glatte Funktion $h\colon M \to \mathbb{R}$ mit $h|_{U_1} = 1$ und $h|_{M\setminus U_2} = 0$. Es ist dann $h \cdot g = 0$ auf ganz M. Weil δ Derivation ist, folgt:

$$0 = \delta(0) = \delta(hg) = (\delta h) \cdot g + h \cdot (\delta g)$$

also in p:

$$0 = (\delta h)(p) \cdot \underbrace{g(p)}_{=0} + \underbrace{h(p)}_{=1}(\delta g)(p).$$

(b) Ist nun $f_1, f_2 \in \mathcal{E}(M)$ mit $(f_1)_p = (f_2)_p$, so gilt für $g := f_2 - f_1 \in \mathcal{E}(M)$:

$$0_p = 0 = (f_2)_p - (f_1)_p = g_p,$$

also ist $g = 0$ auf einer Umgebung $U \subseteq M$ von p. Es folgt:

$$0 = \delta(g)(p) = \delta(f_2)(p) - \delta(f_1)(p) \Longrightarrow \delta(f_1)(p) = \delta(f_2)(p).$$ □

(3.32) Definition. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $\iota\colon \mathfrak{X}(M) \to \mathrm{Der}\big(\mathcal{E}(M)\big)$, $\iota X(f) = Xf$. Man setzt dann $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$,

$$[X, Y] := \iota^{-1}\big([\iota X, \iota Y]\big).$$

(3.33) Kommentar.

(a) Wegen (3.30) kann man den $\mathcal{E}(M)$-Modul $\mathfrak{X}(M)$ mit dem $\mathcal{E}(M)$-Modul $\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}\big(\mathcal{E}(M)\big)$ (vermöge ι) identifizieren. Nun ist aber $A := \mathcal{E}(M)$ eine $\mathbb{R}$-Algebra und daher trägt $\mathrm{Der}\big(\mathcal{E}(M)\big)$ -neben seiner $\mathcal{E}(M)$-Modul-Struktur- auch eine Lie-Algebra-Struktur nach (3.23). Deshalb trägt auch $\mathfrak{X}(M)$ in natürlicher Weise eine Lie-Algebra-Struktur gemäß (3.32).

(b) Ist $\dim M \geq 1$, so ist $\mathfrak{X}(M)$ $\big($außer ein $\mathcal{E}(M)$-Modul$\big)$ zusammen mit $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ eine unendlich dimensionale Lie-Algebra. Unterdrückt man den Isomorphismus ι (und das tut man nach einer Weile), so ist die Lie-Klammer auf $\mathfrak{X}(M)$ also gegeben durch

$$[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X.$$

Präziser bedeutet dies für jedes $p \in M$, $s \in \mathcal{E}_p(M)$ und einem $f \in \mathcal{E}(M)$ von s, $s = f_p$:

$$[X, Y]_p(s) = X_p\big((Yf)_p\big) - Y_p\big((Xf)_p\big),$$

denn

$$\begin{aligned}
[X, Y]_p(s) &= \Big(\iota^{-1}\big([\iota(X), \iota(Y)]\big)\Big)_p (f_p) \\
&= [\iota X, \iota Y](f)(p) \\
&= \big(\iota(X) \circ \iota(Y) - \iota(Y) \circ \iota(X)\big)(f)(p) \\
&= \big(X(Yf) - Y(Xf)\big)(p) \\
&= X_p\big((Yf)_p\big) - Y_p\big((Xf)_p\big).
\end{aligned}$$

(c) Man beachte, dass $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ in keinem der beiden Argumente $\mathcal{E}(M)$-linear ist. Vielmehr gilt:

(3.34) Bemerkung. Sei M glatte Mannigfaltigkeit, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ und $f, g \in \mathcal{E}(M)$. Dann gilt:

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg) \cdot Y - g(Yf) \cdot X.$$

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass das Bild beider Seiten unter $\iota\colon \mathfrak{X}(M) \to \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}\big(\mathcal{E}(M)\big)$ übereinstimmt. (Übung) $\square$

(3.35) Bemerkung. Sei M glatte Mannigfaltigkeit, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ und sei $x\colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte. Ist nun $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x^i}$,

$$X|_U = \xi^i \partial_i,\ Y|_U = \eta^j \partial_j \quad \text{mit } \xi^i, \eta^j \in \mathcal{E}(V),$$

so gilt

$$[X,Y]\big|_U = \Big(\xi^i \frac{\partial \eta^k}{\partial x^i} - \eta^j \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j}\Big)\partial_k.$$

Beweis. Ist $f \in \mathcal{E}(U)$ (und die Darstellung von f bzgl. x sei wie üblich ebenfalls mit f bezeichnet), so gilt mit (3.29, b) und (3.33, b):

$$\begin{aligned}
[X,Y]|_U(f) &= X|_U\Big(\eta^j \frac{\partial f}{\partial x^j}\Big) - Y|_U\Big(\xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big) \\
&= \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big(\eta^j \frac{\partial f}{\partial x^j}\Big) - \eta^j \frac{\partial}{\partial x^j}\Big(\xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big) \\
&= \xi^i \frac{\partial \eta^j}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j} + \xi^i \eta^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^i} - \eta^j \xi^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} \\
&\overset{\text{H.A. Schwarz}}{=} \left(\xi^i \frac{\partial \eta^k}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^k} - \eta^j \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^k}\right)(f)
\end{aligned}$$

$$\implies [X,Y]|_U = \Big(\xi \frac{\partial \eta^k}{\partial x^i} - \eta^j \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j}\Big)\partial_k \qquad \square$$

(3.36) Definition. Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten und $\Phi\colon M \to N$ eine glatte Abbildung. Man nennt zwei Vektorfelder $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $Y \in \mathfrak{X}(N)$ **Φ-bezogen aufeinander**, wenn für alle $p \in M$ gilt:

$$\mathrm{D}\Phi_p(X_p) = Y_{\Phi(p)}, \text{ kurz: } \mathrm{D}\Phi \circ X = Y \circ \Phi,$$

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\Phi} & N \\ {\scriptstyle X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Y} \\ \mathrm{T}M & \xrightarrow{\mathrm{D}\Phi} & \mathrm{T}N \end{array}$$

wenn man $\mathrm{D}\Phi$ als eine Abbildung zwischen $\mathrm{T}M$ und $\mathrm{T}N$ auffasst, $\mathrm{D}\Phi(\xi) := \mathrm{D}\Phi_p(\xi)$, wenn $\xi \in \mathrm{T}M_p$ ist.

(3.37) Bemerkung. Ist $\Phi\colon M \to N$ eine glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten M und N und sind $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ und $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(N)$, so dass X_1 und Y_1 bzw. X_2 und Y_2 Φ-bezogen sind, so sind auch $[X_1, X_2] \in \mathfrak{X}(M)$ und $[Y_1, Y_2] \in \mathfrak{X}(N)$ Φ-bezogen.

Beweis. Sei $p \in M$, $q := \Phi(p)$, $s \in \mathcal{E}_q(N)$ mit $s = g_q$ und $g \in \mathcal{E}(N)$. Dann ist:

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}\Phi_p\big([X_1,X_2]_p\big)(s) &= [X_1,X_2]_p\big((g\circ\Phi)_p\big) && \text{(Def. von } \mathrm{D}\Phi_p) \\
&= (X_1)_p\Big(\big(X_2(g\circ\Phi)\big)_p\Big) - (X_2)_p\Big(\big(X_1(g\circ\Phi)\big)_p\Big) && \text{(Def. von } [\,\cdot\,,\cdot\,]) \\
&= (X_1)_p\Big(\big(\mathrm{D}\Phi(X_2)(g)\big)_p\Big) - (X_2)_p\Big(\big(\mathrm{D}\Phi(X_1)(g)\big)_p\Big) && \text{(Def. von } \mathrm{D}\Phi) \\
&= (X_1)_p\Big(\big(\underbrace{(Y_2\circ\Phi)(g)}_{=Y_2 g\circ\Phi}\big)_p\Big) - (X_2)_p\Big(\big(\underbrace{(Y_1\circ\Phi)(g)}_{=Y_1 g\circ\Phi}\big)_p\Big) \\
&= \mathrm{D}\Phi_p\big((X_1)_p\big)\big((Y_2 g)_q\big) - \mathrm{D}\Phi_p\big((X_2)_p\big)\big((Y_1 g)_q\big) \\
&= (Y_1)_q\big((Y_2 g)_q\big) - (Y_2)_q\big((Y_1 g)_q\big) \\
&= [Y_1,Y_2]_q(g_q) = [Y_1,Y_2]_{\Phi(p)}(s).
\end{aligned}$$

$\square$

(3.38) Lemma. *Sei $\Phi\colon M \to N$ glatt, $p \in M$ und $\mathrm{D}\Phi_p\colon \mathrm{T}M_p \to \mathrm{T}N_{\Phi(p)}$ injektiv. Dann existieren offene Umgebungen $U \subseteq M$ von p und $V \subseteq N$ von $q = \Phi(p)$, so dass $\Phi(U) \subseteq V$, $\Phi|_U\colon U \to V$ injektiv ist und $\Phi(U) \subseteq V$ eine Untermannigfaltigkeit der Codimension* $\dim N - \dim M$ *ist.*

Beweis. Sei zunächst $n = \dim M$, $n + k := \dim N$ (also $k \geq 0$, da aus $\mathrm{D}\Phi_p$ injektiv folgt: $\dim M \leq \dim N$). Seien $x = (x^1, \ldots, x^n)\colon U \to U' \subseteq \mathbb{R}^n$ und $y = (y^1, \ldots, y^{n+k})\colon V \to V' \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ Karten um p bzw. q, so dass $\Phi(U) \subseteq V$ ist. Sei $\varphi\colon U' \to V'$ die Beschreibung von Φ bzgl. x und y, $\varphi = (\varphi^1, \ldots, \varphi^{n+k})$. Ist $x_0 = x(p) \in U'$, so folgt:

$$\mathrm{Jac}(\varphi)(x_0) = \left(\frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j}\right)_{\substack{1 \leq j \leq n+k \\ 1 \leq j \leq n}} (x_0)$$

hat den vollen Rang n. Es gibt also

$$1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_n \leq n + k,$$

so dass $\left(\frac{\partial \varphi^{i_\nu}}{\partial x^j}\right)_{1 \leq \nu, j \leq n}$ invertierbar ist. Nach evtl. Koordinaten-Vertauschung $\tau\colon \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^{n+k}$, $\varphi' = \tau \circ \varphi$, dürfen wir $i_\nu = \nu$ annehmen. Bezeichnet $\pi\colon \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^n$ die Projektion auf die ersten n Koordinaten,

$$y = (w, z) \mapsto w, \quad w \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}^k,$$

so ist nach dem Umkehrsatz die Abbildung $\pi \circ \varphi\colon U' \to \pi(V') \subseteq \mathbb{R}^n$ lokal um x_0 bzw. $w_0 := \pi \circ \varphi(x_0) = y(q)$ umkehrbar. Nach Verkleinerung von U und V dürfen wir die Existenz eines glatten $\psi\colon \pi(V') \to U'$ annehmen mit

$$\psi \circ \pi \circ \varphi = \mathbb{1}_{U'}, \ \pi \circ \varphi \circ \psi = \mathbb{1}_{\pi(V')}.$$

Insbesondere ist nun φ injektiv und damit auch $\Phi|_U = y^{-1} \circ \varphi \circ x$.

Es ist $\Phi(U) \subseteq V$ auch eine Untermannigfaltigkeit der Codimension k, denn auf V setzen wir nun $F\colon V \to \mathbb{R}^k$, $F = G \circ y$, mit $G\colon V' \to \mathbb{R}^k$,

$$G(w, z) = \Big(z^1 - \varphi^{n+1}\big(\psi(w)\big), \ldots, z^k - \varphi^{n+k}\big(\psi(w)\big)\Big).$$

Wegen $\pi \circ \varphi \circ \psi(w) = w$, also

$$\varphi^j\big(\psi(w)\big) = w^j, \quad \text{für } j = 1, \ldots, n,$$

ist:

$$\begin{aligned} G(w, z) = 0 &\Longleftrightarrow z^i = \varphi^{n+i} \circ \psi(w) \quad (i = 1, \ldots, k) \\ &\Longleftrightarrow (w, z) = \varphi \circ \psi(w) \\ &\Longleftrightarrow (w, z) = \varphi(x) \text{ für ein } x \in U' \\ &\Longleftrightarrow (w, z) \in \mathrm{Im}(\varphi), \end{aligned}$$

also: $F(q) = 0 \Longleftrightarrow q \in \mathrm{Im}(\Phi|_U)$, und wegen

$$\mathrm{Jac}(G)(w_0, z_0) = \left(\ * \ \middle| \ \mathbb{1}_k \ \right)$$

$\big($mit $(w_0, z_0) = y(q_0)\big)$ ist auch $\mathrm{rg}(\mathrm{D}F_q) = k$. $\Phi(U) \subseteq V$ ist also eine (abgeschlossene) Untermannigfaltigkeit der Codimension k. $\square$

(3.39) Erinnerung. Ist $M \subseteq N$ eine (nicht notwendig abgeschlossene) Untermannigfaltigkeit der Codimension k, so ist die Inklusion $i\colon M \hookrightarrow N$ (mit der induzierten Mannigfaltigkeits-Struktur) eine **Einbettung**, d.h.:

(a) i injektiv,

(b) i immersiv,

(c) $i\colon M \to i(M)$ ist ein Homöomorphismus.

Umgekehrt gilt nun:

(3.40) Satz. *Sei $\Phi\colon M \to N$ eine Einbettung (also injektiv, immersiv und Homöomorphismus auf sein Bild). Dann ist $\Phi(M) \subseteq N$ eine (nicht notwendig abgeschlossene) Untermannigfaltigkeit der Codimension* $\dim N - \dim M$.

Beweis. Sei $q \in \Phi(M)$ und $\Phi(p) = q$. Nach dem Lemma gibt es offene Umgebungen $U \subseteq M$ von p von $V \subseteq N$ von q, so dass $\Phi(U) \subseteq V$ und $\Phi(U) \subseteq V$ eine Untermannigfaltigkeit der Codimension k ist. Andererseits ist $\Phi\colon M \to \Phi(M)$ ein Homöomorphismus, also Φ offen und damit $\Phi(U)$ offen in $\Phi(M)$. Deshalb gibt es ein offenes $V' \subseteq N$ mit

$$\Phi(M) \cap V' = \Phi(U).$$

Verkleinert man die obigen $U \subseteq M$ bzw. $V \subseteq N$ gegebenenfalls so, dass $V \subseteq V'$ ist $\big($Übergang zu $V \cap V'$ und $U' = \Phi^{-1}(V \cap V')\big)$, so zeigt dies, dass

$$\Phi(M) \cap V = F^{-1}(0)$$

mit einem glatten $F\colon V \to \mathbb{R}^k$ und $\mathrm{D}F_q\colon \mathrm{T}N_q \to \mathbb{R}^k$ ($k = \dim N - \dim M$) von vollem Rang ist, d.i.: $\Phi(M) \subseteq N$ ist Untermannigfaltigkeit der Codimension k. □

(3.41) Kommentar.

(a) Sind M und N glatte Mannigfaltigkeiten und $\Phi\colon M \to N$ nur injektiv, so ist Φ i.a. nicht immersiv (geschweige denn eine Einbettung). Z.B. ist mit $M = \mathbb{R}$, $N = \mathbb{R}^2$ und $\Phi\colon M \to N$,

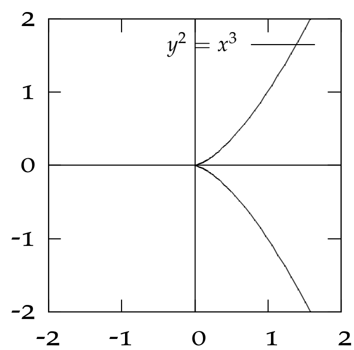
$$\Phi(t) = (t^2, t^3)$$

injektiv, aber nicht immersiv (bei $t_0 = 0$), denn

$$\dot\Phi(0) = (2t, 3t^2)|_{t=0} = (0,0)$$

also $\mathrm{D}\Phi_0\colon \mathrm{T}M_0 \to \mathrm{T}N_{(0,0)}$ nicht injektiv. Das Bild $C = \Phi(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^2$ ist

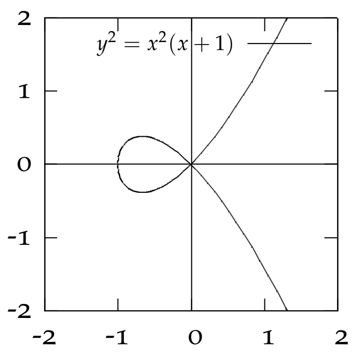
$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y^2 = x^3\}$$



und heißt die **Neillsche Parabel** (Übung).

(b) Ist $\Phi\colon M \to N$ immersiv, so braucht Φ nicht (global) injektiv zu sein (geschweige denn eine Einbettung). Betrachte z.B. wieder $M = \mathbb{R}$ und $N = \mathbb{R}^2$ und dieses Mal das **Cartesisches Blatt**

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y^2 = x^2(x+1)\}.$$



Es ist dann $\Phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$,

$$\Phi(t) = (t^2 - 1, t^3 - t)$$

immersiv, denn

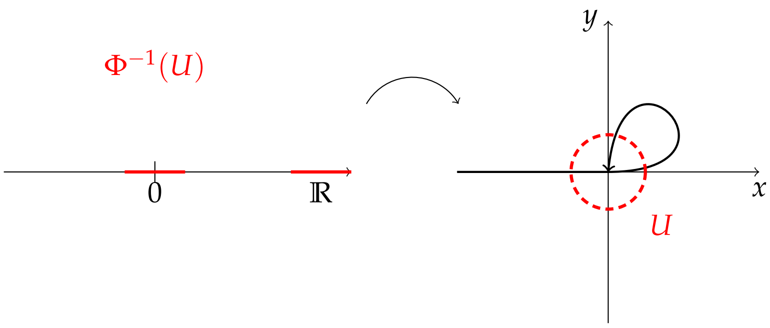
$$\dot{\Phi}(t) = (2t, 3t^2 - 1) \neq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

aber nicht injektiv, denn

$$\Phi(1) = (0,0) = \Phi(-1)$$

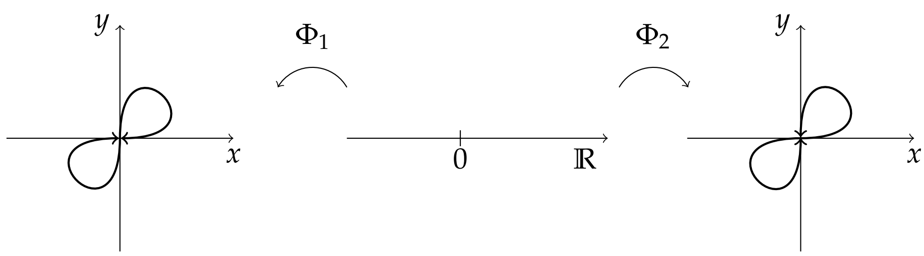
$\big($und $\Phi(\mathbb{R}) = C$, Übung$\big)$.

(c) Eine injektive Immersion Φ muss i.a. auch keine Einbettung sein. Die von der Teilraumtopologie auf $\Phi(M)$ induzierte Topologie auf M induzierte Topologie auf M $\big($via des bijektiven $\Phi\colon M \to \Phi(M)\big)$ ist dann echt gröber, denn ϕ ist ja stetig. Sei z.B. wieder $M = \mathbb{R}$ und $N = \mathbb{R}^2$ und $\Phi\colon M \to N$ (ohne explizite Vorschrift) durch folgende Skizze gegeben:



Dann ist Φ injektiv, immersiv, aber keine Einbettung! Ist nämlich τ die von $\Phi(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^2$ induzierte Topologie auf $\mathbb{R}$, so ist die Menge $(-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}$ (für irgendein $\varepsilon > 0$) nicht offen $\big($d.h. $\Phi(-\varepsilon, \varepsilon)$ ist in $\Phi(\mathbb{R})$ nicht offen und damit $\Phi\colon \mathbb{R} \to \Phi(\mathbb{R})$ kein Homöomorphismus$\big)$, weil jede offene Umgebung $U \in \tau$ von $(0,0)$ ein **Endstück** (α, ∞) mit $\alpha > 0$ enthalten muss.

(d) Teilmengen C einer Mannigfaltigkeit N können also die Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M via einer injektiven Immersion $\Phi\colon M \to N$ mit $C = \Phi(M)$ tragen, obwohl sie keine Untermannigfaltigkeit sind und damit „sehr wild" aussehen können. Ihre Topologie ist dann nicht mehr die Teilraumtopologie, sondern (echt) feiner (Übung). Eine gegebene Teilmenge kann auch mit verschiedenen Topologien Mannigfaltigkeiten-Strukturen tragen, wie das folgende Beispiel der Figur „Acht" $C \subseteq \mathbb{R}^2$ zeigt:



Die Abbildung $\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist dabei nicht stetig (in 0), weil das Urbild von $(-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}$ vom Typ $(-\infty, -\alpha) \cup \{0\} \cup (\alpha, \infty)$ mit einem $\alpha > 0$ ist und damit nicht offen.

(3.42) Definition. Zwei injektive Immersionen $\Phi_1 \colon M_1 \to N$ und $\Phi_2 \colon M_2 \to N$ heißen **äquivalent**, wenn $\Phi_1(M_1) = \Phi_2(M_2)$ und die Abbildung $\psi \colon M_1 \to M_2$ mit $\Phi_2 \circ \psi = \Phi_1$ ein Diffeomorphismus ist $\big($sei $C := \Phi(M_1) = \Phi(M_2) \subseteq N\big)$.

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[d, "\psi"', "\cong"] \arrow[dr, "\Phi_1"] & \\ M_2 \arrow[r, "\Phi_2"'] & C \end{tikzcd}$$

(3.43) Lemma. *Sei $\Phi \colon M \to N$ eine injektive Immersion. Sei weiter $\Psi \colon P \to N$ glatt mit $\Psi(P) \subseteq \Phi(M)$ und $\psi \colon P \to M$ gegeben durch $\Phi \circ \psi = \Psi$. Dann gilt: Ist ψ stetig, so ist ψ bereits glatt.*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\Psi"] \arrow[dr, dashed, "\psi"'] & N \\ & M \arrow[u, "\Phi"'] \end{tikzcd}$$

Beweis. Sei $p \in P$, $q := \psi(p) \in M$, $r := \Phi(q) \in N$. Wir wählen Karten x um p, y um q und z um r der Mannigfaltigkeiten P, M und N, $x \colon U \to U'$, $y \colon V \to V'$, $z \colon W \to W'$. Es reicht zu zeigen, dass

$$\psi|_{\psi^{-1}(V)} \colon \psi^{-1}(V) \to M$$

glatt um p ist, denn $\psi^{-1}(V) \subseteq P$ ist offen, da ψ stetig ist.

Da $\Phi(V) \subseteq W$ eine Untermannigfaltigkeit nach Lemma (3.38) ist (für V und W klein genug), ist $\Phi|_V \colon V \to \Phi(V) \subseteq W$ ein Diffeomorphismus und man kann als Karte um q die Komposition $\pi \circ z \circ \Phi|_V$ verwenden, wo $\pi \colon \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^n$ ($n = \dim M$, $n + k = \dim N$) eine geeignete Koordinaten-Projektion ist. Bzgl. dieser Karte um q und der Karte x um p wird dann ψ beschrieben durch

$$(\pi \circ z \circ \Phi|_V) \circ \psi \circ x^{-1} = \pi \circ (z \circ \underbrace{\Phi|_V \circ \psi}_{\Psi|_{\psi^{-1}(V)}}) \circ x^{-1} = \pi \circ (\underbrace{z \circ \Psi|_{\psi^{-1}(V)} \circ x^{-1}}_{\text{glatt, weil } \Psi \text{ glatt ist}})$$

und damit glatt. □

(3.44) Satz. *Sei N glatte Mannigfaltigkeit, $C \subseteq N$ eine Teilmenge und τ eine Topologie auf C. Dann kann es bis auf Äquivalenz höchstens eine Mannigfaltigkeit-Struktur auf C geben, die von einer injektiven Immersion $\Phi \colon M \to C \subseteq N$ kommt.*

Beweis. Seien also $\Phi_1 \colon M_1 \to C \subseteq N$ und $\Phi_2 \colon M_2 \to C \subseteq N$ injektive Immersionen mit $\Phi_1(M_1) = C = \Phi_2(M_2)$, so dass Φ_1 und Φ_2 Homöomorphismen sind, falls man C mit τ topologisiert. Ist dann $\psi \colon M_1 \to M_2$ durch $\Phi_2 \circ \psi = \Phi_1$ gegeben, so ist sowohl $\psi = \Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$ stetig als auch $\psi^{-1} = \Phi_1^{-1} \circ \Phi_2$ und damit nach Lemma (3.43) glatt. Also ist ψ Diffeomorphismus. □

(3.45) Motivation.

(a) Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $X \in \mathfrak{X}(M)$ ohne Nullstellen, $X_p \neq 0$, $\forall p \in M$. Wir betrachten dann das **Linienfeld** $L = (L_p)_{p \in M}$ mit

$$L_p = \langle X_p \rangle = \mathbb{R} \cdot X_p \subseteq \mathrm{T}M_p.$$

Ist dann p fixiert und $\varphi = \alpha(p)\colon I = I(p) \to M$ die maximale Integralkurve von X zum Anfangswert p, also

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}(t) &= X_{\varphi(t)},\ \forall t \in I\\ \varphi(0) &= p,\end{aligned}$$

so ist also $\varphi\colon I \to M$ eine injektive Immersion $\big($denn $\dot{\varphi}(t) \neq 0,\ \forall t \in I\big)$ mit

$$\mathrm{D}\varphi_t(\mathrm{T}I_t) = L_{\varphi(t)},$$

denn $\mathrm{T}I_t$ wird von $\frac{\partial}{\partial t}\big|_t$ und $L_{\varphi(t)}$ von $X_{\varphi(t)}$ erzeugt und

$$\mathrm{D}\varphi_t\left(\frac{\partial}{\partial t}\bigg|_t\right) = \dot{\varphi}(t) = X_{\varphi(t)}.$$

Beachte auch, dass φ i.a. keine Einbettung zu sein braucht.
$\big($**Beispiel:** $M = \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ und $X(p) = (1,\alpha)$ mit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, wenn man $\mathrm{T}M_p$ kanonisch mit $\mathbb{R}^2$ identifizieren (Übung), siehe auch (3.62)$\big)$

(b) Wir wollen nun auch „höherdimensionale Felder“ $D = (D_p)_{p\in M}$ mit $D_p \subseteq \mathrm{T}M_p$ einem Unterraum der Dimension k mit $1 \leq k \leq n = \dim M$, vorgeben und fragen, ob es auch dann „Integralmannigfaltigkeiten“ gibt, d.h. die überall tangential an D sind.

(3.46) Definition.

(a) Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension n und $1 \leq k \leq n$. Eine **Distribution vom Rang k auf M** ist eine Familie $D = (D_p)_{p\in M}$ von Unterräumen $D_p \subseteq \mathrm{T}M_p$ mit $\dim D_p = k$, für alle $p \in M$.

(b) Eine Distribution $D = (D_p)$ vom Rang k heißt **glatt**, wenn es zu jedem $p_0 \in M$ eine offene Umgebung $U \subseteq M$ von p_0 gibt und glatte Vektorfelder $X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{X}(U)$, die in jedem Punkt $p \in U$ eine Basis von D_p bilden,

$$D_p = \langle (X_1)_p, \ldots, (X_k)_p \rangle$$

(c) Eine glatte Distribution $D = (D_p)_{p\in M}$ vom Rang k auf einer glatten Mannigfaltigkeit M heißt **integrabel**, wenn es zu jedem $p_0 \in M$ eine glatte Mannigfaltigkeit N der Dimension k, ein $q_0 \in N$ und eine injektive Immersion $\varphi\colon N \to M$ mit $\varphi(q_0) = p_0$ gibt, so dass für alle $q \in N$ gilt:

$$\mathrm{D}\varphi_q(\mathrm{T}N) = D_{\varphi(p)}.$$

(3.47) Kommentar.

(a) Ist $D = (D_p)$ eine glatte Distribution auf M, so nennen wir eine injektive Immersion $\varphi\colon N \to M$ mit $D\varphi_q(\mathrm{T}N_q) = D_{\varphi(q)}$ eine **Integral-Mannigfaltigkeit für D**.

(b) Für das Differential einer glatten Abbildung $\Phi\colon M \to N$ (in einem Punkt $p \in M$) notieren wir auch kurz: $\Phi_* := \mathrm{D}\Phi_p$. Eine injektive Immersion $\varphi\colon N \to M$ ist also etwa integral für D, genau wenn

$$\varphi_*(\mathrm{T}N) = D|_{\varphi(N)}$$

ist.

(c) Ist $\mathrm{rg}(D) = 1$, so haben wir schon gesehen $\big($vgl. (3.45)$\big)$, dass D integrabel ist. Für glatte Distributionen von höheren Rang gibt es ein Hindernis:

(3.48) Proposition. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und D eine glatte und integrable Distribution auf M. Sind dann $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, so dass $X_p, Y_p \in D_p$ ist, für alle $p \in M$, so gilt auch:*

$$[X, Y]_p \in D_p, \ \forall p \in M.$$

(3.49) Kommentar.

(a) Ist D eine Distribution auf M, so notieren wir die glatten Vektorfelder mit Werten in D mit

$$\Gamma(D) := \{X \in \mathfrak{X}(M) \,:\, X_p \in D_p, \ \forall p \in M\}$$

Dann ist $\Gamma(D) \subseteq \mathfrak{X}(M)$ ein $\mathcal{E}(M)$-Untermodul, insbesondere ein $\mathbb{R}$-Unterraum, von $\mathfrak{X}(M)$. Eine notwendige Bedingung für die Integrabilität von D ist dann nach (3.48), dass $\Gamma(D)$ eine Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{X}(M)$ ist,

$$[\Gamma(D), \Gamma(D)] \subseteq \Gamma(D).$$

(b) Beachte, dass auch $\Gamma(D)$ stets ein unendlich-dimensionaler Unterraum von $\mathfrak{X}(M)$ ist, falls $\dim M \geq 1$ ist (Übung).

(c) Ist $\mathrm{rg}(D) = 1$, so ist die Bedingung, dass $\Gamma(D) \subseteq \mathfrak{X}(M)$ eine Lie-Unteralgebra ist, offenbar stets erfüllt, denn lokal kann man D mit nur einen Vektorfeld $Z \in \mathfrak{X}(U)$ erzeugen, $D_p = \langle Z_p \rangle$, $\forall p \in U$, so dass jedes Vektorfeld $X \in \Gamma(D|_U) \in \mathfrak{X}(U)$ von der Form $X = fZ$ mit $f \in \mathcal{E}(U)$ ist. Für $Y = gZ$, $g \in \mathcal{E}(U)$, ist dann aber

$$\begin{aligned} [X, Y]\big|_U = [fZ, gZ] &= f \cdot g \underbrace{[Z, Z]}_{=0} + (f \cdot Zg) \cdot Z - (g \cdot Zf) \cdot Z \\ &= (f \cdot Zg - g \cdot Zf) Z \in \Gamma(D|_U). \end{aligned}$$

Für Distribution von höherem Rang ist diese Bedingung i.a. nicht erfüllt $\big($Beispiel: $M = \mathbb{R}^3$, $D = \langle X, Y \rangle$, $X = \frac{\partial}{\partial x}$, $Y = \frac{\partial}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial z}$ (Übung)$\big)$.

Beweis von (3.48)**.** Seien also $X, Y \in \Gamma(D)$ und $p_0 \in M$ beliebig. Sei weiter $\varphi\colon N \to M$ eine Integralmannigfaltigkeit für D durch p_0 und $q_0 \in N$ mit $\varphi(q_0) = p_0$. Da φ immersiv ist, können wir Vektorfelder $\widetilde{X}, \widetilde{Y}$ auf N wie folgt definieren:

$$\widetilde{X}_q := (\mathrm{D}\varphi_q)^{-1}(X_{\varphi(q)})$$

und analog für Y, denn $\mathrm{D}\varphi_q\colon \mathrm{T}N_q \to D_{\varphi(q)} \subseteq \mathrm{T}M_{\varphi(q)}$ ist ein Isomorphismus.

(a) **Behauptung:** $\widetilde{X}$ und $\widetilde{Y}$ sind glatt. Dazu: Sei $x\colon V \to V' \subseteq \mathbb{R}^k$ eine Karte von N um q_0 und $y = (y^1, \ldots, y^n)\colon U \to U' \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte um p_0 von M. Notieren wir dann φ bzgl. dieser Karten mit τ, $\tau = y \circ \varphi \circ x^{-1}$, so ist mit einer geeigneten Projektion $\pi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ die Abbildung $\pi \circ y = y'\colon U \supseteq \varphi(V) \to \pi(U') \subseteq \mathbb{R}^k$ eine Karte für $\varphi(V) \subseteq U$, weil $\psi = \pi \circ \tau$ um q_0 ein Diffeomorphismus ist $\big($siehe (3.38)$\big)$. Insbesondere ist

$$\mathrm{D}y'_p\colon D_p = D_{\varphi(q)}(\mathrm{T}N_q) \to T\big(\pi(U')\big)_{y'(p)} \cong \mathbb{R}^k$$

ein Isomorphismus.

Mit $X|_U \in \mathfrak{X}(U)$ ist nun auch $X|_{\varphi(V)}$ glatt $\big($da $\varphi(V) \subseteq U$ Untermannigfaltigkeit ist$\big)$, $X|_{\varphi(V)} \in \mathfrak{X}\big(\varphi(V)\big)$, und ist $X|_{\varphi(V)}$ bzgl. y' durch glatte Funktionen $\eta^1, \ldots, \eta^k \in \mathcal{E}(U'')$ gegeben, $U'' := \pi(U')$,

$$X|_{\varphi(V)} = \eta^i \frac{\partial}{\partial y'^i},$$

so ist wegen der Kommutativität des folgenden Diagramms $\widetilde{X}|_V \colon V \to TV$ durch die Funktionen $\xi^1, \dots, \xi^k \colon V' \to \mathbb{R}$ gegeben,

$$\widetilde{X}|_V = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

die mit $\xi := (\xi^1, \dots, \xi^k)$ durch

$$\xi(x) = \mathrm{D}\psi(x)^{-1}\Big(\eta\big(\psi(x)\big)\Big) \qquad (\text{mit } \eta = (\eta^1, \dots, \eta^k))$$

gegeben ist,

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "x"'] & \varphi(V) \subseteq U\,. \arrow[d, "y'"] \\ \mathbb{R}^k \supseteq V' \arrow[r, "\psi"] & U'' \subseteq \mathbb{R}^k \end{tikzcd}$$

denn:

$$\begin{aligned} \xi(x) &= \mathrm{D}x_q(\widetilde{X}_q) = \mathrm{D}x_q\big(\mathrm{D}\varphi_q^{-1}(X_{\varphi(q)})\big) = \mathrm{D}x_q \circ \mathrm{D}\varphi_q^{-1} \circ \mathrm{D}y'^{-1}_{\varphi(p)}\Big(\eta\ \underbrace{\big(y' \circ \varphi(q)\big)}_{=\psi \circ x(q) = \psi(x)}\Big) \\ &\overset{\text{K.R.}}{=} \mathrm{D}\psi(x)^{-1}\Big(\eta\big(\psi(x)\big)\Big), \end{aligned}$$

nach der Kettenregel. Mit η (und ψ) ist deshalb auch ξ glatt (und damit $\widetilde{X}$).

(b) Nach Definition sind nun $\widetilde{X}$ und X bzw. $\widetilde{Y}$ und Y φ-bezogen aufeinander,

$$\mathrm{D}\varphi \circ \widetilde{X} = X \circ \varphi, \quad \mathrm{D}\varphi \circ \widetilde{Y} = Y \circ \varphi$$

und daher nach (3.37) auch ihre Lie-Klammern. Es folgt:

$$\begin{aligned} [X, Y]_{p_0} = [X, Y]_{\varphi(q_0)} &= \big([X, Y] \circ \varphi\big)(q_0) \\ &\overset{(3.37)}{=} \mathrm{D}\varphi_{q_0}\big([\widetilde{X}, \widetilde{Y}]_{q_0}\big) \in \mathrm{Im}(\mathrm{D}\varphi_{q_0}) = D_{\varphi(q_0)} = D_{p_0}, \end{aligned}$$

also tatsächlich $[X, Y] \in \Gamma(D)$. □

(3.50) Definition. Wir nennen eine glatte Distribution D auf einer glatten Mannigfaltigkeit **involutiv**, wenn gilt:

$$[\Gamma(D), \Gamma(D)] \subseteq \Gamma(D).$$

(3.51) Kommentar. Integrable Distributionen sind also involutiv. Aber gibt es weitere Hindernisse als die Involutivität gegen die Integrabilität?

(3.52) Theorem (Frobenius). *Eine glatte Distribution D auf einer glatten Mannigfaltigkeit ist genau dann integrabel, wenn sie involutiv ist.*

(3.53) Proposition. *Sei M^n eine glatte Mannigfaltigkeit, $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $p \in M$ mit $X_p \neq 0$. Dann gibt es mit $W := \{x \in \mathbb{R}^n,\ |x^i| < 1\ (i = 1, \dots, n)\}$, eine zentrierte Karte $\varphi \colon U \to W \subseteq \mathbb{R}^n$ um p, $\varphi(p) = 0$, so dass gilt:*

$$X = \frac{\partial}{\partial x^1}.$$

Beweis. Da das Problem lokal ist, dürfen wir gleich $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $p = 0$ und $X = \xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)\colon U \to \mathbb{R}^n$ annehmen. (Nehme halt irgendeine zentriert Karte y um p, so dass $X|_U = \xi^i \frac{\partial}{\partial y^i}$ ist.) Gesucht ist nun ein Diffeomorphismus $\tau\colon W \to U'$ mit $\tau(0) = 0$ auf eine offene Umgebung $U' \subseteq U$ von 0, so dass

$$\tau_* \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right) = \xi$$

ist, also

$$\mathrm{D}\tau_x(e_1) = \xi\big(\tau(x)\big), \qquad \forall x \in W.$$

Dazu können wir zunächst eine lineare Koordinaten-Transformation wählen, so dass nach dieser

$$\xi(0) = e_1 = (1, 0, \dots, 0)$$

ist, also ohne Einschränkung:

$$\xi(0) = \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_{x=0}.$$

Sei nun $\psi = (\psi^t)$ der lokale Fluss zu dem Vektorfeld ξ auf U, also

$$\frac{\mathrm{d}\psi^t}{\mathrm{d}t}(x) = \xi\big(\psi^t(x)\big), \quad \psi^0(x) = x$$

Es gibt nun ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle t mit $|t| < \varepsilon$ und $x \in U$ mit $|x^i| < \varepsilon$ ($i = 1, \dots, n$) definiert ist:

$$\Phi\colon W_\varepsilon \to U, \quad W_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, |x^i| < \varepsilon\},$$

$$\Phi(x^1, x^2, \dots, x^n) := \psi^{x_1}(0, x^2, \dots, x^n).$$

Dann gilt $\Phi(0) = \psi^0(0) = 0$ und mit $(x^1, x') := x$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^1}(x) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi^t(0, x')\right|_{t=x^1} = \xi\big(\psi^t(0, x')\big)\big|_{t=x^1} = \xi\big(\Phi(x)\big),$$

also $\Phi_*(e_1) = \xi$. Andererseits ist $\Phi(0, x') = \psi^0(0, x') = (0, x')$, also

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^i}(0) = e_i \quad \text{für } i = 2, \dots, n,$$

also $\mathrm{D}\Phi(0) = \mathbb{1}_n$ und damit invertierbar. Nach dem Umkehrsatz gibt es daher ein $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, so dass $\Phi|_{W_{\varepsilon'}}\colon W'_\varepsilon \to \Phi(W_{\varepsilon'}) =: U'$ ein Diffeomorphismus auf eine offene Umgebung $U' \subseteq U$ von 0 ist. Schaltet man noch die Dilatation $l\colon x \mapsto \frac{1}{\varepsilon'}x$ davor, $\tau := \Phi|_{W_{\varepsilon'}} \circ l$, so erhält man den gesuchten Diffeomorphismus. □

(3.54) Kommentar.

(a) Ist D eine glatte Distribution vom Rang k und $p_0 \in M$, so wollen wir eine Karte $\psi\colon U \to W \subseteq \mathbb{R}^n$ um p_0 ein **Frobenius-Box um $\mathbf{p_0}$** nennen, wenn für alle $p \in U$ der Unterraum $D_p \subseteq \mathrm{T}M_p$ gerade von $\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^k}|_p$ aufgespannt wird,

$$D_p = \left\langle \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \dots, \left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_p \right\rangle \subseteq \mathrm{T}M_p, \quad \forall p \in U.$$

(b) Hat jeder Punkt $p_0 \in M$ eine solche Frobenius-Box, so ist D offenbar integrabel, denn mit $N = W^k := \{x \in \mathbb{R}^k \,:\, |x^i| < 1 \ (i = 1, \dots, k)\}$ ist dann für jedes $c \in W^{n-k}$ offenbar

$$\varphi^c \colon W^k \to U \subseteq M, \quad x \mapsto \psi^{-1}(x, c)$$

eine integrable Mannigfaltigkeit, insbesondere geht φ^0 durch $p_0 = \psi^{-1}(0)$. Theorem (3.52) folgt also aus folgendem Satz:

(3.55) Satz. *D involutiv und $p \in M$, dann existiert eine Frobenius-Box um p.*

Beweis. Induktion über $k = \operatorname{rg}(D)$.
$k = 1$ Proposition (3.53).
$k - 1 \mapsto k$: Sei $p \in M$ und $U \subseteq M$ Umgebungen von p mit $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(U)$, so dass

$$D_q = \big\langle (X_1)_q, \dots, (X_k)_q \big\rangle, \quad \forall q \in U.$$

Nach (3.53) kann man nun eine zentrierte Karte (nach evtl. Verkleinerung von U) $y \colon U \to \mathbb{R}^n$ ($n = \dim M$) wählen, so dass $X_1 = \frac{\partial}{\partial y^1}$ ist. Ist

$$X_i = \eta_i^j \frac{\partial}{\partial y^j} \quad (i = 2, \dots, k),$$

so dürfen wir nach Übergang von X_i zu $X_i - \eta_i^1 \frac{\partial}{\partial y^1}$ annehmen, dass $\eta_i^1 = 0$ ist, für $i = 2, \dots, k$. Betrachte nun die **Scheibe**

$$S := \{y \in W \,:\, y^1 = 0\} \subseteq W$$

und setze $Y_i := X_i|_S$ für $i = 2, \dots, k$. Da X_i keine $\frac{\partial}{\partial y^1}$-Komponente hat, ist Y_i ein Vektorfeld auf S.

$$Y_i = \eta_i^j(0, y') \frac{\partial}{\partial y'^j} \quad (i = 2, \dots, k),$$

wo nun die Summation von $j = 2, \dots, n$ läuft, $\big(y' = (y^2, \dots, y^n)$ ist Koordinatensystem für $S\big)$. Wiederum weil X_i keine $\frac{\partial}{\partial y^1}$-Komponente hat, hat auch $[X_i, X_j]$ keine $\frac{\partial}{\partial y^1}$-Komponente für $2 \leq i, j \leq k$. Wegen der Involutivität gibt es daher $c_{ij}^l \in \mathcal{E}(W)$ $(2 \leq i, j, l \leq k)$ mit

$$[X_i, X_j] = c_{ij}^l X_l.$$

Ist $\iota \colon S \to W$ die Inklusion, so sind Y_i und X_i ι-bezogen, $\iota_*(Y_i) = X_i \circ \iota$, also auch $[Y_i, Y_j]$ und $[X_i, X_j]$ und daher ist

$$D' = \langle Y_2, \dots, Y_k \rangle$$

auf S eine involutive Distribution vom Rang $k - 1$,

$$\iota_*\big([Y_i, Y_j]\big) = [X_i, X_j] \circ \iota = c_{ij}^l \circ \iota (X_l \circ \iota) = c_{ij}^l \circ \iota \cdot \iota_*(Y_l),$$

also

$$[Y_i, Y_j] = c_{ij}^l \circ \iota \cdot Y_l$$

(da ι_* injektiv ist). Nach Induktionsvoraussetzung gibt es deshalb eine Koordinatentransformation $w \mapsto y'(w)$, $W' \to S \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ (mit $W' := W^{n-1}$), so dass

$$\langle Y_2, \dots, Y_k \rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial w^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial w^k} \right\rangle, \quad \forall w \in W'$$

ist. Sei nun $\pi\colon W \to W'$, $(y^1, y') = y \mapsto y'$, die Projektion auf die letzten $n-1$ Koordinaten und $y \mapsto x(y)$ der Koordinaten-Wechsel

$$\begin{aligned} x^1(y) &= y^1, \\ x^i(y) &= w^i(y') \qquad (i = 2, \dots, n), \end{aligned}$$

und $x \mapsto y(x)$ seine Umkehrung, denn $y \mapsto x(y)$ ist umkehrbar, da

$$\frac{\partial x}{\partial y}(0) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \frac{\partial w}{\partial y'}(0) & \\ 0 & & & \end{array}\right) \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$$

ist. (Die Würfel W und W' müssen jeweils evtl. verkleinert werden.) Dann gilt für $X_1, \dots, X_k$ in den neuen Koordinaten

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial y^1} = \underbrace{\frac{\partial x^j}{\partial y^1}}_{=\delta_1^j} \cdot \frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^1}$$

und

$$X_i = \eta_i^j \frac{\partial}{\partial y^j} = \underbrace{\eta_i^j \cdot y(x)}_{=0 \text{ für } j=1} \quad \underbrace{\frac{\partial x^l}{\partial y^j} \cdot \frac{\partial}{\partial x^l}}_{=0 \text{ für } l=1 \text{ und } j \neq 1} \quad \in \left\langle \frac{\partial}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right\rangle,$$

also

$$X_i = \xi_i^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

mit

$$\xi_i^1(x) = 0 \quad \text{für } i = 2, \dots, k$$

und

$$\xi_i^j(0, x') = 0 \quad \text{für } i = 2, \dots, k \quad \text{und } j = k+1, \dots, n, \tag{3.2}$$

da entlang S die Felder $X_2, \dots, X_k$ gerade von $\frac{\partial}{\partial w^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial w^k}$ aufgespannt sind.

Behauptung: $\xi_i^j(x^1, x') = 0$ für $i = 2, \dots, k$ und $j = k+1, \dots, n$ sogar für *alle* $x^1 \in (-1, 1)$!

Dazu: Wegen der Involutivität von D gibt es nämlich $d_i^l \in \mathcal{E}(W)$ $(i = 2, \dots, k,\ l = 1, \dots, k)$ mit

$$[X_1, X_i] = d_i^l X_l$$

und deshalb gilt für alle $j = k+1, \dots, n,\ i = 2, \dots, k$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^1}\Big(\underbrace{\xi_i^j}_{=X_i(x^j)}\Big) &= X_1\big(X_i(x^j)\big) - X_i \circ \underbrace{X_1(x^j)}_{=0} \\ &= [X_1, X_i](x^j) = d_i^l X_l(x^j) = \sum_{l=2}^{k} d_i^l X_l(x^j) \qquad (3.3) \\ &= \sum_{l=2}^{k} d_i^l(x) \xi_l^j \end{aligned}$$

da

$$X_1(x^j) = \frac{\partial x^j}{\partial x^1} = 0$$

ist.

Nun fixiere $x' \in W'$ und erkenne, dass (3.3) für festes $j = \{k+1, \ldots, n\}$ ein System *linearer* gewöhnlicher Differentialgleichungen auf $I \times \mathbb{R}^{k-1}$ $\big(I = (-1,1)\big)$ ist:

$$\dot{\xi} = A(t)\xi, \quad (\xi = (\xi_2^j, \ldots, \xi_k^j))$$

$\big($mit $A(t) = \big(d_i^l(t,x')\big)_{2 \le i,l \le k}\big)$ und deshalb auf *ganz* I eine eindeutig bestimmte Lösung zu gegebenen Anfangswert $\xi(0) = \xi_0$ (Übung) hat, aber $\xi(0) = 0$ wegen (3.2) und damit ist $\xi(t) = 0$, für alle $t \in I$, da $\xi = 0$ offensichtlich eine Lösung ist. Es ist damit

$$\xi_i^j(x^1, x') = 0, \quad \forall x^1 \in I, \forall x' \in W', \forall i = 2, \ldots, k, \forall j = k+1, \ldots, n$$

und damit (3.55) $\big($und also (3.52)$\big)$ bewiesen. □

(3.56) Kommentar. Bisher haben wir, ähnlich wie beim lokalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf, nur die Existenz von lokalen Integralmannigfaltigkeiten bei involutiven Distributionen bewiesen. Nun wollen wir auch noch $\big($vgl. (3.11)$\big)$ die Existenz einer maximalen Integralmannigfaltigkeit und deren Eindeutigkeit.

(3.57) Definition. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und D eine involutive Distribution auf M. Wir nennen eine Integralmannigfaltigkeit $\varphi\colon N \to M$ **maximal**, wenn N zusammenhängend ist und folgendes gilt: Ist $\widetilde{\varphi}\colon \widetilde{N} \to M$ eine weitere Integralmannigfaltigkeit, $\widetilde{N}$ zusammenhängend und ist $\widetilde{\varphi}(\widetilde{N}) \supseteq \varphi(N)$, so ist bereits

$$\widetilde{\varphi}(\widetilde{N}) = \varphi(N).$$

(3.58) Lemma. *Sei D eine involutive Distribution vom Rang k auf einer glatten Mannigfaltigkeit M und $x\colon U \to W \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Frobenius-Box für D. Sei weiter $\varphi\colon N \to U \subseteq M$ eine Integralmannigfaltigkeit für D und N zusammenhängend. Dann gibt es genau ein $c \in W^{n-k}$, so dass $\varphi(N)$ in der Scheibe*

$$N^c := \{p \in U \,:\, x^j(p) = c^j,\, j = k+1, \ldots, n\}$$

liegt.

Beweis. Für jedes $q \in N$ liegt $\mathrm{D}\varphi_q(\mathrm{T}N_q) = D_{\varphi(q)}$ im Aufspann von $\frac{\partial}{\partial x^1}|_{\varphi(q)}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^k}|_{\varphi(q)}$, also im Kern von $\mathrm{d}x^j|_{\varphi(q)} \in \mathrm{T}M^*_{\varphi(q)}$ $(j = k+1, \ldots, n)$. Es ist also

$$\mathrm{d}(x^j \circ \varphi)_q = \mathrm{d}x^j|_{\varphi(q)} \circ \mathrm{D}\varphi|_q = 0$$

und damit, weil N zusammenhängend ist, ist $x^j \circ \varphi$ konstant (Übung), sagen wir $c^j \in I$ $(j = k+1, \ldots, n)$. Es folgt: $x^j\big(\varphi(N)\big) = c^j$, also: $\varphi(N) \subseteq N^c$. □

(3.59) Satz. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, D eine involutive Distribution auf M und $p_0 \in M$. Dann existiert eine* maximale *Integralmannigfaltigkeit $\varphi\colon N \to M$ durch p_0 und für jede andere Integralmannigfaltigkeit $\psi\colon \widetilde{N} \to M$ durch p_0 mit zusammenhängendem $\widetilde{N}$, gilt:*

$$\psi(\widetilde{N}) \subseteq \varphi(N).$$

Beweis. Wir definieren die Teilmenge

$$C := \left\{ p \in M \,:\, \begin{array}{l} \exists \text{ (stückweise) glattes } \gamma\colon [0,1] \to M \text{ mit } \gamma(0) = p_0 \text{ und } \gamma(1) = \\ p \text{ und } \dot{\gamma}(t) \in D_{\gamma(t)},\ \forall t \in [0,1] \end{array} \right\}$$

und wollen nun C mit einer Topologie und Mannigfaltigkeit-Struktur versehen, die die Inklusion $i\colon C \hookrightarrow M$ zu einer Integralmannigfaltigkeit von D macht.

(a) Dazu überdecken wir gemäß (3.55) M mit Frobenius-Boxen $x_\alpha \colon U_\alpha \to W \subseteq \mathbb{R}^n$ und dürfen wegen der abzählbaren Topologie von M annehmen, dass wir davon nur abzählbar viele brauchen, $\alpha \in \mathbb{N}$ $\big($vgl. Beweis von (1.56)$\big)$. Für jedes $p \in C$ wählen wir nun, ein für allemal fest, ein $\alpha(p) \in \mathbb{N}$ mit $p \in U_{\alpha(p)}$ und nennen die Scheibe von $U_{\alpha(p)}$, auf der p liegt, S_p:

$$S_p := \{q \in U_{\alpha(p)} \;:\; x^j_\alpha(q) = x^j_\alpha(p),\; j = k+1, \dots, n\}$$

$\big($wo $k = \mathrm{rg}(D)$ ist$\big)$. Da jede glatte Kurve in S_p integral ist (die ganze Scheibe S_p ist ja integral) und S_p (weg-)zusammenhängend ist (denn $S_p \cong W^k \subseteq \mathbb{R}^k$), ist mit $p \in C$ auch S_p in C, $S_p \subseteq C$. Es ist also

$$C = \bigcup_{p \in C} S_p.$$

Wir betrachten nun jede Scheibe S_p vermöge $x_{\alpha(p)}|_{S_p} \colon S_p \to W^k \subseteq \mathbb{R}^n$ als bijektiv zum (offenen) Einheitswürfel W^k und versehen S_p mit der Topologie τ_p, die $x_{\alpha(p)}|_{S_p}$ zu einem Homöomorphismus macht (d.i. die Relativtopologie von S in M). Dann setzen wir

$$\mathfrak{B} := \bigcup_{p \in C} \tau_p \subseteq \mathfrak{P}(C)$$

und behaupten, dass $\mathfrak{B}$ eine Basis der von ihr erzeugten Topologie τ auf C ist.

Ist nämlich $V_p \subseteq S_p$ von $V_{p'} \subseteq S_{p'}$ offen ($p, p' \in C$), so muss dazu $V_p \cap V_{p'}$ Vereinigung von Elementen aus $\mathfrak{B}$ sein. Ist $q \in V_p \cap V_{p'}$, so gibt es wegen der Offenheit von $U_{\alpha(p')}$ zunächst einen offenen k-Ball $B \subseteq V_p$ um q (via $x_{\alpha(p)}|_{S_p}$), so dass $B \subseteq U_{\alpha(p')}$ ist. Weil aber $q \in B$ ist, B integral (und zusammenhängend) ist damit nach (3.58) auch $B \subseteq S_{p'}$ und damit, nach evtl. Verkleinerung, auch in $V_{p'}$. Jedes $q \in V_p \cap V_{p'}$ liegt also in einem $B \in \mathfrak{B}$ und damit ist $V_p \cap V_{p'}$ Vereinigung von Elementen aus $\mathfrak{B}$. Insbesondere: Die von τ auf jedem S_p induzierte Topologie ist damit τ_p (und nicht feiner).

(b) Diese Topologie ist hausdorffsch, denn sind $p, q \in C$ mit $p \neq q$, so wähle man zunächst offene Umgebungen $U_p \in \mathfrak{A}(p)$, $U_q \in \mathfrak{A}(q)$ in M, die disjunkt sind, $U_p \cap U_q = \emptyset$. Dann schneide man diese mit den zugehörigen Scheiben,

$$V_p := U_p \cap S_p,\; V_q := U_q \cap S_q.$$

Dann sind $V_p, V_q \subseteq C$ offene Umgebungen von p bzw. q und disjunkt.

C ist mit τ auch lokal euklidisch ist (von der Dimension k), denn zu $p \in C$ ist offenbar $S_p \subseteq C$ eine offene Umgebung, die via $x_{\alpha(p)}|_{S_p}$ homöomorph zu $W^k \subseteq \mathbb{R}^k$ ist.

Behauptung: (C, τ) hat abzählbare Topologie.
⌜ In jeder Box U_α können sehr viele Scheiben $N^c_\alpha \subseteq U_\alpha$, $c \in W^{n-k}$, zu C gehören. Es ist gewissermaßen das Hauptproblem etwa auszuschließen, dass nicht alle dazu gehören können und damit etwa $C = M$ unmöglich wird. ⌟

Da jedes $S_p \subseteq U_{\alpha(p)}$ eine abzählbare Basis hat und es nur abzählbar viele Boxen U_α gibt, reicht es zu zeigen, dass aus jeder Box U_α nur abzählbar viele Scheiben N^c_α zu C gehören können.

Sei also U_α fest und $p \in U_\alpha \cap C$. Dann gibt es also eine Integralkurve $\gamma \colon [0,1] \to M$ von p_0 nach p. Wegen der Kompaktheit von $[0,1]$ gibt es dann $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{N}$ und $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_r = 1$, so dass $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]} \subseteq U_{\alpha_i}$ ist. Da $[t_{i-1}, t_i]$ zusammenhängend ist, muss $\gamma\big([t_{i-1}, t_i]\big)$ in nur einer Scheibe von U_{α_i} enthalten sein. Da es nur abzählbar viele Folgen $U_{\alpha_0} \subseteq U_{\alpha_1} \subseteq \cdots \subseteq U_{\alpha_r} = U_\alpha$ gibt, reicht es zu zeigen, dass es für jede solche Folge nur abzählbar viele Scheiben in U_α gibt, die man beim Durchgang durch U_{α_i} $(i = 0, \dots, r)$ erreichen kann. Dazu reicht es, dass beim Übergang von U_α zu U_β (mit $\alpha = \alpha_{i-1}$, $\beta = \alpha_i$) jede Scheibe $S \subseteq U_\alpha$ an nur abzählbar viele Scheiben von U_β ankoppeln kann. Aber $S \cap U_\beta$ ist selbst eine Mannigfaltigkeit und daher von abzählbarer Topologie. Sie hat damit nur abzählbar viele (Weg-)Zusammenhangskomponenten (Übung). Jede Komponente von $S \cap U_\beta$ ist also zusammenhängend und integral in U_β und muss deshalb nach (3.58) in nur einer Scheibe von U_β liegen. Damit koppelt S an nur abzählbar viele Scheiben von U_β an und damit ist C von abzählbarer Topologie und somit eine k-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit, die nach Definition auch (weg-)zusammenhängend ist.

(c) Als glatten Atlas für C wählt man nun die Karten $x_{\alpha(p)}|_{S_p} \colon S_p \to W^k \subseteq \mathbb{R}^k$ $\big($deren Übergange glatt sind, weil sie Einschränkungen von den Übergängen von $(x_\alpha \colon U_\alpha \to W)$ sind$\big)$. Die Inklusion $i \colon C \to M$ ist nun offenbar eine injektive Immersion $\big($weil $W^k \to W^n$, $x \mapsto (x, 0)$ immersiv ist$\big)$. Schließlich ist wegen

$$\mathrm{T}C_p = \mathrm{T}(S_p)_p = D_p$$

auch $\mathrm{D}i_p(\mathrm{T}C_p) = D_p$, i also auch integrale Mannigfaltigkeit.

(d) Ist $\varphi \colon N \to M$ irgendeine andere integrale Mannigfaltigkeit durch p_0 mit zusammenhängenden N, so sei $p = \varphi(q) \in \varphi(N)$ beliebig und $\varphi(q_0) = p_0$. Dann gibt es einen (stückweise) glatten Weg $\beta \colon [0, 1] \to N$ von q_0 nach q $\big($denn N ist auch wegzusammenhängend und wenn es einen stetigen Weg von q_0 nach q gibt, so auch einen stückweise glatten (Übung)$\big)$. Die Kurve $\gamma := \varphi \circ \beta$ ist dann stückweise glatt und auch integral, weil

$$\dot{\gamma}(t) = \mathrm{D}\varphi_{\beta(t)}\big(\dot{\beta}(t)\big) \in \operatorname{im}(\mathrm{D}\varphi_{\beta(t)}) = D_{\gamma(t)}$$

ist und damit liegt p auch in C. Das zeigt, dass $i \colon C \to M$ *maximale* Integralmannigfaltigkeit ist und das Bild jeder anderen zusammenhängenden Integralmannigfaltigkeit in C enthalten ist. □

(3.60) Kommentar. Was jetzt noch fehlt, ist die Eindeutigkeit (bis auf Isomorphie), denn: ist eben $i \colon C \hookrightarrow M$ auch $\varphi \colon N \to M$ eine maximale Integral-Mannigfaltigkeit durch einen Punkt $p_0 \in M$, so ist zwar $\varphi(N) = C$ nach (3.59), weil zunächst $\varphi(N) \subseteq C$ ist, aber wegen der Maximalität von φ dann gleich C sein muss. Es könnte aber sein, dass C vermöge φ mit einer anderen Topologie versehen ist als vermöge $i \colon C \hookrightarrow M$, so dass die Mannigfaltigkeit-Strukturen auf C vermöge i und φ verschieden sind. Dass das nicht passiert besagt nun:

(3.61) Satz. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $D = (D_p)_{p \in M}$ eine involutive Distribution auf M und $p_0 \in M$. Dann gibt es eine (bis auf Isomorphie) eindeutig bestimmte maximale Integral-Mannigfaltigkeit durch p_0.*

Beweis. Sei $i \colon C \hookrightarrow M$ die maximale Integral-Mannigfaltigkeit durch p_0 nach (3.59) und $\varphi \colon N \to M$ eine beliebige andere. Wir wissen schon $\big($vgl. (3.58)$\big)$, dass $\varphi(N) = C$ ist, also gibt es ein eindeutig bestimmtes $\psi \colon N \to C$ mit $i \circ \psi = \varphi$ (nämlich $\psi = i^{-1} \circ \varphi$, wenn i als Bijektion von C auf $C \subseteq M$ betrachten).

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, dashed, "\psi"'] & M \\ & C \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

(a) **Behauptung:** ψ ist stetig.

Sei $p \in N$ beliebig, $q := \psi(p) \in C$ und sei $V \subseteq C$ eine offene Umgebung. Zu zeigen: $\psi^{-1}(V)$ ist Umgebung von p ($\Longrightarrow \psi$ ist stetig in p).

Sei dazu $x\colon U \to U' \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Frobenius-Box um q und $S \subseteq U$ die Scheibe in U, die q enthält. Dann sei o.E. $V \subseteq S$. Da φ stetig ist, ist $\varphi^{-1}(U) \subseteq N$ offen. Sei $W \subseteq \varphi^{-1}(U)$ die Wegkomponente, die p enthält. Dann ist auch W offen (da N lokal wegzusammenhängend ist). Da nun $\varphi|_W\colon W \to U \subseteq M$ Integral-Mannigfaltigkeit ist mit $q \in \operatorname{im}(\varphi|_W)$, gilt nach (3.58), dass $\varphi(W) \subseteq S$ sein muss. Aber

$$\varphi|_W\colon W \to S$$

ist stetig und damit $(\varphi|_W)^{-1}(V) \subseteq W$ offen. Also ist

$$\psi^{-1}(V) \cap W = (\varphi|_W)^{-1}(V)$$

eine Umgebung von p.

(b) **Behauptung:** ψ ist sogar Diffeomorphismus.

Dazu: Nach (3.43) ist ψ nicht nur stetig, sondern sogar glatt. Es ist aber auch

$$\mathrm{D}\psi_p = \mathrm{D}i_q^{-1} \circ \mathrm{D}\varphi_p$$

(wo man $\mathrm{D}i_q$ als Isomorphismus von $\mathrm{T}C_q$ nach $D_p \subseteq \mathrm{T}M_q$ betrachtet) ein Isomorphismus, für alle $p \in N$. Nach dem Umkehrsatz ist damit ψ ein lokaler Diffeomorphismus. Aber ψ ist bijektiv und damit ein (globaler) Diffeomorphismus.

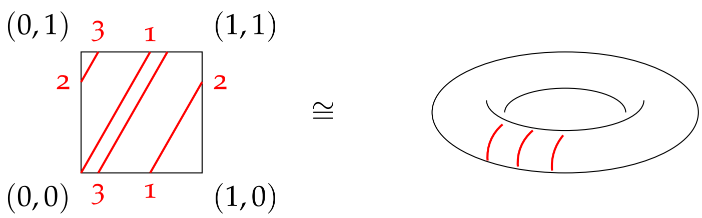
Also sind φ und i äquivalent und damit die maximale Integral-Mannigfaltigkeit $i\colon C \hookrightarrow M$ eindeutig bestimmt. □

(3.62) Beispiel. Sei $M = \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Identifiziere nun zunächst $T(\mathbb{T})_p$ kanonisch mit $\mathbb{R}^2$ vermöge

$$\mathrm{D}\pi_p\colon \mathbb{R}^2 \cong \mathrm{T}(\mathbb{R}^2)_{\tilde{p}} \to T(\mathbb{T}^2)_p$$

(unabhängig von der Wahl des Urbildes $\tilde{p} \in \mathbb{R}^2$ unter der kanonischen Projektion $\pi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$) und betrachte dann $X_\alpha \in \mathfrak{X}(\mathbb{T}^2)$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,

$$X_\alpha(p) = (1, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \cong \mathrm{T}(\mathbb{T}^2)_p.$$



Setze $D = (D_p)$,

$$D_p = \mathbb{R}X_\alpha(p) \subseteq \mathrm{T}(\mathbb{T}^2)_p$$

Dann ist $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2$,

$$\varphi(t) = \big[(t, \alpha t)\big],$$

die maximale Integral-Mannigfaltigkeit durch $p_0 = \big[(0,0)\big]$ und $C = \varphi(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{T}^2$ trägt nicht die Relativtopologie von $\mathbb{T}^2$ (wenn man C die Mannigfaltigkeit-Struktur von $\mathbb{R}$ gibt). C liegt nämlich dicht und die von der Teilraumtopologie von C induzierte Topologie auf $\mathbb{R}$ ist nicht mal lokal wegzusammenhängend.

Teil II.

Differentialgeometrie II

Kapitel 4.

4 Vektorraumbündel

(4.1) Definition. Sei A eine Menge. Auf der Menge der formalen, endlichen Linearkombinationen $\sum_{a\in A} r_a a$, $r_a \in \mathbb{R}$ und $r_a = 0$ für fast alle $a \in A$ (d.h.: alle, bis auf endlich viele) definieren wir

$$\Big(\sum_{a\in A} r_a a\Big) + \Big(\sum_{a\in A} s_a a\Big) := \sum_{a\in A} (r_a + s_a)a,$$
$$\lambda \cdot \Big(\sum_{a\in A} r_a a\Big) := \sum_{a\in A} (\lambda r_a)a.$$

Es heißt dann

$$\mathbb{F}(A) := \Big\{ \sum_{a\in A} r_a a \;:\; r_a \in \mathbb{R},\ r_a = 0 \text{ für fast alle } a \in A \Big\}$$

(zusammen mit diesen Operationen) **der Vektorraum über $\mathbb{R}$, der frei von A erzeugt wird**.

(4.2) Kommentar.

(a) Es ist $\mathbb{F}(A)$ mit diesen Operationen tatsächlich ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(b) Die Elemente $1 \cdot a \in \mathbb{F}(A)$ (d.h.: $r_b = 0$ für $b \neq a$ und $r_a = 1$) bilden eine Basis von $\mathbb{F}(A)$, denn nach Definition sind sie erzeugend und

$$\lambda^1(1a_1) + \cdots + \lambda^n(1a_n) = 0 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda^i a_i = 0 \Longrightarrow \lambda^i = 0 \ (i = 1, \ldots, n).$$

(c) Bezeichnet $i\colon A \to \mathbb{F}(A)$ die Abbildung $i(a) = 1 \cdot a = a$, so erfüllt das Paar $\big(\mathbb{F}(A), i\big)$ folgende universelle Eigenschaft: Ist V ein reeller Vektorraum und $j\colon A \to V$ eine Abbildung, so gibt es genau eine lineare Abbildung $T\colon \mathbb{F}(A) \to V$ mit $T \circ i = j$ (Übung).

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, "j"] & \\ \mathbb{F}(A) \arrow[r, dashed, "T"'] & V. \end{tikzcd}$$

(4.3) Definition. Seien V und W reelle Vektorräume. Sei $K \subseteq \mathbb{F}(V \times W)$ der Untervektorraum von $\mathbb{F}(V \times W)$ der von allen Elementen

$$1 \cdot (v_1 + v_2, w) + (-1) \cdot (v_1, w) + (-1) \cdot (v_2, w)$$
$$(v, w_1 + w_2) - (v, w_1) - (v, w_2)$$
$$(\lambda v, w) - \lambda(v, w)$$
$$(v, \lambda w) - \lambda(v, w)$$

$v, v_1, v_2 \in V$, $w, w_1, w_2 \in W$, $\lambda \in \mathbb{R}$ erzeugt wird. Dann nennen wir

$$V \otimes W := \mathbb{F}(V \times W)/K$$

das Tensorprodukt von V und W. Ist $\pi\colon \mathbb{F}(V \times W) \to V \otimes W$ die kanonische Projektion, so bezeichnen wir

$$v \otimes w := \pi\big((v,w)\big).$$

(4.4) Kommentar.

(a) Für alle $v, v_1, v_2 \in V$, $w, w_1, w_2 \in W$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ist also richtig:

$$\begin{aligned}(v_1 + v_2) \otimes w &= v_1 \otimes w + v_2 \otimes w,\\ v \otimes (w_1 + w_2) &= v \otimes w_1 + v \otimes w_2,\\ (\lambda v) \otimes w &= \lambda(v \otimes w) = v \otimes (\lambda w).\end{aligned}$$

(b) Definiert man daher $s\colon V \times W \to V \otimes W$ durch

$$s(v,w) = v \otimes w,$$

so ist s offenbar bilinear.

(4.5) Bemerkung. Seien V, W reelle Vektorräume. Dann erfüllt $(V \otimes W, s)$ die folgende universelle Eigenschaft: Ist $\sigma\colon V \times W \to U$ eine bilineare Abbildung, U ein reeller Vektorraum, so gibt es genau eine lineare Abbildung $T\colon V \otimes W \to U$ mit $T \circ s = \sigma$.

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[d, "s"'] \arrow[dr, "\sigma"] \arrow[dr, phantom, shift right=3, "\circlearrowleft"] & \\ V \otimes W \arrow[r, dashed, "T"'] & U. \end{tikzcd}$$

Beweis. *Eindeutigkeit.* Da $\mathbb{F}(V \times W)$ von $\{(v,w)\}_{v \in V,\, w \in W}$ erzeugt wird und $\pi\colon \mathbb{F}(V \times W) \to V \otimes W$ surjektiv ist, gibt es nur einen Kandidaten für T, nämlich

$$T\Big(\sum_{\substack{v \in V\\ w \in W}} r_{v,w} v \otimes w\Big) = \sum_{\substack{v \in V\\ w \in W}} r_{v,w} \sigma(v,w),$$

denn

$$T(v \otimes w) = T \circ s(v,w) = \sigma(v,w).$$

Existenz. Nach der universellen Eigenschaft von $\big(\mathbb{F}(V \times W), i\big)$ gibt es genau eine lineare Abbildung $\tilde{T}\colon \mathbb{F}(V \times W) \to U$ mit $\tilde{T} \circ i = \sigma$, also

$$\tilde{T}\big(1 \cdot (v,w)\big) = \sigma(v,w),$$

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[d, "i"] \arrow[drr, "\sigma"] \arrow[dd, bend right=60, "s"'] \arrow[drr, phantom, shift right=3, "\circlearrowleft"] & & \\ \mathbb{F}(V \times W) \arrow[rr, dashed, "\tilde{T}"'] \arrow[d, "\pi"] \arrow[l, phantom, "\circlearrowleft"] & & U. \\ V \otimes W = \mathbb{F}(V \times W)/K \arrow[urr, dashed, "T"'] & & \end{tikzcd}$$

Erinnere: Universelle Eigenschaft des Quotienten: V Vektorraum, $U \subseteq V$ Unterraum, $\pi\colon V \to V/U$ die kanonische Projektion. Dann hat $(V/U, \pi)$ folgende universelle Eigenschaft: Ist (W, f) derart, dass $f\colon V \to W$ mit $U \subseteq \ker(f)$, so gibt es genau eine lineare Abbildung $T\colon V/U \to W$ mit $T \circ \pi = f$ (siehe rechts).

$$\begin{tikzcd} V \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "f"] \arrow[dr, phantom, shift right=3, "\circlearrowleft"] & \\ V/U \arrow[r, dashed, "T"'] & W \end{tikzcd}$$

Da

$$\tilde{T}\big((v_1+v_2,w)-(v_1,w)-(v_2,w)\big)=\sigma(v_1+v_2,w)-\sigma(v_1,w)-\sigma(v_2,w)=0$$

und ähnlich für die anderen Erzeuger von K, ist $K\subseteq\ker(\tilde{T})$, und daher existiert nach der universellen Eigenschaft des Quotienten genau ein $T\colon V\otimes W\to U$ mit $T\circ\pi=\tilde{T}$.

$$\begin{aligned}\Longrightarrow T\circ s&=T\circ\pi\circ i &&\text{(weil } s=\pi\circ i)\\ &=\tilde{T}\circ i=\sigma.\end{aligned}$$

□

(4.6) Bemerkung. Hat V die Dimension $n\in\mathbb{N}_0$ und W die Dimension $m\in\mathbb{N}_0$, so hat $V\otimes W$ die Dimension $n\cdot m$. Ist $(e_1,\dots,e_n)$ eine Basis von V und $(f_1,\dots,f_m)$ eine Basis von W, so ist $(e_i\otimes f_j)_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le m}}$ eine Basis von $V\otimes W$.

Beweis. Weil $\{1\cdot(v,w)\}_{v\in V,w\in W}$ erzeugend für $\mathbb{F}(V\times W)$ und $\pi\colon\mathbb{F}(V\times W)\to V\otimes W$ surjektiv ist, ist $(v\otimes w)_{v\in V,w\in W}$ erzeugend für $v\otimes w$. Ist $v=\lambda^i e_i$, $w=\mu^j f_j$, so ist $v\otimes w=(\lambda^i e_i)\otimes(\mu^j f_j)=\lambda^i\mu^j e_i\otimes f_j$, also ist $(e_i\otimes f_j)_{\substack{i=1,\dots,n\\j=1,\dots,m}}$ erzeugend für $V\times W$.

Lineare Unabhängigkeit.

⌜Zu $u_{kl}\in U$ ($k=1,\dots,n$, $l=1,\dots,m$) gibt es genau eine bilineare Abbildung $\sigma\colon V\times W\to U$ mit $\sigma(e_k,f_l)=u_{kl}$. ⌟

Sei $\lambda^{ij}\in\mathbb{R}$ und

$$\lambda^{ij}e_i\otimes f_j=0.$$

Sei $\sigma^{ij}\colon V\times W\to\mathbb{R}$ die bilineare Abbildung die durch

$$\sigma^{ij}(e_k,f_l)=\delta^i_k\cdot\delta^j_l$$

bestimmt ist. Nach der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts existiert genau eine lineare Abbildung $T^{ij}\colon V\otimes W\to\mathbb{R}$ mit $T^{ij}\circ s=\sigma^{ij}$, wo $s\colon V\times W\to V\otimes W$ die kanonische bilineare Abbildung ist. Es ist dann:

$$\begin{aligned}0=T^{ij}(0)&=T^{ij}(\lambda^{kl}e_k\otimes f_l)\\&=\lambda^{kl}T^{ij}(e_k\otimes f_l)\\&=\lambda^{kl}T^{ij}\circ s(e_k,f_l)=\lambda^{kl}\sigma^{ij}(e_k,f_l)\\&=\lambda^{kl}\cdot\delta^i_k\delta^j_l\\&=\lambda^{ij}.\end{aligned}$$

Also ist $(e_i\otimes f_j)$ Basis. □

(4.7) Kommentar.

(a) Beachte, dass s i.A. weder injektiv noch surjektiv ist. Z.B. ist für alle $v\in V$ und $w\in W$ stets

$$v\otimes 0=0=0\otimes w,$$

weil eine bilineare Abbildung $(v,0)$ bzw. $(0,w)$ stets auf 0 abbildet. Auch ist etwa der Tensor $e_1\otimes e_1+e_2\otimes e_2\in\mathbb{R}^2\otimes\mathbb{R}^2$ nicht im Bild von

$$s\colon\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\otimes\mathbb{R}^2$$

(Übung).

(b) Lineare Abbildungen T aus $V \otimes W$ heraus, $T\colon V \otimes W \to U$, werden oft durch Angabe

$$T(v \otimes w) = \text{rechte Seite}$$

definiert, wobei die *rechte Seite* des Ausdruckes bilinear in v und w ist. Gemeint ist dann stets, dass man zunächst die bilineare Abbildung $\sigma\colon V \times W \to U$ mit

$$\sigma(v, w) = \text{rechte Seite}$$

betrachtet, dann die universelle Eigenschaft benutzt und $T = \Phi_\sigma$ setzt. (Keineswegs meint man, dass jedes Element in $V \otimes W$ die Form $v \otimes w$ hat und womöglich die Darstellung auch noch eindeutig ist oder dass man Wohldefiniertheit zu prüfen hätte.)

(4.8) Beispiel.

(a) Für endlich dimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume V und W ist *kanonisch isomorph:*

$$V^* \otimes W \cong \mathrm{Hom}(V, W).$$

„Kanonisch isomorph" bedeutet hier, dass es einen *kanonischen Isomorphismus*, zwischen den Vektorräumen, der nicht von einer Basiswahl abhängt, gibt. (Dass $V^* \otimes W$ „isomorph" zu $\mathrm{Hom}(V, W)$ ist, folgt schon daraus, dass beide die gleiche Dimension $\dim V \dim W$ haben.)

Der kanonische Isomorphismus wird in der Regel angegeben (oder nach einer Zeit auch nicht mehr, weil er so kanonisch ist, dass jeder ihn selbst findet). Er ist hier für $\lambda \in V^*$, $w \in W$, $v \in V$ gegeben durch

$$T(\lambda \otimes w)(v) = \lambda(v)w.$$

Weil die rechte Seite trilinear in (λ, w, v) ist, ist nämlich zunächst die Abbildung $\sigma\colon V^* \times W \to \mathrm{Hom}(V, W)$,

$$\sigma(\lambda, w)(v) = \lambda(v)w$$

wohldefiniert $\big($d.h.: $\sigma(\lambda, w)$ liegt wirklich in $\mathrm{Hom}(V, W)\big)$ und dann benutzt man die universelle Eigenschaft und die Existenz von $T = \Phi_\sigma$ zu bekommen $\big($vgl. (4.7,b)$\big)$:

$$\begin{tikzcd} V^* \times W \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "s"'] & \mathrm{Hom}(V, W) \\ V^* \otimes W \arrow[ur, "T"'] \arrow[u, phantom, ""] & \end{tikzcd}$$

$\ulcorner$*Beweis*, dass T injektiv ist: Sei $t = \sum_{i=1}^r \lambda^i \otimes w_i \in V^* \otimes W$. Wir dürfen annehmen, dass $(w_1, \dots, w_r)$ linear unabhängig ist (sonst gibt es eine kürzere Darstellung $t = \mu^j \otimes w_j$): wir sagen, dass die Darstellung *reduziert* ist.

Ist $T(t) = 0 \Longrightarrow$

$$\lambda^i(v)w_i = 0$$

$\Longrightarrow \lambda^i(v) = 0$ $\big($wegen linearer Unabhängigkeit von $(w_1, \dots, w_r)\big)$, $\forall v \in V$. Also sind alle $\lambda^i = 0$ und damit $t = 0$. Damit ist T injektiv. $\big($Surjektivität folgt dann aus $\dim V^* \otimes W = \dim \mathrm{Hom}(V, W)$.$\big)$ $\lrcorner$

(b) Für endlich-dimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume V und W sind kanonisch isomorph:

$$V^* \otimes W^* \cong \mathrm{Bil}(V, W; \mathbb{R}) \cong (V \otimes W)^*.$$

Die zweite Isomorphie wird hier einfach durch $\sigma \mapsto \Phi_\sigma$ gegeben $\big($vgl. (4.5)$\big)$ und die erste Isomorphie $\big($ähnlich wie unter (a)$\big)$ durch

$$T(\lambda \otimes \mu)(v, w) = \lambda(v)\mu(w)$$

für $\lambda \in V^*$, $\mu \in W^*$, $v \in V, w \in W$ (Übung).

(4.9) Erinnerung.

(a) Man erinnere sich an die Konstruktion der **direkten Summe** zweier Vektorräume: Für V und W setze man als Menge $V \oplus W := V \times W$, versehen diese mit der komponentenweisen Addition und Skalarmultiplikation

$$\lambda \cdot (v, w) := (\lambda v, \lambda w)$$

für $v \in V$, $w \in W$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Man hat dann die natürlichen Inklusionen $i\colon V \to V \oplus W$, $v \mapsto (v, 0)$ und $j\colon W \to V \oplus W$, $w \mapsto (0, w)$ und das Tripel $(V \oplus W, i, j)$ erfüllt folgende universelle Eigenschaft: Ist (U, α, β) ein (weiteres) solches Tripel, so gibt es genau einen Homomorphismus $T\colon V \oplus W \to U$ mit $T \circ i = \alpha$ und $T \circ j = \beta$,

$$\begin{tikzcd}
& U & \\
V \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "i"'] \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & {} & W \arrow[ul, "\beta"'] \arrow[dl, "j"] \arrow[l, phantom, "\circlearrowleft"'] \\
& V \oplus W \arrow[uu, dashed, "\exists!\, T"] &
\end{tikzcd}$$

⌜Man setze nämlich $T(v, w) = \alpha(v) + \beta(w)$. Das ist wegen $T(v, w) = T\big((v, 0) + (0, w)\big) = T(v, 0) + T(0, w) = T \circ i(v) + T \circ j(w) = \alpha(v) + \beta(w)$ der einzige Kandidat und er ist auch tatsächlich linear. ⌟

(b) Man beachte, dass zwar $V \oplus W$ als Vektorraum kanonisch isomorph zu $V \times W$ ist. Es erfüllt aber $(V \times W, \pi_V, \pi_W)$ die universelle Eigenschaft eines **Produktes**: Ist $(U, \varrho_V, \varrho_W)$ ein Vergleichstripel, so existiert genau ein Homomorphismus $T\colon U \to V \times W$ mit $\pi_V \circ T = \varrho_V$ und $\pi_W \circ T = \varrho_W$,
⌜Nämlich $T(u) := \big(\varrho_V(u), \varrho_W(u)\big)$.⌟ (Übung).

$$\begin{tikzcd}
& V \times W \arrow[dl, "\pi_V"'] \arrow[dr, "\pi_W"] & \\
V \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & {} & W \arrow[l, phantom, "\circlearrowleft"'] \\
& U \arrow[ul, "\varrho_V"] \arrow[ur, "\varrho_W"'] \arrow[uu, dashed, "\exists!\, T"] &
\end{tikzcd}$$

Beachte aber auch, dass für unendlich viele Summanden bzw. Faktoren V_i ($i \in I$) die Summe und das Produkt auseinanderfallen. Es ist nämlich

$$\prod_{i \in V} V_i = \{(v_i) \;:\; v_i \in V_i\} \text{ und } \pi_j\colon \prod_{i \in I} V_i \to V_j,\ (v_i)_{i \in I} \mapsto v_j,$$

allerdings

$$\bigoplus_{i \in I} V_i = \{(v_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} V_i \;:\; v_i = 0, \text{ für fast alle } i \in I\}$$

und

$$\imath_j\colon V_j \to \bigoplus_{i \in I} V_i,\ v_j \mapsto (\delta_{ij} v_i)_{i \in I}$$

(Übung).

(c) Man prüft nun (ohne Mühe) nach, dass z.B. kanonisch isomorph ist:

$$V \otimes (W_1 \oplus W_2) \cong (V \otimes W_1) \oplus (V \otimes W_2) \quad \text{(Übung).}$$

(4.10) Kommentar.

(a) Sei nun $r \geq 2$. In ganz ähnlicher Weise, wie wir das Studium von bilinearen Abbildungen auf $V \times W$ (für zwei $\mathbb{R}$-Vektorräumen V und W) auf das Studium von linearen Abbildung auf $V \otimes W$ zurückgeführt haben, gehen wir auch beim Studium von r-linearen Abbildungen auf $V_1 \times \cdots \times V_r$ (bei Vektorräumen $V_1, \ldots, V_r$) vor. Man bildet zunächst wieder den freien Vektorraum $\mathbb{F}(V_1 \times \cdots \times V_r)$ über der Menge $V_1 \times \cdots \times V_r$ und teilt dann einen Unterraum U (von Relationen) heraus,

$$V_1 \otimes \cdots \otimes V_r := \mathbb{F}(V_1 \times \cdots \times V_r)/U,$$

so dass die kanonische Abbildung $s = \pi \circ i \colon V_1 \times \cdots \times V_r \to V_1 \otimes \cdots \otimes V_r$ $\big(i \colon V_1 \times \cdots \times V_r \hookrightarrow \mathbb{F}(V_1 \times \cdots \times V_r)$ die kanonische Inklusion, $\pi \colon \mathbb{F}(V_1 \times \cdots \times V_r) \to V_1 \otimes \cdots \otimes V_r$ die kanonische Projektion$\big)$ (gerade eben) r-linear wird uns setzen natürlich

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_r := s(v_1, \ldots, v_r)$$

(für $v_1 \in V_1, \ldots, v_r \in V_r$).

(b) Es erfüllt dann das Paar $(V_1 \otimes \cdots \otimes V_r, s)$ die folgende universelle Eigenschaft: Ist (U, σ) ein Paar, wo U ein Vektorraum und $\sigma \colon V_1 \times \cdots \times V_r \to U$ r-linear ist, so gibt es genau einen Homomorphismus $T \colon V_1 \otimes \cdots \otimes V_r \to S$ mit $T \circ s = \sigma$,

$$\begin{tikzcd} V_1 \times \cdots \times V_r \arrow[d, "s"'] \arrow[dr, "\sigma"] & \\ V_1 \otimes \cdots \otimes V_r \arrow[r, dashed, "\exists!"', "T=\Phi_\sigma"'] & U. \end{tikzcd}$$

Die Abbildung

$$\Phi \colon \operatorname{Mult}_r(V_1, \ldots, V_r; U) \to \operatorname{Hom}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_r, U), \ \sigma \mapsto \Phi_\sigma$$

wird dann zu einem kanonischen Isomorphismus.

(c) Es ist auch klar: Ist $(e_1^k, \ldots, e_{n_k}^k)$ eine Basis von V_k ($k = 1, \ldots, r$), dann ist

$$(e_{i_1}^1 \otimes \cdots \otimes e_{i_r}^r)_{\substack{i_k = 1, \ldots, n_k \\ k = 1, \ldots, r}}$$

Basis von $V_1 \otimes \cdots \otimes V_r$. $\Longrightarrow \dim(V_1 \otimes \cdots \otimes V_r) = \dim V_1 \cdots \dim V_r$.

(d) Man setzt $\bigotimes_{k=1}^r V_k := V_1 \otimes \cdots \otimes V_r$.

(e) Sei $r = p + q$. Betrachte

$$\sigma \colon \prod_{j=1}^{p+q} V_j \to \Big(\bigotimes_{k=1}^{p} V_k\Big) \otimes \Big(\bigotimes_{l=p+1}^{p+q} V_l\Big),$$

$$(v_1, \cdots, v_{p+q}) \mapsto (v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) \otimes (v_{p+1} \otimes \cdots \otimes v_{p+q}).$$

Es ist dann σ $(p+q)$-linear.

$$\Longrightarrow \exists T = \Phi_\sigma \colon \bigotimes_{j=1}^{p+q} V_j \to \Big(\bigotimes_{k=1}^{p} V_k\Big) \otimes \Big(\bigotimes_{l=p+1}^{p+q} V_l\Big)$$

mit $T \circ s = \sigma$, also

$$T(v_1 \otimes \cdots \otimes v_{p+q}) = (v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) \otimes (v_{p+1} \otimes \cdots \otimes v_{p+q})$$

$\Longrightarrow$ T ist (kanonischer) Isomorphismus (weil für Basen $(e_1^j, \ldots, e_{n_j}^j)$ $(j = 1, \ldots, p+q)$ von V_j die induzierte Basis von $\bigotimes_{j=1}^{p+q} V_j$ in die induzierte Basis von $\bigotimes_k^p V_k \otimes \bigotimes_l^{p+q} V_l$ übergeht). Insbesondere gilt z.B.:

$$V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) \cong V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \cong (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3.$$

(4.11) Erinnerung.

(a) Ein Tripel $(A, +, \cdot, *)$ heißt eine $\mathbb{R}$-**Algebra**, wenn $(A, +, *)$ ein Ring und $(A, +, \cdot)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $a, b \in A$ gilt:

$$\lambda \cdot (a * b) = (\lambda \cdot a) * b = a * (\lambda \cdot b).$$

(b) Sind A und B $\mathbb{R}$-Algebren, so heißt eine Abbildung $\Phi\colon A \to B$ ein Algebra-Homomorphismus, wenn Φ sowohl Ring-Homomorphismus als auch Vektorraum-Homomorphismus ist.

(4.12) Vorbereitung. Sei V ein Vektorraum, $p \in \mathbb{N}_0$ und setzen $V^{\otimes 0} := \mathbb{R}$ und $V^{\otimes p} = \bigotimes_{i=1}^{p} V$. Sei nun für $p, q \in \mathbb{N}_0$ und $\Psi\colon V^{\otimes p} \otimes V^{\otimes q} \to V^{\otimes (p+q)}$ der kanonische Isomorphismus $\big($d.h. das Inverse zu T aus (4.11,d)$\big)$. Beachte auch, dass $\mathbb{R} \otimes W \to W$ unter $\lambda \otimes w \mapsto \lambda \cdot w$ kanonisch isomorph ist (mit Inversen $v \mapsto 1 \otimes v$). Sei $s\colon V^{\otimes p} \times V^{\otimes q} \to V^{\otimes p} \otimes V^{\otimes q}$ kanonisch. Setze nun

$$\otimes := \Psi \circ s\colon V^{\otimes p} \times V^{\otimes q} \to V^{\otimes (p+q)}.$$

Dann ist $\otimes$ bilinear und es gilt:

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) \otimes (v_{p+1} \otimes \cdots \otimes v_{p+q}) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_{p+q}.$$

(4.13) Definition. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Wir versehen

$$T(V) := \bigoplus_{k \geq 0} V^{\otimes k}$$

mit der Struktur einer $\mathbb{R}$-Algebra, indem wir die Bilinearformen aus (4.12) bilinear auf ganz $T(V)$ ausdehnen:

$$T = \sum_{k=0}^{p} T_k \text{ mit } T_k \in V^{\otimes k}, \quad S = \sum_{l=0}^{q} S_l \text{ mit } S_l \in V^{\otimes l}$$

$$T \otimes S := \sum_{j=0}^{p+q} \underbrace{\Big(\sum_{k+l=j} T_k \otimes S_l \Big)}_{\in V^{\otimes j}}, \quad T(V) \times T(V) \to T(V).$$

(4.14) Kommentar.

(a) $T(V)$ wird damit tatsächlich zu einer $\mathbb{R}$-Algebra, die i.A. nicht kommutativ ist:

- $\dim V = 0 \Longrightarrow T(V) \cong \mathbb{R}$,
- $\dim V = 1 \Longrightarrow T(V) \cong \mathbb{R}[X]$,
- ist $\dim V \geq 2$, so gilt für (v, w) linear unabhängig:

$$v \otimes w \neq w \otimes v \quad \text{(Übung)}.$$

(b) Betrachte die natürliche Inklusion

$$i\colon V \to T(V) = \mathbb{R} \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus \cdots, \quad i(v) = v,$$

die V mit $V^{\otimes 1} \subseteq T(V)$ identifiziert.

(4.15) Bemerkung. Das Paar $\big(T(V), i\big)$ erfüllt folgende universelle Eigenschaft: Ist (A, j) ein weiteres Paar, so gibt es genau einen Algebra-Homomorphismus $\Phi\colon T(V) \to A$ mit $\Phi \circ i = j$,

$$\begin{tikzcd} V \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, "j"] & \\ T(V) \arrow[r, dashed, "\exists!", "\Phi"'] & A. \end{tikzcd}$$

Beweis. *Eindeutigkeit.* $T(V)$ wird von $V = i(V) \subseteq T(V)$ als Algebra erzeugt. Daher gibt es nur einen Kandidaten für Φ, nämlich

$$\Phi(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) = j(v_1) \cdots j(v_p).$$

Existenz. Für jedes $p \in \mathbb{N}_0$ ist $\Phi_p\colon V^{\otimes p} \to A$ nach der universellen Eigenschaft von $V^{\otimes p}$ durch

$$\Phi_p(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) = j(v_1) \cdots j(v_p)$$

wohldefiniert (und linear). Nach der universellen Eigenschaft der Summe existiert ein eindeutiges $\Phi\colon \bigoplus_{p \geq 0} V^{\otimes p} \to A$ mit $\Phi \circ i_p = \Phi_p$, wo $i_p\colon V^{\otimes p} \hookrightarrow T(V)$ die natürliche Inklusion auf den Summanden vom Grad p ist.

Definition der Ringstruktur auf $T(V) \Longrightarrow \Phi(V)$ Ringhomomorphismus $\Longrightarrow \Phi$ ist Algebra-Homomorphismus. $\square$

(4.16) Definition.

(a) Sei A eine $\mathbb{R}$-Algebra. Eine Familie von Unterräumen $A^p \subseteq A$, $p \in \mathbb{Z}$, heißt **eine $\mathbb{Z}$-Graduierung auf A**, wenn

$$A = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} A^p$$

ist und für alle $p, q \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$A^p \cdot A^q \subseteq A^{p+q}.$$

Eine Algebra mit $\mathbb{Z}$-Graduierung $\big(A, (A^p)_{p \in \mathbb{Z}}\big)$ heißt eine **graduierte Algebra**.

(b) Ein Algebra-Homomorphismus $\Phi\colon A \to B$ zwischen graduierten Algebren A und B heißt **graduiert**, wenn $\Phi(A^p) \subseteq B^p$ ist, für alle $p \in \mathbb{Z}$.

(4.17) Kommentar.

(a) Ist V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, so ist $T(V)$ offenbar eine graduierte (assoziative) $\mathbb{R}$-Algebra mit Eins mit

$$T^p(V) := T(V)^p = V^{\otimes p}$$

für $p \geq 0$ und $T^p(V) = (0)$ für $p < 0$.

(b) Ist $I \subseteq A$ (A eine $\mathbb{R}$-Algebra) ein **zweiseitiges Ideal**, d.h. ein Unterraum mit $A \cdot I \subseteq I$ und $I \cdot A \subseteq I$, so trägt der Quotientenraum $Q := A/I$ wieder eine Algebra-Struktur vermöge

$$(a + I)(b + I) := ab + I.$$

Die kanonische Projektion $\pi\colon A \to Q = A/I$ hat dann eine naheliegende universelle Eigenschaft (mit $\ker f \supseteq I$).

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "f"] & \\ A/I \arrow[r, dashed, "\exists!", "\Phi"'] & B \end{tikzcd}$$

(c) Ist $I \subseteq A$ zweiseitiges Ideal und A durch $(A^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ graduiert, so nennen wir I **homogen**, wenn für jedes $a \in I$, $a = \sum_{p\in\mathbb{Z}} a_p$ die homogene Zerlegung, gilt: $a_p \in I$, $\forall p \in \mathbb{Z}$. Mit $I^p := I \cap A^p$ gilt dann:
$$I = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} I^p.$$

Behauptung. Betrachte

$$\begin{tikzcd} A^p \arrow[rr, "i_p"] \arrow[d, "\pi_p"'] & & A \arrow[d, "\pi"] \\ Q^p := A^p/I^p \arrow[rr, dashed, "\exists!", "j_p"'] & & A/I = Q \end{tikzcd}$$

Da $\pi \circ i_p | I^p = 0$ (da $I^p \subseteq I$) existiert eindeutig $j_p\colon Q^p \to Q$ mit $j_p \circ \pi_p = \pi \circ i_p$.

Behauptung.

(i) j_p ist injektiv;

(ii) $Q = \bigoplus j_p(Q^p)$;

(iii) $\big(j_p(Q^p)\big)_{p\in\mathbb{Z}}$ ist ein Graduierung von Q

(Übung). $\Longrightarrow$ π ist graduiert.

(4.18) Vorbereitung. Sei V ein Vektorraum, $T(V)$ seine **Tensoralgebra** und I das 2-seitige Ideal in $T(V)$, dass von allen Elementen $v \otimes v \in V^{\otimes 2} = T^2(V)$, mit $v \in V$, erzeugt wird,
$$I = \Big\{ \sum_{k=1}^{r} s_k \otimes v_k \otimes v_k \otimes t_k \;:\; r \in \mathbb{N}_0,\, s_k, t_k \in T(V),\, v_k \in V,\, k = 1, \dots, r \Big\}$$
$\Longrightarrow$ I ist homogen.

(4.19) Definition. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $T(V)$ seine Tensoralgebra und $I \subseteq T(V)$ das in (4.18) definierte, zweiseitige, homogene Ideal. Man nennt dann
$$\Lambda(V) := T(V)/I$$
die **Grassmann-Algebra über V** (oder auch die **äußere Algebra** über V). Für jedes $p \in \mathbb{N}_0$ heißt
$$\Lambda^p(V) := T^p(V)/I^p$$
das p-fache äußere Produkt. Es gilt
$$\Lambda(V) = \bigoplus_{p\geq 0} \Lambda^p(V),$$
und man notiert die Restklasse mit (sei $\pi\colon T(V) \to \Lambda(V)$ die kanonische Projektion)
$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_p := \pi(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p).$$

(4.20) Kommentar.

(a) Für die Multiplikation in $\Lambda(V)$ benutzen wir das Symbol $\wedge$ („Dach"). Es ist also (vgl. $\otimes$ bei der Tensoralgebra):
$$\begin{aligned}(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p) \wedge (v_{p+1} \wedge \cdots \wedge v_{p+q}) &= \pi(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) \wedge \pi(v_{p+1} \otimes \cdots \otimes v_{p+q}) \\ &\underset{\pi \text{ Ringhom.}}{=} \pi\big((v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) \otimes (v_{p+1} \otimes \cdots v_{p+q})\big) \\ &= \pi(v_1 \otimes \cdots \otimes v_{p+q}) = v_1 \wedge \cdots \wedge v_{p+q}\end{aligned}$$

(lasse also Klammern häufig weg).

(b) Seien nun $s^p\colon V^p \to T^p(V)$ und $\pi^p\colon T^p(V) \to \Lambda^p(V)$ die kanonischen Abbildung. Dann setzen wir $\omega^p\colon = \pi^p \circ s^p\colon V^p \to \Lambda^p(V)$, also

$$\omega^p(v_1, \dots, v_p) = v_1 \wedge \cdots \wedge v_p.$$

$\Longrightarrow \omega^p$ ist p-linear.

(4.21) Bemerkung. $\omega^p\colon V^p \to \Lambda^p(V)$ ist alternierend.

Beweis.

$$\begin{aligned} 0 &= \ldots \wedge (v+w) \wedge (v+w) \wedge \ldots \\ &= \underbrace{\ldots \wedge v \wedge v \wedge \ldots}_{=0} + \ldots \wedge v \wedge w \wedge \ldots + \ldots \wedge w \wedge v \wedge \ldots + \underbrace{\ldots \wedge w \wedge w \wedge \ldots}_{=0} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \omega(\dots, v, w, \dots) = -\omega(\dots, w, v, \dots).$$

$(j-i-1)$-maliges Anwenden davon $\Longrightarrow \forall 1 \leq i < j \leq p$, $\forall v \in V$:

$$\omega(\dots, \underbrace{v}_{i\text{-te}}, \dots, \underbrace{v}_{j\text{-te}}, \dots) = (-1)^{j-i-1}\omega(\dots, \underbrace{v}_{j-1\text{-te}}, \underbrace{v}_{j\text{-te}}, \dots) = 0. \qquad \square$$

(4.22) Bemerkung. Das Paar $(\Lambda^p V, \omega^p)$ erfüllt folgende universelle Eigenschaft: Ist U ein Vektorraum und $h\colon V^p \to U$ p-linear und alternierend, so existiert genau ein lineares $\Phi\colon \Lambda^p(V) \to U$ mit $\Phi \circ \omega^p = h$,

$$\begin{tikzcd} V^p \arrow[d, "\omega^p"'] \arrow[dr, "h"] & \\ \Lambda^p V \arrow[r, dashed, "\exists!"', "\Phi"] & U. \end{tikzcd}$$

Beweis. *Eindeutigkeit.* $(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p)_{v_1,\dots,v_p \in V}$ ist erzeugend für $\Lambda^p(V)$ (da kanonische Projektion $\pi^p\colon T^p(V) \to \Lambda^p(V)$ surjektiv ist). $\Longrightarrow$ Es gibt nur einen Kandidaten für Φ, nämlich

$$\Phi(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p) = h(v_1, \dots, v_p).$$

Existenz. Da h p-linear ist $\exists \tilde{\Phi}\colon T^p(V) \to U$ mit $\tilde{\Phi} \circ s^p = h$. Da

$$\tilde{\Phi}(\cdots \otimes v \otimes v \otimes \cdots) = h(\dots, v, v, \dots) = 0 \quad (\Longrightarrow \tilde{\Phi}|I^p = 0).$$

ist, $\forall v \in V \Longrightarrow \exists \Phi\colon \Lambda^p(V) \to U$ mit $\Phi \circ \pi^p = \tilde{\Phi}$.

$$\begin{tikzcd} V^p \arrow[d, "s^p"] \arrow[dr, "h"] \arrow[dd, bend right, "\omega^p"'] & \\ T^p(V) \arrow[r, dashed, "\tilde{\Phi}"] \arrow[d, "\pi^p"'] & U \\ \Lambda^p(V) \arrow[ur, dashed, "\Phi"'] & \end{tikzcd}$$

Mit $\omega^p = \pi^p \circ s^p$ folgt:

$$\Phi \circ \omega^p = \Phi \circ \pi^p \circ s^p = \tilde{\Phi} \circ s^p = h. \qquad \square$$

(4.23) Kommentar.

(a) Beachte auch hier, dass ω^p i.a. weder injektiv noch surjektiv ist, z.B. $\omega(\dots, v, v, \dots) = 0$, $\forall v \in V$ und für $(v_1, \dots, v_4)$ linear unabhängig in V (also $\dim V \geq 4$) ist $v_1 \wedge v_2 + v_3 \wedge v_4$ nicht im Bild von ω^p (Übung).

(b) Ist $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ eine p-elementige Teilmenge $(0 \leq p \leq n)$ und $I = \{i_1, \dots, i_p\}$ mit $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq n$, so schreiben wir:

$$v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_p} =: v_I$$

(für $p = 0$: $v_\emptyset := 1 \in \Lambda^0(V) = \mathbb{R}$).

(4.24) Lemma. *Sei $(e_1,\dots,e_n)$ Basis von V, U ein Vektorraum und für jede Teilmenge $I \subseteq \{1,\dots,n\}$ mit p Elementen sei $u_I \in U$ beliebig. Dann gibt es genau ein p-lineares, alternierendes $h\colon V^p \to U$ mit*

$$h(e_{i_1},\dots,e_{i_p}) = u_I$$

$\big($*mit* $I = \{i_1,\dots,i_p\}$ *und* $i_1 < i_2 < \dots < i_p\big)$.

Beweis. Sei $(i_1,\dots,i_p)$ ein p-Tupel mit $i_k \in \{1,\dots,n\}$ $(k = 1,\dots,p) \implies \exists!\, h\colon V^p \to U$ p-linear mit

$$h(e_{i_1},\dots,e_{i_p}) = \begin{cases} 0 & \text{falls } i_k = i_l \text{ für ein } (k,l) \text{ mit } k \neq l, \\ \operatorname{sgn}(\sigma) u_I & \begin{array}{l}\text{falls } I = \{i_1,\dots,i_p\}\ p \text{ Elemente hat und } \sigma \in \mathcal{S}_p \text{ so ist,} \\ \text{dass } (i_{\sigma 1},\dots,i_{\sigma p}) \text{ geordnet ist.}\end{array} \end{cases}$$

Nun prüfe nach, dass h tatsächlich alternierend ist. Z.B. für $p = 2$ und $v = \lambda^i e_i$ ist

$$\begin{aligned} h(v,v) &= \sum_{i=1}^n (\lambda^i)^2 \underbrace{h(e_i,e_i)}_{=0} + \sum_{1 \le i < j \le n} \lambda^i \lambda^j \underbrace{\big(h(e_i,e_j) + h(e_j,e_i)\big)}_{=0} \\ &= 0. \end{aligned}$$

(Eindeutigkeit auch klar). □

(4.25) Proposition.

(a) Sei $(e_1,\dots,e_n)$ eine Basis von V und $p \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $(e_I)_I$ eine Basis von $\Lambda^p V$. Hierbei durchläuft I die Menge aller p-elementigen Teilmengen von $\{1,\dots,n\}$.

(b) Ist $\dim V = n$, so gilt: $\Lambda^p(V) = (0)$ für $p > n$ und für $0 \le p \le n$ gilt:

$$\dim \Lambda^p(V) = \binom{n}{p}.$$

(4.26) Korollar. *Ist V endlich dimensional, so auch $\Lambda(V)$. Genauer: Ist $\dim V = n$, so ist $\dim \Lambda(V) = 2^n$.*

Beweis. Mit dem Binomischen Lehrsatz ist wegen $\Lambda(V) = \bigoplus_{p \ge 0} \Lambda^p(V) = \bigoplus_{i=0}^n \Lambda^p(V)$:

$$\dim \Lambda(V) = \sum_{p=0}^n \dim \Lambda^p(V) \overset{\text{(b)}}{=} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} 1^p \cdot 1^{n-p} = (1+1)^n = 2^n. \qquad \square$$

***Beweis von* (4.25).** Da $(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p})_{1 \le i_1,\dots,i_p \le n}$ $T^p(V)$ erzeugend ist, ist es auch $(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p})_{1 \le i_1,\dots,i_p \le n}$ $\Lambda^p(V)$. Ist aber $i_k = i_l$ für $k \neq l$, so ist $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} \wedge \dots \wedge e_{i_l} \wedge \dots \wedge e_{i_p} = 0$ und ist $\sigma \in \mathcal{S}_p$, so ist

$$e_{i_{\sigma 1}} \wedge \dots \wedge e_{i_{\sigma p}} = \operatorname{sgn}(\sigma) e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}$$

$\implies (e_I) = (e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p})_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_p \le n}$ erzeugt $\Lambda^p V$. Für $I \subseteq \{1,\dots,n\}$ p-elementig sei $h^I\colon V^p \to \mathbb{R}$ die alternierende p-Form mit

$$h^I(e_{j_1},\dots,e_{j_p}) = \delta^I_J,$$

wenn $J = \{j_1,\dots,j_p\}$ und $(j_1,\dots,j_p)$ geordnet ist $\big($vgl. (4.24)$\big)$. Sei $\Phi^I\colon \Lambda^p(V) \to \mathbb{R}$ linear mit $\Phi^I \circ \omega^p = h^I$ $\big($universelle Eigenschaft von $(\Lambda^p V, \omega^p)\big) \implies \Phi^I(e_J) = \delta^I_J$. Ist nun

$$\sum_J \lambda^J e_J = 0 \implies 0 = \Phi^I(\lambda^J e_J) = \lambda^J \underbrace{\Phi^I(e_J)}_{=\delta^I_J} = \lambda^I.$$

Also ist (e_I) auch linear unabhängig $\implies$ (a) und (b) ist dann klar. □

(4.27) Vorbereitung.

(a) Erinnere, dass $T^p(V^*) \cong \big(T^p(V)\big)^*$ kanonisch $\big($nämlich zu $\mathrm{Mult}_p(V;\mathbb{R})\big)$.

Frage: Ist auch $\Lambda^p(V^*) \cong \big(\Lambda^p(V)\big)^*$ kanonisch?

(b) Erinnere: Eine Bilinearform $\langle\ ,\ \rangle\colon V \times V \to \mathbb{R}$ heißt **nicht-entartet**, wenn gilt:

(i) ist $\langle v, w\rangle = 0$, $\forall w \in V \Longrightarrow v = 0$,

(ii) ist $\langle v, w\rangle = 0$, $\forall v \in V \Longrightarrow w = 0$.

(4.28) Lemma. *Für eine Bilinearform $\langle\ ,\ \rangle\colon V \times W \to \mathbb{R}$ setzen wir $\Phi\colon V \to W^*$ und $\Psi\colon W \to V^*$ fest durch*

$$\Phi(v)(w) = \langle v, w\rangle, \quad \Psi(w)(v) = \langle v, w\rangle.$$

Dann gilt: Ist $\langle\ ,\ \rangle$ nicht entartet und V, W endlich dimensional, so sind Φ und Ψ Isomorphismen.

Beweis. Nicht-Entartung von $\langle\ ,\ \rangle$ bedeutet Injektivität von Φ und Ψ

$$\Longrightarrow \dim V^* \geq \dim W = \dim W^* \geq \dim V = \dim V^*,$$

also $\dim V = \dim W$. $\Longrightarrow \Phi, \Psi$ Isomorphismen. □

(4.29) Vorbereitung. Sei V ein Vektorraum und $p \in \mathbb{N}_0$. Betrachte dann

$$s\colon V^p \times (V^*)^p \to \mathbb{R}, \quad s\big((v_1, \ldots, v_p), (\alpha^1, \ldots, \alpha^p)\big) = \det\big(\langle v_k, \alpha^l\rangle\big)_{k,l}$$

wo wir mit $\langle\ ,\ \rangle\colon V \times V^* \to \mathbb{R}$ die **natürliche Paarung**

$$\langle v, \alpha\rangle := \alpha(v)$$

bezeichnen.

$\Longrightarrow s$ ist p-linear und alternierend in V^p und selbiges in $(V^*)^p$. Sind $\omega_V^p\colon V^p \to \Lambda^p(V)$ und $\omega_{V^*}^p\colon (V^*)^p \to \Lambda^p(V^*)$ die kanonische Abbildungen, so existiert genau eine Paarung

$$\langle\ ,\ \rangle\colon \Lambda^p V \times \Lambda^p(V^*) \to \mathbb{R}$$

mit $\langle\ ,\ \rangle \circ (\omega_V^p \times \omega_{V^*}^p) = s$, also

$$\langle v_1 \wedge \cdots \wedge v_p, \alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^p\rangle = \det\big(\langle v_k, \alpha^l\rangle\big)_{k,l}.$$

(4.30) Bemerkung. Die obige natürliche Paarung zwischen $\Lambda^p V$ und $\Lambda^p(V^*)$ ist nicht entartet.

(4.31) Kommentar. Es sind also $\Lambda^p(V^*)$ und $\big(\Lambda^p(V)\big)^*$ kanonisch isomorph.

Beweis. Klar, denn $\Psi\colon \Lambda^p(V^*) \to \big(\Lambda^p(V)\big)^*$ mit

$$\Psi(\omega)(\tau) = \langle \tau, \omega\rangle, \quad \tau \in \Lambda^p(V),\ \omega \in \Lambda^p(V^*)$$

ist ein kanonischer Isomorphismus. □

Beweis von (4.30). Sei $(e_1, \ldots, e_n)$ Basis von V und $(\gamma^1, \ldots, \gamma^n)$ duale Basis von V^*. Für $I, J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ p-elementig ist dann

$$\langle e_I, \gamma^J\rangle = \delta_I^J,$$

denn für $I \neq J$ gibt es eine Nullzeile (und auch Nullspalte) in der $p \times p$-Matrix $\big(\langle e_{i_k}, \gamma^{j_l}\rangle\big)$ (mit $1 \leq k, l \leq p$). Für $I = J$ ist dagegen dies die Einheitsmatrix.

Ist nun $\tau \in \Lambda^p V$ beliebig $\Longrightarrow \exists \lambda^I \in \mathbb{R}\colon \tau = \lambda^I e_I$. Sei $\langle \tau, \omega\rangle = 0$, $\forall \omega \in \Lambda^p(V^*)$, insbesondere für $\omega = \gamma^J$.

$$\Longrightarrow 0 = \langle \tau, \gamma^J\rangle = \lambda^I \underbrace{\langle e_I, \gamma^J\rangle}_{\delta_I^J} = \lambda^J,\ \forall J \Longrightarrow \tau = 0.$$

Ähnlich im zweiten Argument. $\square$

(4.32) Kommentar. Bezeichnen wir mit

$$\mathrm{Alt}_p(V) := \{\omega\colon V^p \to \mathbb{R} : \omega \text{ ist } p\text{-linear und alternierend}\} \subseteq \mathrm{Mult}_p(V),$$

so haben wir nun die kanonische Isomorphismen:

$$\mathrm{Alt}_p(V) \underset{\text{U.E.}}{\cong} (\Lambda^p V)^* \underset{(4.31)}{\cong} \Lambda^p(V^*).$$

Jede **p-Form** $\omega \in \Lambda^p(V^*)$ kann man also als alternierende p-Linearform auf V auffassen und umgekehrt:

$$\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^p(v_1, \ldots, v_p) = \det\big(\langle v_i, \alpha^j\rangle\big)_{ij}.$$

(4.33) Definition. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit $\dim V < \infty$. Für $p, q \in \mathbb{N}_0$ setzt man

$$T^{(p,q)}(V) := T^p(V) \otimes T^q(V^*)$$

und nennt die Elemente von $T^{(p,q)}(V)$ **Tensoren der Stufe (p, q)**. (auch: p-fach kontravariant und q-fach covariant).

$$T(V) \otimes T(V^*) := \bigoplus_{p,q \in \mathbb{N}} T^{(p,q)}(V)$$

heißt die **erweiterte Tensoralgebra von V**.

(Übung: Definiere eine Algebra-Struktur auf dem Tensorprodukt von zwei Algebren $A \otimes B$ und beweise eine universelle Eigenschaft.)

(4.34) Kommentar. Wegen der kanonischen Isomorphie von V und V^{**}, $v \mapsto \big(\alpha \mapsto \langle v, \alpha\rangle\big)$ ist nun kanonisch Isomorph (vgl. Übung)

$$\begin{aligned} T^{(p,q)}(V) &= T^p(V) \otimes T^q(V^*) \cong T^q(V^*) \otimes T^p(V) \cong T^q(V^*) \otimes T^p(V^{**}) \\ &\cong T^q(V)^* \otimes T^p(V^*)^* \cong \big(T^q(V) \otimes T^p(V^*)\big)^* \cong \mathrm{Mult}_{p+q}\big(V^q \times (V^*)^p\big), \end{aligned}$$

d.h.: Jedes $T \in T^{(p,q)}$ kann als $(p+q)$-lineare Abbildung von $V^q \times (V^*)^p$ nach $\mathbb{R}$ aufgefasst werden.

(4.35) Vorbereitung.

(a) Ist $\langle\ ,\ \rangle\colon V \times V^* \to \mathbb{R}$ die kanonische Paarung

$$\begin{tikzcd} V \times V^* \arrow[r, "\langle\ ,\ \rangle"] \arrow[d, "\otimes"'] & \mathbb{R} \\ V \otimes V^* \arrow[ur, dashed, "\exists!\,\mathrm{tr}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V \times V^* \arrow[r, "(v,\alpha)\mapsto(w\mapsto\alpha(w)v)"] \arrow[d, "\otimes"'] & \mathrm{End}(V) \\ V \otimes V^* \arrow[ur, dashed, "T"'] & \end{tikzcd}$$

so sei $\mathrm{tr}\colon V \otimes V^* \to \mathbb{R}$ die induzierte linear Abbildung. Ist $S\colon \mathrm{End}(V) \to V \otimes V^*$ der kanonische Isomorphismus $\big(\text{vgl. (4.8,a)}\big)$, so ist $\mathrm{tr} \circ S\colon \mathrm{End}(V) \to \mathbb{R}$, $\mathrm{tr} \circ S = \mathrm{spur}$ (Übung).

(b) Sei nun $p, q \in \mathbb{N}_0$ und $1 \leq k \leq p$, $1 \leq l \leq q$. Betrachte

$$s_k^l \colon V^p \times (V^*)^q \to T^{(p-1,q-1)}(V)$$

mit

$$s_k^l(v_1, \dots, v_p, \alpha^1, \dots, \alpha^q) = \langle v_k, \alpha^l \rangle \, v_1 \otimes \cdots \otimes \hat{v}_k \otimes \cdots \otimes v_p \otimes \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \hat{\alpha}_l \otimes \cdots \otimes \alpha_q$$

(wo „$.\hat{}.$“ meint, dass dieser Eintrag fehlt).

(4.36) Definition. Für $1 \leq k \leq p$ und $1 \leq l \leq q$ wie eben, nennen wir die von s_k^l induzierte Abbildung

$$\mathrm{tr}_k^l \colon T^{(p,q)}(V) \to T^{(p-1,q-1)}(V)$$

die Verjüngung der (p,q)-Tensoren im k Faktor V und l Faktor V^*.

(4.37) Vorbereitung.

(a) Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $(e_1, \dots, e_n)$ eine Basis. Sei $(\gamma^1, \dots, \gamma^n)$ die dazu duale Basis von V^* und $p, q \in \mathbb{N}_0$. Ist $T \in T^{(p,q)}(V)$, so existieren eindeutig bestimmte Elemente $\xi_{j_1,\dots,j_p}^{i_1,\dots,i_p} \in \mathbb{R}$, so dass gilt:

$$T = \xi_{j_1,\dots,j_q}^{i_1,\dots,i_p} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes \gamma^{j_1} \otimes \cdots \otimes \gamma^{j_q}.$$

$\xi_j^i = \xi_{j_1,\dots,j_q}^{i_1,\dots,i_p}$ mit $i = (i_1, \dots, i_p)$, $j = (j_1, \dots, j_q)$ heißen die Koordinaten von T bzgl. $(e_1, \dots, e_n)$.

(b) Sei nun $(f_1, \dots, f_n)$ eine weitere Basis und $A, B \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ die Basiswechselmatrizen: $A = (a_j^i)$, $B = (b_j^i)$

$$f_j = a_j^i e_i, \; e_j = b_j^i f_i,$$

also $B = A^{-1}$, bzw. $b_j^i a_k^j = \delta_k^i$, $a_j^i b_k^j = \delta_k^i$.

Es ist dann für die duale Basis $(\delta^1, \dots, \delta^n)$ von $(f_1, \dots, f_n)$. $\delta^i = b_j^i \gamma^j$, $\gamma^i = a_j^i \delta^j$. Dann:

$$b_j^i \gamma^j(f_k) = b_j^i \gamma^j(a_k^l e_l) = b_j^i a_k^l \underbrace{\gamma^j(e_l)}_{=\delta_l^j} = b_j^i a_k^j = \delta_k^i = \delta^i(f_k), \; \forall k$$

$\Longrightarrow b_j^i \gamma^j = \delta^i$ $(\forall i)$ $(\Longrightarrow \gamma^i = \delta_j^i \gamma^j = a_k^i b_j^k \gamma^j = a_k^i \delta^k)$.

Beachte: Ist $v \in V$ mit $\xi^i e_i = v = \eta^j f_j$

$$\Longrightarrow \eta^j = \delta^j(v) = b_k^j \gamma^k(v) = b_k^j \xi^k \Longrightarrow \eta = B\xi.$$

Ist $\alpha \in V^*$ mit $\xi_i \gamma^i = \alpha = \eta_j \delta^j$

$$\Longrightarrow \eta^j = \alpha(f_j) = a_j^i \alpha(e_j) = a_j^i \xi_i = \xi_i a_j^i \Longrightarrow \eta^t = \xi^t A \Longrightarrow \eta = A^t \xi.$$

(4.38) Bemerkung. Sei V, $(e_1, \dots, e_n)$, $(f_1, \dots, f_n)$ wie oben und $(\gamma^1, \dots, \gamma^n)$, $(\delta^1, \dots, \delta^n)$ dual dazu. Sei $p, q \in \mathbb{N}_0$, $T \in T^{p,q}(V)$ und

$$T = \xi_{j_1,\dots,j_q}^{i_1,\dots,i_p} e_{i_1} \otimes \cdots e_{i_p} \otimes \gamma^{j_1} \otimes \cdots \otimes \gamma^{j_q} = \eta_{l_1,\dots,l_q}^{k_1,\dots,k_p} f_{k_1} \otimes \cdots \otimes f_{k_p} \otimes \delta^{l_1} \otimes \cdots \otimes \delta^{l_q}.$$

Ist dann $A = (a_j^i)$ mit $f_j = a_j^i e_i$ und $B = A^{-1} = (b_j^i)$, so gilt:

$$\eta_{l_1,\dots,l_q}^{k_1,\dots,k_p} = b_{i_1}^{k_1} \cdots b_{i_p}^{k_p} \xi_{j_1,\dots,j_q}^{i_1,\dots,i_p} a_{l_1}^{j_1} \cdots a_{l_q}^{j_q}.$$

Beweis. Kürze für $i = (i_1, \ldots, i_p)$ usw. ab

$$\begin{aligned} e_i &:= e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p}, & f_k &:= f_{k_1} \otimes \cdots \otimes f_{k_p} \\ \gamma^j &:= \gamma^{j_1} \otimes \cdots \otimes \gamma^{j_q}, & \delta^l &:= \delta^{l_1} \otimes \cdots \otimes \delta^{l_q} \\ b_i^k &:= b_{i_1}^{k_1} \cdots b_{i_p}^{k_p}, & \eta_l^k &:= a_{l_1}^{j_1} \cdots a_{l_q}^{j_q} \\ \xi_j^i &:= \xi_{j_1,\ldots,j_q}^{i_1,\ldots,i_p}, & \eta_l^k &:= \eta_{l_1,\ldots,l_q}^{k_1,\ldots,k_p} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow e_i = b_i^k f_k,\ \gamma^j = a_l^j \delta^l$$

$$\Longrightarrow \eta_l^k f_k \otimes \delta^l = T = \xi_j^i e_i \otimes \gamma^j = \xi_j^i b_i^k a_l^j f_k \otimes \delta^l$$

$$\Longrightarrow \text{(Koeff.-Vergleich) } \gamma_l^k = b_i^k \xi_j^i a_l^j. \qquad \square$$

(4.39) Kommentar.

(a) Für $p = q = 1$ ergibt sich für $T \in V \otimes V^* \cong \mathrm{End}(V)$ das bekannte Verhalten:

$$\eta = A^{-1} \xi A,$$

für $p = 0$ und $q = 2$ für $T \in V^* \otimes V^* \cong \mathrm{Bil}(V)$

$$\eta = A^t \xi A \quad \text{(Übung).}$$

(4.40) Vorbereitung. Sei $\dim V = n$, $0 \leq p \leq n$, $(e_1, \ldots, e_n)$, $(f_1, \ldots, f_n)$ Basen von V mit Transformationsmatrix $A = (a_j^i)$, also $f_j = a_j^i e_i$. Für die dualen Basen $(\gamma^1, \ldots, \gamma^n)$, $(\delta^1, \ldots, \delta^n)$ ist dann $\gamma^i = a_j^i \delta^j$. Sei nun $\omega \in \Lambda^p(V^*)$ und

$$\omega = \xi_I \gamma^I = \eta_J \delta^J,$$

wo I bzw. J alle p-elementige Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$ durchläuft.

Frage. Wie transformieren sich (ξ_I) und (η_J)? Dazu:

$$\begin{aligned} \gamma^I &= \gamma^{i_1} \wedge \cdots \wedge \gamma^{i_p} = a_{j_1}^{i_1} \cdots a_{j_p}^{i_p} \delta^{j_1} \wedge \cdots \wedge \delta^{j_p} \\ &= \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_p \leq n} \Big(\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_p} a_{j_{\sigma(1)}}^{i_1} \cdots a_{j_{\sigma(p)}}^{i_p} \delta^{j_{\sigma(1)}} \wedge \cdots \wedge \delta^{j_{\sigma(p)}} \Big) \\ &= \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_p \leq n} \Big(\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_p} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{j_{\sigma 1}}^{i_1} \cdots a_{j_{\sigma p}}^{i_p} \Big) \delta^{j_1} \wedge \cdots \wedge \delta^{j_p} = \det(A_J^I) \delta^J, \end{aligned}$$

wo A_J^I die $(p \times p)$-Teilmatrix von A mit den Zeilen $i_1, \ldots, i_p$ und den Spalten $j_1, \ldots, j_p$ ist. $\det(A_J^I)$ heißt dann der **IJ-Minor von A**.

(4.41) Bemerkung. Sei V, $(e_1, \ldots, e_n)$, $(f_1, \ldots, f_n)$ wie oben und $(\gamma^1, \ldots, \gamma^n)$, $(\delta^1, \ldots, \delta^n)$ dual dazu. Ist $\omega \in \Lambda^p(V^*)$ $(0 \leq p \leq n)$ und

$$\omega = \xi_I \gamma^I = \eta_J \delta^J,$$

so gilt für alle J:

$$\eta_J = \det(A_J^I) \xi_I.$$

Beweis. Es ist

$$\eta_J \delta^J = \omega = \xi_I \gamma^I = \det(A_J^I) \delta^J.$$

$\Longrightarrow$ Koeffizienten Vergleich: $\eta_J = \det(A_J^I) \xi_I$. $\square$

(4.42) Definition. Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$, M^n und E^{n+k} glatte Mannigfaltigkeiten und $\pi\colon E \to M$ glatt. Eine **(Vektor-) Bündelkarte von π** ist ein Diffeomorphismus $\varphi\colon \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$, wo $U \subseteq M$ offen ist, so dass für die Projektion $\mathrm{pr}_1\colon U \times \mathbb{R}^k \to U$ gilt: $\mathrm{pr}_1 \circ \varphi = \pi|\pi^{-1}(U)$,

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi|_{\pi^{-1}(U)}"'] & U \times \mathbb{R}^k. \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\ U & \end{tikzcd}$$

(4.43) Kommentar.

(a) Jedes $p \in U$ ist damit ein regulärer Wert von π, denn für alle $\xi = \pi^{-1}(p)$ ist

$$\mathrm{D}\pi_\xi = \mathrm{D}(\mathrm{pr}_1)_{\varphi(\xi)} \circ \mathrm{D}\varphi_\xi$$

$\mathrm{D}\varphi_\xi$ ist ein Isomorphismus und $\mathrm{D}(\mathrm{pr}_1)_{\varphi(\xi)}$ ist surjektiv, und damit $\pi^{-1}(p) \subseteq E$ eine Untermannigfaltigkeit der Codimension n, also der Dimension k.

(b) Es ist dann

$$\varphi_p\colon \pi^{-1}(p) \to \mathbb{R}^k,\ \varphi_p := \mathrm{pr}_2 \circ \varphi|\pi^{-1}(p)$$

ein Diffeomorphismus, insbesondere also $\pi^{-1}(p) \neq \emptyset$ und damit $\pi|\pi^{-1}(U)\colon \pi^{-1}(U) \to U$ surjektiv, denn

$$\mathbb{R}^k \to \pi^{-1}(p),\ y \mapsto \varphi^{-1}(p, y)$$

ist offenbar invers zu φ_p (und glatt), weil:

$$\varphi_p \circ \varphi^{-1}(p, y) = \mathrm{pr}_2 \circ \varphi \circ \varphi^{-1}(p, y) = y = \mathbb{1}(y)$$

und

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}\big(p, \varphi_p(\xi)\big) &= \varphi^{-1}\big(p, \mathrm{pr}_2 \circ \varphi(\xi)\big) = \varphi^{-1}\big(\pi(\xi), \mathrm{pr}_2(\varphi(\xi))\big) \\ &= \varphi^{-1}\big(\mathrm{pr}_1(\varphi(\xi)), \mathrm{pr}_2(\varphi(\xi))\big) = \varphi^{-1}\big(\varphi(\xi)\big) = \xi = \mathbb{1}(\xi) \end{aligned}$$

ist.

(4.44) Definition. Seien M^n, E^{n+k} und $\pi\colon E \to M$ wie oben. Eine Familie von Bündelkarten $\mathfrak{A} = \big(\varphi_i\colon \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{R}^k\big)_{i \in I}$ heißt ein **(Vektor-) Bündelatlas** für π, wenn (U_i) eine offene Überdeckung von M ist und für jedes Paar $(i, j) \in I \times I$ (mit $U_i \cap U_j \neq \emptyset$) gilt: Ist $p \in U_i \cap U_j$, so ist der Diffeomorphismus

$$(\varphi_i)_p \circ (\varphi_j)_p^{-1}\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$$

sogar linear.

(4.45) Kommentar.

(a) Identifizieren wir die Automorphismen von $\mathbb{R}^k$,

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{R}^k) = \{T\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k \ :\ T \text{ ist linear Diffeomorphismus}\} \subseteq \mathrm{Diff}(\mathbb{R}^k)$$

vermöge der kanonischen Basis $(e_1, \ldots, e_k)$ von $\mathbb{R}^k$ mit $\mathrm{Gl}_k(\mathbb{R})$, so ist also

$$\varphi_{ij}(p) := (\varphi_i)_p \circ (\varphi_j)_p^{-1} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^k) \cong \mathrm{Gl}_k(\mathbb{R})$$

für jedes $p \in U_i \cap U_j$ eine invertierbare $k \times k$-Matrix.

(b) Es ist dann der Übergang

$$(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^k = \varphi_j\big(\pi^{-1}(U_i \cap U_j)\big) \to \varphi_i\big(\pi^{-1}(U_i \cap U_j)\big) = (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^k$$

$$(p, y) \mapsto \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(p, y)$$

gegeben durch

$$(p, y) \mapsto \big(p, \varphi_{ij}(p) \cdot y\big),$$

denn

$$\mathrm{pr}_1 \circ \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(p, y) = \pi \circ \varphi_j^{-1}(p, y) = \mathrm{pr}_1(p, y) = p$$

und

$$\mathrm{pr}_2 \circ \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(p, y) = (\varphi_i)_p \circ \varphi_j^{-1}(p, y) = (\varphi_i)_p \circ (\varphi_j)_p^{-1}(y) = \varphi_{ij}(p) \cdot y.$$

Damit ist die Abbildung

$$\varphi_{ij} \colon U_i \cap U_j \to \mathrm{Gl}_k(\mathbb{R})\big(\subseteq \mathrm{Mat}_k(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{k^2}\big),\ p \mapsto \varphi_{ij}(p)$$

sicher glatt, weil sich jeder (r, s)-Eintrag von φ_{ij} ($1 \leq r, s \leq k$) schreiben lässt als

$$\big(\varphi_{ij}(p)\big)_{rs} = \big\langle e_r, \mathrm{pr}_2 \circ \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(p, e_s)\big\rangle$$

$\big($wo $\langle\ ,\ \rangle$ das kanonische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^k$ sei$\big)$.

(c) Die Mitglieder der Familie

$$\big(\varphi_{ij} \colon U_i \cap U_j \to \mathrm{Gl}_k(\mathbb{R})\big)_{i,j \in I}$$

heißen dann die **Übergangsfunktionen des Atlas $\mathfrak{A}$.**

(4.46) Definition. Sei $\pi \colon E \to M$ wie oben.

(a) Zwei Bündelatlanten $\mathfrak{A} = (\varphi_i)_{i \in I}$ und $\mathfrak{B} = (\psi_j)_{j \in J}$ heißen **äquivalent**, wenn auch $\mathfrak{C} := (\varphi_i, \psi_j)_{i \in I, j \in J}$ noch ein Bündelatlas ist.

(b) Eine Äquivalenzklasse $c = [\mathfrak{A}]$ von Bündelatlanten nennen wir eine **(Vektor-) Bündelstruktur auf π**.

(c) Ein Paar (π, c), bestehend aus einer glatten Abbildung $\pi \colon E \to M$ und einer Bündelstruktur $c = [\mathfrak{A}]$ heißt ein (glattes) **Vektor-(raum)-Bündel vom Rang k über M.**

(4.47) Kommentar.

(a) Ist $\pi \colon E \to M$ ein (glattes) Vektorbündel über M (und die Struktur c wird nicht mehr eigens notiert), so ist π insbesondere surjektiv und eine Submersion $\big($vgl. (4.43)$\big)$ und jede **Faser** $E_p := \pi^{-1}(p)$ ist diffeomorph zu $\mathbb{R}^k$.

(b) Man kann nun aber auf jeder Faser $E_p \subseteq E$ ($p \in M$) die Struktur eines k-dimensionalen (reellen) Vektorraums wie folgt einführen: Man wähle einen Repräsentanten $\mathfrak{A}$ der Bündelstruktur c, darin ein Mitglied $\varphi \colon \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ mit $p \in U$ und definiere mit Hilfe des induzierten Diffeomorphismus $\varphi_p \colon E_p \to \mathbb{R}^k$:

$$\xi +_\varphi \eta := \varphi_p^{-1}\big(\varphi_p(\xi) + \varphi_p(\eta)\big), \quad \lambda \cdot_\varphi \xi := \varphi_p^{-1}\big(\lambda \cdot \varphi_p(\xi)\big)$$

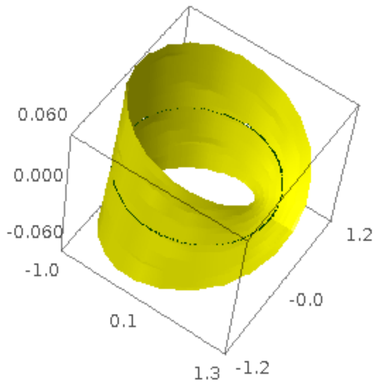


Abbildung 4.1.: Möbiusband mit Seele (dunkel)

für $\xi, \eta \in E_p$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Weil für eine weitere Bündelkarte $\psi\colon \pi^{-1}(\tilde{U}) \to \tilde{U} \times \mathbb{R}^k$ mit $p \in \tilde{U}$ (aus einem weiteren Atlas) der Übergang $\psi_p \circ \varphi_p^{-1}\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ linear ist, ist diese Definition unabhängig von der gewählten Karte:

$$\xi +_\psi \eta = \psi_p^{-1}(\psi_p(\xi) + \psi_p(\eta)) = \psi_p^{-1}(\psi_p \circ \varphi_p^{-1} \circ \varphi_p(\xi) + \psi_p \circ \varphi_p^{-1} \circ \varphi_p(\eta))$$
$$\underset{\psi_p \circ \varphi_p^{-1} \text{ linear}}{=} \psi_p^{-1}\Big(\psi_p \circ \varphi_p^{-1}(\varphi_p(\xi) + \varphi_p(\eta))\Big) = \varphi_p^{-1}(\varphi_p(\xi) + \psi_p(\eta)) = \xi +_\varphi \eta$$

(und ähnlich für $\lambda \cdot \xi$).

(c) Es ist also $E = \bigsqcup_{p \in M} E_p$[1] ein „Bündel von Vektorräumen über M“, zusammen mit einer Mannigfaltigkeit-Struktur derart, dass dieses Bündel **lokal trivial** ist in dem Sinne, dass jeder Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung U besitzt, so dass $E_U := \pi^{-1}(U)$ diffeomorph zu $U \times \mathbb{R}^k$ ist (mit einem Diffeomorphismus $\varphi\colon E_U \to U \times \mathbb{R}^k$, der zudem $\mathrm{pr}_1 \circ \varphi = \pi|E_U$ erfüllt und $\varphi_p = \mathrm{pr}_2 \circ \varphi|E_p\colon E_p \to \mathbb{R}^k$ ein Isomorphismus ist).

(d) Erwähnt sei aber bereits hier, dass E i.a. nicht **global trivial** sein muss, in dem Sinne, dass es einen Diffeomorphismus $\Phi\colon E \to M \times \mathbb{R}^k$ (mit $\mathrm{pr}_1 \circ \Phi = \pi$ und $\Phi_p = \mathrm{pr}_2 \circ \Phi|E_p\colon E_p \to \mathbb{R}^k$ Isomorphismus) gibt. Z.B. ist das **Möbiusband** (genaue Definition später) E mit der Projektion $\pi\colon E \to \mathbb{S}^1$ auf seine „Seele“, ein **Geradenbündel** (d.h.: ein Vektorraumbündel vom Rang 1) über $\mathbb{S}^1$, welches nicht bündel-isomorph $\big($vgl. (4.48)$\big)$ (und auch nicht diffeomorph) zum **Zylinder** $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ (mit $\pi = \mathrm{pr}_1$) ist.

(4.48) Definition. Sei M^n eine glatte Mannigfaltigkeit und $\pi_1\colon E_1 \to M$ und $\pi_2\colon E_2 \to M$ Vektorbündel über M.

(a) Eine glatte Abbildung $\Phi\colon E_1 \to E_2$ mit $\pi_2 \circ \Phi = \pi_1$ heißt ein **(Bündel-) Homomorphismus**, wenn für jedes $p \in M$ die induzierte Abbildung

$$\Phi_p\colon (E_1)_p \to (E_2)_p$$

linear bzgl. der Vektorraumstrukturen von $(E_1)_p$ und $(E_2)_p$ ist.

(b) Ein Homomorphismus $\Phi\colon E_1 \to E_2$ heißt ein **(Bündel-) Isomorphismus**, wenn es einen Homomorphismus $\Psi\colon E_2 \to E_1$ mit

$$\Psi \circ \Phi = \mathbb{1}_{E_1}, \quad \Phi \circ \Psi = \mathbb{1}_{E_2}.$$

E_1 und E_2 heißen isomorph, $E_1 \cong E_2$, wenn es einen Isomorphismus $\Phi\colon E_1 \to E_2$ gibt.

[1] $\bigsqcup$ bezeichnet die disjunkte Vereinigung.

(4.49) Beispiel. Sei M^n glatte Mannigfaltigkeit und $k \in \mathbb{N}$. Beachte die Produkt-Mannigfaltigkeit $E := M \times \mathbb{R}^k$, $\pi = \mathrm{pr}_1 \colon E \to M$. Dann ist π glatt und $\varphi \colon E \to M \times \mathbb{R}^k$, $\varphi = \mathbb{1}$, eine Bündelkarte $\big($auf ganz $E = \pi^{-1}(M)\big)$ mit $\mathrm{pr}_1 \circ \varphi = \pi$. Der Atlas $\mathfrak{A} = (\varphi)$, der nur aus der Karte φ besteht, macht dann $\pi \colon E \to M$ zu einem Vektorbündel vom Rang k über M. Wir notieren dieses Vektorbündel mit $\underline{\mathbb{R}}^k$ (wenn die Basis-Mannigfaltigkeit M klar ist).

Ein Vektorbündel $\pi \colon E \to M$ vom Rang k heißt **trivial**, wenn $E \cong \underline{\mathbb{R}}^k$ ist.

(4.50) Beispiel (wichtig). Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension n und

$$\mathrm{T}M = \sum_{p \in M} \mathrm{T}M_p \text{ mit } \pi \colon \mathrm{T}M \to \mathrm{T}M,\ \pi(\xi) = p \Longleftrightarrow \xi \in \mathrm{T}M_p$$

ihr Tangentialbündel. Wir versehen nun $\pi \colon \mathrm{T}M \to M$ nach und nach mit einer Vektorbündel-Struktur.

(a) Sei $\varphi \colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte (aus einem differenzierbaren Atlas $\mathfrak{A}$) von M. Für jedes $\xi \in \pi^{-1}(U) \subseteq \mathrm{T}M$ gibt es genau einen Vektor $y = (y^1, \dots, y^n) \in \mathbb{R}^k$, so dass $\big($mit $\varphi = (x^1, \dots, x^n)\big)$ gilt: $\xi = y^j \frac{\partial}{\partial x^j}|_p$ $\big($mit $p := \pi(\xi)\big)$, nämlich

$$y^j = \mathrm{d}x^j|_p(\xi).$$

Es ist

$$\tilde{\varphi} \colon \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n, \quad \tilde{\varphi}(\xi) := \big(\pi(\xi), \mathrm{d}x^1|_{\pi(\xi)}(\xi), \dots, \mathrm{d}x^n|_{\pi(\xi)}(\xi)\big)$$

eine Bijektion und damit auch

$$\hat{\varphi} \colon = (\varphi \times \mathbb{1}) \circ \tilde{\varphi} \colon \pi^{-1}(U) \to V \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{2n}$$

(und $V \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ ist offen).

(i) Man definiere nun eine Teilmenge $\tilde{U} \subseteq \tilde{M} := \mathrm{T}M$ als offen, wenn für alle Karten $\varphi \colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ (aus einem Atlas $\mathfrak{A}$ von M) gilt, dass

$$\tilde{\varphi}\big(\tilde{U} \cap \pi^{-1}(U)\big) \subseteq U \times \mathbb{R}^n$$

offen ist. Das macht $\tilde{M}$ zu einem topologischen Raum, der Hausdorffsch und von abzählbarer Topologie ist (und diese Topologie ist unabhängig von der Wahl von $\mathfrak{A}$). Die Bijektionen $\tilde{\varphi}$ (φ Mitglied in $\mathfrak{A}$) werden damit zu Homöomorphismen und damit $\tilde{M}$ $\big($vermöge der Homöomorphismen $\hat{\varphi} \colon \pi^{-1}(U) \to V \times \mathbb{R}^n\big)$ zu einer topologischen Mannigfaltigkeit der Dimension $2n$.

(ii) Sei $\mathfrak{A} = (\varphi_\alpha \colon U_\alpha \to V_\alpha)_{\alpha \in I}$ nun ein differenzierbarer Atlas von M. Dann ist auch

$$\tilde{\mathfrak{A}} = \big(\hat{\varphi}_\alpha \colon \pi^{-1}(U_\alpha) \to V_\alpha \times \mathbb{R}^n\big)_{\alpha \in I}$$

ein differenzierbarer Atlas von $\tilde{M}$, denn ist $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ (mit $\alpha, \beta \in I$), so ist für ein $\xi \in \pi^{-1}(p) \subseteq \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) = \pi^{-1}(U_\alpha) \cap \pi^{-1}(U_\beta)$.

$$\xi = y_\alpha^k \frac{\partial}{\partial x_\alpha^k} = y_\beta^l \frac{\partial}{\partial x_\beta^l}$$

und

$$y_\alpha^k = \underbrace{\frac{\partial x_\alpha^k}{\partial x_\beta^l}}_{=(\mathrm{Jac}(\varphi_{\alpha\beta})(x_\beta))_l^k} \cdot y_\beta^l \qquad \big(\text{mit } x_\beta = \varphi_\beta(p)\big).$$

Ist also $x_\alpha = \varphi_\alpha(p)$, $x_\beta = \varphi_\beta(p)$ und damit $x_\alpha = \varphi_{\alpha\beta}(x_\beta)$ für die glatten Übergänge $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ von $\mathfrak{A}$, so ist

$$\hat{\varphi}_\alpha \circ \hat{\varphi}_\beta(x_\beta, y_\beta) = \Big(\varphi_{\alpha\beta}(x_\beta), \big(\operatorname{Jac}(\varphi_{\alpha\beta})(x_\beta)\big)y_\beta\Big)$$

und damit glatt. Mit $\hat{\mathfrak{A}}$ wird damit $\tilde{M}$ zu einer glatten Mannigfaltigkeit der Dimension $2n$ (und die Struktur $\hat{c} = [\hat{\mathfrak{A}}]$ hängt nur von der Struktur $c = [\mathfrak{A}]$ auf M ab).

(iii) Schließlich ist nun $\pi\colon \mathrm{T}M \to M$ eine glatte Abbildung, denn ist $\xi \in \mathrm{T}M$, $p = \pi(\xi)$ und $\varphi\colon U \to V$ eine Karte auf M um p, d.h. $p \in U$, so gilt bzgl. der Karte $\hat{\varphi}\colon \pi^{-1}(U) \to V \times \mathbb{R}^n$ auf $\mathrm{T}M$ und φ auf M:

$$\begin{aligned}\varphi \circ \pi \circ \hat{\varphi}^{-1} &= \varphi \circ \pi \circ \tilde{\varphi}^{-1} \circ (\varphi^{-1} \times \mathbb{1}) \\ &= \varphi \circ \mathrm{pr}_1 \circ (\varphi^{-1} \times \mathbb{1}) && (\text{da } \mathrm{pr}_1 \circ \tilde{\varphi} = \pi) \\ &= \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \mathrm{pr}_1 = \mathrm{pr}_1, && \big(\text{da } \mathrm{pr}_1 \circ (f \times g) = f \circ \mathrm{pr}_1\big)\end{aligned}$$

also

$$\varphi \circ \pi \circ \hat{\varphi}^{-1}(x, y) = x$$

und damit glatt (um ξ, und damit überall).

(b) Für jede Karte $\varphi\colon U \to V$ (aus einem differenzierbaren Atlas $\mathfrak{A}$) von M wird damit $\tilde{\varphi}\colon \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$ zu einem Diffeomorphismus, weil bzgl. der Karten $\hat{\varphi}\colon \pi^{-1}(U) \to V \times \mathbb{R}^n$ und $\varphi \times \mathbb{1}\colon U \times \mathbb{R}^n \to V \times \mathbb{R}^n$ gerade

$$(\varphi \times \mathbb{1}) \circ \tilde{\varphi} \circ \hat{\varphi}^{-1} = (\varphi \times \mathbb{1}) \circ \tilde{\varphi} \circ \tilde{\varphi}^{-1} \circ (\varphi \times \mathbb{1})^{-1} = \mathbb{1}$$

ist. Schließlich ist auch $\mathrm{pr}_1 \circ \tilde{\varphi} = \pi$ nach Konstruktion, also $\tilde{\varphi}$ eine Bündelkarte.

Hat man nun zwei Karten $\varphi_\alpha\colon U_\alpha \to V_\alpha$ und $\varphi_\beta\colon U_\beta \to V_\beta$ (aus einem Atlas $\mathfrak{A}$) von M, so gilt für die zugehörigen Bündelkarten $\tilde{\varphi}_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ bzw. $\tilde{\varphi}_\beta\colon \pi^{-1}(U_\beta) \to U_\beta \times \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_\alpha \circ \tilde{\varphi}_\beta^{-1}(p, y_\beta) &= \big[(\varphi_\alpha \times \mathbb{1})^{-1} \circ \hat{\varphi}_\alpha\big] \circ \big[\hat{\varphi}_\beta^{-1} \circ (\varphi_\beta \times \mathbb{1})\big](p, y_\beta) \\ &= (\varphi_\alpha^{-1} \times \mathbb{1}) \circ (\hat{\varphi}_\alpha \circ \hat{\varphi}_\beta^{-1})(\varphi_\beta \times \mathbb{1})(p, y_\beta) \\ &= (\varphi_\alpha^{-1} \times \mathbb{1})\Big(\underbrace{\varphi_{\alpha\beta}}_{=\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}}\big(\varphi_\beta(p)\big), \operatorname{Jac}(\varphi_{\alpha\beta})\big(\varphi_\beta(p)\big)y_\beta\Big) \\ &= \Big(p, \big[\operatorname{Jac}(\varphi_{\alpha\beta}) \circ \varphi_\beta(p)\big]y_\beta\Big).\end{aligned}$$

Damit ist $\tilde{\varphi}_{\alpha\beta}(p)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gerade durch

$$y_\beta \mapsto \big(\operatorname{Jac}(\varphi_{\alpha\beta}) \circ \varphi_\beta(p)\big)y_\beta$$

gegeben und damit linear. Der Atlas

$$\tilde{\mathfrak{A}} := \big(\tilde{\varphi}_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^n\big)_{\alpha \in I}$$

$\big($wenn $\mathfrak{A} = (\varphi_\alpha\colon U_\alpha \to V_\alpha)_{\alpha \in I}$ ist$\big)$ macht also $\pi\colon \mathrm{T}M \to M$ zu einen Vektorbündel vom Rang n $\big($und $[\tilde{\mathfrak{A}}] =: \tilde{c}$ hängt nur von $c = [\mathfrak{A}]$ ab: $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B} \Longrightarrow \tilde{\mathfrak{A}} \sim \tilde{\mathfrak{B}}\big)$. Die Übergangsfunktionen $(\tilde{\varphi}_{\alpha\beta})$ sind gegeben durch:

$$\tilde{\varphi}_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \quad \tilde{\varphi}_{\alpha\beta} = \operatorname{Jac}(\varphi_{\alpha\beta}) \circ \varphi_\beta.$$

(4.51) Definition. Sei $\pi\colon E \to M$ ein Vektorbündel über einer Mannigfaltigkeit M und $U \subseteq M$ offen. Ein (glatter) **Schnitt in E über U** ist eine glatte Abbildung

$$s\colon U \to E \quad \text{mit} \quad \pi \circ s = \mathbb{1}_U.$$

Ist $U = M$ und $s\colon M \to E$ ein Schnitt, so spricht man von einem **globalen Schnitt in E**.

(4.52) Kommentar.

(a) Ist $\varphi\colon \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ eine Bündelkarte eines Vektorraumbündels $\pi\colon E \to M$ und ist $s\colon U \to E$ ein Schnitt in E über U, so gibt es eindeutig bestimmte glatte Funktionen $f^1, \dots, f^k\colon U \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi \circ s(p) = \big(p, f^1(p), \dots, f^k(p)\big) \in U \times \mathbb{R}^k, \quad \forall p \in U,$$

nämlich

$$f^i = \mathrm{pr}^i \circ \mathrm{pr}_2 \circ \varphi \circ s \quad (i = 1, \dots, k).$$

Umgekehrt definieren glatte Funktionen $f^1, \dots, f^k \in \mathcal{E}(U)$ durch

$$s(p) := \varphi^{-1}\big(p, f^1(p), \dots, f^k(p)\big)$$

einen glatten Schnitt in E über U. Bzgl. einer Bündelkarte $\varphi\colon \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ ist also ein globaler Schnitt über U das Gleiche, wie eine glatte vektorwertige Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}^k$.

(b) Global gesehen ist aber ein Schnitt in einem Vektorraumbündel $\pi\colon E \to M$ über einer offenen Menge $U \subseteq M$ (z.B. $U = M$) eine echte Verallgemeinerung von vektorwertigen Funktionen auf U in folgendem Sinn: Ist etwa $U = U_1 \cap U_2$ und $s\colon U \to E$ ein Schnitt in E über U, so gilt für zwei Bündelkarten $\varphi_1\colon \pi^{-1}(U_1) \to U_1 \times \mathbb{R}^k$ und $\varphi_2\colon \pi^{-1}(U_2) \to U_2 \times \mathbb{R}^k$, dass sich die zugehörigen vektorwertigen Funktionen $f_1\colon U_1 \to \mathbb{R}^k$ bzw. $f_2\colon U_2 \to \mathbb{R}^k$ $\big($nach (a)$\big)$ auf ihrem gemeinsamen Definitionsbereich wie folgt transformieren (und nicht etwa gleich sind):

$$f_1(p) = \varphi_{12}(p) f_2(p), \quad \forall p \in U_1 \cap U_2,$$

wobei $\varphi_{12}\colon U_1 \cap U_2 \to \mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$ der Übergang von E bzgl. der Bündelkarten φ_1 und φ_2 ist, denn:

$$\begin{aligned} f_1(p) &= \mathrm{pr}_2 \circ \varphi_1 \circ s(p) = (\varphi_1)_p \circ (\varphi_2)_p^{-1} \circ (\varphi_2)_p \circ s(p) \\ &= \varphi_{12}(p) \circ \underbrace{\mathrm{pr}_2 \circ \varphi_2 \circ s}_{=f_2}(p) = \varphi_{12}(p) \cdot f_2(p). \end{aligned}$$

(c) Ist $\pi\colon E \to M$ ein Vektorraumbündel über M, so notieren wir den Raum der globalen (glatten) Schnitte mit

$$\Gamma(E) := \Gamma(M; E) := \{s\colon M \to E \text{ glatter Schnitt}\}.$$

Er ist im offensichtlicher Weise ein $\mathbb{R}$-Vektorraum (unendlicher Dimension bei $\dim M \geq 1$ und $\mathrm{rg}(E) \geq 1$, Übung), sogar ein $\mathcal{E}(M)$-Modul:

$$\begin{aligned} (s_1 + s_2)(p) &:= s_1(p) + s_2(p) && \text{(Addition in } E_p) \\ (f \cdot s)(p) &:= f(p) \cdot s(p) && \text{(skalare Multipliktion in } E_p), \end{aligned}$$

$f \in \mathcal{E}(M)$, $s, s_1, s_2 \in \Gamma(E)$.

(4.53) Beispiel.

(a) Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit und $L = \underline{\mathbb{R}}$ $(= M \times \mathbb{R})$ das triviale Geradenbündel, so kann man die globalen Schnitte in L offenbar mit den glatten Funktionen auf M identifizieren $\big(s(p) = \big(p, f(p)\big)\big)$,

$$\Gamma(L) \cong \mathcal{E}(M)$$

(und genauso, wenn $L \cong \underline{\mathbb{R}}$ ist).

(b) Ist $\pi\colon E \to M$ ein Vektorraumbündel, so hat π stets einen trivialen Schnitt, nämlich den sogenannten **Nullschnitt**. Da nämlich jede Faser $E_p \subseteq E$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist, gibt es ein Nullelement $0_p \in E_p$, für alle $p \in M$. Der Nullschnitt ist dann durch $s\colon M \to E$,

$$s(p) = 0_p$$

gegeben. (Er ist glatt, weil für eine Bündelkarte $\varphi\colon \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ $s|U$ durch die Nullfunktion $0\colon U \to \mathbb{R}^k$ beschrieben ist.) Er ist dann Nullelement in den $\mathcal{E}(M)$-Modul $\Gamma(E)$.

(c) Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit und $\pi\colon \mathrm{T}M \to M$ ihr Tangentialbündel, so sind die glatten Schnitte in $\mathrm{T}M$ über einer offenen Menge $\big($wegen (4.52,a)$\big)$ gerade die glatten Vektorfelder auf U,

$$\Gamma(\mathrm{T}M_U) = \mathfrak{X}(U).$$

(4.54) Kommentar.

(a) Man sagt, dass ein Schnitt $s\colon M \to E$ in einem Vektorbündel $\pi\colon E \to M$ **nullstellenfrei** ist, wenn $s(p) \neq 0_p$ ist, für alle $p \in M$.

(b) Ist ein Vektorraumbündel $\pi\colon E \to M$ trivial, $E \cong \underline{\mathbb{R}}^k$ $\big($mit $k = \mathrm{rg}(E) \geq 1\big)$, so hat $\pi\colon E \to M$ offenbar stets nullstellenfreie schnitt, z.B. $s\colon M \to E$,

$$s(p) = (p, 1, 0, \dots, 0) \in M \times \mathbb{R}^k = \underline{\mathbb{R}}^k$$

$\big($bzw. $s(p) = \varphi^{-1}(p, 1, 0, \dots, 0)$, wenn $\varphi\colon E \to \underline{\mathbb{R}}^k$ ein Bündelisomorphismus ist$\big)$. Hat ein Bündel $\pi\colon E \to M$ etwa keinen nullstellenfreien (glatten) Schnitt, so kann es nicht trivial sein, $E \ncong \underline{\mathbb{R}}^k$. Z.B. hat nach dem **Igelsatz** (siehe Anhang A) $\mathbb{S}^n$ für n gerade kein nullstellenfreies (sogar nur stetiges) Vektorfeld, was demnach impliziert:

$$\mathrm{T}\mathbb{S}^n \ncong \underline{\mathbb{R}}^n,$$

für n gerade.

(4.55) Motivation. Konstruktionen mit Vektorräumen in der (multi-) linearen Algebra, die kanonisch sind in dem Sinne, dass sie nicht von der Wahl einer Basis abhängig sind $\big($z.B. direkte Summe, Tensorprodukt oder p-fache Dachprodukt $(p \in \mathbb{N}_0)\big)$, übertragen sich auf Vektorbündel, z.B.

(a) **Direkte Summe.** Sind $\pi_1\colon E_1 \to M$ und $\pi_2\colon E_2 \to M$ Vektorbündel über M, so gibt es (bis auf geeignete Isomorphie) genau ein Tripel $(\pi\colon E \to M,\ j_1\colon E_1 \to E,\ j_2\colon E_2 \to E)$, wo $\pi\colon E \to M$ ein Vektorbündel und j_1, j_2 Bündelhomomorphismen sind, die folgende universelle Eigenschaft erfüllen:

Ist $(\varrho\colon F \to M, j_1, j_2)$ ein weiteres solches Tripel, so gibt es genau einen Bündelhomomorphismus $T\colon E \to F$ mit $T \circ i_1 = j_1$, $T \circ i_2 = j_2$. Man nennt (E, i_1, i_2) die **direkte Summe von $\mathbf{E_1}$ und $\mathbf{E_2}$.**

$$\begin{tikzcd}
& F & \\
E_1 \arrow[ur, "j_1"] \arrow[dr, "i_1"'] & & E_2 \arrow[ul, "j_2"'] \arrow[dl, "i_2"] \\
& E \arrow[uu, dashed, "\exists_1 T"'] &
\end{tikzcd}$$

Konstruktion: Setze (als Menge)

$$E = \sum_{p \in M} E_p,\ E_p := (E_1)_p \oplus (E_2)_p \text{ und } \pi\colon E \to M,\ \pi(\xi) = p \iff \xi \in E_p.$$

Setze weiter

$$i_k\colon E_k \to E,\ i_k = \sum_p (i_k)_p \text{ mit } (i_k)_p\colon (E_k)_p \to E_p$$

die kanonischen Inklusionen ($k = 1, 2$). Wähle dann eine offene Überdeckung $(U_j)_{j \in J}$ von M, so dass Bündelatlanten

$$\mathfrak{A}_1 = \big(\varphi_j^{(1)}\colon \pi_1^{-1}(U_j) \to U_j \times \mathbb{R}^{k_1}\big)_{j \in J} \text{ und } \mathfrak{A}_2 = \big(\varphi_j^{(2)}\colon \pi_2^{-1}(U_j) \to U_j \times \mathbb{R}^{k_2}\big)_{j \in J}$$

existieren $\big(k_1 = \operatorname{rg}(E_1), k_2 = \operatorname{rg}(E_2)\big)$ und definiere

$$\mathfrak{A} = \big(\varphi_j\colon \pi^{-1}(U_j) \to U_j \times \mathbb{R}^{k_1 + k_2}\big)_{j \in J}$$

durch

$$\varphi_j(\xi) = \big(\pi(\xi), (y_1, y_2)\big) :\iff \begin{cases} \varphi_j^{(1)}(\xi_1) & = \big(\pi(\xi), y_1\big) \\ \varphi_j^{(2)}(\xi_2) & = \big(\pi(\xi), y_2\big) \end{cases}$$

und

$$\xi = (i_1)_p(\xi_1) + (i_2)_p(\xi_2) = (\xi_1, \xi_2) \quad \big(\text{mit } p = \pi(\xi)\big).$$

Sind nun $\big(\varphi_{ij}^{(1)}\colon U_i \cap U_j \to \mathrm{GL}_{k_1}(\mathbb{R})\big)_{i,j \in J}$ bzw. $\big(\varphi_{ij}^{(2)}\big)$ die Übergänge von $\mathfrak{A}_1$ bzw. $\mathfrak{A}_2$, so bekommt man für den Atlas $\mathfrak{A}$, dass

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}\big(p, (y_1, y_2)\big) = \big(p, \varphi_{ij}^{(1)}(p) y_1, \varphi_{ij}^{(2)}(p) y_2\big) = \Big(p, \varphi_{ij}(p) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\Big)$$

mit

$$\varphi_{ij}\colon U_i \cap U_j \to \mathrm{GL}_{k_1 + k_2}(\mathbb{R}), \qquad \varphi_{ij}(p) = \left(\begin{array}{c|c} \varphi_{ij}^{(1)}(p) & 0 \\ \hline 0 & \varphi_{ij}^{(2)}(p) \end{array}\right).$$

Damit wird $\pi\colon E \to M$ zu einem Vektorbündel vom Rang $k_1 + k_2$, die Abbildungen $i_k\colon E_k \to E$ zu Bündelhomomorphismen, die auch die gewünschte universellen Eigenschaft haben. $\big($Details sind Übungsaufgaben: z.B. Topologie und differenzierbare Struktur auf E werden mittels (φ_j) ähnlich wie bei der Konstruktion der entsprechenden Strukturen auf dem Tangentialbündel gemacht.$\big)$

(b) **Duales Bündel.** Ist $\pi\colon E \to M$ ein Vektorbündel vom Rang k, so versieht man leicht $\tilde{\pi}\colon E^* \to M$ mit

$$E^* = \sum_{p \in M} (E_p)^* \text{ und } \tilde{\pi}(\alpha) = p :\iff \alpha \in (E_p)^*$$

mit einer Vektorbündel-Struktur $\big($so dass $(E^*)_p = (E_p)^*$ ist$\big)$: Ist $\varphi\colon \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$, $U \subseteq M$ offen, Vektorbündelkarte von E und $\big((e_1)_p, \dots, (e_k)_p\big)$ die Basis von E_p, gegeben durch

$$(e_j)_p = \varphi^{-1}(p, e_j)$$

(wo $(e_1, \dots, e_k)$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^k$ sei), so sei $\big((\lambda^1)_p, \dots, (\lambda^k)_p\big)$ dazu duale Basis von E_p^*. Wir setzen dann $\tilde{\varphi}\colon \tilde{\pi}^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$, $\tilde{\varphi}(\alpha) = \big(\tilde{\pi}(\alpha), z\big)$ mit

$$\alpha = z_j (\lambda^j)_p.$$

Es wird dann $\tilde{\pi}\colon E^* \to M$ zu einem Vektorbündel, denn ist $\varphi_{12}\colon U_1 \cap U_2 \to \mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$ der Übergang zwischen zwei Bündelkarten $\varphi_1\colon \pi^{-1}(U_1) \to U_1 \times \mathbb{R}^k$ und $\varphi_2\colon \pi^{-1}(U_2) \to U_2 \times \mathbb{R}^k$ von $\pi\colon E \to M$, so gilt für die induzierten Bündelkarten $\tilde{\varphi}_1\colon \tilde{\pi}^{-1}(U_1) \to U_1 \times \mathbb{R}^k$ und $\tilde{\varphi}_2\colon \tilde{\pi}^{-1}(U_2) \to U_2 \times \mathbb{R}^k$ von $\tilde{\pi}\colon E^* \to M$, dass für $p \in U_1 \cap U_2$ und $z \in \mathbb{R}^k$

$$\tilde{\varphi}_1 \circ \tilde{\varphi}_2^{-1}(p, z) = \big(p, \tilde{\varphi}_{12}(p) \cdot z\big)$$

ist mit $\tilde{\varphi}_{12}\colon U_1 \cap U_2 \to \mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$.

$$\tilde{\varphi}_{12}(p) = \varphi_{21}^t(p) = \varphi_{12}^t(p)^{-1} \quad \text{(Übung).}$$

(c) **Homomorphismenbündel.** Sind $\pi_1\colon E_1 \to M$ und $\pi_2\colon E_2 \to M$ Vektorbündel, so führt eine nun hoffentlich offensichtliche Konstruktion zum **Homomorphismen-Bündel** $\pi\colon \mathrm{Hom}(E_1, E_2) \to M$. Für das triviale Geradenbündel $\underline{\mathbb{R}}$ erhält man speziell:

$$E^* = \mathrm{Hom}(E, \underline{\mathbb{R}}).$$

(d) **Tensorbündel.** Sind $\pi_1\colon E_1 \to M$ und $\pi_2\colon E_2 \to M$ Vektorbündel vom Rang k_1 bzw. k_2, so hat man mit einer ähnlichen Konstruktion das Tensorbündel $\pi\colon E_1 \otimes E_2 \to M$ mit einer universellen Eigenschaft, wobei hier $E_1 \times_{\pi_1, \pi_2} E_2 \to M$ **das Faserprodukt von $\mathbf{E_1}$ und $\mathbf{E_2}$** ist,

$$E_1 \times_{\pi_1 \pi_2} E_2 := \big\{(e_1, e_2) \in E_1 \times E_2 \;:\; \pi_1(e_1) = \pi_2(e_2)\big\} \subseteq E_1 \times E_2$$

$\big($und $\pi(e_1, e_2) = \pi_1(e_1) = \pi_2(e_2)\big)$

(F Vektorbündel über M, s faserweise bilinear $E_1 \times_{\pi_1 \pi_2} E_2$ ist übrigens natürlich auch die unterliegende Mannigfaltigkeit des Bündels $E_1 \oplus E_2$.)

$$\begin{tikzcd}
E_1 \times_{\pi_1 \pi_2} E_2 \arrow[r, "s"] \arrow[d, "\otimes"'] & F \\
E_1 \otimes E_2 \arrow[ur, "\exists_1 T"'] &
\end{tikzcd}$$

(e) **Dachformenbündel.** Ist $\pi\colon E \to M$ ein Vektorbündel vom Rang k und $0 \le p \le k$, so führt eine ebenso naheliegende Konstruktion zum p-fachen Dachformenbündel $\tilde{\pi}\colon \Lambda^p E \to M$ und ähnliches gilt für die **Algebrenbündel** $T(E) \to M$ oder $\Lambda(E) \to M$ (Übung).

(4.56) Beispiel. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $\pi\colon \mathrm{T}M \to M$ ihr Tangentialbündel. Aus den natürlichen Bündeloperationen erhält man nun:

(a) **Das Cotangentialbündel** $\pi\colon \mathrm{T}M^* \to M$ (oder auch $\mathrm{T}^*M = \mathrm{T}M^*$). Ist $U \subseteq M$ offen und $\omega\colon U \to \mathrm{T}^*M$ ein glatter Schnitt, so ist ω offenbar gerade eine (glatte) Differentialform auf U,

$$\Omega(U) = \Gamma(U, \mathrm{T}^*U).$$

(b) **Die Tensorbündel** $\pi\colon \mathrm{T}^{(p,q)}M \to M$ für $p, q \in \mathbb{N}_0$. Hierbei ist

$$\mathrm{T}^{(p,q)}M := \underbrace{\mathrm{T}M \otimes \cdots \otimes \mathrm{T}M}_{p\text{-mal}} \otimes \underbrace{\mathrm{T}^*M \otimes \cdots \otimes \mathrm{T}^*M}_{q\text{-mal}}.$$

Ist $U \subseteq M$ offen und $T\colon U \to \mathrm{T}^{(p,q)}M$ ein glatter Schnitt, so sprechen wir von einem **Tensorfeld** $\big($**der Stufe** $(\mathbf{p},\mathbf{q})\big)$. Beachte also das Transformationverhalten von solchen Tensorfelder $\big($vgl. (4.38)$\big)$. Sind $x\colon U \to V_1$ und $y\colon U \to V_2$ Karten der Mannigfaltigkeit mit Übergang $y = y(x)\colon V_1 \to V_2$ $\big($bzw. $x = x(y)\colon V_2 \to V_1\big)$, so gilt für ein Tensorfeld $T \in \Gamma(U; T^{(p,q)}U)$, dass mit

$$\begin{aligned} T &= \xi^{i_p,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \otimes \mathrm{d}x^{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x^{j_q} \\ &= \eta^{k_1,\dots,k_p}_{l_1,\dots,l_q} \frac{\partial}{\partial y^{k_1}} \otimes \cdots \frac{\partial}{\partial y^{k_p}} \otimes \mathrm{d}y^{l_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}y^{l_q} \end{aligned}$$

gilt:

$$\xi^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q}(x) = \frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{k_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial y^{k_p}} \cdot \frac{\partial y^{l_1}}{\partial x^{j_1}} \cdots \frac{\partial y^{l_q}}{\partial x^{j_q}} \cdot \eta^{k_1,\dots,k_p}_{l_1,\dots,l_q}\big(y(x)\big).$$

(c) **Das p-fache äußere Produkt des Cotangentialbündels** $\pi\colon \Lambda^p\mathrm{T}^*M \to M$ ($0 \le p \le n = \dim M$, für $p = 0$ versteht man $\Lambda^0\mathrm{T}^*M = \underline{\mathbb{R}}$: das triviale Geradenbündel), beachte: $\Lambda^1\mathrm{T}^*M = \mathrm{T}^*M$. Ist $U \subseteq M$ offen und $\omega\colon U \to \Lambda^p\mathrm{T}^*M$ ein glatter Schnitt, so sprechen wir von **einer Differentialform vom Grad p über U** und setzen

$$\mathcal{E}^{(p)}(U) := \Gamma(U; \Lambda^p\mathrm{T}^*U)$$

$\big($so dass also $\mathcal{E}^{(0)}(U) \cong \mathcal{E}(U)$ und $\mathcal{E}^{(1)}(U) = \Omega(U)$ ist$\big)$. Ist also $\omega \in \mathcal{E}^{(p)}(U)$ und $x\colon U \to V$ eine Karte, so gibt es eindeutig bestimmte glatte Funktionen $\eta_I \in \mathcal{E}(V)$ $\big(I$ eine p-elementige Teilmenge aus $\{1,\dots,n\} : I = \{i_1,\dots,i_p\}$ mit $i_1 < i_2 < \cdots < i_p\big)$, so dass gilt:

$$\omega = \eta_I(x)\mathrm{d}x^I \text{ mit } \mathrm{d}x^I = \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_p}.$$

Sind $x\colon U \to V_1$ und $y\colon U \to V_2$ zwei Karten und

$$\omega = \xi_I \mathrm{d}x^I = \eta_J \mathrm{d}y^J,$$

so erhält man das Transformationsverhalten $\big($vgl. (4.41)$\big)$:

$$\xi_I(x) = \det\Big(\frac{\partial y^J}{\partial x^I}\Big)(x)\eta_J\big(y(x)\big)^2$$

Insbesondere gilt für eine n-Form $\omega \in \mathcal{E}^{(n)}(U)$ ($n = \dim M$):

$$\omega = \xi(x)\mathrm{d}x = \eta(y)\mathrm{d}y :$$

(mit $\mathrm{d}x := \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$, $\mathrm{d}y := \mathrm{d}y^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}y^n$)

$$\xi(x) = \det\Big(\frac{\partial y}{\partial x}\Big) \cdot \eta\big(y(x)\big).$$

(4.57) Definition. Sei $\Phi\colon M \to N$ eine glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten M^n und N^r und $\pi_F\colon F \to N$ ein Vektorbündel vom Rang $k \in \mathbb{N}$ über N. Wir setzen

$$E := M \times_{\Phi,\pi_F} F = \big\{(p,\eta) \in M \times F \,:\, \Phi(p) = \pi_F(\eta)\big\},\ \pi_E\colon E \to M,\ \pi_E := \mathrm{pr}_1,$$

und nennen $\Phi^*F := E$ **das Rückzugsbündel von F unter Φ** (auch: **Pullback-Bündel**)

$$\begin{tikzcd} \Phi^*F \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1 = \pi_E"'] & F \arrow[d, "\pi_F"] \\ M \arrow[r, "\Phi"'] & N. \end{tikzcd}$$

[2]Wobei es sich bei $\det(\frac{\partial y^J}{\partial x^I})$ um den JI-Minor der Funktionalmatrix $\frac{\partial y}{\partial x} = (\frac{\partial y^j}{\partial x^i})_{1\le j,i\le n}$ handelt.

(4.58) Kommentar.

(a) Man beachte, dass über $p \in M$ gerade die Faser von $\pi_F \colon F \to N$ über $\Phi(p)$ sitzt:

$$(\Phi^*F)_p = F_{\Phi(p)} \quad \big(\text{vermöge } \operatorname{pr}_2|(\Phi^*F)_p\big).$$

(b) Ist $\varphi \colon \pi_F^{-1}(V) \to V \times \mathbb{R}^k$, $V \subseteq N$ offen, eine Bündelkarte von $\pi_F \colon F \to N$, so induziert φ eine Bijektion

$$\psi = \psi_\varphi \colon \pi_E^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$$

mit $U := \Phi^{-1}(V)$ durch

$$\psi(p,\eta) = \big(p, \operatorname{pr}_2 \circ \varphi(\eta)\big)$$

denn $U \times \mathbb{R}^k \to \pi_E^{-1}(U)$,

$$(p,y) \mapsto \big(p, \varphi^{-1}\big(\Phi(p),y\big)\big)$$

ist invers zu ψ:

$$\varphi^{-1}\big(\Phi(p), \operatorname{pr}_2 \circ \varphi(\eta)\big) = \varphi^{-1}\big(\pi_F(\eta), \operatorname{pr}_2 \circ \varphi(\eta)\big) = \varphi^{-1}\big(\underbrace{\operatorname{pr}_1 \circ \varphi(\eta), \operatorname{pr}_2 \circ \varphi(\eta)}_{=\varphi(\eta)}\big)$$
$$= \varphi^{-1} \circ \varphi(\eta) = \eta$$

und

$$\operatorname{pr}_2 \circ \varphi\big(\varphi^{-1}\big(\Phi(p),y\big)\big) = y.$$

Man versieht nun nacheinander $E = \Phi^*F$ mit der Topologie, so dass $\psi_i := \psi_{\varphi_i}$ ein Homöomorphismus ist (für alle Bündelkarten $\varphi_i \colon \pi_F^{-1}(V_i) \to V_i \times \mathbb{R}^k$ aus einem Bündelatlas $\mathfrak{A} = (\varphi_i)_{i\in I}$ von $F \to N$), dann mit einer differenzierbaren Struktur, so dass ψ_i ein Diffeomorphismus ist ($i \in I$), und schließlich mit einer Bündelstruktur, so dass

$$\mathfrak{B} = \big(\psi_i \colon \pi_E^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{R}^k\big)_{i\in I} \quad \big(\text{mit } U_i := \Phi^{-1}(V_i)\big)$$

ein Bündelatlas wird. Die Übergangsfunktionen dieses Atlas' sind dann gegeben durch

$$\psi_{ij} \colon U_i \cap U_j \to \mathrm{GL}_k \mathbb{R}, \quad \psi_{ij} = \varphi_{ij} \circ \Phi$$

$\big($wo $\varphi_{ij} \colon V_i \cap V_j \to \mathrm{GL}_k \mathbb{R}$ die Übergänge von $\mathfrak{A} = (\varphi_i)$ sind$\big)$, denn:

$$\psi_i \circ \psi_j^{-1}(p,y) = \psi_i\big(p, \varphi_j^{-1}\big(\Phi(p),y\big)\big) = \big(p, \underbrace{\operatorname{pr}_2 \circ \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}}_{\varphi_{ij}}\big(\Phi(p),y\big)\big) = \big(p, \varphi_{ij}\big(\Phi(p)\big)y\big),$$

also

$$\psi_{ij}(p) = \varphi_{ij}\big(\Phi(p)\big).$$

(4.59) Beispiel. Ist $\Phi \colon M \to N$ glatt, so ist das Differential $\mathrm{D}\Phi$ ein Bündelhomomorphismus von $\mathrm{T}M$ nach $\Phi^*(\mathrm{T}N)$ (über M),

$$\mathrm{D}\Phi \in \Gamma\big(M; \operatorname{Hom}\big(\mathrm{T}M, \Phi^*(TN)\big)\big)$$

oder, da für zwei Bündel $E \to M$ und $F \to M$ das Homomorphismen-Bündel $\operatorname{Hom}(E,F)$ kanonisch isomorph zu $E^* \otimes F$ ist, ist $\mathrm{D}\Phi$ ein globaler Schnitt in $\mathrm{T}M^* \otimes \Phi^*(\mathrm{T}N)$,

$$\mathrm{D}\Phi \in \Gamma\big(M; \mathrm{T}^*M \otimes \Phi^*(\mathrm{T}N)\big),$$

denn:

$$\mathrm{D}\Phi_p \colon \mathrm{T}M_p \to \mathrm{T}N_{\Phi(p)} = \big(\Phi^*(\mathrm{T}N)\big)_p$$

ist ein Homomorphismus zwischen Fasern von $\mathrm{T}M$ und $\Phi^*(\mathrm{T}N)$, und $p \mapsto \mathrm{D}\Phi_p$ hängt auch glatt von p ab, da bzgl. Karten $x\colon U \to U' \subseteq \mathbb{R}^n$ von M um p und $y\colon V \to V' \subseteq \mathbb{R}^r$ von N um $\Phi(p)$ $\big($mit $U = \Phi^{-1}(V)\big)$ $\mathrm{D}\Phi$ bzgl. der induzierten Bündelkarten gerade durch $U \times \mathbb{R}^n \to U \times \mathbb{R}^r$

$$(p, \xi) \mapsto \big(p, \mathrm{Jac}(y)(x)\xi\big)$$

beschrieben wird $\big($wenn wir mit $x \mapsto y(x)$ auch die lokale Beschreibung von Φ bzgl. x und y notieren$\big)$,

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "x"', "\cong"] & V \arrow[d, "y", "\cong"'] \\ U' \arrow[r, "y(x)"'] & V' \end{tikzcd} .$$

(4.60) Definition. Seien M und N glatt und $\Phi\colon M \to N$ eine glatte Abbildung. Für jedes offene $V \subseteq N$ definiert man **den Rückzug von Differentialformen**

$$\Phi^* \colon \mathcal{E}^{(k)}(V) \to \mathcal{E}^{(k)}\big(\Phi^{-1}(V)\big)$$

$(k \in \mathbb{N}_0)$ wie folgt: Ist $\omega \in \mathcal{E}^{(k)}(V)$, also

$$\omega_q := \omega(q) \in \Lambda^k \mathrm{T}^* N_q \cong \mathrm{Alt}_k(\mathrm{T}N_q), \text{ d.i. } \omega_q \colon \mathrm{T}N_q \times \cdots \times \mathrm{T}N_q \to \mathbb{R}$$

ist k-linear und alternierend, so setzt man $\Phi^*\omega \in \mathcal{E}^{(k)}\big(\Phi^{-1}(V)\big)$ fest durch $(\Phi^*\omega)_p := \Phi^*\omega(p) \in \Lambda^k \mathrm{T}M_p^* \cong \mathrm{Alt}_k(\mathrm{T}M_p)$ mit

$$(\Phi^*\omega)_p(\xi_1, \ldots, \xi_k) := \omega_{\Phi(p)}\big(\mathrm{D}\Phi_p(\xi_1), \ldots, \mathrm{D}\Phi_p(\xi_k)\big).$$

(4.61) Bemerkung. Sei $\Phi\colon M^n \to N^r$ glatt, $y\colon V \to V' \subseteq \mathbb{R}^r$ eine Karte auf N und $x\colon \Phi^{-1}(V) \to U' \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte auf M. Hat nun eine k-Form $\omega \in \mathcal{E}^{(k)}(V)$ die lokale Darstellung $\omega = \eta_I(y)\mathrm{d}y^I$, so gilt für den Rückzug $\Phi^*\omega \in \mathcal{E}^{(k)}\big(\Phi^{-1}(V)\big)$:

(a) $\Phi^*\omega = \det\left(\dfrac{\partial y^I}{\partial x^J}\right) \eta_I \circ y(x)\mathrm{d}x^J$,

(b) $\Phi^*\omega = \eta_I \circ y(x)\mathrm{d}(y^{i_1} \circ \Phi) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}(y^{i_k} \circ \Phi)$.

(4.62) Kommentar.

(a) Hierbei bezeichnet wieder $\frac{\partial y^I}{\partial x^J}$ die $k \times k$-Untermatrix von $\mathrm{Jac}(y)(x)$ $\big(x \mapsto y(x)$ die beschreibende Funktion von Φ bzgl. x und $y\big)$, die aus den Zeilen $i_1, \ldots, i_k$ und den Spalten $j_1, \ldots, j_k$ besteht $\big($wenn $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$, $i_1 < \cdots < i_k$ und $J = \{j_1, \ldots, j_k\}$, $j_1 < \cdots < j_k$ ist$\big)$.

(b) Das zeigt, dass $\Phi^*\omega$ tatsächlich glatt ist, wenn ω es ist.

(c) Man beachte insbesondere für den Rückzug von n-Formen, wenn $\dim M = \dim N = n$ ist: $\omega = \eta \mathrm{d}y^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y^n$

$$\Longrightarrow \Phi^*\omega = \left(\det\Big(\frac{\partial y}{\partial x}\Big)\eta \circ y(x)\right) \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$$

Beweis. (a) Sei $\Phi^*\omega = \xi_J(x)\mathrm{d}x^J$, also

$$\xi_J(x) = (\Phi^*\omega)_p\Big(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_k}}\Big|_p\Big)$$

$\big($bei $x = x(p)\big)$. Es folgt:

$$\begin{aligned}
\xi_J(x) &= \omega_q\bigg(\mathrm{D}\Phi_p\Big(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}\Big|_p\Big), \dots, \mathrm{D}\Phi_p\Big(\frac{\partial}{\partial x^{j_k}}\Big|_p\Big)\bigg) && \big(\text{bei } q = \Phi(p)\big)\\
&= \omega_q\Big(\frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{j_1}}\frac{\partial}{\partial y^{i_1}}\Big|_q, \dots, \frac{\partial y^{i_k}}{\partial x^{j_k}}\frac{\partial}{\partial y^{i_k}}\Big|_q\Big)\\
&= \sum_I \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_k} \frac{\partial y^{\sigma(i_1)}}{\partial x^{j_1}} \cdots \frac{\partial y^{\sigma(i_k)}}{\partial x^{j_k}} \omega_q\Big(\frac{\partial}{\partial y^{\sigma(i_1)}}\Big|_q, \dots, \frac{\partial}{\partial y^{\sigma(i_k)}}\Big|_q\Big)\\
&= \sum_I \underbrace{\bigg(\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_k} \frac{\partial y^{\sigma(i_1)}}{\partial x^{j_1}} \cdots \frac{\partial y^{\sigma(i_k)}}{\partial x^{j_k}} \cdot \operatorname{sgn}(\sigma)\bigg)}_{=\det(\frac{\partial y^I}{\partial x^J})(x)} \underbrace{\omega_q\Big(\frac{\partial}{\partial y^{i_1}}\Big|_q, \dots, \frac{\partial}{\partial y^{i_k}}\Big|_q\Big)}_{\eta_I(y)}\\
&= \bigg(\det\Big(\frac{\partial y^I}{\partial x^J}\Big)(x)\bigg)\eta_I \circ y(x) && \big(\text{bei } y = y(q)\big).
\end{aligned}$$

(b) Es ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(y^m \circ \Phi)\Big(\frac{\partial}{\partial x^l}\Big|_p\Big) &= \frac{\partial}{\partial x^l}\Big|_p (y^m \circ \Phi)_p = \frac{\partial}{\partial x^l}(y^m \circ \Phi \circ x^{-1})\Big|_{x_0}\\
&= \frac{\partial y^m}{\partial x^l}(x_0),
\end{aligned}$$

also $\mathrm{d}(y^m \circ \Phi) = \frac{\partial y^m}{\partial x^l}\mathrm{d}x^l$ und damit

$$\big(\mathrm{d}(y^{i_1} \circ \Phi) \wedge \dots \wedge \mathrm{d}(y^{i_k} \circ \Phi)\big)_p\Big(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}\Big|_p\Big) \overset{\text{wie in (a)}}{=} \dots = \det\Big(\frac{\partial y^I}{\partial x^J}\Big)(x_0). \qquad \square$$

(4.63) Erinnerung. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Wir hatten für jede offene Menge $U \subseteq M$ die Ableitung $\mathrm{d}\colon \mathcal{E}(U) \to \mathcal{E}^{(1)}(U)$ definiert durch

$$\mathrm{d}f(p) = \mathrm{d}f_p\colon \mathrm{T}M_p \to \mathbb{R},\ \xi \mapsto \xi(f_p)$$

und die lokale Beschreibung gefunden, dass, wenn $x\colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte ist, wir

$$\mathrm{d}f|U = \frac{\partial f}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i$$

erhalten.

Eine der Hauptgründe für die Einführung von Differentialformen höherer Ordnung ist nun der folgende Satz:

(4.64) Satz. *Sei M^n eine glatte Mannigfaltigkeit und $0 \le k \le n$. Es gibt nun einen eindeutig bestimmten Operator $\mathrm{d}_k\colon \mathcal{E}^{(k)}(M) \to \mathcal{E}^{(k+1)}(M)$ mit folgenden Eigenschaften:*

(a) Ist $p \in M$ und $U \subseteq M$ eine beliebige Umgebung von p, so hängt für $\omega \in \mathcal{E}^{(k)}(M)$ der Wert $\mathrm{d}_k\omega_p = \mathrm{d}_k\omega(p) \in \Lambda^{k+1}\mathrm{T}^*M_p$ nur von $\omega|U$ ab (wir sagen: d_k ist ein lokaler Operator).

(b) Ist $x\colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte und $\omega|U = \eta_I \mathrm{d}x^I$ mit $\eta_I \in \mathcal{E}(V)$ (für alle I), so gilt:

$$\mathrm{d}_k\omega|U = \mathrm{d}\eta_I \wedge \mathrm{d}x^I = \frac{\partial \eta_I}{\partial x^j}\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}$$

(bei $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ $i_1 < \cdots < i_k$).

(4.65) Kommentar.

(a) So wie für eine Funktion $f \in \mathcal{E}(M)$ kein „Gradient“ $\mathrm{grad}(f) \in \mathfrak{X}(M) = \Gamma(M; \mathrm{T}M)$ existiert, weil sich für Karten x und y um $p \in M$ die Gradienten von $f \circ x^{-1}$ und $f \circ y^{-1}$ nicht wie die Koeffizienten eines Vektorfeldes transformieren (sondern wie die einer 1-Form), gibt es auch keine „Hessesche“ $\mathrm{Hess}(f) \in \Gamma(M; \mathrm{T}^*M \otimes \mathrm{T}^*M)$ auf M, weil sich die Hesseschen von $f \circ x^{-1}$ und $f \circ y^{-1}$ nicht wie die Koeffizienten eines $(0,2)$-Tensors transformieren. (Nur in kritischen Punkten $p \in M$ für f gilt das.) Was sich aber „richtig“ transformiert (d.h. wie die Koeffizienten einer 2-Form) sind die Ausdrücke

$$\alpha_{ij}(x) = \frac{\partial f_i}{\partial x^j}(x) - \frac{\partial f_j}{\partial x^i}(x),$$

wenn ω eine 1-Form mit lokaler Beschreibung $\omega = f_i \mathrm{d}x^i$ und ähnliches für Formen höheren Grades. Das ist der Inhalt des Satzes.

(b) Ist $\omega \in \mathcal{E}^{(k)}(U)$, $x\colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte und $\omega = \eta_I \mathrm{d}x^I$, so beachte man, dass für den Koeffizienten $\alpha_J(x)$ von $\mathrm{d}\omega$ vor $\mathrm{d}x^J$, also $\mathrm{d}\omega = \alpha_J \mathrm{d}x^J$ mit nun $(k+1)$-elementigen Teilmengen $J = \{j_1, \ldots, j_{k+1}\}$ gilt:

$$\alpha_J(x) = \sum_{\kappa=1}^{k+1} (-1)^{\kappa+1} \frac{\partial \eta_{J \setminus \{j_\kappa\}}}{\partial x^{j_\kappa}}.$$

Eigentlich müsste man nun für den Beweis von (4.64) folgendes prüfen: Sind $\xi = (\xi_I)$ auf $V_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\eta = (\eta_J)$ auf $V_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ gegeben, so dass gilt:

$$\xi_I(x) = \det\left(\frac{\partial y^J}{\partial x^I}\right) \eta_J(y(x)),$$

wenn $y = y(x)\colon V_1 \to V_2$ ein Diffeomorphismus ist, denn dann beschreiben ξ und η die gleichen Differentialformen ω auf $U \subset M$, wenn $x\colon U \to V_1$ und $y\colon U \to V_2$ Karten sind, so gilt für $\alpha = (\alpha_I)$ bzw. $\beta = (\beta_J)$ mit

$$\alpha_I(x) = \sum_{\kappa=1}^{k+1} (-1)^{\kappa+1} \frac{\partial \xi_{I \setminus \{i_\kappa\}}}{\partial x^\kappa}, \quad \beta_J(y) = \sum_{\kappa=1}^{k+1} (-1)^{\kappa+1} \frac{\partial \eta_{J \setminus \{j_\kappa\}}}{\partial y^{j_\kappa}}$$

das Transformationsverhalten

$$\alpha_I(x) = \det\left(\frac{\partial y^J}{\partial x^I}\right) \beta_J(y).$$

Das ist aber zu kompliziert. Wir gehen anders vor.

***Beweis von* (4.64).** (a) **Eindeutigkeit.** Sei $p \in M$ und $x\colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte um p. Dann ist für $\omega \in \mathcal{E}^{(k)}(M)$ gerade $\omega|U = \eta_I(x)\mathrm{d}x^I$ mit $\eta_I \in \mathcal{E}(V)$ und daher $\mathrm{d}_k\omega = \mathrm{d}\eta_I \wedge \mathrm{d}x^I$, insbesondere

$$\mathrm{d}_k\omega_p = (\mathrm{d}\eta_I)_p \wedge \mathrm{d}x^I_p \in \Lambda^{k+1}\mathrm{T}^*M_p$$

und damit festgelegt.

(b) **Existenz.** Sei $p \in M$, $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ und $\varphi \colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte um p. Wir definieren dann:

$$\mathrm{d}_k^\varphi \colon \mathcal{E}^{(k)}(U) \to \mathcal{E}^{(k+1)}(U), \quad \mathrm{d}_k^\varphi \omega := \mathrm{d}\eta_I \wedge \mathrm{d}x^I.$$

Außerdem setzen wir

$$\mathcal{E}^*(U) := \bigoplus_{k=0}^{n} \mathcal{E}^{(k)}(U)$$

und

$$\mathrm{d}^\varphi \colon \mathcal{E}^*(U) \to \mathcal{E}^*(U), \quad \mathrm{d}^\varphi | \mathcal{E}^{(k)}(U) := \mathrm{d}_k^\varphi.$$

Wir stellen dann fest:

(i) Für $k = 0$ ist $\mathrm{d}_0^\varphi = \mathrm{d} \colon \mathcal{E}^{(0)}(U) \to \mathcal{E}^{(1)}(U)$ und damit unabhängig von φ;

(ii) d^φ ist $\mathbb{R}$-linear und eine Anti-Derivation, d.h. für $\omega_1 \in \mathcal{E}^{(k)}(U)$ und $\omega_2 \in \mathcal{E}^{(k)}(U)$ ist

$$\mathrm{d}_{k+l}^\varphi(\omega_1 \wedge \omega_2) = \mathrm{d}_k^\varphi \omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge \mathrm{d}_l^\varphi \omega_2. \tag{$*$}$$

(iii) Es ist $\mathrm{d}_{k+1}^\varphi \circ \mathrm{d}_k^\varphi = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$.

Dazu: (i) ist klar nach Definition.

Für (ii) sei $\omega_1 = \eta_I^{(1)} \mathrm{d}x^I \in \mathcal{E}^{(k)}(U)$ und $\omega_2 = \eta_J^{(2)} \mathrm{d}x^J \in \mathcal{E}^{(k)}(U)$. (Für $I \cap J \neq \emptyset$ ist $\mathrm{d}x^I \wedge \mathrm{d}x^J = 0$.)

$$\implies \omega_1 \wedge \omega_2 = \eta_I^{(1)} \eta_J^{(2)} \mathrm{d}x^I \wedge \mathrm{d}x^J,$$

also

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^\varphi(\omega_1 \wedge \omega_2) &= \mathrm{d}(\eta_I^{(1)} \eta_J^{(2)}) \wedge \mathrm{d}x^I \wedge \mathrm{d}x^J = \frac{\partial(\eta_I^{(1)} \eta_J^{(2)})}{\partial x^m} \mathrm{d}x^m \wedge \mathrm{d}x^I \wedge \mathrm{d}x^J \\
&\underset{\text{Leibniz-Regel}}{=} \Big(\frac{\partial \eta_I^{(1)}}{\partial x^m} \eta_J^{(2)} + \frac{\partial \eta_J^{(2)}}{\partial x^m} \eta_I^{(1)} \Big) \mathrm{d}x^m \wedge \mathrm{d}x^I \wedge \mathrm{d}x^J \\
&= \Big[\Big(\frac{\partial \eta_I^{(1)}}{\partial x^m} \mathrm{d}x^m \wedge \mathrm{d}x^I \Big) \wedge (\eta_J^{(2)} \mathrm{d}x^J) \Big] \\
&\qquad\qquad + \Big[(-1)^k (\eta_I^{(1)} \mathrm{d}x^I) \wedge \Big(\frac{\partial \eta_J^{(2)}}{\partial x^m} \mathrm{d}x^m \wedge \mathrm{d}x^J \Big) \Big] \\
&= \mathrm{d}^\varphi \omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge \mathrm{d}^\varphi \omega_2.
\end{aligned}$$

Für (iii) sei $\omega = \eta_I \mathrm{d}x^I$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^\varphi \circ \mathrm{d}^\varphi(\omega) &= \mathrm{d}^\varphi(\mathrm{d}\eta_I \wedge \mathrm{d}x^I) = \mathrm{d}^\varphi \Big(\frac{\partial \eta_I}{\partial x^j} \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^I \Big) \\
&= \frac{\partial^2 \eta_I}{\partial x^i \partial x^j} \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^I \\
&= \sum_{i<j} \underbrace{\Big(\frac{\partial^2 \eta_I}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 \eta_I}{\partial x^j \partial x^i} \Big)}_{=0 \text{ nach Schwarz}} \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^I.
\end{aligned}$$

Ist nun $\psi\colon U \to \tilde{V}$, $y = \psi(p)$, eine weiter Karte um p, so erfüllt auch $\mathrm{d}^\psi\colon \mathcal{E}^*(U) \to \mathcal{E}^*(U)$ die Eigenschaften (i) bis (iii), und daher gilt für $\omega = \eta_I(x)\mathrm{d}x^I$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^\psi\omega &\overset{\text{(ii)}}{=} \mathrm{d}^\psi(\eta_I \underbrace{\mathrm{d}x^I}_{=\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}})\\
&= \underbrace{\mathrm{d}^\psi\eta_I}_{\overset{\text{(i)}}{=}\mathrm{d}\eta_I} \wedge \mathrm{d}x^I + \underbrace{\sum_{j=1}^k (-1)^j \mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_{j-1}}\wedge\mathrm{d}^\psi(\mathrm{d}x^{i_j})\wedge\mathrm{d}x^{i_{j+1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}}_{=0 \text{ wegen } (**)}.
\end{aligned}$$

Denn wegen (iii) und (i) ist

$$\mathrm{d}_1^\psi(\mathrm{d}x^{i_j}) \overset{\text{(i)}}{=} \mathrm{d}_1^\psi(\mathrm{d}_0^\psi x^{i_j}) \overset{\text{(iii)}}{=} 0. \tag{$**$}$$

Also ist $\mathrm{d}^\psi\omega = \mathrm{d}\eta_I \wedge \mathrm{d}x^I = \mathrm{d}^\varphi\omega$. Wir können daher für $\omega \in \mathcal{E}^{(k)}(M)$ und $p \in M$ setzen:

$$\mathrm{d}_k\omega(p) := \mathrm{d}_k^\varphi\omega(p),$$

wo φ eine beliebige Karte um p ist. Dann ist $\mathrm{d}_k\omega \in \mathcal{E}^{(k+1)}(M)$ mit den gewünschten Eigenschaften (a) und (b) aus dem Satz. □

(4.66) Kommentar.

(a) Man beachte, dass wir gleich mit bewiesen haben $\mathrm{d}\colon \mathcal{E}^*(M) \to \mathcal{E}^*(M)$ ist

(i) linear und homogen vom Grad $+1$, d.h. $\mathrm{d}\big(\mathcal{E}^{(k)}(M)\big) \subseteq \mathcal{E}^{(k+1)}(M)$,

(ii) d ist eine **Anti-Derivation**, d.h. für homogene Elemente ω_1 und ω_2 gilt:

$$\mathrm{d}(\omega_1\wedge\omega_2) = \mathrm{d}\omega_1\wedge\omega_2 + (-1)^{\deg(\omega_1)}\omega_1\wedge\mathrm{d}\omega_2,$$

(iii) d ist ein **Differential** (im Sinne der algebraischen Topologie), d.h. $\mathrm{d}\circ\mathrm{d} = 0$ (kurz: $\mathrm{d}^2 = 0$).

(b) Zusammen mit der Eigenschaft, dass $\mathrm{d}|\mathcal{E}^{(0)}(M)$ die schon bekannte Ableitung ist, ist $\mathrm{d}\colon \mathcal{E}^*(M) \to \mathcal{E}^*(M)$ durch die Eigenschaft (i) und (iii) aus Bemerkung (a) eindeutig bestimmt (koordinatenfreie Charakterisierung von d, Übung).

(c) Man nennt $\mathrm{d}\colon \mathcal{E}^*(M) \to \mathcal{E}^*(M)$ die **äußere Ableitung** auf M. $A = \mathcal{E}^*(M)$ wird mit allen Strukturen zu einer **kommutativen graduierten Differentialalgebra**, wobei kommutativ im graduierten Sinn für homogene Elemente ω_1 vom Grad k und ω_2 vom Grad l bedeutet, dass

$$\omega_1\wedge\omega_2 = (-1)^{kl}\omega_2\wedge\omega_1$$

ist. Sie enthält beträchtliche Informationen über die Topologie von M (vgl. Übung).

(4.67) Bemerkung. Die äußere Ableitung ist verträglich mit dem Rückzug von Differentialformen in folgenden Sinn: Ist $\Phi\colon M \to N$ glatt und $\omega \in \mathcal{E}^*(N)$, so gilt

$$\mathrm{d}(\Phi^*\omega) = \Phi^*(\mathrm{d}\omega).$$

Beweis. Sei $p \in M$ beliebig und $y\colon V \to \tilde{V} \subseteq \mathbb{R}^r$ eine Karte um $q := \Phi(p)$. Ist $\omega \in \mathcal{E}^{(k)}(N)$, so gibt es Funktionen $\eta_I \in \mathcal{E}(\tilde{V})$ so, dass $\omega|V = \eta_I \mathrm{d}y^I$ ist. Es folgt

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\eta_I\wedge\mathrm{d}y^I = \frac{\partial\eta_I}{\partial y^m}\mathrm{d}y^m\wedge\mathrm{d}y^I$$

und daher

$$\Phi^*(\mathrm{d}\omega) \overset{(4.61,b)}{=} \frac{\partial \eta_I}{\partial y^m} \circ \Phi \cdot \mathrm{d}(y^m \circ \Phi) \wedge \mathrm{d}(y^{i_1} \circ \Phi) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}(y^{i_k} \circ \Phi)$$

auf V, insbesondere in p (bei $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ geordnet). Andererseits ist wieder nach (4.61,b)

$$\Phi^*\omega = \eta_I \circ \Phi \cdot \mathrm{d}(y^{i_1} \circ \Phi) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}(y^{i_k} \circ \Phi)$$

und daher (weil d eine Anti-Derivation und ein Differential ist)

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\Phi^*\omega) &= \mathrm{d}(\eta_I \circ \Phi) \wedge \mathrm{d}(y^{i_1} \circ \Phi) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}(y^{i_k} \circ \Phi) \\
&\qquad + \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \mathrm{d}(y^{i_1} \circ \Phi) \wedge \cdots \wedge \underbrace{\mathrm{d}^2(y^{i_j} \circ \Phi)}_{=0} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}(y^{i_k} \circ \Phi) \\
&= \frac{\partial(\eta_I \circ \Phi)}{\partial x^l} \mathrm{d}x^l \wedge \mathrm{d}(y^{i_1} \circ \Phi) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}(x^{i_k} \circ \Phi),
\end{aligned}$$

wo nun $x\colon U \to \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte um p sei und (nach evtl. Verkleinerung) $\Phi(U) \subseteq V$. Nach der Kettenregel ist jetzt

$$\frac{\partial(\eta_I \circ \Phi)}{\partial x^l} = \frac{\partial \eta_I}{\partial y^m} \circ \Phi \cdot \frac{\partial y^m}{\partial x^l} \quad \text{und} \quad \mathrm{d}(y^m \circ \Phi) = \frac{\partial y^m}{\partial x^l} \mathrm{d}x^l,$$

also ist auch

$$\mathrm{d}(\Phi^*\omega) = \frac{\partial \eta_I}{\partial y^m} \circ \Phi \cdot \mathrm{d}(y^m \circ \Phi) \wedge \mathrm{d}(y^{i_1} \circ \Phi) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}(y^{i_k} \circ \Phi)$$

in p richtig also tatsächlich überall $\Phi^*(\mathrm{d}\omega) = \mathrm{d}(\Phi^*\omega)$. $\square$

5 Kapitel 5.
Liegruppen

(5.1) Definition. Ein Paar $(G, \cdot)$ heißt eine **Liegruppe** (der Dimension $n \in \mathbb{N}_0$), wenn G eine Mannigfaltigkeit (der Dimension n) ist und $\cdot\colon G \times G \to G$ eine Gruppenstruktur, so dass $\cdot := \mathrm{mult}\colon G \times G \to G$ und auch $\mathrm{inv}\colon G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$ glatte Abbildungen sind.

(5.2) Kommentar.

(a) Dass die Gruppenverknüpfung $\mathrm{mult} = \cdot\colon G \times G \to G$ glatt ist meint natürlich bzgl. der induzierten glatten Struktur auf der Produkt-Mannigfaltigkeit $G \times G$.

(b) Das neutrale Element von G wird meist mit e (oder 1) bezeichnet. Ist die Gruppenstruktur abelsch, so wird die Verknüpfung auch mit $+$ bezeichnet, und das neutrale Element mit 0.

(c) Tatsächlich kann man mit Hilfe des impliziten Funktionensatzes zeigen, dass mit der Glattheit von $\mathrm{mult}\colon G \times G \to G$ die Inversenbildung $\mathrm{inv}\colon G \to G$ automatisch glatt ist (Übung). (Ich danke Meru Alagalingam für diesen Hinweis.)

(5.3) Beispiel.

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist $G = \mathbb{R}^n$ mit der Addition $+$ eine Liegruppe der Dimension n. Ebenso jeder endlich-dimensionale $\mathbb{R}$-Vektorraum V mit seiner additiven Struktur und seiner natürlichen Mannigfaltigkeit-Struktur.

(b) $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist als offene Menge in $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit und $(z, w) \mapsto zw$ bzw. $z \mapsto z^{-1}$ differenzierbar. Also ist $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ eine 2-dimensionale Liegruppe.

(c)
$$\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}^* \,:\, |z| = 1\}$$
ist eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{C}^*$ und eine Untergruppe von $\mathbb{C}^*$. Damit ist $(\mathbb{S}^1, \cdot)$ eine Liegruppe (der Dimension 1).

Beachte, dass damit die bis auf Diffeomorphie einzigen, zusammenhängenden 1-dimensionalen Mannigfaltigkeiten (ohne Rand), nämlich $M = \mathbb{R}$ oder $M = \mathbb{S}^1$ eine natürliche Lie-Struktur tragen. Beide sind abelsch.

(d) Da
$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2} \,:\, \det A \neq 0\}$$
ist, ist $\mathrm{GL}_n \mathbb{R} \subseteq \mathrm{Mat}_n \mathbb{R}$ offen und damit eine Mannigfaltigkeit der Dimension n^2. Die Matrizenmultiplikation $(A, B) \mapsto A \cdot B$ ist glatt, sogar polynomial, denn
$$(AB)^i_j = a^i_k b^k_j \quad \text{für } 1 \leq i, j \leq n$$

mit $A = (a^i_j)$, $B = (b^i_j)$ und auch die Inversenbildung ist nach der Formel

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^\sharp$$

mit der Adjunkten $A^\sharp$,

$$(A^\sharp)^i_j = (-1)^{i+j} \det(A^{ji})$$

(wo A^{ji} aus A durch Streichen der j Zeile und der i Spalte entsteht), glatt (sogar rational). Es ist also $(\mathrm{GL}_n \mathbb{R}, \cdot)$ eine Liegruppe (der Dimension n^2).

(e) Ebenso ist $\mathrm{GL}_n \mathbb{C} \subseteq \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n^2} = \mathbb{R}^{2n^2}$ eine Liegruppe der Dimension $2n^2$.

(f) Es ist

$$\mathbb{O}(n) = \{A \in \mathrm{GL}_n \mathbb{R} \,:\, {}^tAA = \mathbb{1}\}$$

einerseits eine (abgeschlossene) Untergruppe von $\mathrm{GL}_n \mathbb{R}$ und andererseits eine Untermannigfaltigkeit von $\mathrm{GL}_n \mathbb{R}$, denn $\mathbb{1} \in \mathrm{Sym}_n \mathbb{R}$ ist ein regulärer Wert der Abbildung $\Phi\colon \mathrm{GL}_n \mathbb{R} \to \mathrm{Sym}_n \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n+1)}$,

$$A \mapsto {}^tAA$$

(siehe (2.71,b)). Die **orthogonale Gruppe** $\mathbb{O}(n)$ wird damit zu einer Liegruppe der Dimension

$$n^2 - \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}n(n-1).$$

(g) Es ist auch

$$\mathrm{GL}^+_n(\mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{GL}_n \mathbb{R} \,:\, \det A > 0\}$$

eine offene Teilmenge von $\mathrm{GL}_n \mathbb{R}$ und eine Untergruppe. Auch $\mathrm{GL}^+_n \mathbb{R}$ ist damit eine Liegruppe der Dimension n^2. Sie ist zusammenhängend (Übung) und damit die Zusammenhangs-Komponente des neutralen Elementes von $\mathrm{GL}_n \mathbb{R}$.

(5.4) Bemerkung. Sei G eine Liegruppe der Dimension $n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist auch die Zusammenhangs-Komponente von $e \in G$, Notation: G^0, offen und eine Untergruppe von G und ist damit auch eine Liegruppe der Dimension n.

Beweis. Als Zusammenhangs-Komponente eines lokal wegzusammenhängenden Raumes G ist $G^0 \subseteq G$ offen und damit selbst eine Mannigfaltigkeit der Dimension n. G^0 ist zusammenhängend und damit wegzusammenhängend (siehe (1.47)).

Sind nun $g, h \in G^0$ beliebig und $\alpha, \beta\colon I \to G$ Wege von e nach g bzw. h, so ist $\gamma\colon I \to G$,

$$\gamma(t) = \alpha(t)\beta(t)$$

ein Weg von $\gamma(0) = e \cdot e = e$ nach $\gamma(1) = \alpha(1)\beta(1) = g \cdot h$. Es ist also auch $g \cdot h \in G^0$. Ebenso sieht man, dass mit $g \in G^0$ auch $g^{-1} \in G^0$ sein muss, indem man für $\alpha\colon I \to G$, $\alpha(0) = e$ und $\alpha(1) = g$ den Weg $\alpha^{-1}\colon I \to G$, $\alpha^{-1}(t) := \alpha(t)^{-1}$ betrachtet. $G^0 \subseteq G$ ist also eine Untergruppe und damit eine Liegruppe der Dimension n. □

(5.5) Definition. Sei G eine Liegruppe und $g \in G$. Dann nennen wir $l_g\colon G \to G$, $l_g(h) = g \cdot h$ **die Linkstranslation mit g auf G** und $r_g\colon G \to G$, $h \mapsto h \cdot g$, **die Rechtstranslation mit g auf G**.

(5.6) Kommentar. (a) Links und Rechtstranslation auf G sind glatt, denn sie sind Kompositionen von glatten Abbildungen. Z.B. ist

$$l_g = \mathrm{mult} \circ i_g,$$

wenn $\mathrm{mult}\colon G \times G \to G$ die Gruppenverknüpfung ist und $i_g\colon G \to G \times G$, $h \mapsto (g,h)$ die Inklusion. $\big($Für jede Mannigfaltigkeit M und jedes $p \in M$ ist $i_p\colon M \to M \times M$, $q \mapsto (p,q)$, glatt, denn lokal ist das $y \mapsto (x_0, y)$, $V \to V_0 \times V$, $V_0, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen$\big)$.

(b) l_g und r_g sind sogar Diffeomorphismen, denn $l_{g^{-1}}$ bzw. $r_{g^{-1}}$ sind offenbar invers zu l_g bzw. r_g:

$$l_{g^{-1}} = (l_g)^{-1}, \quad r_{g^{-1}} = (r_g)^{-1},$$

denn:

$$l_{g^{-1}} \circ l_g = \mathbb{1} = l_g \circ l_{g^{-1}},$$

weil

$$g^{-1}(gh) = (g^{-1}g)h = eh = h, \quad \forall h \in G.$$

(5.7) Definition.

(a) Seien G und H Liegruppen. Eine Abbildung $\varphi\colon G \to H$ heißt ein Lie-Homomorphismus, wenn sie glatt und ein Gruppenhomomorphismus ist,

$$\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2), \quad \forall g_1, g_2 \in G.$$

(b) Eine Abbildung $\varphi\colon G \to H$ heißt ein Lie-Isomorphismus, wenn φ ein Lie-Homomorphismus ist und es einen weitere Lie-Homomorphismus $\psi\colon H \to G$ mit

$$\psi \circ \varphi = \mathbb{1}_G, \quad \varphi \circ \psi = \mathbb{1}_H$$

gibt.

(5.8) Kommentar.

(a) Ein Lie-Isomorphismus $\varphi\colon G \to H$ ist also insbesondere ein Diffeomorphismus.

(b) Ist umgekehrt $\varphi\colon G \to H$ ein Lie-Homomorphismus, der ein Diffeomorphismus ist, so ist φ bereits Lie-isomorph, denn das Inverse $\psi\colon H \to G$ von φ ist dann automatisch homomorph:

$$\begin{aligned}\psi(h_1 h_2) &= \psi\big(\varphi \circ \psi(h_1) \cdot \varphi \circ \psi(h_2)\big) \\ &\underset{\varphi \text{ Hom.}}{=} \psi\Big(\varphi\big(\psi(h_1)\psi(h_2)\big)\Big) = \psi(h_1)\psi(h_2), \quad \forall h_1, h_2 \in H.\end{aligned}$$

(5.9) Beispiel.

(a) Die **spezielle orthogonale Gruppe**

$$\mathbb{SO}(n) := \{A \in \mathbb{O}(n) \,:\, \det(A) = 1\}$$

ist eine offene Untergruppe $\mathbb{O}(n)$, denn det nimmt auf $\mathbb{O}(n)$ nur die Werte ± 1 an. Da $\mathbb{SO}(n)$ zusammenhängend ist (Übung), ist $\mathbb{SO}(n)$ damit die Zusammenhangs-Komponente der $\mathbb{1}$ von $\mathbb{O}(n)$,

$$\mathbb{SO}(n) = \mathbb{O}(n)^0.$$

(b) Für $n = 1$ ist $S\mathbb{O}(1) \equiv \{e\}$, d.i. isomorph zur 0-dimensionalen trivialen Gruppe.
Für $n = 2$ gilt: $S\mathbb{O}(2) \cong \mathbb{S}^1$ (als Liegruppe), denn $\mathbb{S}^1 \to S\mathbb{O}(2)$

$$z \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(z) & -\mathrm{Im}(z) \\ \mathrm{Im}(z) & \mathrm{Re}(z) \end{pmatrix} \quad (z = e^{\mathrm{i}\,\alpha})$$

ist ein Isomorphismus, weil jedes Element in $S\mathbb{O}(2)$ von der Form $\left(\begin{smallmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{smallmatrix}\right)$, für ein $\alpha \in [0, 2\pi)$, ist.

(c) Die **unitäre Gruppe**

$$\mathbb{U}(n) := \{A \in \mathrm{GL}_n\,\mathbb{C} \,:\, {}^t\overline{A}A = \mathbb{1}\}$$

ist, ähnlich wie $\mathbb{O}(n) \subseteq \mathrm{GL}_n\,\mathbb{R}$, eine Liegruppe, weil $\mathbb{1}$ ein regulärer Wert von $\Phi\colon \mathrm{GL}_n\,\mathbb{C} \to \mathrm{Herm}(n)$,

$$\Phi(A) = {}^t\overline{A}A,$$

ist,

$$\mathrm{Herm}(n) = \{A \in \mathrm{Mat}_n\,\mathbb{C} \,:\, {}^t\overline{A} = A\}$$

die hermiteschen Matrizen sind. Da

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Herm}(n) = 2(1 + 2 + \cdots + n - 1) + n = n^2 - n + n = n^2$$

ist, hat $\mathbb{U}(n)$ die Dimension $2n^2 - n^2 = n^2$. Sie ist zusammenhängend und, genau so wie $\mathbb{O}(n)$, kompakt (da abgeschlossen und beschränkt in $\mathrm{Mat}_n\,\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^{2n^2}$ ist). Es ist $\mathbb{U}(1) \cong \mathbb{S}^1$ vermöge $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{U}(1)$, $z \mapsto (z)$.

(d) Die **spezielle unitäre Gruppe**

$$S\mathbb{U}(n) := \{A \in \mathbb{U}(n) \,:\, \det A = 1\} \subseteq \mathbb{U}(n)$$

ist eine 1-codimensionale Untermannigfaltigkeit und damit eine Liegruppe der Dimension $n^2 - 1$, weil $1 \in \mathbb{S}^1$ regulärer Wert der Abbildung $\det\colon \mathbb{U}(n) \to \mathbb{S}^1$ ist (Übung). Auch sie ist zusammenhängend und kompakt.

(e) Die **speziellen linearen Gruppen**

$$SL_n\mathbb{R} := \{A \in \mathrm{GL}_n\,\mathbb{R} \,:\, \det A = 1\}$$

und

$$SL_n\mathbb{C} := \{A \in \mathrm{GL}_n\,\mathbb{C} \,:\, \det A = 1\}$$

sind Liegruppen, weil einerseits Untergruppen und andererseits der Codimension 1 bzw. 2, da $\det\colon \mathrm{GL}_n\,\mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ bzw. $\det\colon \mathrm{GL}_n\,\mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ glatt sind und 1 als regulären Wert haben. Es folgt also:

$$\dim(SL_n\mathbb{R}) = n^2 - 1, \quad \dim(SL_n\mathbb{C}) = 2n^2 - 2.$$

(f) Sei Γ eine abzählbare Gruppe. Versieht man Γ mit der diskreten Topologie, so wird Γ ein Hausdorffraum mit abzählbarer Topologie, der offenbar auch eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension 0 wird. Die offensichtlichen Abbildungen von den einpunktigen Teilmengen nach $\mathbb{R}^0$ machen dann Γ zu einer 0-dimensionalen glatten Mannigfaltigkeit. Zusammen mit seiner Gruppenstruktur wird Γ damit zu einer 0-dimensionalen Liegruppe.

(g) Es ist auch
$$\mathbb{R}_+ \cong \mathrm{GL}_1^+(\mathbb{R})$$
eine Liegruppe, die aber vermöge
$$\exp\colon (\mathbb{R},+) \to (\mathbb{R}_+,\cdot), \quad t \mapsto e^t$$
isomorph zu $(\mathbb{R},+)$ ist.

Dagegen können $(\mathbb{C},+) \cong (\mathbb{R}^2,+)$ und $(\mathbb{C}^*,\cdot)$ nicht isomorph sein, da bereits $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ und $\mathbb{C}^* = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ als Mannigfaltigkeiten (sogar als topologische Räume) nicht diffeomorph (sogar homöomorph) sind (weil z.B. $\mathbb{C}$ einfach zusammenhängend ist, $\pi_1(\mathbb{C}) = (1)$, aber $\mathbb{C}^*$ nicht, $\pi_1(\mathbb{C}^*) \cong \mathbb{Z}$, vgl. (nächstes Semester)[1]).

(h) Ist V ein reeller Vektorraum der Dimension n, so ist V als Liegruppe isomorph zu $(\mathbb{R}^n,+)$, denn ist $(e_1,\ldots,e_n)$ eine Basis von V, so liefert der induzierte Koordinaten-Isomorphismus $\iota\colon \mathbb{R}^n \to V$ einen Lie-Isomorphismus.

(i) Auch
$$\mathrm{Aut}(V) = \{f \in \mathrm{End}(V) \,:\, f \text{ ist Isomorphismus}\}$$
ist eine Liegruppe. Ihre Mannigfaltigkeit-Struktur bekommt sie als offene Teilmenge von $\mathrm{End}(V) \cong V^* \otimes V$. Vermöge einer Basiswahl ist aber $\mathrm{Aut}(V)$ isomorph zu $\mathrm{GL}_n\,\mathbb{R}$,
$$\mathrm{Aut}(V) \cong \mathrm{GL}_n\,\mathbb{R}.$$

(j) $\mathrm{GL}_n\,\mathbb{R}$ hat sehr viele abgeschlossene Untergruppen, die damit (siehe Diffgeo III) allesamt zu Liegruppen werden. Z.B. bilden die trigonalen Matrizen
$$\mathrm{Hei}(n) := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n\,\mathbb{R} \right\} \cong \mathbb{R}^{\frac{1}{2}(n-1)n}$$
eine Untergruppe (prüfen!) und damit eine Liegruppe. Für $n=2$ ist sie isomorph zu $\mathbb{R}$, für $n=3$ erhält man:
$$\begin{pmatrix} 1 & x^1 & x^3 \\ 0 & 1 & x^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & y^1 & y^3 \\ 0 & 1 & y^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x^1+y^1 & x^3+y^3+x^1y^2 \\ 0 & 1 & x^2+y^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
damit nicht-abelsch, weil z.B.
$$(1,0,0)\cdot(0,1,0) = (1,1,1), \quad (0,1,0)\cdot(1,0,0) = (1,1,0)$$
ist. Es ist also $\mathrm{Hei}(3) \ncong A(3)$ $\big($mit $A(n) := (\mathbb{R}^n,+)\big)$.

(k) Viele Liegruppen lassen sich als abgeschlossene Untergruppen von $\mathrm{GL}_n\,\mathbb{R}$ (mit $n \in \mathbb{N}$ groß genug) realisieren. Z.B. ist die abelsche Liegruppe $A(n) = (\mathbb{R}^n,+)$ isomorph zu
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & & & x^1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & 0 & \ddots & x^n \\ & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{n+1}\,\mathbb{R} \,:\, x^1,\ldots,x^n \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{(Übung).}$$

[1] $\pi_1(X)$ bezeichnet hier die Fundamentalgruppe eines zusammenhängenden topologischen Raumes X.

(l) Sind G_1 und G_2 Liegruppe, so trägt $G_1 \times G_2$ eine natürliche Mannigfaltigkeit-Struktur und mit

$$(g_1, g_2) \cdot (h_1, h_2) = (g_1 h_1, g_2 h_2)$$

für $g_1, h_1 \in G_1$, $g_2, h_2 \in G_2$, auch eine natürliche Gruppenstruktur, die sich mit der Mannigfaltigkeit-Struktur verträgt. Es ist also in natürlicher Weise $G_1 \times G_2$ wieder eine Liegruppe (mit der universellen Eigenschaft eines Produktes in der Kategorie der Liegruppen). Z.B. ist der Torus

$$\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$$

also in natürlicher Weise eine Liegruppe.

(5.10) Bemerkung. Sei G eine Liegruppe und $G^0 \subseteq G$ die Zusammenhangs-Komponente der Eins. Ist dann $G = \bigsqcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ die Zerlegung von G in seine Zusammenhangs-Komponenten und $g_\alpha \in G_\alpha$, so bildet die Linkstranslation l_{g_α} G^0 diffeomorph auf G_α ab,

$$G_\alpha \cong G^0.$$

Beweis. Da G^0 zusammenhängend ist, liegt $l_{g_\alpha}(G^0)$ ganz in einer Zusammenhangs-Komponente von G (da l_{g_α} stetig ist) und $g_\alpha = l_{g_\alpha}(e)$. Also ist $l_{g_\alpha}(G^0) \subseteq G_\alpha$. Aus dem gleichen Grund ist auch $l_{g_\alpha^{-1}}(G_\alpha) \subseteq G^0$. Es folgt:

$$G_\alpha = \mathbb{1}(G_\alpha) = l_{g_\alpha} \circ l_{g_\alpha^{-1}}(G_\alpha) \subseteq l_{g_\alpha}(G^0),$$

also

$$l_{g_\alpha}(G^0) = G_\alpha.$$

Da l_{g_α} Diffeomorphismus ist, ist es auch die Einschränkung $l_{g_\alpha}|G^0 \colon G^0 \to G_\alpha$. □

(5.11) Vorbereitung.

(a) Sei G eine Liegruppe und $\Gamma \subseteq G$ eine diskrete Untergruppe, d.h.: die induzierte Teilraumtopologie auf Γ ist diskret. Die Wirkung von Γ auf G durch Rechts-Translation,

$$\Gamma \colon \Gamma \times G \to G, \quad \gamma.g := g\gamma^{-1}$$

ist dann frei, eigentlich diskontinuierlich und der Quotient

$$G/\Gamma = \{g\Gamma \ : \ g \in G\}$$

der Linksnebenklassen ist hausdorffsch (Übung). Es trägt deshalb G/Γ nach (2.26) eine natürliche Mannigfaltigkeit-Struktur, so dass die kanonische Projektion $\pi \colon G \to G/\Gamma$ glatt ist.

(b) Sei nun $\Gamma \subseteq G$ diskret und zusätzlich ein Normalteiler, also $g\Gamma = \Gamma g$, $\forall g \in G$. Dann trägt G/Γ eine natürliche Gruppenstruktur, so dass π ein Gruppenhomomorphismus ist.

(5.12) Satz. *Sei G eine Liegruppe und $\Gamma \subseteq G$ diskreter Normalteiler. Dann trägt der Raum der Γ-Linksnebenklassen genau eine Liestruktur, so dass gilt (universelle Eigenschaft): Ist H eine Liegruppe und $\varphi \colon G \to H$ ein Lie-Homomorphismus mit $\Gamma \subseteq \ker(G)$, so gibt es genau einen Lie-Homomorphismus $\overline{\varphi} \colon G/\Gamma \to H$ mit $\overline{\varphi} \circ \pi = \varphi$,*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H \\ G/\Gamma \arrow[ur, dashed, "\overline{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

Beweis. (a) Die Eindeutigkeit folgt aus der universellen Eigenschaft (Übung).

(b) Auch $\Gamma \times \Gamma \subseteq G \times G$ operiert frei, eigentlich diskontinuierlich und mit hausdorffschen Bahnenraum. Es ist also $G \times G/\Gamma \times \Gamma$ eine Mannigfaltigkeit und die natürliche Abbildung
$$G \times G/\Gamma \times \Gamma \to G/\Gamma \times G/\Gamma, \quad (g,h)\Gamma \times \Gamma \to (g\Gamma, h\Gamma)$$
ist ein Diffeomorphismus. (Benutze die universellen Eigenschaften
$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "\pi_G \times \pi_G"] \arrow[d, "\pi_{G\times G}"'] & G/\Gamma \times G/\Gamma \\ G \times G/\Gamma \times \Gamma \arrow[ur, dashed, "\Phi"'] & \end{tikzcd}$$
und dass $\pi_G\colon G \to G/\Gamma$ lokaler Diffeomorphismus ist.) Weil nun das folgende Diagramm kommutiert,
$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "\mathrm{mult}_G"] \arrow[d, "\pi_{G\times G}"'] & G \arrow[d, "\pi_G"] \\ G \times G/\Gamma \times \Gamma \arrow[r, dashed, "\overline{\mathrm{mult}_G}"] \arrow[d, "\Phi^{-1}"'] & G/\Gamma \\ G/\Gamma \times G/\Gamma \arrow[ur, "\mathrm{mult}_{G/\Gamma}"'] & \end{tikzcd}$$
(Ebenso zeigt das Diagramm
$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\mathrm{inv}_G"] \arrow[d, "\pi"'] & G \arrow[d, "\pi"] \\ G/\Gamma \arrow[r, "\mathrm{inv}_{G/\Gamma}"] & G/\Gamma, \end{tikzcd}$$
dass $\mathrm{inv}_{G/\Gamma}$ glatt ist.) Es ist also $(G/\Gamma, \mathrm{mult}_{G/\Gamma})$ eine Liegruppe.

(c) Ist H eine Liegruppe und $\varphi\colon G \to H$ Lie-Homomorphismus mit $\Gamma \subseteq \ker(\varphi)$, so gibt es zunächst einmal einen eindeutig bestimmten Gruppen-Homomorphismus $\overline{\varphi}\colon G/\Gamma \to H$ mit $\overline{\varphi} \circ \pi = \varphi$. Es gibt auch eine eindeutig bestimmte glatte Abbildung $\Phi\colon G/\Gamma \to H$ mit $\Phi \circ \pi = \varphi$. Da π surjektiv ist, muss gelten: $\overline{\varphi} = \Phi$. Es ist damit $\overline{\varphi}$ ein Lie-Homomorphismus. □

(5.13) Kommentar.

(a) Das produziert weitere Beispiele aus bekannten Beispielen. Z.B. ist $\mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ eine diskrete Untergruppen (manchmal auch **Gitter** gennant). Deshalb trägt $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ in natürlicher Weise eine Lie-Struktur, die aber isomorph zu der Produkt-Struktur aus (5.9,l) ist, weil
$$\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \to (\mathbb{S}^1)^n, \quad (t^1, \dots, t^n) + \mathbb{Z}^n \mapsto (e^{2\pi \mathrm{i}\, t_1}, \dots, e^{2\pi \mathrm{i}\, t_n})$$
ein Lie-Isomorphismus ist.

(b) Die Zusammenhangs-Komponente G^0 der Eins einer Liegruppe G ist ein Normalteiler, denn ist $h \in G^0$ und $\alpha\colon [0,1] \to G^0$ ein Weg von $e = \alpha(0)$ nach $h = \alpha(1)$, so ist auch für jedes $g \in G$ $ghg^{-1} \in G^0$, denn $\beta\colon I \to G$ mit
$$\beta(t) = ga(t)g^{-1}$$

ist ein Weg von $\beta(0) = geg^{-1} = e$ nach $\beta(1) = ghg^{-1}$. Also ist $gG^0g^{-1} \subseteq G^0$ und damit $G^0 \subseteq G$ normal.

Der Quotient $\Gamma := G/G^0$ trägt die diskrete Topologie (als Quotiententopologie) und ist damit eine 0-dimensionale Liegruppe (manchmal auch als **diskrete Gruppe** bezeichnet). Sie heißt die **Gruppe der Zusammenhangs-Komponenten von G**.

Man hat dann **eine exakte Sequenz von Liegruppen**

$$1 \to G^0 \stackrel{i}{\to} G \stackrel{\pi}{\to} \Gamma \to 1, \tag{$*$}$$

wo i die Inklusion und π die Projektion ist. $\big($Eine Sequenz $\cdots \to G_{i-1} \stackrel{\alpha_{i-1}}{\to} G_i \stackrel{\alpha_i}{\to} G_{i+1} \to \cdots$ heißt **exakt**, wenn an jeder Stelle gilt: $\mathrm{im}(\alpha_{i-1}) = \ker(\alpha_i)\big)$ Das Studium von G wird so in gewisser Weise auf das Studium der zusammenhängenden Liegruppe G^0 und der diskreten Liegruppe Γ aufgeteilt. $\big($Beachte aber, dass $(*)$ i.a. nicht impliziert, dass $G \cong G^0 \times \Gamma$ ist.$\big)$

Teil III.

Differentialgeometrie III

(5.14) Erinnerung. Eine Gruppe $(G,\cdot)$ heißt eine **Liegruppe der Dimension n**, wenn G eine glatte Mannigfaltigkeit ist und die Abbildungen $\operatorname{mult}\colon G\times G\to G$, $(g,h)\mapsto gh$ und $\operatorname{inv}\colon G\to G$, $g\mapsto g^{-1}$ glatt sind.

(5.15) Kommentar (Meru). Es reicht zu fordern, dass mult glatt ist. Die Inversenabbildung inv ist es dann automatisch. Betrachte dazu

$$M=\{(g,g^{-1})\in G\times G\,:\,g\in G\}=\operatorname{mult}^{-1}(e)\subseteq G\times G$$

($e\in G$ das neutrale Element). Bezeichnen

$$i_g^1\colon G\to G\times G,\ h\mapsto (h,g),\quad i_g^2\colon G\to G\times G,\ h\mapsto (g,h)$$

die (glatten) Inklusionen, so ist wegen

$$\operatorname{mult}\circ i^1_{g^{-1}}=r_{g^{-1}},$$

wo $r_g\colon G\to G$ die Rechtsmultiplikation mit g ist, $h\to hg$, auch:

$$(\mathrm{D}\operatorname{mult})_{(g,g^{-1})}\circ(\mathrm{D}i^1_{g^1})_g=(\mathrm{D}r_{g^{-1}})_g,$$

für $g\in G$. Da aber $r_{g^{-1}}$ ein Diffeomorphismus ist (vgl. (5.6,b)), ist $(\mathrm{D}r_{g^{-1}})_g\colon \mathrm{T}G_g\to\mathrm{T}G_e$ surjektiv und damit auch $(\mathrm{D}\operatorname{mult})_{(g,g^{-1})}\colon \mathrm{T}(G\times G)_{(g,g^{-1})}\to\mathrm{T}G_e$. Es ist damit $e\in G$ ein regulärer Wert von mult und daher $M\subseteq G\times G$ eine Untermannigfaltigkeit der Codimension (und damit auch der Dimension) n in $G\times G$. Weiter ist wegen

$$\operatorname{mult}\circ i_g^2=l_g$$

wo $l_g\colon G\to G$ die Linksmultiplikation $h\mapsto gh$ ist, auch

$$\mathrm{D}(\operatorname{mult}\circ i_g^2)_{g^{-1}}=(\mathrm{D}l_g)_{g^{-1}}\colon \mathrm{T}G_{g^{-1}}\to\mathrm{T}G_e$$

invertierbar, also auch mit der Kettenregel

$$(\mathrm{D}\operatorname{mult})_{(g,g^{-1})}|\mathrm{D}i_g^2(\mathrm{T}G_{g^{-1}})\colon \mathrm{D}i_g^2(\mathrm{T}G)_{g^{-1}}\to\mathrm{T}G_e.$$

Nach dem impliziten Funktionensatz ist daher M lokal um $(g,g^{-1})\in M$ Graph einer glatten Abbildung $f\colon U\to V$ mit $U,V\subseteq G$ offen, $g\in U$, $g^{-1}\in V$:

$$M\cap(U\times V)=\{(h,f(h))\,:\,h\in U\}.$$

Das zeigt, dass die glatte und bijektive Abbildung $\mathrm{pr}_1|M\colon M\to G$, $(g,h)\mapsto g$, ein glattes Inverses hat, nämlich lokal um g ist

$$(\mathrm{pr}_1|M)^{-1}(h)=(h,f(h))$$

(und global natürlich $(\mathrm{pr}_1|M)^{-1}(h)=(h,h^{-1})$). Es folgt, dass

$$\operatorname{inv}=\mathrm{pr}_2\circ(\mathrm{pr}_1|M)^{-1}$$

glatt ist.

(5.16) Definition. Sei G eine Liegruppe. Ein Vektorfeld X auf G heißt **links-invariant** (resp. rechts-invariant), wenn für $g,h\in G$ gilt:

$$X_{gh}=(\mathrm{D}l_g)_hX_h\quad\big(\text{resp.}X_{hg}=(\mathrm{D}r_g)_h(X_h)\big).\tag{$*$}$$

(5.17) Kommentar.

(a) Man beachte, dass $(*)$ gerade bedeutet, dass X l_g-bezogen zu sich selbst im Sinne von Definition (3.36) ist:
$$X \circ l_g = \mathrm{D}l_g \circ X$$

(b) Man beachte auch, dass es reichen würde $(*)$ nur für $h = e$ zu fordern,
$$X_g = (\mathrm{D}l_g)_e(X_e), \ \forall g \in G. \qquad (**)$$
Wegen der Kettenregel würde sie dann auch für alle $h \in G$ gelten:
$$X_{gh} \overset{(**)}{=} (\mathrm{D}l_{gh})_e(X_e) = \big(\mathrm{D}(l_g \circ l_h)\big)_e(X_e) \overset{\mathrm{KR}}{=} (\mathrm{D}l_g)_h\big((\mathrm{D}l_h)_e(X_e)\big) \overset{(**)}{=} (\mathrm{D}l_g)_h(X_h)$$

(c) Links- (und rechts-) invariante Vektorfelder sind automatisch glatt, weil für eine glatte Funktion $f \in \mathcal{E}^{(0)}(G)$ mit beliebigen glatten Fortsetzung $Y \in \mathfrak{X}(G)$ von X_e, d.h. $Y_e = X_e$, gilt (Übung):
$$Xf = (0, Y)(f \circ \mathrm{mult}) \circ i_e^1.$$

(5.18) Satz. *Sei G eine Liegruppe und*
$$\mathfrak{g} := \{X \in \mathfrak{X}(G) \ : \ X \textit{ ist links-invariant}\} \ \big(=: \mathrm{Lie}(G)\big)$$
die Menge der links-invarianten Vektorfelder. Dann gilt:

*(a) $\mathfrak{g}$ ist eine **Lie-Unteralgebra** von $\mathfrak{X}(G)$, d.h.: $\mathfrak{g}$ ist ein $\mathbb{R}$-Unterraum und für $X, Y \in \mathfrak{g}$ gilt: $[X, Y] \in \mathfrak{g}$.*

(b) Die Auswertung im neutralen Element $e \in G$ ist ein Vektorraum-Isomorphismus, $\alpha\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{T}G_e$,
$$\alpha(X) = X_e.$$

(5.19) Kommentar.

(a) Während die Lie-Algebra aller glatten Vektorfelder $\mathfrak{X}(M)$ auf einer glatten Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 1$ stets unendlich-dimensional ist, ist bei einer Liegruppe G die Unteralgebra ihrer linksinvarianten Vektorfelder $\mathfrak{g}$ stets endlich-dimensional. Sie hat $\big($wegen (b)$\big)$ die Dimension der Gruppe
$$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} = \dim G.$$

(b) Beachte, dass ein einzelner Tangentialraum einer Mannigfaltigkeit im allgemeinen keine Lie-Algebra-Struktur trägt. Beim Tangentialraum $\mathrm{T}G_e$ einer Liegruppe G am neutralen Element $e \in G$ dagegen könnte man definieren: $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]\colon \mathrm{T}G_e \times \mathrm{T}G_e \to \mathrm{T}G_e$
$$[\xi, \nu] := [X, Y]_e,$$
wo $X, Y \in \mathfrak{X}(G)$ die eindeutig bestimmten **links-invarianten Fortsetzungen** (d.i.: die Urbilder von ξ, ν unter α) sind. Das macht $\big(\mathrm{T}G_e, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]\big)$ zu einer (endlich-dimensionalen) Liealgebra, die (nach Definition) vermöge α Lie-Isomorph zu $\mathfrak{g}$ ist.

(c) Wir nennen $\mathfrak{g}$ die **Liealgebra von G** und betrachten wie in (b) manchmal als $\mathrm{T}G_e$ mit der von α induzierten Lie-Struktur. Wir werden sehen, dass sie beträchtliche Informationen über G enthält. Sie ist eine Art „Linearisierung“ von G. (Beachte, dass Lie-Algebren strukturell einfach sind als Liegruppen.) Die Lie-Algebra einer Lie-Gruppe wird häufig mit dem zugehörigen (alt-) deutschen Buchstaben bezeichnet, z.B.: $\mathrm{Lie}(G) = \mathfrak{g}$, $\mathrm{Lie}(H) = \mathfrak{h}$, $\mathrm{Lie}(K) = \mathfrak{k}, \ldots$

Beweis von (5.18)**.** (a) Dass $\mathfrak{g}$ ein linearer Unterraum ist, folgt aus

$$(\lambda X + Y) \circ l_g = \lambda \cdot X \circ l_g + Y \circ l_g, \quad \lambda \in \mathbb{R},\, X, Y \in \mathfrak{X}(G)$$

und der Linearität $\mathrm{D}l_g$ in jedem Punkt,

$$\mathrm{D}l_g(\lambda X + Y) = \lambda \mathrm{D}l_g(X) + \mathrm{D}l_g(Y)$$

Damit ist $\mathfrak{g}$ ein linearer Unterraum von $\mathfrak{X}$. Erinnere aus (3.37), dass, wenn $\Phi\colon M \to N$ glatt ist, X und $\tilde{X}$ Φ-bezogen Y und $\tilde{Y}$ Φ-bezogen $\Longrightarrow$ $[X, Y]$ und $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ ist auch Φ-bezogen. Da X l_g-bezogen auf X, Y l_g-bezogen auf $Y \Longrightarrow [X, Y]$ ist l_g-bezogen auf $[X, Y]$, also $[X, Y]$ auch links-invariant, wenn X und Y es waren. $\Longrightarrow \mathfrak{g} \in \mathfrak{X}(G)$ ist Unteralgebra.

(b) α ist ein Vektorraum-Homomorphismus, der injektiv ist, denn ein links-invariantes Vektorfeld $X \in \mathfrak{g}$ liegt ja wegen $(**)$ bereits durch seinen Wert in der Einheit $e \in G$ fest,

$$X_g = (\mathrm{D}l_g)_e(X_e).$$

Andererseits ist α auch surjektiv, denn ist $\xi \in \mathrm{T}G_e$ beliebig, so setze gerade

$$X_g := (\mathrm{D}l_g)_e(\xi),\ \forall g \in G.$$

Dann ist X wegen (5.17,b) links-invariant $\big($da $X_e = (\mathrm{D}l_e)_e(\xi) = \xi\big)$ und nach (c) glatt, $X \in \mathfrak{g}$. Nach Konstruktion ist

$$\alpha(X) = X_e = \xi.$$

□

(5.20) Beispiel.

(a) Sei $G = A(n) = (\mathbb{R}^n, +)$. Wir identifizieren kanonisch $\mathrm{T}G_e = \mathrm{T}\mathbb{R}^n_0$ mit $\mathbb{R}^n$ und wollen die Lie-Klammer auf $\mathfrak{a} = \mathbb{R}^n$ berechnen. Wie lautet die links-invariante Fortsetzung $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ von $\xi \in \mathbb{R}^n \cong \mathrm{T}\mathbb{R}^n_0$? Sei $\alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$, $\alpha(t) = t\xi$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow \mathrm{D}l_g(\xi) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} \big(l_g \circ \alpha(t)\big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} \big(g + \alpha(t)\big) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} (g + t\xi) = \xi \in \mathbb{R}^n \cong \mathrm{T}\mathbb{R}^n_g\end{aligned}$$

Es ist also

$$X(g) = \xi \ (= \text{konstant})$$

Erinnere (3.35): Ist $X = a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = b^j \frac{\partial}{\partial x^j}$,

$$\Longrightarrow [X, Y] = \Big(a^i \frac{\partial b^j}{\partial x^i} - b^i \frac{\partial a^j}{\partial x^i}\Big) \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Da die links-invarianten Fortsetzungen $X, Y \in \mathfrak{X}(G)$ von $\xi, \eta \in \mathrm{T}G_e$ konstant sind,

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i},\ Y = \eta^j \frac{\partial}{\partial x^j},$$

folgt:

$$[\xi, \eta] = [X, Y]_e = 0.$$

Man sagt für eine Lie-Algebra $\big(L, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]\big)$, dass sie **abelsch** ist, wenn $[a, b] = 0$ ist, für alle $a, b \in L$. Die Lie Algebra

$$\mathfrak{a}(n) = \mathrm{Lie}\big(A(n)\big)$$

ist also abelsch. (Wir sehen später: G abelsch $\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{g}$ abelsch.)

(b) Sei $G = \mathrm{GL}_n\mathbb{R}$. Dann ist

$$\mathrm{T}G_e \cong \mathrm{Mat}_n\,\mathbb{R}$$

da $\mathrm{GL}_n\,\mathbb{R} \subseteq \mathrm{Mat}_n\,\mathbb{R}$ offen ist und

$$\alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathrm{GL}_n\,\mathbb{R},\ \alpha(t) = \mathbb{1} + t\xi$$

ist definiert für $|t| < \varepsilon$ und ε klein genug (bei vorgegebenem $\xi \in \mathrm{Mat}_n\,\mathbb{R}$). Welche Lie-Struktur wird auf dem Vektorraum $\mathrm{Mat}_n\,\mathbb{R} = \mathrm{T}G_e$ von $\mathrm{GL}_n\,\mathbb{R}$ induziert? Sei $\xi = (\xi^{ij}) \in \mathrm{Mat}_n\,\mathbb{R}$ und $X \in \mathfrak{X}(\mathrm{GL}_n\,\mathbb{R})$ seine links-invariante Fortsetzung. Dann ist

$$X_g = \mathrm{D}l_g(\xi) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \big(g \cdot (\mathbb{1} + t\xi)\big) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \Big(\sum_m g^{im}(\delta^{mj} + t\xi^{mj})\Big)_{ij} = \Big(\sum_m g^{im}\xi^{mj}\Big)_{ij}$$

also (mit der Koordinate $x^{ij}(g) = g^{ij}$)

$$X = \Big(\sum_m x^{im} \cdot \xi^{mj}\Big)\frac{\partial}{\partial x^{ij}} \quad \text{(also linear).}$$

Ist $Y \in \mathfrak{X}(G)$ links-invariant mit $Y_{\mathbb{1}} = \eta = (\eta^{ij})$, so ist also:

$$\begin{aligned}
[\xi, \eta] = [X, Y]_e &= \left[\Big(\sum_m x^{im}\xi^{mj}\Big)\frac{\partial}{\partial x^{ij}}, \Big(\sum_n x^{kn}\eta^{nl}\Big)\frac{\partial}{\partial x^{kl}}\right] \\
&= \left.\Big(\sum_{m,n} \underbrace{x^{im}}_{=\delta^{im}}\xi^{mj} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^{ij}}(x^{kn}\eta^{nl})}_{=\delta^k_i\delta^n_j\eta^{nl}} - \sum_{m,n} x^{im}\eta^{mj}\frac{\partial}{\partial x^{ij}}(x^{kn}\xi^{nl})\Big)\right|_{x^{kl}=\delta^{kl}} \frac{\partial}{\partial x^{kl}} \\
&= \Big(\sum_j \xi^{ij}\delta^k_i\eta^{jl} - \eta^{ij}\delta^k_i\xi^{jl}\Big)\frac{\partial}{\partial x^{kl}} \\
&= \Big(\sum_j \xi^{kj}\eta^{jl} - \eta^{kj}\xi^{jl}\Big)\frac{\partial}{\partial x^{kl}} = \xi\eta - \eta\xi.
\end{aligned}$$

Betrachtet man $\mathrm{Mat}_n\,\mathbb{R}$ mit der von seiner Algebra-Struktur $(A, B) \mapsto AB$ induzierten Lie-Struktur

$$[A, B] = AB - BA$$

(vgl. (3.23)), so bezeichnet man deshalb $(\mathrm{Mat}_n\,\mathbb{R}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,])$ häufig als $\mathfrak{gl}_n\mathbb{R}$ (weil sie Lie-Algebra von $\mathrm{GL}_n\,\mathbb{R}$ ist).

(c) Ist G eine Liegruppe und $G^0 \subseteq G$ ihre Einheitskomponente (vgl. (5.4)), so ist die links-invariante Fortsetzung $X \in \mathfrak{X}(G^0)$ eines Vektors $\xi \in \mathrm{T}G^0_e = \mathrm{T}G_e$ natürlich die Einschränkung der links-invarianten Fortsetzung $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(G)$ von ξ nach G auf G^0: $X = \tilde{X}|G^0$. Da die Lie-Klammer $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ ein lokaler Operator ist, hängt $[\tilde{X}, \tilde{Y}]_e$ nur von $\tilde{X}|U$ und $\tilde{Y}|U$ ab, für eine beliebige offene Umgebung U von e, z.B. $U = G^0$. Deshalb stimmen die Lie-Algebra-Strukturen auf $\mathrm{T}G^0_e = \mathrm{T}G_e$, die von G^0 bzw. G induziert werden überein und damit, vermöge α aus (5.18,b), auch $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}^0$. D.h.: Die Lie-Algebren von G und G^0 sind isomorph.

Die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ einer Liegruppe G kann also nicht die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von G erkennen. Sie trägt nur die Gruppenstruktur von G in einer „infinitesimalen Umgebung“ von $e \in G$ in sich (den „Keim der Liegruppe“).

$$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G) = \mathrm{Lie}(G^0) = \mathfrak{g}^0.$$

Deshalb ist z.B.:

$$\mathfrak{gl}_n\mathbb{R} = \mathrm{Lie}(\mathrm{GL}_n\,\mathbb{R}) = \mathrm{Lie}(\mathrm{GL}^+_n\,\mathbb{R}) = \mathfrak{gl}^+_n\mathbb{R}.$$

(d) Ist G eine Liegruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe, die zudem eine Untermannigfaltigkeit ist (wir sagen manchmal: **Lie-Untermannigfaltigkeit**), so gilt für einen Vektor $\xi \in \mathrm{T}H_e$, dass seine links-invariante Fortsetzung $X \in \mathfrak{X}(H)$ die Einschränkung der links-invarianten Fortsetzung $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(G)$ von ξ auf H ist,

$$X = \tilde{X}|H.$$

Es folgt für $\xi, \eta \in \mathrm{T}H_e$:

$$[\xi,\eta]^H = [X,Y]^H_e \underset{(3.37)}{=} [\tilde{X},\tilde{Y}]^G_e = [\xi,\eta].$$

Kennt man die Lie-Algebra-Struktur von $\mathrm{T}G_e$, so kennt man sie deshalb auch von $\mathrm{T}H_e : \mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ ist eine Lie-Unteralgebra.

(e) Sei etwa

$$H := \mathbb{O}(n) = \{A \in \mathrm{GL}_n\,\mathbb{R} \,:\, A^t A = \mathbb{1}\}.$$

Wir wissen bereits, dass $\dim H = \frac{1}{2}(n-1)n$ ist $\big($vgl. (2.71)$\big)$. Sei nun $\alpha\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to H$ eine glatte Kurve durch $e = \mathbb{1}$: $\alpha(0) = \mathbb{1}$ und

$$\alpha(s)^t \alpha(s) = \mathbb{1},\ \forall s \in (-\varepsilon,\varepsilon)$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow 0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\bigg|_{s=0}(\mathbb{1}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\bigg|_{s=0}\alpha(s)^t\cdot\alpha(s) = \alpha'(0)^t\cdot\underbrace{\alpha(0)}_{=\mathbb{1}} + \underbrace{\alpha(0)^t}_{=\mathbb{1}}\cdot\alpha'(0)\\ &= \xi^t + \xi.\end{aligned}$$

Es ist also:

$$\mathrm{T}H_{\mathbb{1}} \subseteq L := \{\xi \in \mathfrak{gl}_n\mathbb{R} \,:\, \xi^t + \xi = 0\}.$$

Nun ist aber

$$\dim L = 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{1}{2}(n-1)n.$$

Es ist also:

$$\mathfrak{o}(n) = \mathrm{Lie}\big(\mathbb{O}(n)\big) = \{\xi \in \mathfrak{gl}_n\mathbb{R} \,:\, \xi^t + \xi = 0\}$$

und da $S\mathbb{O}(n) = \mathbb{O}(n)^0$ ist $\big($siehe (5.9,a)$\big)$ auch

$$\mathfrak{so}(n) = L = \mathfrak{o}(n)$$

$\big($natürlich mit der induzierten Struktur $(\xi,\eta) \mapsto \xi\eta - \eta\xi\big)$ Man berechne zur Übung:

$$\mathfrak{sl}_n\mathbb{R} = \mathrm{Lie}(\mathrm{SL}_n\mathbb{R}) = \{\xi \in \mathfrak{gl}_n\mathbb{R} \,:\, \mathrm{tr}(\xi) = 0\}$$

$$\mathfrak{u}(n) = \mathrm{Lie}(\mathbb{U}_n) = \{\xi \in \mathfrak{gl}_n\mathbb{C} \,:\, \overline{\xi}^t + \xi = 0\},$$

die schief-Hermiteschen Matrizen und also

$$\mathfrak{su}(n) = \mathrm{Lie}(S\mathbb{U}_n) = \{\xi \in \mathfrak{gl}_n\mathbb{C} \,:\, \overline{\xi}^t + \xi = 0,\ \mathrm{tr}(\xi) = 0\}.$$

Weiter

$$\mathrm{hei}(n) = \{\begin{pmatrix} 0 & & x^{ij} \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \,:\, x^{ij} \in \mathbb{R}\}$$

(5.21) Satz. *Sei M eine Mannigfaltigkeit der Dimension n. Gibt es eine glatte Abbildung* $\mathrm{mult}\colon M \times M \to M$, *die M zu einer Liegruppe macht, so muss das Tangentialbündel von M trivial sein. (Man sagt: M ist **parallelisierbar**.)*

(5.22) Kommentar. Wegen des Igelsatzes gibt es also z.B. auf $M = \mathbb{S}^2$ keine Liestruktur und ebenso auf $\mathbb{S}^{2n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $\big($Tatsächlich gibt es neben $\mathbb{S}^1$ nur noch auf der $\mathbb{S}^3$ eine Liestruktur (nämlich die von $S\mathbb{U}(2)$), auf allen Sphären den anderen Dimensionen nicht mehr. Nur $\mathbb{S}^7$ ist noch parallelisierbar (Milnor), hat aber aus anderen Gründen keine Liestruktur.$\big)$

Beweis von (5.21)**.** Sei G eine Liegruppe und $\mathfrak{g}$ ihre Liealgebra. Man hat dann einen Bündelisomorphismus zwischen dem trivialen Bündel $G \times \mathfrak{g} = \underline{\mathbb{R}}^n$ (vermöge einer Basis von $\mathfrak{g}$) und $\mathrm{T}G$ gegen durch

$$\begin{tikzcd} G \times \mathfrak{g} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_1"'] & \mathrm{T}G \arrow[d, "\pi"] \\ & G \end{tikzcd} , \quad (g, \xi) \mapsto X_g,$$

wo $X \in \mathfrak{g}$ die links-invariante Fortsetzung von $\xi \in \mathrm{T}G_e$ ist; wir schreiben manchmal: $X = \hat{\xi}$. □

(5.23) Kommentar. Beachte, dass es auf einer glatten Mannigfaltigkeit aber durchaus verschiedene Liestrukturen geben kann, z.B. auf $M = \mathbb{R}^3$ mit $A(3)$ und $\mathrm{Hei}(3)$ $\big($vgl. (5.9,j)$\big)$.

(5.24) Erinnerung.

(a) Sind L_1 und L_2 (reelle) Lie-Algebren, so heißt eine lineare Abbildung $f\colon L_1 \to L_2$ ein **Lie-Homomorphismus**, wenn für alle $\xi, \eta \in L_1$ gilt:

$$\big[f(\xi), f(\eta)\big] = f\big([\xi, \eta]\big).$$

(b) Ein Lie-Homomorphismus $f\colon L_1 \to L_2$ heißt ein **Lie-Isomorphismus**, wenn es einen Lie-Homomorphismus $g\colon L_2 \to L_1$ gibt mit $g \circ f = \mathbb{1}$, $f \circ g = \mathbb{1}$. Ist $f\colon L_1 \to L_2$ ein Lie-Homomorphismus und ein Vektorraumisomorphismus, so ist f schon Lie-Isomorphismus, da seine Umkehrung $f^{-1}\colon L_2 \to L_1$ dann automatisch Lie-Homomorphismus ist:

$$\begin{aligned} f^{-1}\big([\xi, \eta]\big) &= f^{-1}\Big(\Big[f\big(f^{-1}(\xi)\big), f\big(f^{-1}(\eta)\big)\Big]\Big) \\ &\underset{f \text{ Lie-H.}}{=} f^{-1} \circ f\Big(\big[f^{-1}(\xi), f^{-1}(\eta)\big]\Big) = \big[f^{-1}(\xi), f^{-1}(\eta)\big]. \end{aligned}$$

(5.25) Definition. Seien G und H Liegruppen und $\varphi\colon G \to H$ ein Lie-Homomorphismus. Wir definieren dann den induzierten Lie-Homomorphismus $\varphi_*\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ zwischen den Lie-Algebren $\mathfrak{g}$ von G und $\mathfrak{h}$ von H so: Für $X \in \mathfrak{g}$, sei $\varphi_*(X) \in \mathfrak{X}(H)$ das links-invariante Vektorfeld auf H, welches in $e \in H$ den Wert $\mathrm{D}\varphi_e(X_e)$ annimmt,

$$\varphi_*(X) = \widehat{\mathrm{D}\varphi_e(X_e)}.$$

(5.26) Kommentar.

(a) Identifiziert man $\mathfrak{g}$ mit $\mathrm{T}G_e$ vermöge (5.18,b) (und versieht $\mathrm{T}G_e$ mit der induzierten Lie-Struktur), so ist φ_* gerade das Differential von φ im neutralen Element, d.h.: das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\varphi_*"] \arrow[d, "\alpha_G"'] & \mathfrak{h} \arrow[d, "\alpha_H"] \\ \mathrm{T}G_e \arrow[r, "\mathrm{D}\varphi_e"'] & \mathrm{T}H_e \end{tikzcd}$$

(b) Beachte, dass für jedes $h \in \operatorname{im}(\varphi)$ gilt: Ist $g \in \varphi^{-1}(h)$, so

$$\varphi_*(X)(h) = (\mathrm{D}\varphi)_g(X_g),$$

d.h.: $X \in \mathfrak{X}(G)$ und $\varphi_*(X) \in \mathfrak{X}(H)$ sind φ-bezogen aufeinander,

$$\varphi_*(X) \circ \varphi = \mathrm{D}\varphi \circ X.$$

Wegen $l_h \circ \varphi = \varphi \circ l_g$ für $h = \varphi(g)$ $\big($weil $\varphi(g) \cdot \varphi(g') = \varphi(g \cdot g')$ ist$\big)$ ist nämlich

$$\begin{aligned} \varphi_*(X)(h) &= \mathrm{D}l_h\big(\mathrm{D}\varphi_e(X_e)\big) = \mathrm{D}(l_h \circ \varphi)_e(X_e) \\ &= \mathrm{D}(\varphi \circ l_g)_e(X_e) = \mathrm{D}\varphi_g \underbrace{(\mathrm{D}l_g)_e(X_e)}_{=X_g} = \mathrm{D}\varphi_g(X_g). \end{aligned}$$

Beachte aber, dass $\varphi_* X \in \mathfrak{X}(H)$ auch in Punkten definiert ist, die nicht im Bild von φ liegen.

(5.27) Proposition. *Seien G und H Liegruppen mit Liealgebren $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$. Ist $\varphi\colon G \to H$ ein Lie-Homomorphismus (zwischen Liegruppen), so ist $\varphi_*\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ ein Lie-Homomorphismus (zwischen Lie-Algebren).*

Beweis. Da das Diagramm in (5.26) kommutiert (und $\alpha_G, \mathrm{D}\varphi_e$ und α_H^{-1} linear sind), ist

$$\varphi_* = \alpha_H^{-1} \circ \mathrm{D}\varphi_e \circ \alpha_G$$

linear. Seien $X, Y \in \mathfrak{g}$ beliebig, sowie $\tilde{X} = \varphi_* X$, $\tilde{Y} = \varphi_* Y$. Da X und $\tilde{X}$ bzw. Y und $\tilde{Y}$ φ-bezogen sind, sind es auch $[X, Y]$ und $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ $\big($siehe auch (3.37)$\big)$, insbesondere gilt:

$$\mathrm{D}\varphi_e\big([X, Y]_e\big) = [\tilde{X}, \tilde{Y}]_{\varphi(e)} = [\tilde{X}, \tilde{Y}]_e.$$

Da $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ auch links-invariant ist, muss also

$$[\varphi_* X, \varphi_* Y] = [\tilde{X}, \tilde{Y}] = \alpha_H^{-1}\big(\mathrm{D}\varphi_e(\underbrace{[X, Y]_e}_{\alpha_G([X,Y])})\big)$$

sein, also φ_* ein Lie-Homomorphismus. □

(5.28) Kommentar.

(a) Man bekommt so einen (covarianten) **Funktor** von der Kategorie der Liegruppen <u>Lie-Grp</u> in die Kategorie der Lie-Algebren <u>Lie-Alg</u>, die jedem Objekt G aus <u>Lie-Grp</u> gerade ihre Lie-Algebra $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ und jedem Morphismus $\varphi \in \mathrm{Mor}(G, H)$ (d.i. ein Lie-Homomorphismus $\varphi\colon G \to H$) einen $\varphi_* \in \mathrm{Mor}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ (d.i. ein Lie-Homomorphismus) zuordnet, denn es ist für $\varphi\colon G \to H$ und $\psi\colon H \to K$:

$$(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*,$$

da:

$$\begin{aligned}(\psi\circ\varphi)_* &= \alpha_K^{-1}\circ \mathrm{D}(\psi\circ\varphi)\circ\alpha_G = \alpha_K^{-1}\mathrm{D}\psi_e\mathrm{D}\varphi_e\alpha_G\\ &= (\alpha_K^{-1}\mathrm{D}\psi_e\alpha_H)(\alpha_H^{-1}\mathrm{D}\varphi_e\alpha_G) = \psi_*\circ\varphi_*\end{aligned}$$

und auch

$$\mathbb{1}_* = \mathbb{1},$$

da

$$\mathbb{1}_* = \alpha_G^{-1}\underbrace{\mathrm{D}(\mathbb{1})_e}_{=\mathbb{1}}\alpha_G = \mathbb{1}.$$

(b) Insbesondere überführt Lie: $\underline{\text{Lie-Grp}} \to \underline{\text{Lie-Alg}}$ Isomorphismen in Isomorphismen, denn ist $\varphi\circ\psi = \mathbb{1}$ und $\psi\circ\varphi = \mathbb{1}$ (für $\varphi\colon G\to H$ und $\psi\colon H\to G$), so ist auch

$$\psi_*\circ\psi_* = (\varphi\circ\psi)_* = \mathbb{1}_* = \mathbb{1},\ \psi_*\circ\varphi_* = \mathbb{1}.$$

Sind also für zwei Liegruppen G und H ihre Liealgebren $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ nicht isomorph, so können auch G und H nicht isomorph gewesen sein.

(5.29) Beispiel.

(a) Betrachte $G = \mathrm{Hei}(3)$ und $H = SL_2(\mathbb{R})$. Es ist dann

$$\mathfrak{g} = \mathrm{hei}(3) = \{\begin{pmatrix}0 & \xi^1 & \xi^3\\ 0 & 0 & \xi^2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\} \subseteq \mathfrak{gl}_3(\mathbb{R})$$

und

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) = \{\begin{pmatrix}x^1 & x^2\\ x^3 & -x^1\end{pmatrix}\} \subseteq \mathfrak{gl}_2\mathbb{R}.$$

Betrachte nun die Basis (e_1,e_2,e_3) von $\mathfrak{g}$ mit

$$e_1 = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ e_2\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\ e_3\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

$$[e_1,e_2] = e_3,\ [e_2,e_3] = 0,\ [e_3,e_1] = 0.$$

Betrachte andererseits die Basis (f_1,f_2,f_3) von $\mathfrak{h}$ mit:

$$[e_1,e_2] = 2e_2,\ [e_1,e_3] = -2e_3,\ [e_2,e_3] = e_1.$$

(b) Für jede Lie-Algebra definiert man ihre **abgeleitete Lie-Algebra** $L'\subseteq L$ als das Erzeugnis aller **Kommutatoren** $[a,b]\in L$ $(a,b\in L)$,

$$L' = \Big\{\sum_{i=1}^r [a_i,b_i]\in L\ :\ r\in\mathbb{N}_0,\ a_i,b_i\in L\,(i=1,\dots,r)\Big\}.$$

Es ist dann $L'\subseteq L$ eine Lie-Unteralgebra (sogar ein Lie-Ideal, d.h. mit $\alpha\in L'$, $b\in L$ ist auch $[a,b]\in L'$) und ist $\varphi\colon L_1\to L_2$ ein Lie-Homomorphismus, so bildet L_1' nach L_2' ab. Ist φ ein Isomorphismus, so ist $\varphi' := \varphi|L_1'\colon L_1'\to L_2'$ offenbar auch Isomorphismus (mit Inverses $(\varphi^{-1})'$). Nun gilt offenbar für $\mathfrak{g} = \mathrm{hei}(3)$: $\mathfrak{g}' = \langle e_3\rangle$, also $\dim\mathfrak{g}' = 1$, während für $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}_2\mathbb{R}$ gilt: $\mathfrak{h}' = \langle e_1,\dots,e_3\rangle = \mathfrak{h}$, also $\dim\mathfrak{h}' = 3$. Also können $\mathfrak{g}'$ und $\mathfrak{h}'$ nicht isomorph sein, damit auch nicht $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ und damit auch nicht G und H. (Beachte: G und H sind bereits als Mannigfaltigkeiten nicht diffeomorph, da $G\simeq\mathbb{R}^3$ und $H = \mathbb{S}^1\times\mathbb{R}^2$ (Übung) und damit z.B.: $\pi_1(G) = (1)$, $\pi_1(H) = \mathbb{Z}$.)

(5.30) Kommentar.

(a) Ist L eine Lie-Algebra und $\mathfrak{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ eine Basis von L, so gibt es eindeutig bestimmte $C_{ij}^k \in \mathbb{R}$ $(1 \leq i, j, k \leq n)$ mit

$$[e_i, e_j] = C_{ij}^k e_k.$$

Das Tupel $(C_{ij}^k)_{1 \leq i,j,k \leq n}$ heißt das Tupel der **Strukturkonstanten von L bzgl.** $\mathfrak{B}$**.**

(b) Beachte, das wegen $[a, b] = -[b, a]$, $\forall a, b \in L$, gilt:

$$C_{ij}^k = -C_{ji}^k, \quad \forall i, j, k.$$

Es reicht also die Strukturkonstanten C_{ij}^k für $1 \leq i < j \leq n$ und $k \in \{1, \ldots, n\}$ zu kennen. Beachte auch, dass wegen der Jacobi-Identität gilt:

$$C_{il}^m C_{jk}^l + C_{jl}^m C_{ki}^l + C_{kl}^m C_{ij}^l = 0 \quad \forall 1 \leq i < j < k \leq n,\ \forall 1 \leq m \leq n \tag{$**$}$$

Gibt man umgekehrt auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V und einer Basis $\mathfrak{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ ein Tupel (C_{ij}^k) (von $\binom{n}{2} \cdot n$ reellen Zahlen) und den $n \cdot \binom{n}{3}$ Relationen $(**)$ vor, so wird durch

$$[e_i, e_j] := C_{ij}^k e_k$$

(und deren bilineare Fortsetzung) eine Lie-Algebra-Struktur auf V erklärt. Es ist aber nicht so einfach festzustellen, wann zwei Sätze $C = (C_{ij}^k)$ und $D = (D_{ij}^k)$ isomorphe Strukturen auf V definieren. (Übung: Auf $V = \mathbb{R}^2$ gibt es bis auf Isomorphie genau zwei Lie-Algebra-Strukturen, nämlich $L_1 = \mathfrak{a}(2)$, die abelsche, d.h.: $[\,\cdot\,,\,\cdot\,] = 0$, und die **auflösbare Struktur**, gegeben auf der kanonische Basis (e_1, e_2) durch: $[e_1, e_2] = e_1$. Man nennt eine Lie-Algebra L **auflösbar**, wenn mit

$$L^{(0)} := L,\ L^{(1)} = L' = [L, L],\ L^{(2)} = L^{(1)\prime}, \ldots, L^{(k+1)} = L^{(k)\prime}$$

(so genannte **abgeleitete Reihe**) gilt: Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $L^{(n)} = 0$.)

(c) Man setzt für eine Lie-Algebra L außerdem:

$$L^0 := L,\ L^1 := [L, L] = L',\ L^2 := [L, L'], \ldots, L^{k+1} := [L, L^k]$$

und nennt sie **nilpotent**, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $L^n = 0$. Man hat also folgende Implikationen:

$$\text{abelsch} \implies \text{nilpotent} \implies \text{auflösbar}$$

Beachte, dass hei(3) offenbar nilpotent, nicht aber abelsch ist. Die nicht-abelsche 2-dimensionale Lie-Algebra aus (b) ist auflösbar, nicht aber nilpotent.

(d) Auf $\mathbb{R}^3$ haben wir nun bereits vier verschiedene Lie-Strukturen kennen gelernt:

$$\text{(i) } \mathfrak{a}(3), \quad \text{(ii) hei}(3), \quad \text{(iii) } \mathfrak{sl}_2\mathbb{R}, \quad \text{(iv) } \mathfrak{so}(3) \cong (\mathbb{R}^3, \times)$$

(bzgl. kanonischer Basis: $[e_1, e_2] := e_3$, $[e_2, e_3] := e_1$, $[e_3, e_1] := e_2$)

⌜beachte: $\mathfrak{sl}_2\mathbb{R}$ hat 2-dimensionale Unteralgebren, z.B. $\langle e_1, e_2 \rangle$, da $[e_1, e_2] = 2e_2$, $(\mathbb{R}^3, \times)$ nicht, weil für $a, b \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig auch $(a, b, a \times b)$ linear unabhängig ist. ⌟

(5.31) Definition. Sei G eine Liegruppe. Eine (glatte) Differentialform

$$\omega \in \mathcal{E}(G) := \bigoplus_{k=0}^{n} \mathcal{E}^{(k)}(G),$$

$n = \dim G$, heißt **links-invariant**, wenn gilt:

$$l_g^* \omega = \omega, \quad \forall g \in G.$$

(5.32) Kommentar.

(a) Eine 0-Form $f \in \mathcal{E}^{(0)}(G)$, also eine glatte Funktion $f\colon G \to \mathbb{R}$, ist links-invariant genau dann, wenn sie konstant ist, denn $l_g^*(f) = f \circ l_g$ und daher

$$l_g^* f = f,\ \forall g \iff f \circ l_g = f,\ \forall g \iff f(g) = f \circ l_g(e) = f(e),\ \forall g \in G.$$

(b) Ähnlich wie bei Vektorfeldern sieht man, dass eine links-invariante Form auf G automatisch glatt ist.

(c) Die Auswertung beim neutralen Element $e \in G$ bildet bei invarianten 1-Formen $\mathcal{E}^{(1)}_{\mathrm{inv}}(G)$ einen Vektorraum-Isomorphismus mit $\mathrm{T}G_e^*$,

$$\beta\colon \mathcal{E}^{(1)}_{\mathrm{inv}} \to \mathrm{T}G_e^*, \quad \omega \mapsto \omega(e),$$

denn ist $\alpha \in \mathrm{T}G_e^*$ beliebig so ist seine links-invariante Fortsetzung $w \in \mathcal{E}^{(1)}_{\mathrm{inv}}(G)$ gegeben durch

$$\omega(g) = (\mathrm{D}l_{g^{-1}})_g^*(\alpha)$$

gerade das Urbild von α unter β. Identifiziert man $\mathrm{T}G_e^*$ $\big($vermöge α^* aus (5.18,b)$\big)$ mit $\mathfrak{g}^*$, so kann man also $\mathcal{E}^{(1)}_{\mathrm{inv}}(G)$ mit $\mathfrak{g}^*$ identifizieren. Die natürliche Paarung

$$\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle\colon \mathcal{E}^{(1)}_{\mathrm{inv}}(G) \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}\big(\cong \mathcal{E}^{(0)}_{\mathrm{inv}}(G)\big), \quad \langle \omega, X\rangle = \omega(X)$$

$\big($beachte, dass mit ω und X auch die Auswertung $\omega(X) \in \mathcal{E}^{(0)}(G)$ links-invariant also konstant$\big)$ geht in die natürliche Paarung zwischen $\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ über.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}^{(1)}_{\mathrm{inv}}(G) \times \mathfrak{g} \arrow[r, "\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle"] \arrow[d, "(\alpha^*\circ\beta)\times\mathbb{1}"', "\cong"] & \mathbb{R} \\
\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g} \arrow[ur, "\text{nat.}"'] &
\end{tikzcd}$$

(d) Beachte auch, dass für eine $\mathbb{R}$-Basis $(\omega^1, \dots, \omega^n) = \mathfrak{B}$ von $\mathcal{E}^{(1)}_{\mathrm{inv}}(G)$ $\mathfrak{B}$ auch eine Modul-Basis des $\mathcal{E}^{(0)}(G)$-Moduls $\mathcal{E}^{(1)}(G)$, weil T^*G trivial ist, $\mathrm{T}^*G \cong G \times \mathfrak{g}^*$: Jede 1-Form ω hat eine eindeutig bestimmte Darstellung

$$\omega = a_i \omega^i, \quad a_i \in \mathcal{E}^{(0)}(G),\ i = 1, \dots, n.$$

(e) Das Gleiche gilt natürlich für den $\mathcal{E}^{(0)}(G)$-Modul $\mathfrak{X}(G)$ $\big($nämlich, dass eine $\mathbb{R}$-Basis $(X_1, \dots, X_n)$ von $\mathfrak{g}\big)$ auch eine $\mathcal{E}^{(0)}(G)$-Basis von $\mathfrak{X}(G)$ ist und auch für beliebige k-Formen gilt:

$$\omega = a_I \omega^I$$

mit $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ und $1 \leq i_1 < \cdots \leq i_k \leq n$ geordnet, $\omega^I = \omega^{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_k}$ und $a_I \in \mathcal{E}^{(0)}(G)$. ω ist genau dann links-invariant, wenn a_I konstant ist, denn l_g^* ist ein Algebra-Isomorphismus und daher:

$$l_g^*(\omega) = l_g^*(a_I) l_g^*(\omega^I) = l_g^*(a_I)\omega^I \stackrel{!}{=} \omega \iff l_g^*(a_I) = a_I \ \forall g \iff a_I = \text{const.}$$

Auswertung bei e ergibt also einen Algebra-Isomorphismus zwischen kommutativen graduierten $\mathbb{R}$-Algebren

$$\mathcal{E}_{\text{inv}}(G) = \bigoplus_{k=0}^{n} \mathcal{E}_{\text{inv}}^{(k)}(G) \xrightarrow{\text{ev}} \bigoplus_{k=0}^{n} \Lambda^k \underbrace{\mathrm{T}G_e^*}_{\cong \mathfrak{g}^*} = \Lambda \mathfrak{g}^*.$$

(5.33) Vorbereitung.

(a) Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und ω eine glatte 1-Form auf M, $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(M)$. Dann gilt für die äußere Ableitung $\mathrm{d}\omega \in \mathcal{E}^{(2)}(M)$ folgende koordinatenfrei Beschreibung von **E. Cartan**:

$$\mathrm{d}\omega_p(\xi, \eta) = \xi\big(\omega(Y)\big) - \eta\big(\omega(X)\big) - \omega_p\big([X, Y]_p\big)$$

für $p \in M$, $\xi, \eta \in \mathrm{T}M_p$ und $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ beliebigen Fortsetzungen von ξ bzw. η auf M, $X_p = \xi$, $Y_p = \eta$. (Übung: Es reicht das für $\omega = f\mathrm{d}x^i$, $X = g\frac{\partial}{\partial x^j}$, $Y = h\frac{\partial}{\partial x^k}$ zu prüfen.)

(b) Allgemeiner gilt sogar folgende Formel: Ist $\omega \in \mathcal{E}^{(k)}(M)$ und $X_0, \ldots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$, so gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega(X_0, \ldots, X_k) = & \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \omega(X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_k) \\ & + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega\big([X_i, X_j], X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_k\big). \end{aligned}$$

(5.34) Bemerkung. Sei G eine Liegruppe und $\mathcal{E}_{\text{inv}}(G) \subseteq \mathcal{E}(G)$ die Unteralgebra der links-invarianten Differentialformen auf G.

(a) Dann gilt: $\mathcal{E}_{\text{inv}}(G)$ ist auch abgeschlossen unter der äußeren Ableitung $\mathrm{d}\colon \mathcal{E}(G) \to \mathcal{E}(G)$:

$$\mathrm{d}\big(\mathcal{E}_{\text{inv}}(G)\big) \subseteq \mathcal{E}_{\text{inv}}(G).$$

(b) Ist $(X_1, \ldots, X_n)$ eine Basis der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ von G mit Strukturkonstanten $(C_{ij}^k)_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ 1 \leq k \leq n}}$ und $(\omega^1, \ldots, \omega^n)$ die dazu duale Basis von $\mathcal{E}_{\text{inv}}^{(1)}(G) \cong \mathfrak{g}^*$, so gelten **die Gleichungen von Maurer-Cartan:**

$$\mathrm{d}\omega^k = -\sum_{i<j} C_{ij}^k \omega^i \wedge \omega^j$$

Beweis von (b). Da $(\omega^1, \ldots, \omega^n)$ eine $\mathcal{E}^{(0)}(G)$-Basis von $\mathcal{E}^{(1)}(G)$ ist, ist auch $(\omega^i \wedge \omega^j)_{i<j}$ eine $\mathcal{E}^{(0)}(G)$-Basis von $\mathcal{E}^{(2)}(G)$, jede 2-Form α auf G also eindeutig darstellbar durch

$$\alpha = \sum_{i<j} a_{ij} \omega^i \wedge \omega^j \quad \text{mit } a_{ij} \in \mathcal{E}^{(0)}(G).$$

Hierbei ist

$$\begin{aligned}\alpha(X_k, X_l) = \sum_{i<j} a_{ij}\, &\underbrace{\omega^i \wedge \omega^j(X_k, X_l)} \\ &= \omega^i(X_k)\omega^j(X_l) - \omega^i(X_l)\omega^j(X_k) \\ &= \delta^i_l \delta^j_l - \underbrace{\delta^i_l \delta^j_k}_{=0 \text{ für } k<l} = a_{kl}\end{aligned}$$

Wegen Cartans Formel ist nun:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega^k(X_i, X_j) &= \underbrace{X_i\big(\underbrace{\omega^k(X_j)}_{=\delta^k j}\big)}_{=0} - X_j\big(\underbrace{\omega^k(X_i)}_{=0}\big) - \omega^k\big(\underbrace{[X_i, X_j]}_{C^l_{ij}X_l}\big) \\ &= -C^l_{ij}\underbrace{\omega^k(X_l)}_{=\delta^k_l} = -C^k_{ij}.\end{aligned}$$

(a) Ist $\alpha \in \mathcal{E}^{(k)}(G)$ und $(\omega^1, \ldots, \omega^n)$ eine Basis von $\mathcal{E}^{(1)}_{\text{inv}}(G)$, so gilt eindeutig bestimmte $a_I \in \mathcal{E}^{(0)}(G)$ mit

$$\alpha = a_I \omega^I.$$

und α ist invariant, genau wenn a_I konstant ist $\forall I$:

$$l_g^*\alpha \overset{l_g^* \text{ Alg.-Hom.}}{=} l_g^*(a_I) \cdot \underbrace{l_g^*(\omega^I)}_{=\omega^I} = l_g^*(a_I)\omega^I$$

also

$$l_g^*\alpha = \alpha,\ \forall g \in G \iff l_g(a_I) = a_I,\ \forall g \in G,\ \forall I \iff a_I = \text{const.},\ \forall I.$$

Es folgt, dass $\mathcal{E}_{\text{inv}}(G) \subseteq \mathcal{E}(G)$ schon mal (graduierte) Unteralgebra und aus der Leibniz-Regel für d folgt nun: $\alpha \in \mathcal{E}^{(k)}_{\text{inv}}(G) \implies \mathrm{d}\alpha \in \mathcal{E}^{(k+1)}_{\text{inv}}(G)$:

$$\begin{aligned}\alpha = c_I\omega^I \implies \mathrm{d}\alpha &\overset{\mathrm{d}c_I=0}{=} c_I \mathrm{d}\omega^I \overset{I=\{i_1,\ldots,i_k\}}{=} c_I \mathrm{d}(\omega^{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_k}) \\ &= c_I \sum_{\kappa=1}^{k} (-1)^{\kappa+1}\omega^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\omega^{i_\kappa} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_k} \\ &\overset{\text{Maurer-Cartan}}{=} c_I \sum_{\kappa=1}^{k} (-1)^{\kappa+1}\omega^{i_1} \wedge \cdots \wedge \Big(-\sum_{j<l} C^{i_\kappa}_{jl}\omega^j \wedge \omega^l\Big) \wedge \cdots \wedge \omega^{i_\kappa} \in \mathcal{E}^{(k+1)}_{\text{inv}}(G).\end{aligned}$$ □

(5.35) Kommentar.

(a) Für eine Mannigfaltigkeit M^n hat

$$\mathcal{E}(M) = \bigoplus_{k=0}^{n} \mathcal{E}^{(k)}(M)$$

die algebraische Struktur einer **kommutativen graduierten Differentialalgebra.** (vgl. (4.66,c)) (kurz: cdga, commutative differential graded algebra) (5.34) zeigt, dass $\mathcal{E}_{\text{inv}} \subseteq \mathcal{E}(G)$ eine cdga-Unteralgebra bilden.

(5.36) Erinnerung. Sei M^n eine glatte Mannigfaltigkeit und $\mathcal{E}(M)$ ihre **de Rham-Algebra**.

(a) Eine Unteralgebra $A \subseteq \mathcal{E}(M)$ heißt **graduiert**, wenn mit jedem $\omega \in A$ auch seine homogene Bestandteile in A sind,

$$\omega = \omega_0 + \cdots + \omega_n,\ \omega_k \in \mathcal{E}^{(k)},\ \omega \in A \Longrightarrow \omega_k \in A\ (k = 0, \ldots, n).$$

Ist

$$A^{(k)} := A \cap \mathcal{E}^{(k)}(M),$$

so folgt:

$$A = \bigoplus_{k=0}^{n} A^{(k)}$$

(b) Eine graduierte Unteralgebra $A \subseteq \mathcal{E}(M)$ heißt eine (graduierte) **Differential-Unteralgebra**, wenn $\mathrm{d}A \subseteq A$. $\big($Es ist dann (A, d) selbst eine cdga.$\big)$

(c) Eine Unteralgebra $I \subseteq \mathcal{E}(M)$ heißt ein **Ideal**, wenn $\mathcal{E}(M) \cdot I \subseteq I$ ist. Eine cdga-Unteralgebra, die zudem ein Ideal ist, heißt ein **Differential-Ideal** von $\mathcal{E}(M)$ (kurz: ein cdga-Ideal). (Es ist dann $\mathcal{E}(M)/I$ selbst wieder eine cdga.)

(5.37) Beispiel. Sei M^n glatt und $D \subseteq \mathrm{T}M$ eine Distribution von Rang k ($0 \leq k \leq n$). Man definiert dann **das Ideal von D**

$$I(D) := \{\omega = \omega_0 + \cdots + \omega_n \in \mathcal{E}(M) \,:\, \forall p \in M\ \forall \xi_1, \ldots, \xi_k \in D \,:\, (\omega_k)_p(\xi_1, \ldots, \xi_k) = 0\}$$

Es folgt, dass $I(D) \subseteq \mathcal{E}(M)$ ein graduiertees (homogenes) Ideal, denn ist z.B. $\alpha \in \mathcal{E}^{(r)}(M)$ und $\omega \in I^{(s)} := I \cap \mathcal{E}^{(s)}(M)$, $p \in M$, $\xi_1, \ldots, \xi_{r+s} \in D_p$, so ist:

$$(\alpha \wedge \omega)_p(\xi_1, \ldots, \xi_{r+s}) = \sum_I \pm \alpha(\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_r}) \underbrace{\omega(\xi_{j_1}, \ldots, \xi_{j_s})}_{=0},$$

wo $J = \{j_1 < \cdots < j_s\} = \{1, \ldots, n\} \setminus I$, also

$$\alpha \wedge \omega \in I^{(r+s)}.$$

Frage: Wann ist I differentiell?

(5.38) Bemerkung. Ist D involutiv, so ist $I = I(D)$, differentiell.

Beweis. Sei $\omega \in I(D)$ beliebig, o.E. homogen vom Grad d (da I schon homogen ist). Seien $X_0, \ldots, X_d \in \Gamma(D) = \{X \in \mathfrak{X}(M) \,:\, X_p \in D_p,\ \forall p \in M\}$. Es reicht zu zeigen:

$$\mathrm{d}\omega(X_0, \ldots, X_d) = 0,$$

denn ist $p \in M$, $\xi_0, \ldots, \xi_p \in D_p$ beliebig, so gibt es $X_0, \ldots, X_d \in \Gamma(D)$ mit $(X_j)_p = \xi_j$ ($j = 1, \ldots, d$) (siehe Diffgeo I). Nach Cartan ist aber

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega(X_0, \ldots, X_d) &= X_0\big(\omega(X_1, \ldots, X_d)\big) - \cdots \pm X_d\big(\omega(X_0, \ldots, X_{d-1})\big) \\ &\quad + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \underbrace{\omega\big(\underbrace{[X_i, X_j]}_{\in\Gamma(D)}, X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_d\big)}_{=0} \end{aligned}$$ □

(5.39) Definition. Sei M^n glatt und $\omega_1, \ldots, \omega_r \in \mathcal{E}^{(1)}(M)$.

(a) Wir sagen, dass $(\omega_1, \ldots, \omega_r)$ **unabhängig** ist, wenn $\big(\omega_1(p), \ldots, \omega_r(p)\big)$ linear unabhängig in $\mathrm{T}M_p^*$ ist, für alle $p \in M$.

(b) Ein Ideal $I \subseteq \mathcal{E}(M)$ heißt **von unabhängigen 1-Formen** $\omega_1, \ldots, \omega_r \in \mathcal{E}^{(1)}(M)$ **erzeugt**, wenn $(\omega_1, \ldots, \omega_r)$ unabhängig ist und

$$I = \langle \omega_1, \ldots, \omega_r \rangle.$$

(5.40) Kommentar.

(a) Definiert man die zugehörige Distribution $D = D(I)$ durch

$$D_p := \{\xi \in \mathrm{T}M_p \;:\; \omega_p(\xi) = 0,\ \forall \in I^{(1)}\},$$

so ist, wenn $I = \langle \omega_1, \ldots, \omega_r \rangle$ ist und $(\omega_1, \ldots, \omega_r)$ unabhängig,

$$D_p = \ker(\alpha_p)$$

für

$$\alpha_p \colon \mathrm{T}M_p \to \mathbb{R}^r,\ \xi \mapsto \big(\omega_1(\xi), \ldots, \omega_r(\xi)\big),$$

also $\mathrm{rg}(D) =: k = n - r$. D ist eine glatte Distribution und es gilt: $I\big(D(I)\big) = I$ (Übung).

(b) Beachte, dass nicht jede Distribution $D \subseteq \mathrm{T}M$ vom Rang k $I = I(D)$ von $r = n - k$ unabhängigen 1-Formen erzeugt wird. (Nur lokal gilt das.) Das ist genau dann der Fall, wenn das **Normalenbündel** $\mathrm{T}M/D$ trivial ist.

(5.41) Definition. Sei M^n glatt, $I \subseteq \mathcal{E}(M)$ homogenes Ideal.

(a) Eine injektive Immersion $f \colon N \to M$ heißt **integral für I**, wenn für alle $\omega \in I$ gilt: $f^*(\omega) = 0$.

(b) Eine Integralmannigfaltigkeit $f \colon N \to M$ für I heißt **maximal**, wenn für jede weitere Integralmannigfaltigkeit $g \colon \tilde{N} \to M$ mit $g(\tilde{N}) \supseteq f(N)$ gilt: $g(\tilde{N}) = f(N)$.

(5.42) Kommentar. Ist I von unabhängigen $\omega_1, \ldots, \omega_d \in \mathcal{E}^{(1)}(M)$ erzeugt und $D = D(I)$, so ist ein injektive Immersion $f \colon N \to M$ offenbar genau dann integral für I, wenn f Integral-Mannigfaltigkeit für die Distribution D ist, denn: für alle $X \in \mathfrak{X}(N)$ gilt:

$$f^*\omega(X) = \omega(f_*X),$$

also

$$f^*\omega = 0,\ \forall \omega \in I^{(1)} \iff \omega|\operatorname{im}(f_*) = 0,\ \forall \omega \in I^{(1)} \iff \operatorname{im}(f_*) \subseteq D.$$

(5.43) Satz (von Frobenius, differentielle Version). *Sei M^n glatt, $\omega_1, \ldots, \omega_r \in \mathcal{E}^{(1)}(M)$ unabhängig und $I = \langle \omega_1, \ldots, \omega_r \rangle \subseteq \mathcal{E}(M)$. Ist I ein Differentialideal, so gibt es zu jedem $p \in M$ eine (bis auf Äquivalenz) eindeutig bestimmte maximale Integral-Mannigfaltigkeit $f \colon N \to M$ mit $p \in f(N)$.*

Beweis. Ist I differentiell, so ist $D = D(I)$ involutiv, denn: sind $X, Y \in \Gamma(D)$ beliebig, $i \in \{1, \ldots, r\}$, so gilt:

$$\omega_i\big([X,Y]\big) = -\underbrace{\underbrace{\mathrm{d}\omega_i}_{\in I}(X,Y)}_{=0} + X\big(\underbrace{\omega_i(Y)}_{=0,\ \text{weil} Y \in \Gamma(D)}\big) - Y\big(\underbrace{\omega_i(X)}_{=0}\big)$$

also $[X,Y] \in \Gamma(D)$. Nach Frobenius $\big($siehe (3.59)$\big)$ existiert deshalb ein eindeutig bestimmte Integral-Mannigfaltigkeit $f \colon N \to M$ durch p, welche maximal ist. $\square$

(5.44) Kommentar. Für Ideale $I \subseteq \mathcal{E}(M)$ die von unabhängigen 1-Formen $\omega_1, \ldots, \omega_r \in \mathcal{E}^{(1)}(M)$ erzeugt werden, gilt also:

$$I \text{ differentiell } \iff D = D(I) \text{ involutiv (also integrabel)}$$

(5.45) Motivation. Gegeben seien Mannigfaltigkeiten M^n und N^r und 1-Formen $\omega_1, \ldots, \omega_r$ 1-Formen auf N, z.B. eine Basis von $\mathcal{E}^{(1)}(N)$ über $\mathcal{E}^{(0)}(N)$. Sei weiter gegeben $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathcal{E}^{(1)}(M)$.

Frage: Wann gibt es eine glatte Abbildung $\Phi\colon M \to N$ mit

$$\Phi^*(\omega_i) = \alpha_i \text{ für } i = 1, \ldots, r? \tag{$*$}$$

Beachte. Lokal bedeutet $(*)$ für eine Φ beschreibende Abbildung $\varphi\colon U \to V$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^r$ offen, dass $\varphi^1, \ldots, \varphi^r\colon U \to \mathbb{R}$ Lösung eines Systems von $r \cdot n$ partielle Differentialgleichungen 1.Ordnung ist (ähnlich, wie das in Frobenius' Satz ist).

$$\ulcorner \omega_i = \eta_{ij} \mathrm{d}y^j,\, \alpha_i = \xi_{ik} \mathrm{d}x^k \overset{(*)}{\Longrightarrow} \eta_{ij} \circ \varphi \frac{\partial \varphi^j}{\partial x^k} = \xi_{ik} \ (1 \le i \le r,\, 1 \le k \le n)$$
$$\left(\iff \frac{\partial \varphi^j}{\partial x^k} = (\eta^{ij} \circ \varphi) \cdot \xi_{ik}\right) \lrcorner$$

(5.46) Vorbereitung. Betrachte in der Situation von (5.45) die 1-Formen $\mu_1, \ldots, \mu_r \in \mathcal{E}^{(1)}(M \times N)$, gegeben durch:

$$\mu_i := \pi_1^* \alpha_i - \pi_2^* \omega_i \quad (i = 1, \ldots, r)$$

und das von ihnen erzeugte Ideal $I = \langle \mu_1, \ldots, \mu_r \rangle \subseteq \mathcal{E}(M \times N)$. Der **Graph von Φ**, das ist die injektive Immersion $g\colon M \to M \times N$,

$$g(p) = \big(p, \Phi(p)\big)$$

ist dann eine Integral-Mannigfaltigkeit I, denn für jedes $i = 1, \ldots, r$ gilt:

$$g^*(\mu_i) = g^* \pi_1^* \alpha_i - g^* \pi_2^* \omega_i = (\underbrace{\pi_1 g}_{=\mathbb{1}})^* \alpha_i - (\underbrace{\pi_2 g}_{=\Phi})^* \omega_i = \alpha_i - \Phi^* \omega_i = 0. \tag{$*$}$$

weil $\pi_1 \circ g = \mathbb{1}$ und $\pi_2 \circ g = \Phi$ ist $\big($und damit $g^*(\mu) = 0$, $\forall \mu \in I\big)$.

Hat man deshalb umgekehrt, dass I ein Differential-Ideal ist, $\mathrm{d}I \subseteq I$, so kann man bei Vorgabe von $(p_0, q_0) \in M \times N$ hoffen, dass man $\Phi\colon M \to N$ mit $\Phi(p_0) = q_0$ und $\Phi^* \omega_i = \alpha_i$ dadurch erhält, in dem man eine Integral-Mannigfaltigkeit $g\colon \tilde{M} \to M \times N$ durch (p_0, q_0) (nach Frobenius) wählt und dann, falls $\pi_1\colon g(\tilde{M}) \to M$ ein Diffeomorphismus ist, die Abbildung $\Phi\colon M \to N$ durch

$$\Phi = \pi_2 \circ (\pi_1 | g(\tilde{M}))^{-1},$$

also $g(\tilde{M})$ also Graph von Φ, bekommt.

(5.47) Satz (Cartan). *Seien M^n und N^r und $(\omega_1, \ldots, \omega_r)$ eine Basis von $\mathcal{E}^{(1)}(N)$ über $\mathcal{E}^{(0)}(N)$ (also N parallelisierbar). Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathcal{E}^{(1)}(M)$ derart, dass das Ideal $I = \langle \mu_1, \ldots, \mu_r \rangle \subseteq \mathcal{E}(M \times N)$ mit $\mu_i := \pi_1^* \alpha_i - \pi_2^* \omega_i$ differentiell ist. Dann gilt:*

(a) Zu jeder Wahl $(p_0, q_0) \in M \times N$ gibt es eine offene Umgebung $U \subseteq M$ von p_0 und eine glatte Abbildung $\Phi\colon U \to N$ mit $\Phi(p_0) = q_0$ und $\Phi^* \omega_i = \alpha_i$, für $i = 1, \ldots, r$ (lokale Existenz);

(b) *Ist $U \subseteq M$ offen und zusammenhängend, $p \in U$ und sind $\Phi_1, \Phi_2 \colon U \to N$ glatt mit $\Phi_1(p) = \Phi_2(p)$ und $\Phi_k^* = \alpha_i$, für $i = 1, \dots, r$ ($k = 1, 2$), so gilt bereits: $\Phi_1 = \Phi_2$ (Eindeutigkeitsatz).*

Beweis. (a): (i) Seien $X^1, \dots, X^r \in \mathfrak{X}(N)$ die zu $\omega_1, \dots, \omega_r \in \mathcal{E}^{(1)}(N)$ dualen Vektorfelder, also

$$\omega_i(X^j) = \delta_i^j \quad \text{(in jedem Punkt } q \in N\text{)}.$$

Behauptung: $(\mu_1, \dots, \mu_r)$ ist unabhängig. Denn ist $(p, q) \in M \times N$ beliebig und $\lambda^1, \dots, \lambda^r \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda^1 \mu_1 + \dots + \lambda^r \mu_r = 0 \quad \big(\text{in } (p, q)\big)$$

so gilt für

$$\eta^i := (0, \underbrace{X_q^i}_{=:\xi^i}) \in \mathrm{T}M_p \oplus \mathrm{T}N_q \cong T(M \times N)_{(p,q)},$$

dass

$$(\pi_1)_*(\eta^i) = (\mathrm{D}\pi_1)_{(p,q)}(0, \xi^i) = 0, \quad (\pi_2)_*(\eta^i) = \xi^i$$

ist und deshalb

$$\begin{aligned}
0 = \lambda^j \mu_j(\eta^i) &= \lambda^j \big(\pi_1^* \alpha_j(\eta^i) - \pi_2^* \omega_j(\eta^i)\big) \\
&= \lambda^j \Big(\alpha_j\big(\underbrace{(\pi_1)_* \eta^i}_{=0}\big) - \omega_j\big(\underbrace{(\pi_2)_*(\eta^i)}_{=\xi^i = X_q^i}\big)\Big) \\
&= -\lambda^j \underbrace{\omega_j(X^i)}_{=\delta_j^i} = -\lambda^i
\end{aligned}$$

Es ist also $I = \langle \mu_1, \dots, \mu_r \rangle$ von r unabhängigen 1-Formen erzeugt und nach Voraussetzung differentiell. Deshalb gibt es nach (5.43) eine Integral-Mannigfaltigkeit $g \colon \tilde{M} \to M \times N$ der Dimension $(n + r) - r = n$ durch (p_0, q_0), also ein $\tilde{p}_0 \in \tilde{M}$ mit $g(\tilde{p}_0) = (p_0, q_0)$ von I, d.i.: $g^*(\mu_i) = 0$, $i = 1, \dots, r$. Nach evtl. Verkleinerung von $\tilde{M}$ kann man annehmen, dass $g(\tilde{M}) \subseteq M \times N$ eine Untermannigfaltigkeit von $M \times N$ und $g \colon \tilde{M} \to g(\tilde{M})$ ein Diffeomorphismus ist (Umkehrsatz).

(ii) $\mathrm{D}\big(\pi_1 | g(\tilde{M})\big)_{(p_0,q_0)} \colon \mathrm{T}\big(g(\tilde{M})\big) \to \mathrm{T}M_{p_0}$ ist ein Isomorphismus. **Dazu:** Da $\mathrm{D}g_{\tilde{p}_0} \colon \mathrm{T}\tilde{M}_{\tilde{p}_0} \to \mathrm{T}\big(g(\tilde{M})\big)_{(p_0,q_0)}$ ein Isomorphismus ist, ist

$$\dim \mathrm{T}\big(g(\tilde{M})\big)_{(p_0,q_0)} = \dim \tilde{M} = n = \dim \mathrm{T}M_{p_0}$$

und es reicht daher die Injektivität von $\mathrm{D}\big(\pi_1 | g(\tilde{M})\big)_{(p_0,q_0)}$ zu zeigen. Da g integral ist, also $g^*(\mu_i) = 0$, $i = 1, \dots, r$, gilt:

$$\mathrm{T}\big(g(\tilde{M})\big)_{(p_0,q_0)} = \ker\big((\mu_1, \dots, \mu_r) \colon \mathrm{T}(M \times N)_{(p_0,q_0)} \to \mathbb{R}^r\big),$$

denn

$$\mu_i(\underbrace{g_*(\xi)}_{\subseteq \mathrm{T}(g(\tilde{M}))_{(p_0,q_0)}}) = g^* \mu_i(\xi) = 0, \ \forall \xi \in \mathrm{T}M_{\tilde{p}_0}.$$

Ist nun $v \in \ker(\mu_1, \dots, \mu_r)$ mit $(\mathrm{D}\pi_1)_{(p_0,q_0)}(v) = 0$ gegeben, so folgt:

$$\begin{aligned}
0 = \mu_i(v) &= \pi_1^* \alpha_i(v) - \pi_2^* \omega_i(v) \\
&= \alpha_i\big(\underbrace{(\pi_1)_*(v)}_{=0}\big) - \omega_i\big((\pi_2)_*(v)\big) = -\omega_i\big((\pi_2)_*(v)\big), \quad i = 1, \dots, r.
\end{aligned}$$

Da aber $(\omega_1, \ldots, \omega_r)$ eine Basis von $\mathrm{T}N_{q_0}$ ist, folgt: $(\pi_2)_*(v) = 0$. Aber wegen $(\pi_1, \pi_2) = \mathbb{1} : M \times N \to M \times N$:

$$v = (\pi_1)_*(v) + (\pi_2)_*(v) = 0 + 0 = 0$$

und damit $(\pi_1)_* | \mathrm{T}\big(g(\tilde{M})\big)_{(p_0, q_0)}$ ein Isomorphismus. Dann ist offenbar

$$\Phi(p_0) = \pi_2 \circ \underbrace{(\pi_1|W)^{-1}(p_0)}_{=(p_0,q_0)} = q_0$$

und wegen $\big(\mathrm{D}(\pi_1|W)^{-1}\big)_p(\xi) = \ker(\mu_1, \ldots, \mu_r)_{(p_0,q_0)}$ ist nun mit $(*)$ aus (5.46) rückwärts:

$$\begin{aligned}
0 &= \mu\big(\mathrm{D}(\pi_1|W)_p^{-1}(\xi)\big) = \pi_1^*\alpha_i\big(\mathrm{D}(\pi_1|W)_p^{-1}(\xi)\big) - \pi_2^*\omega_i\big(\mathrm{D}(\pi_1|W)_p^{-1}(\xi)\big) \\
&= \alpha_i\big(\underbrace{\mathrm{D}\pi_1 \circ \mathrm{D}(\pi_1|W)_p^{-1}}_{=\mathbb{1}}(\xi)\big) - \omega_i\big(\underbrace{\mathrm{D}\pi_2 \circ \mathrm{D}(\pi_1|W)_p^{-1}}_{=\mathrm{D}\Phi}(\xi)\big) \\
&= \alpha_i(\xi) - \omega_i\big(\mathrm{D}\Phi(\xi)\big) \\
&= \alpha_i(\xi) - \Phi^*\omega_i(\xi) = (\alpha_i - \Phi^*\omega_i)(\xi), \quad \forall \xi \in \mathrm{T}M_p,
\end{aligned}$$

also $\Phi^*\omega_i = \alpha_i$ $(i = 1, \ldots, r)$.

(b) Ist $U \subseteq M$ zusammenhängend, $p \in U$ und $\Phi_1, \Phi_2 : U \to N$ glatt mit $\Phi_1(p) = \Phi_2(p)$ und

$$\Phi_k^*\omega_i = \alpha \quad (k = 1, 2)\ (i = 1, \ldots, r),$$

so gilt bereits:

$$\Phi_1 = \Phi_2.$$

Beweis: Seien $\Phi_1, \Phi_2 : U \to N$ mit $\Phi_k^*\omega_i = \alpha_i$, so betrachte

$$V := \big\{p \in U \,:\, \Phi_1(p) = \Phi_2(p)\big\}.$$

Dann ist $V \neq \emptyset$, da $p_0 \in V$ ist, und abgeschlossen in U, weil Φ_1 und Φ_2 stetig sind. Ist $\tilde{p}_0 \in V$ gegeben, so sind sowohl

$$g_1 : U \to M \times N, \quad g_1(p) = \big(p, \Phi_1(p)\big)$$

also auch

$$g_2 : U \to M \times N, \quad g_2(p) = \big(p, \Phi_2(p)\big)$$

Integral-Mannigfaltigkeiten des Ideals $\langle \mu_1, \ldots, \mu_r \rangle$ durch $(\tilde{p}_0, \tilde{q}_0)$ mit $\tilde{q}_0 := \Phi_1(\tilde{p}_0) = \Phi_2(\tilde{p}_0)$ $\big($siehe (5.46)$\big)$. Nach der Eindeutigkeit der Integral-Mannigfaltigkeit durch einen Punkt im Satz von Frobenius, gibt es deshalb $U_1, U_2 \subseteq U$ mit offenen Umgebungen $U_k \subseteq U$ von $\tilde{p}_0$, so dass $g_1(U_1) = g_2(U_2)$. Aber aus $g_1(p) \in g_2(U_2)$ folgt: $\big(p, \Phi_1(p)\big) = \big(p', \Phi(p')\big)$ für ein $p' \in U_2$.

$$\Longrightarrow p = p' \Longrightarrow U_1 \subseteq U_2 \Longrightarrow U_1 = U_2 \quad \text{und} \quad \Phi_1(p) = \Phi_2(p),\ \forall p \in U_1 = U_2.$$

Damit ist $V \subseteq U$ auch offen in U, und da U zusammenhängend ist, folgt: $V = U$ und damit: $\Phi_1 = \Phi_2$. □

(5.48) Vorbereitung. Seien nun G und H wieder Liegruppen und $\mathfrak{g}$ bzw. $\mathfrak{h}$ ihre Lie-Algebren. Gegeben sei ein Lie-Homomorphismus $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$. **Frage:**

1. Gibt es einen Lie-Homomorphismus $\Phi : G \to H$ mit $\Phi_* = \varphi$?

2. Sind $\Phi_1, \Phi_2 : G \to H$ Lie-Homomorphismen mit $(\Phi_1)_* = (\Phi_2)_*$. Gilt dann: $\Phi_1 = \Phi_2$?

Beachte:

(i) $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ induziert $\varphi^*\colon \mathfrak{h}^* \to \mathfrak{g}^*$ seine duale Abbildung

$$\langle \varphi^*\omega, X\rangle = \langle \omega, \varphi X\rangle, \quad \omega \in \mathfrak{h}^*, X \in \mathfrak{g}.$$

(ii) φ^* induziert dann auch $\Lambda^2\varphi^*\colon \Lambda^2\mathfrak{h}^* \to \Lambda^2\mathfrak{g}^*$ mit

$$\Lambda^2\varphi^*(\omega \wedge \tau) = \varphi^*\omega \wedge \varphi^*\tau$$

(mit universelle Eigenschaft) bzw., wenn man $\Lambda^2\mathfrak{g}^* \cong \mathrm{Alt}_2(\mathfrak{g})$

$$\Lambda^2\varphi^*(\omega)(X,Y) = \omega(\varphi X, \varphi Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

(iii) Man kann auch $\mathrm{d}\colon \mathfrak{g}^* \to \Lambda^2\mathfrak{g}^*$ (für eine beliebige Lie-Algebra $\mathfrak{g}$) definieren durch

$$\mathrm{d}\omega(X,Y) = -\omega\big([X,Y]\big) \quad \text{(vgl. Cartans Formel)}$$

und ähnlich auch auf $\Lambda^k\mathfrak{g}^*$ und damit auf $\Lambda\mathfrak{g}^* = \bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k\mathfrak{g}^*$ ($n = \dim\mathfrak{g}$) derart, dass $\Lambda\mathfrak{g}^*$ zu einer cdga wird.

Beachte, dass d in folgendem Sinn funktoriell ist: $\mathrm{d}(\varphi^*\omega) = \varphi^*(\mathrm{d}\omega)$, für $\omega \in L^*$, $\varphi\colon L \to M$, $L = \mathfrak{g}$, $M = \mathfrak{h}$, denn:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\varphi^*\omega)(X,Y) &= -\varphi^*\omega\big([X,Y]\big) && \text{für } X, Y \in L \text{ (nach Def.)}\\
&= -\omega\Big(\varphi\big([X,Y]\big)\Big) && \big(\text{nach Def.(i)}\big)\\
&= -\omega\big([\varphi X, \varphi Y]\big) && \text{da } \varphi \text{ Hom.}\\
&= \mathrm{d}\omega(\varphi X, \varphi Y) && \text{nach Def. von d}\\
&= \big(\varphi^*(\mathrm{d}\omega)\big)(X,Y) && \text{nach Def. von } \Lambda^2\varphi^*
\end{aligned}$$

$\forall X, Y \in L$, also

$$\mathrm{d}(\varphi^*\omega) = \varphi^*(\mathrm{d}\omega).$$

(5.49) Lemma. *Seien L und M Lie-Algebren und $(Y_1, \dots, Y_r) = \mathfrak{B}$ eine Basis von M. Seien (C^i_{jk}) die Strukturkonstanten von M bzgl. $\mathfrak{B}$ und $(\omega^1, \dots, \omega^n)$ dual zu $\mathfrak{B}$. Sei schließlich $\varphi\colon L \to M$ ein Lie-Homomorphismus. Dann gilt mit*

$$\mu^i := \pi_1^*(\varphi^*\omega^i) - \pi_2^*\omega^i \in (L \times M)^* \cong L^* \oplus M^*$$

sowie den Projektionen $\pi_1\colon L \times M \to L$, $\pi_2\colon L \times M \to M$, dass das Ideal $I = \langle \mu^1, \dots, \mu^r\rangle \subseteq \Lambda L^*$ differentiell ist, d.h.: $\mathrm{d}I \subseteq I$.

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass $\mathrm{d}\mu^i \in I$ ist $\big($für $i \in \{1, \dots, r\}\big)$, weil d derivativ ist (Übung). Außerdem ist $\mathrm{d}\omega^i = -C^i_{jk} w^j \wedge \omega^k$ (nach Def.).

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \mathrm{d}\mu^i &= \pi_1^*\big(\mathrm{d}(\varphi^*\omega^i)\big) - \pi_2^*(\mathrm{d}\omega^i)\\
&\overset{(5.48)}{=} \pi_1^*\big(\varphi^*(\mathrm{d}\omega^i)\big) - \pi_2^*(\mathrm{d}\omega^i)\\
&= -C^i_{jk}\Big\{\pi_1^*\big(\underbrace{\varphi^*(\omega^j \wedge \omega^k)}_{=\varphi^*\omega^j \wedge \varphi^*\omega^k}\big) - \pi_2^*(\omega^j \wedge \omega^k)\Big\}\\
&= -C^i_{jk}\Big\{\underbrace{\big[\pi_1^*\varphi^*\omega^j - \pi_2^*\omega^j\big]}_{=\mu^j \in I} \wedge \pi_1^*(\varphi^*\omega^k) + \pi_2^*\omega^j \wedge \underbrace{\big[\pi_1^*(\varphi^*\omega^k) - \pi_2^*\omega^k\big]}_{\mu^k \in I}\Big\} \in I. \qquad \square
\end{aligned}$$

(5.50) Satz. *Seien G und H Liegruppen mit Lie-Algebren $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$. Ist G zusammenhängend und $\Phi_1, \Phi_2 \colon G \to H$ Lie-Homomorphismen mit $(\Phi_1)_* = (\Phi_2)_*$, so gilt bereits: $\Phi_1 = \Phi_2$.*

Beweis. Man wähle Basis $(\omega^1, \ldots, \omega^r)$ von $\mathfrak{h}^*$. Dann ist $(\omega^1, \ldots, \omega^r)$ auch $\mathcal{E}^{(0)}(H)$-Basis von $\mathcal{E}^{(1)}(H)$. Da für Φ_1 und Φ_2 gilt:

$$\Phi_1^* \omega^i = \varphi^* \omega^i = \Phi_2^* \omega^i \quad (i = 1, \ldots, r)$$

$\big($bei $\varphi = (\Phi_1)_* = (\Phi_2)_*\big)$ und weiter: $\Phi_1(e) = e = \Phi_2(e)$ und schließlich mit $I = \langle \mu^1, \ldots, \mu^r \rangle \subseteq \Lambda(\mathfrak{g} \times \mathfrak{h})$ und

$$\mu^i = \pi_1^* \varphi^* \omega^i - \pi_2^* \omega_i$$

auch $\tilde{I} := \langle \mu^1, \ldots, \mu^r \rangle_{\mathcal{E}(G \times H)} \subseteq \mathcal{E}(G \times H)$ differentiell ist (denn $\mathrm{d}\mu^i \in I$), kann man (5.47,b) anwenden: $\Phi_1 = \Phi_2$. □

(5.51) Kommentar. (5.47,a) liefert bei Vorgabe eines Homomorphismus $\varphi \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$, dass es lokal um $e \in G$ ein differenzierbares $\Phi \colon U \to H$ gibt mit $\Phi(e) = e$ und $\Phi^*(\omega^i) = \varphi^*(\omega_i)|U$, wo $U \subseteq G$ eine offene Umgebung von e ist, aber es ist in dieser lokalen Version nicht einfach auch nur zu formulieren, dass Φ ein „lokaler" Homomorphismus ist $\big(\Phi(g_1 g_2) = \Phi(g_1)\Phi(g_2)$, falls $g_1, g_2, g_1 g_2 \in U\big)$. Wir werden später sehen, dass unter gewissen topologischen Voraussetzungen an G die Abbildung Φ sogar global existiert, $\Phi \colon G \to H$, *und* ein Lie-Homomorphismus ist.

(5.52) Definition. Seien G und H Liegruppen und $\varphi \colon H \to G$ ein Lie-Homomorphismus, der injektiv und immersiv ist. Wir nennen dann (H, φ) eine **Lie-Untergruppe von G**.

(5.53) Kommentar. Beachte, dass φ die Liegruppe H isomorph auf die abstrakte Untergruppe $\varphi(H) \subseteq G$ abbildet, denn φ ist injektiv. φ braucht aber i.a. kein Homöomorphismus von H auf $\varphi(H)$ mit der Teilraumtopologie zu sein. Die abstrakte Untergruppe $\varphi(H) \subseteq G$ zusammen mit der (i.a. viel zu groben) Teilraumtopologie wird keine Liegruppe sein $\big($vgl. (3.62)$\big)$.

(5.54) Bemerkung. Sei (H, φ) eine Lie-Untergruppe von G. Dann ist $\tilde{\mathfrak{h}} := \mathrm{Im}(\varphi_*) = \varphi_*(\mathfrak{f}) \subseteq \mathfrak{g}$ eine Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{g}$, die isomorph zu $\mathfrak{h}$ ist.

Beweis. $\varphi_* \colon \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ ist injektiv, da φ als immersiv vorausgesetzt war. Aber dann ist $\varphi_* \colon \mathfrak{h} \to \tilde{\mathfrak{h}} := \mathrm{Im}(\varphi_*)$ ein Lie-Isomorphismus zwischen Lie-Algebren $\big($und natürlich $\mathrm{Im}(\varphi_*)$ eine Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{g}\big)$. □

(5.55) Frage.

1. Können verschiedene Lie-Untergruppen die gleiche Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ induzieren?

2. Taucht jede Lie-Unteralgebra $\tilde{\mathfrak{h}} \subseteq \mathfrak{g}^*$ als Lie-Algebra einer Lie-Untergruppe (H, φ) auf, $\tilde{\mathfrak{h}} = \mathrm{Im}(\varphi_*)$?

(5.56) Kommentar.

(a) Ist $H^0 \subseteq H$ die Einskomponente einer Liegruppe H und ist $\varphi \colon H \to G$ eine Lie-Untergruppe, so haben ja H^0 und H die gleiche Liealgebra $\mathfrak{h}$ und daher ist natürlich $\varphi_*(\mathfrak{h}) = \varphi_*(\mathfrak{h}^0) = \tilde{\mathfrak{h}}$ gleich. Wir sollten daher in Frage 1 aus (5.55) H als zusammenhängend voraussetzen.

(b) Bei einer Lie-Untergruppe (H, φ) von G denkt man schon an die abstrakte Untergruppe $\varphi(H) \subseteq G$, allerdings mit einer Mannigfaltigkeits-Struktur, die i.a. keine Untermannigfaltigkeit-Struktur von G ist. Wir wollen deshalb (H_1, φ_1) und (H_2, φ_2) nicht unterscheiden, wenn φ_2 im Wesentlichen aus φ_1 nur durch Vorschalten eines Automorphismus' von H zu Stande kommt. Genauer:

(5.57) Definition. Zwei Lie-Untergruppen (H_1, φ_1) und (H_2, φ_2) einer Liegruppe heißen **äquivalent**, wenn es einen Lie-Isomorphismus $\psi\colon H_1 \to H_2$ gibt mit $\varphi_2 \circ \psi = \varphi_1$,

$$\begin{tikzcd} H_1 \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\psi"', "\cong"] & G \\ H_2 \arrow[ur, "\varphi_2"'] & \end{tikzcd}$$

(5.58) Kommentar.

(a) Sind (H_1, φ_1) und (H_2, φ_2) äquivalent, so induzieren sie wegen

$$(\varphi_1)_*(\mathfrak{h}_1) = (\varphi_2 \circ \psi)_*(\mathfrak{h}_1) = (\varphi_2)_*\big(\underbrace{\psi_*(\mathfrak{h}_1)}_{\mathfrak{h}_2}\big) = (\varphi_2)_*(\mathfrak{h}_2)$$

natürlich die gleiche Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{g}$.

(b) Ist (H, φ) Lie-Untergruppe, so versehe man die abstrakte Gruppe $A \subseteq G$, $A := \varphi(H)$, mit der Lie-Struktur, so dass $\varphi'\colon H \to \varphi(H) = A$ ein Lie-Isomorphismus wird. Dann ist die Inklusion $i\colon A \hookrightarrow G$ ein Lie-Homomorphismus $\big($da $i = \varphi \circ (\varphi')^{-1}\big)$ und damit (A, i) eine Lie-Untergruppe, die natürlich äquivalent zu (H, φ) ist (vermöge φ'),

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varphi'"', "\cong"] & G \\ A \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

(5.59) Proposition. *Sei G eine zusammenhängende Liegruppe und U eine offene Umgebung von $e \in G$. Dann gilt:*

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$$

$\big($*mit* $U^n = \{g_1 \cdots g_n \in G \,:\, g_i \in U \ (i = 1, \ldots, n)\}\big)$.

Beweis. Indem gegebenenfalls von U zu $U \cap U^{-1}$ übergeht, dass $U = U^{-1} = \{g^{-1} \in G : g \in U\}$ ist. Es ist dann

$$H := \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$$

zunächst eine Untergruppe von G. Da U offen ist, ist auch U^n offen (denn für $U, V \subseteq G$ offen $\implies U \cdot V = \bigcup_{g \in U} gV$ offen), also ist auch H offen. Damit sind auch alle Linksnebenklassen $gH \subseteq G$ offen, denn $l_g\colon G \to G$ ist Homöomorphismus. Es ist nun

$$G = H \sqcup \bigsqcup_{g \notin H} gH,$$

und H nicht-leer, da z.B. $e \in H$. Es folgt, weil G zusammenhängend ist: $\bigsqcup_{g \notin H} gH = \emptyset \implies H = G$. $\square$

(5.60) Satz. *Sei G eine Liegruppe und $\mathfrak{g}$ ihre Liealgebra. Dann gibt es zu jeder Unteralgebra $\tilde{\mathfrak{h}} \subseteq \mathfrak{g}$ bis auf Äquivalenz genau eine zusammenhängende Lie-Untergruppe (H, φ) von G mit* $\operatorname{Im}(\varphi_*) = \tilde{\mathfrak{h}}$.

Beweis. (i) **Existenz:** Für jedes $g \in G$ sei

$$D_g = \{X_g \in \mathrm{T}G_g \;:\; X \in \tilde{\mathfrak{h}}\} \subseteq \mathrm{T}G_g.$$

Sei $\dim \tilde{\mathfrak{h}} = k$ und $(X_1, \dots, X_k)$ eine Basis von $\tilde{h}$. Dann ist $D := (D_g)_{g\in G}$ eine glatte Distribution vom Rang k, denn sie wird global von den glatten Vektorfeldern $X_1, \dots, X_k$ erzeugt,

$$D_g = \big\langle (X_1)_g, \dots, (X_k)_g \big\rangle, \quad \forall g \in G.$$

(α) **Behauptung:** D ist involutiv. Seien dazu $X, Y \in \Gamma(D)$ beliebig. $\Longrightarrow \exists a^1, \dots, a^k, b^1, \dots, b^k \in \mathcal{E}^{(0)}(G)$:

$$X = a^i X_i, \quad Y = b^j X_j$$

$\big($da $(X_1, \dots, X_k)$ auch $\mathcal{E}^{(0)}(G)$-Basis von $\mathfrak{X}(G)$ ist.$\big)$

$$\Longrightarrow [X,Y] = [a^i X_i, b^j X_j] = \underbrace{a^i b^j \underbrace{[X_i, X_j]}_{\in\tilde{\mathfrak{h}}}}_{\in\Gamma(D)} + \underbrace{a^i (X_i b^j)\cdot X_j}_{\in\Gamma(D)} - \underbrace{b^j (X_j a^i)\cdot X_i}_{\in\Gamma(D)} \in \Gamma(D),$$

also D involutiv. Sei nun (H, φ) die nach dem Satz von Frobenius existierende maximale Integral-Mannigfaltigkeit bzgl. D durch $e \in G$.

(β) $\varphi(H) \subseteq G$ ist eine (abstrakte) Untergruppe. Sei dazu $g \in \varphi(H)$ beliebig. Betrachte dann die injektive Immersion

$$\varphi' := l_{g^{-1}} \circ \varphi \colon H \to G.$$

Ist $g = \varphi(h) \Longrightarrow \varphi'(h) = g^{-1}\cdot g = e$ und

$$\operatorname{Im}(\mathrm{D}\varphi'_h) = \mathrm{D}l_{g^{-1}}(\underbrace{\operatorname{Im}\mathrm{D}\varphi_h}_{=D_{\varphi(h)}}) = D_{l_{g^{-1}}\circ\varphi(h)},$$

weil $D = (D_g)$ G-invariant ist, $\mathrm{D}l_{g'}(D_g) = D_{g'g}$. Also ist auch (H, φ') eine Integral-Mannigfaltigkeit durch e. Da (H, φ) aber maximal ist, folgt: $\varphi'(H) \subseteq \varphi(H)$. Für jedes $g, g' \in \varphi(H)$ ist also mit $g' = \varphi(h')$ (für $h' \in H$) auch

$$g^{-1}g' = g^{-1}\cdot\varphi(h') \in l_{g^{-1}}\big(\varphi(H)\big) = \varphi'(H) \subseteq \varphi(H),$$

also $\varphi(H) \subseteq G$ Untergruppe. Wir versehen nun H mit der Gruppenstruktur, so dass $\varphi\colon H \to \varphi(H)$ ein (abstrakter) Gruppenisomorphismus wird,

$$h_1 \cdot h_2 := \varphi^{-1}\big(\varphi(h_1)\cdot\varphi(h_2)\big).$$

Wenn gezeigt ist, dass $\operatorname{mult}\colon H\times H \to H$ glatt ist, so ist H also eine Liegruppe und φ ein injektiver und immersiver Lie-Homomorphismus, d.i.: (H, φ) ist ein Lie-Untergruppe. Nach Konstruktion ist $\varphi_*(\mathfrak{h}) = \tilde{\mathfrak{h}}$, denn $\mathrm{D}\varphi_e(\mathrm{T}H_e) = D_e = \{X_e \;:\; X \in \tilde{\mathfrak{h}}\}$ und $\varphi_*(X)$ ist nach Definition das linksinvariante Vektorfeld auf G, welches in e mit $\mathrm{D}\varphi_e(X_e)$ übereinstimmt, also $\varphi_*(X) \in \tilde{\mathfrak{h}}$. Da φ_* injektiv ist und damit $\dim\varphi_*(\mathfrak{h}) = \dim(\mathfrak{h})$, folgt: $\varphi_*(\mathfrak{h}) = \tilde{\mathfrak{h}}$.

(γ) $\operatorname{mult}\colon H\times H\to H$ ist glatt. Aber für $\beta\colon H\times H \to H$, $(h_1, h_2) \mapsto \varphi(h_1)\cdot\varphi(h_2)$ ist

$$\begin{tikzcd} H\times H \arrow[r, "\beta"] \arrow[dr, "\text{mult}"'] & G \\ & H \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

kommutativ und daher nach (3.61) mult zunächst stetig, dann nach (3.43) sogar glatt. $\Longrightarrow$ Existenz.

(ii) **Eindeutigkeit:** Sei (H,φ) (nach Frobenius) wie unter (a) und (K,ψ) eine weitere zusammenhängende Lie-Untergruppe mit $\mathrm{Im}(\psi_*) = \tilde{\mathfrak{h}} = \mathrm{Im}(\varphi_*)$. Wegen der Linksinvarianz von $D = (D_g)$ folgt, dass auch (K,ψ) eine Integral-Mannigfaltigkeit für D durch e ist, also $\psi(K) \subseteq \varphi(H)$, wegen der Maximalität von (H,φ):

$$\begin{aligned}\mathrm{D}\psi_h(\mathrm{T}H_h) &= \mathrm{D}\psi_h \circ (\mathrm{D}l_h)_e(\mathfrak{h}) = \mathrm{D}(\psi \circ l_h)_e(\mathfrak{h}) \underset{\psi\circ l_h = l_{\psi(h)}\circ\psi}{=} \mathrm{D}(l_{\psi(h)} \circ \psi)_e(\mathfrak{h}) \\ &= \mathrm{D}l_{\psi(h)} \circ \underbrace{\mathrm{D}\psi_e(\mathfrak{h})}_{=D_e} = D_{\psi(h)}.\end{aligned}$$

Es gibt deshalb (wieder) eine Abbildung $\eta\colon K \to H$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "\eta"'] & G \\ & H \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

η ist ein Gruppenhomomorphismus, weil ψ und φ es sind (und φ injektiv ist):

$$\begin{aligned}\varphi\big(\eta(h_1h_2)\big) &= \psi(h_1h_2) = \psi(h_1)\psi(h_2) = \varphi\big(\eta(h_1)\big)\varphi\big(\eta(h_2)\big) \\ &= \varphi\big(\eta(h_1)\eta(h_2)\big) \Longrightarrow \eta(h_1h_2) = \eta(h_1)\eta(h_2)\end{aligned}$$

mit

$$\psi = \varphi \circ \eta, \qquad \begin{tikzcd} K \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\eta"', "\cong"] & G \\ H \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

wieder wegen (3.61) $\big($und (3.43)$\big)$ ist η auch glatt und weil φ und ψ immersiv sind, ist es auch η:

$$0 = \mathrm{D}\eta_h(\xi) \Longrightarrow 0 = \mathrm{D}\varphi_{\eta(h)}\big(\mathrm{D}\eta_h(\xi)\big) = \mathrm{D}\psi_h(\xi) \Longrightarrow \xi = 0.$$

Da $\dim K = \dim H = \dim \tilde{\mathfrak{h}} = k$ ist, folgt: η bildet eine offene Umgebung $V \subseteq K$ von $e \in K$ diffeomorph auf eine offene Umgebung $U \subseteq H$ von e ab. Aber damit liegt auch

$$U^n = \eta(V^n) \subseteq \mathrm{Im}(\eta).$$

Nach (5.59) ist damit η auch surjektiv. Injektiv ist es sowieso, weil ψ es ist ($\psi = \varphi \circ \eta$ injektiv $\Longrightarrow \eta$ injektiv). η ist Lie-Isomorphismus. □

(5.61) Kommentar. Aber wann ist $\varphi(H) \subseteq G$ sogar eine Lie-Untermannigfaltigkeit. Nach Kapitel 3 ist das genau dann der Fall, wenn $\varphi\colon H \to \varphi(H)$ ein Homöomorphismus ist $\big($wobei $\varphi(H)$ nun die Relativ-Topologie von G trägt, d.h.: wenn φ eine Einbettung ist, siehe (3.43)$\big)$.

(5.62) Satz. *Sei (H,φ) eine Lie-Untergruppe einer Liegruppe G. Dann ist φ genau dann eine Einbettung, wenn $\varphi(H) \subseteq G$ abgeschlossen ist.*

Beweis. „$\Longrightarrow$“: Sei (g_n) Folge in $\varphi(H)$ und $(g_n) \to g \in G$. Zu zeigen: $g \in \varphi(H)$. Weil φ eine Einbettung ist $\Longrightarrow \exists$ Frobenius-Box $U \subseteq G$ um $e \in G$, so dass $U \cap \varphi(H)$ aus genau einer Scheibe S besteht. Wähle $e \in V \subseteq W \subseteq U$ mit

$$V^{-1}V \subseteq \overline{W} \subseteq U.$$

Da $(g^{-1}g_n) \to e$, existiert ein $N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : g^{-1}g_n \in V$, also $g_n \in gV$. Betrachte nun $g_N^{-1}g_n \in (gV)^{-1} \cdot g_n = V^{-1}g^{-1}g_n \subseteq V^{-1}V \subseteq \overline{W}$ und $g_N^{-1}g_n \in \varphi(H)$

$$\Longrightarrow g_N^{-1}g_n \in S \cap \overline{W} \Longrightarrow g_N^{-1}g = \lim_{n\to\infty}(g_N^{-1}g_n) \in S \cap \overline{W}$$

(weil $S \cap \overline{W}$ abgeschlossen ist), insbesondere ist $g_N^{-1}g_n \in S \subseteq \varphi(H) \Longrightarrow g \in g_N\varphi(H) = \varphi(H) \Longrightarrow \varphi(H)$ ist abgeschlossen.

„$\Longleftarrow$": Da $\varphi\colon H \to \varphi(H)$ injektiv ist, reicht es zu zeigen, dass φ lokaler Homöomorphismus ist ($\Longrightarrow \varphi$ ist Homöomorphismus). Weil φ mit Linkstranslation vertauscht, $\varphi \circ l_h = l_{\varphi(h)} \circ \varphi$, reicht es, eine offene Menge $V \subseteq H$ zu finden, so dass $\varphi(V)$ in $\varphi(H)$ (mit der Relativ-Topologie) offen ist. Sei (U, τ) eine Frobenius-Box um e, also $\tau(U) = W^k \times W^{n-k}$. Dann besteht $\varphi(H) \cap U$ aus höchstens abzählbar vielen der Scheiben $\{\tau^i = \text{const.} \ : \ i = k+1, \ldots, n\}$, wobei die Scheibe S_0 mit $\tau = 0$ auf jeden Fall dazu gehört. Sei nun $\overline{W} \subseteq U$ ein kleineres Rechteck und

$$C := \overline{W} \cap \{\tau^1 = \cdots = \tau^k = 0\}. \Longrightarrow A := \tau\big(\varphi(H) \cap C\big) \subseteq \mathbb{R}^{n-k}$$

ist nicht-leer (da $0 \in A$ ist), *abgeschlossen* und abzählbar $\Longrightarrow$ (Satz von Baire, vgl. (5.63)) A muss ein isolierten Punkt $a \in A$ haben, d.h.: $\exists \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^{n-k}$ offen mit $\tilde{U} \cap A = \{a\}$. $\Longrightarrow$ Es gibt also eine Scheibe S_a, so dass $S_a \subseteq \varphi(H)$ relativ-offen ist. Setze dann $V := \varphi^{-1}(S_a) \subseteq H$ offen $\Longrightarrow S_a = \varphi(V)$ ist offen in $\varphi(H)$, also: φ ist Einbettung. $\square$

(5.63) Kommentar. Eine Teilmenge A in einem topologischen Raum X heißt **nirgends dicht**, wenn $\overline{A}^\circ = \emptyset$ ist, d.h.: $\overline{A}$ hat keine inneren Punkte. Nach dem **Bairschen Kategoriensatz** (siehe z.B. [HS]) ist ein vollständiger metrischer Raum immer von 2.Kategorie, d.h.: er ist nicht Vereinigung von abzählbar vielen nirgends dichten Teilmengen.

Angenommen: $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^m$ sei abgeschlossen und ohne isolierte Punkte. Für jedes $a \in A$ ist dann $\{a\} \subseteq A$ abgeschlossen, also $\overline{\{a\}} = \{a\}$ und $\{a\}^\circ = \emptyset$, denn sonst müsste $\{a\} \subseteq A$ offen sein (rel A), d.i.: a ist isolierter Punkt. Da A mit der euklidischen Metrik vollständiger metrischer Raum ist $\Longrightarrow$ (Baire) A muss überabzählbar sein, denn $A = \bigcup_{a\in A}\{a\}$. Ist also $A \subseteq \mathbb{R}^m$ nicht leer, abgeschlossen und abzählbar, so hat A mindestens einen isolierten Punkt.

Teil IV.

Differentialgeometrie IV

(5.64) Erinnerung.

(a) Sei X ein zusammenhängender und lokal wegzusammenhängender topologischer Raum (also X auch wegzusammenhängend) und $x_0 \in X$. Eine Überlagerung $\hat{\pi}\colon (\hat{X}, \hat{x}_0) \to (X, x_0)$ heißt **universell**, wenn $(\hat{X}, \hat{x}_0)$ einfach zusammenhängend ist, $\pi_1(\hat{X}, \hat{x}_0) = (1)$.

(b) Es folgt dann mit dem Liftungssatz: Ist $\pi\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ eine beliebige Überlagerung, so gibt es genau einen **Überlagerungsmorphismus** $f\colon (\hat{X}, \hat{x}_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ d.h. $\pi \circ f = \hat{\pi}$. Es ist deshalb $\hat{\pi}$ bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt.

$$\begin{tikzcd} (\hat{X}, \hat{x}_0) \arrow[r, "\exists! f"] \arrow[d, "\hat{\pi}"'] & (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \arrow[dl, "\pi"] \\ (X, x_0) & \end{tikzcd}$$

(5.65) Bemerkung. Sei (X, x_0) ein punktierter Raum wie unter (5.64) und habe eine universelle Überlagerung $\pi\colon (\hat{X}, \hat{x}_0) \to (X, x_0)$. Sei $x \in X$ beliebig. Dann gibt es eine offene Umgebung $U \subseteq X$ von x, so dass für die Inklusion $i\colon U \hookrightarrow X$ gilt: $i_*\colon \pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)$ ist trivial, $i_* = 0$.

Beweis. Wähle eine gleichmäßig überlagerte, offene Umgebung $U \subseteq X$ von x und sei $\hat{x} \in \hat{X}$ ein Urbild von x unter π. Sei weiter $\hat{U} \subseteq \hat{X}$ das Blatt über U, welches $\hat{x}$ enthält, $\Longrightarrow \pi|\hat{U}\colon \hat{U} \to U$ ist Homöomorphismus. Sei nun $c \in \pi_1(U, x)$ beliebig und $c = [\alpha]$ mit $\alpha\colon I \to X$ geschlossen, $\alpha(0) = \alpha(1) = x$. Dann ist $\hat{\alpha}\colon I \to X$,

$$\hat{\alpha} := (\pi|\hat{U})^{-1} \circ \alpha$$

der Lift von α mit $\hat{\alpha}(0) = \hat{x}$, also $\hat{\alpha}$ geschlossen. Es folgt: $[\hat{\alpha}]_{\hat{X}} = 1$, denn $\pi_1(\hat{X}, \hat{x}) = (1)$. Also ist

$$i_*(c) = i_*\big([\alpha]_U\big) = [\alpha]_X = [\pi \circ \hat{\alpha}]_X = \pi_*\big([\hat{\alpha}]_X\big) = \pi_*(1) = 1. \qquad \square$$

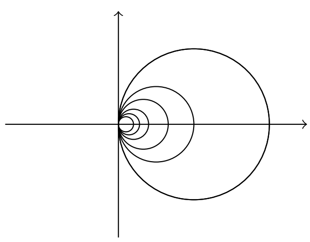
(5.66) Definition. Wir nennen einen (zusammenhängenden, lokal wegzusammenhängenden) topogischen Raum X **semilokal einfach zusammenhängend**, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung $U \subseteq X$ besitzt, so dass für die Inklusion $i\colon U \hookrightarrow X$ der induzierte Homomorphismus $i_*\colon \pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)$ trivial ist.

(5.67) Beispiel.

(a) Hat jeder Punkt $x \in X$ eine einfach zusammenhängende Umgebung $U \subseteq X$, $\pi_1(U, x) = (1)$, so ist er semilokal einfach zusammenhängend. Es folgt: Jede topologische n-Mannigfaltigkeit M ist semilokal einfach zusammenhängend $\big(\forall p \in M\ \exists U \subseteq M$ offen, $U \ni p : U \cong (\mathbb{B}^n)^\circ$ und $\pi_1((\mathbb{B}^n)^\circ) = (1)\big)$.

(b) Nicht jeder (zusammenhängender, lokal wegzusammenhängender) Raum hat diese Eigenschaft. Z.B. hat sie folgender Teilraum von $\mathbb{R}^2$ nicht:

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x - \tfrac{1}{n})^2 + y^2 = \tfrac{1}{n^2}\big\}$$



(5.68) Satz. *Sei X semilokal einfach zusammenhängend und $x_0 \in X$ beliebig. Dann hat (X, x_0) eine universelle Überlagerung.*

(5.69) Beweisidee. Angennommen:

(i) $\pi\colon (\hat{X}, \hat{x}_0) \to (X, x_0)$ sei universell. $\Longrightarrow$ Jedes $x \in X$ hat offene wegzusammenhängende Umgebung $U_x \subseteq X$, die gleichmäßige Überlagerung (und damit ist $i_*\colon \pi_1(U_x, x) \to \pi_1(X, x)$ trivial, vgl (5.65)) ist. Sei $x_i \in X$ $(i \in I)$, $U_i := U_{x_i}$ fest gewählt mit $X = \bigcup_{i \in I} U_i$.

(ii) Sei $\Gamma := \pi_1(X, x_0)$. Behauptung: $\forall i \in I$ gibt es einen Homöomorphismus $\psi_i\colon \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \Gamma$ mit $\mathrm{pr}_1 \circ \psi_i = \pi$ (wir sagen: $\pi\colon \hat{X} \to X$ ist ein Faserbündel mit Faser Γ). Setze nämlich $\varphi_i\colon U_i \times \Gamma \to \pi^{-1}(U_i)$. Zu $(x, c) \in U_i \times \Gamma$; wähle

- Wege γ_i von x_0 nach x_i $(i \in I)$;
- Repräsentanten $\alpha\colon I \to X$ von c, $c = [\alpha]$;
- einen Weg w von x_i nach x.

Setze nun
$$\varphi_i\big(x, [\alpha]\big) := (\widehat{\alpha * \gamma_i * w})(1).$$
Es ist dann:

- φ_i wohldefiniert, weil für andere Wahlen α' und w' gilt:
$$\alpha' * \gamma_i * w' \simeq \alpha * \gamma_i * w \quad \text{(weil } w' * w^- \text{ nullhomotop ist)}$$
- $\varphi_i | U_i \times \{[\alpha]\} \to \hat{U}_i^{[\alpha]}$, wo $U_i^{[\alpha]}$ das Blatt über U_i ist, welches $\varphi_i\big(x_i, [\alpha]\big)$ enthält, ist Homöomorphismus $\big($denn $\hat{x} \mapsto \big(\pi(\hat{x}), [\alpha]\big)$ ist Umkehrung$\big)$;

$\Longrightarrow$ (da Γ diskrete Topologie hat) φ_i ist Homöomorphismus.

(iii) $\pi\colon \hat{X} \to X$ wird (zusammen mit dem Bündel-Atlas (ψ_i)) sogar zu einem **Γ-Prinzipalbündel**, d.h. die Übergänge
$$\psi_j \circ \psi_i^{-1}\colon (U_i \cap U_j) \times \Gamma \to (U_i \cap U_j) \times \Gamma$$
werden durch Rechtsmultiplikation mit einem Element $g_{ij}(x) \in \Gamma$ aus der Gruppe gegeben (und $g_{ij}\colon U_i \cap U_j \to \Gamma$ ist stetig), denn: Ist $x \in U_i \cap U_j$ und w_i Weg von x_i nach x in U_i, w_j Weg von x_j nach x in U_j, so ist
$$\psi_j \circ \psi_i^{-1}\big(x, [\alpha]\big) = \big(x, [\alpha * \gamma_i * w_i * w_j^- * \gamma_j^-]\big) = \big(x, [\alpha] \cdot g_{ij}(x)\big)$$
mit
$$g_{ij}(x) := [\gamma_i * w_i * w_j^- * \gamma_j^-] \in \Gamma.$$
(g_{ij} ist wohldefiniert und konstant auf Wegkomponenten von $U_i \cap U_j$, also stetig).

Folgerung: Man kann $\pi\colon \hat{X} \to X$ rekonstruieren, wenn man die offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von X hat und die Übergänge (g_{ij}):
$$\hat{X} \cong \Big(\sum_{i \in I} U_i \times \Gamma\Big) / \sim, \quad \pi\big(\big[(x, [\alpha])_i\big]\big),$$
wo
$$\big(x, [\alpha]\big)_i \sim \big(y, [\beta]\big)_j :\Longleftrightarrow x = y,\ [\beta] = [\alpha] \cdot g_{ij}(x) \quad (\text{bei } x \in U_i, y \in U_j).$$
Idee: Versuche nun $\pi\colon \hat{X} \to X$ so zu bauen.

Beweis von (5.68). Wähle eine offene Überdeckung (U_i) von X aus wegzusammenhängenden, offenen Mengen $U_i \subseteq X$, so dass $\pi_1(U_i) \to \pi_1(X)$ trivial ist ($i \in I$) und für jedes $i \in I$ einen festen Punkt $x_i \in U_i$. Sei weiter γ_i ein fest gewählter Weg von x_0 nach x_i. Mit $\Gamma := \pi_1(X, x_0)$ setzen wir nun:

$$g_{ij} \colon U_i \cap U_j \to \Gamma, \quad g_{ij}(x) := [\gamma_i * w_i * w_j^- * \gamma_j^-] \quad (\text{wo } w_i \text{ ein Weg von } x_i \text{ nach } x \text{ in } U_i).$$

Da $\pi_1(U_k) \to \pi_1(X)$ trivial ist ($k = i, j$), ist g_{ij} wohldefiniert und g_{ij} ist konstant auf Wegkomponenten von $U_i \cap U_j \Longrightarrow g_{ij}$ ist stetig.

Setze nun

$$\hat{X} := \Big(\sum_i U_i \times \Gamma \Big) / \sim$$

wobei

$$\big(x, [\alpha]\big)_i \sim \big(y, [\beta]\big)_j :\Longleftrightarrow x = y,\ [\beta] = [\alpha] \cdot g_{ij}(x)$$

(hier ist $(x, [\alpha])_i := \iota_i(x, [\alpha])$ mit $\iota_i \colon U_i \times \Gamma \to \sum_j U_j \times \Gamma$) mit der natürlichen Topologie (gebildet aus Produkt-, Summen- und Quotiententopologie), sowie $\pi \colon \hat{X} \to X$,

$$\pi\Big(\big[(x, [\alpha])_i\big] \Big) := x.$$

Ist $q \colon \sum_i U_i \times \Gamma \to \hat{X}$ die kanonische Projektion

$$\Longrightarrow q_i^{[\alpha]} := q | U_i \times \big\{[\alpha]\big\} \colon U_i \times \big\{[\alpha]\big\} \to \hat{U}_i^{[\alpha]}$$

ist Homöomorphismus (universelle Eigenschaft). Weiter ist

$$\pi^{-1}(U_i) = \bigsqcup_{[\alpha] \in \Gamma} U_i^{[\alpha]}$$

und $\pi | \hat{U}_i^{[\alpha]} \colon \hat{U}_i^{[\alpha]} \to U_i$ ist homöomorph (weil $q_i \circ \iota_i^{[\alpha]}$ mit $\iota_i^{[\alpha]} \colon U_i \to U_i \times \{[\alpha]\}$, Umkehrung ist. $\Longrightarrow \pi \colon \hat{X} \to X$ ist.) $\Longrightarrow \pi \colon \hat{X} \to X$ ist (evtl. unzusammenhängend) Überlagerung. (Wegliftung existiert trotzdem.) Noch zu zeigen:

(i) $\hat{X}$ ist wegzusammenhängend,

(ii) $\hat{X}$ ist einfach zusammenhängend.

(5.70) Lemma. *Sei $i_0 \in I$ so, dass $x_0 \in U_{i_0}$ ist und $\alpha \colon I \to X$ geschlossen mit $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$. Sei weiter $[\beta] \in \Gamma$ und $\hat{\alpha} \colon I \to \hat{X}$ der Lift von α mit Anfang $\big[\big(x_0, [\beta]\big)_{i_0}\big]$. Dann gilt:*

$$\hat{\alpha}(1) = \big[\big(x_0, [\beta] \cdot [\alpha]\big)_{i_0}\big].$$

Schluss des Beweises von (5.68). (a) $\hat{X}$ ist wegzusammenhängend. Sei $\hat{x}_1, \hat{x}_2 \in \hat{X}$ beliebig, $x_1 = \pi(\hat{x}_1)$, $x_2 = \pi(\hat{x}_2)$. Seien γ_1, γ_2 Wege von x_1 bzw. x_2 nach x_0. Dann verbindet $\hat{\gamma}_1$ bzw. $\hat{\gamma}_2$ $\hat{x}_1$ bzw. $\hat{x}_2$ mit der Faser $\pi^{-1}(x_0)$. Sei daher o.E. $\hat{x}_1, \hat{x}_2 \in \pi^{-1}(x_0)$. Setze

$$\hat{x}_0 := \big[(x_0, 1)_{i_0}\big] \quad (\text{mit } i_0 \in I \text{ aus dem Lemma}).$$

O.E.: $\hat{x}_1 = \hat{x}_0$, $\hat{x}_2 = \big[(x_0, [\alpha])_{i_0}\big]$, für ein $[\alpha] \in \Gamma$. Dann verbindet nach (5.70) der Lift $\hat{\alpha}$ von α mit $\hat{\alpha}(0) = \hat{x}_0$ $\hat{x}_0$ mit $\hat{x}_2$. $\Longrightarrow$ Behauptung.

(b) $\hat{X}$ ist einfach zusammenhängend: Sei $\hat{\alpha} \colon I \to \hat{X}$ mit $\hat{\alpha}(0) = \hat{\alpha}(1) = \hat{x}_0$. $\Longrightarrow \hat{\alpha}$ ist Lift von $\alpha := \pi \circ \hat{\alpha}$. Nach (5.70) ist

$$\big[(x_0, 1)_{i_0}\big] = \hat{x}_0 = \hat{\alpha}(1) \overset{(5.70)}{=} \big[(x_0, 1 \cdot [\alpha])_{i_0}\big] \Longrightarrow [\alpha] = 1.$$

Aber: $\pi_* \colon \pi_1(\hat{X}, \hat{x}_0) \to \pi_1(X, x_0)$ ist injektiv $\big($siehe (C.32,b)$\big) \Longrightarrow [\hat{\alpha}] = 1.$ $\square$

Beweis von (5.70). $\gamma_{j-1} := \gamma_{j-1}^\circ * w_{j-1} \Longrightarrow g_{j-1,j}(x_j) = [\gamma_{j-1} * a_j * \gamma_j^-] =: \beta_j$. $\hat{x}_j := \hat{\alpha}(t_j)$ ist $\hat{x}_{j-1} = \big[(x_{j-1}, [\delta])_{i_{j-1}}\big] \Longrightarrow \hat{x}_j = \big[(x_j, [\delta])_{i_j}\big]$, weil $\hat{\alpha}|[t_{j-1}, t_j]$ in einem Blatt verläuft.

$$\hat{\alpha}(1) = \big[\big(x_0, [\beta] g_{i_0 i_1}(x_0) \cdot g_{i_1 i_2}(x_1) \cdots g_{i_{k-1} i_k}(x_{k-1})\big)_{i_0}\big] = \big[\big(x_0, [\beta] \cdot [\beta_1] \cdots [\beta_k]\big)_{i_0}\big]$$

$$\beta_1 * \cdots * \beta_k \simeq \gamma_0 * \alpha_1 * \cdots * \alpha_k * \gamma_k^{-1} \simeq \alpha. \qquad \square$$

(5.71) Definition. Seien $M, \tilde{M}$ zusammenhängende Mannigfaltigkeiten. Eine glatte Abbildung $\pi\colon \tilde{M} \to M$ heißt **glatte Überlagerung** $:\Longleftrightarrow\ \forall\, p \in M\, \exists$ offenes $U \in \mathfrak{A}(p)$:

$$\pi^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} \tilde{U}_i$$

ist mit offenes $\tilde{U}_i \subseteq \tilde{M}$ derart, dass $\pi|\tilde{U}_i\colon \tilde{U}_i \to U_i$ Diffeomorphismen sind.

(5.72) Satz. *Sei nun M eine zusammenhängende glatte Mannigfaltigkeit, $\tilde{M}$ zusammenhängend, lokal wegzusammenhängender topologischer Raum und $\pi\colon \tilde{M} \to M$ eine (topologische) Überlagerung. Dann gibt es auf $\tilde{M}$ genau eine glatte Mannigfaltigkeits-Struktur, so dass π zu einer glatten Überlagerung wird.*

Beweis. (i) **Eindeutigkeit.** Sei $\tilde{c}$ eine glatte Struktur auf $\tilde{M}$, so dass $\pi\colon \tilde{M} \to M$ glatte Überlagerung ist. Es gibt dann offene Überlagerung $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ von M aus Kartengebieten, die gleichmäßig überlagert sind, d.h.: es gibt Karten $\varphi_\alpha\colon U_\alpha \to V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$ und

$$\pi^{-1}(U_\alpha) = \bigsqcup_{i \in I} \tilde{U}_\alpha^i,$$

mit $\tilde{U}_\alpha^i \subseteq \tilde{M}$ offen und $\pi|\tilde{U}_\alpha^i\colon \tilde{U}_\alpha^i \to U_\alpha$ diffeomorph. Es ist dann

$$\psi_\alpha^i := \varphi_\alpha \circ \pi|\tilde{U}_\alpha^i\colon \tilde{U}_\alpha^i \to V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$$

ein Diffeomorphismus und damit $\mathfrak{A} = (\psi_\alpha^i)_{\alpha \in A, i \in I}$ ein glatter Atlas von $\tilde{M}$, denn

$$\psi_{\alpha\beta}^{ij} := \psi_\alpha^i \circ (\psi_\beta^j)^{-1}\colon \psi_\beta^j(\tilde{U}_\alpha^i \cap \tilde{U}_\beta^j) \to \psi_\alpha^i(\tilde{U}_\alpha^i \cap \tilde{U}_\beta^j)$$

ist als Verkettung von Diffeomorphismen ein Diffeomorphismus. Es folgt: $\tilde{c} = [\tilde{\mathfrak{A}}]$.

(ii) **Existenz.** (a) $\tilde{M}$ ist topologische Mannigfaltigkeit der Dimension n:

(i) $\tilde{M}$ ist hausdorffsch: Seien: $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2 \in M$, $\tilde{p}_1 \neq \tilde{p}_2$. **1.Fall:** $p_1 := \pi(\tilde{p}_1) \neq \pi(\tilde{p}_2) =: p_2$. $\Longrightarrow$ $\exists U_1 \in \mathfrak{A}(p_1)$, $U_2 \in \mathfrak{A}(p_2)$ offen: $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Setze $\tilde{U}_1 := \pi^{-1}(U_1)$, $\tilde{U}_2 := \pi^{-1}(U_2) \Longrightarrow$ $\tilde{U}_1 \in \mathfrak{A}(\tilde{p}_1)$, $\tilde{U}_2 \in \mathfrak{A}(\tilde{p}_2)$ offen, und

$$\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2 = \pi^{-1}(U_1) \cap \pi^{-1}(U_2) = \pi^{-1}(U_1 \cap U_2) = \pi^{-1}(\emptyset) = \emptyset.$$

2.Fall: $p := \pi(\tilde{p}_1) = \pi(\tilde{p}_2)$. Sei $U \in \mathfrak{A}(p)$ offen und gleichmäßig überlagert, also

$$\pi^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} \tilde{U}_i, \quad \pi|\tilde{U}_i\colon \tilde{U}_i \to U_i \text{ Homöomorphismus}$$

$\Longrightarrow \exists i, j \in I,\ i \neq j:\ \tilde{p}_1 \in \tilde{U}_i,\ \tilde{p}_2 \in \tilde{U}_j$ (da $\pi|\tilde{U}_i$ injektiv), also: $\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j = \emptyset$.

(ii) $\tilde{M}$ hat abzählbare Topologie: (α) Behauptung: Die Blätterzahl von $\pi\colon \tilde{M} \to m$ ist abzählbar. Dann: Wähle wieder Atlas $\mathfrak{A} = (U_\alpha)_{\alpha \in A}$ von gleichmäßig überlagerten Kartengebiete von M. O.E.: A ist abzählbar (Diffgeo I: jede offene Überdeckung von M hat abzählbare Teilüberdeckung, weil M abzählbare Topologie hat.). Sei nun

$$\pi^{-1}(U_\alpha) = \bigsqcup_{i \in I} \tilde{U}_\alpha^i \quad \Longrightarrow \quad \tilde{M} = \bigsqcup_{\alpha \in A,\, i \in I} \tilde{U}_\alpha^i$$

und jedes $\tilde{U}_\alpha^i \neq V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$ hat abzählbare Topologie. (Übungsaufgabe: $X = \bigcup_{i\in I} U_i$, U_i mit abzählbare Topologie, U_i offen, $|I|$ abzählbar $\Longrightarrow$ X hat abzählbare Topologie) $\Longrightarrow$ $\hat{M}$ hat abzählbare Topologie.

Zur Behauptung ($\boldsymbol{\alpha}$): Sei $p_0 \in M$, $\tilde{p}_0 \in \pi^{-1}(p_0) \subseteq \tilde{M}$, $\Gamma := \pi_1(M, p_0)$. Die Abbildung

$$\Phi \colon \Gamma \to \pi^{-1}(p_0),\ [\alpha] \mapsto \tilde{\alpha}(1) \quad \text{mit } \tilde{\alpha}(0) = \tilde{p}_0$$

ist dann wohldefiniert (Homotopieliftung) und surjektiv (weil $\tilde{M}$ wegzusammenhängend ist: $\tilde{\tilde{p}}_0 \in \pi^{-1}(p_0)$, wähle β von $\tilde{p}_0$ nach $\tilde{\tilde{p}}_0$, $\alpha := \pi \circ \beta \Longrightarrow \alpha$ ist geschlossen und $\beta = \tilde{\alpha}$, also $\tilde{\tilde{p}}_0 = \Phi([\alpha])$.) Behauptung folgt, wenn klar ist: Γ ist abzählbar.

(β) Die Fundamentalgruppe einer zusammenhängenden Mannigfaltigkeit ist abzählbar: Dazu (Meru): Wähle eine offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von einfach zusammenhängenden Mengen U_i von M und $p_i \in U_i$, $\pi_1(U_i, p_i) = (1)$. O.E. (s.o.): I abzählbar.

Für jedes Paar $(i,j) \in I \times I$ hat dann $U_i \cap U_j$ höchstens abzählbar viele (Weg-) Zusammenhangskomponenten,

$$U_i \cap U_j = \bigcup_{s \in I_{ij}} U_{ij}^s.$$

Wähle schließlich einen Weg γ_{ij}^s von p_i nach p_{ij}^s in U_i und δ_{ij}^s von p_j zu p_{ij}^s in U_j.

Sei nun α geschlossen mit $p_0 = p_{i_0} = \alpha(0) = \alpha(1)$ (mit $i_0 \in I$ fest). $\Longrightarrow$ $\exists$ Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = 1$:

$$\alpha\big([t_{r-1}, t_r]\big) \subseteq U_{i_{r-1}}; \quad \text{setze: } U_r := U_{i_r}.$$

(mit $i_r \in I$, $r = 1, \ldots, m$). Es ist nun $\alpha(t_r) \in U_{r-1} \cap U_r$. Es gibt deshalb ein $s_{r-1} \in I_{r-1,r}$ mit $\alpha(t_r) \in U_{r-1,r}^{s_{r-1}}$. Wähle einen Weg w_r in $U_{r-1,r}^{s_{r-1}}$ von $p_{r-1,r}^{s_{r-1}}$ nach $\alpha(t_i)$. Es ist dann:

$$\alpha_r \simeq w_{r-1}^- * (w_{r-1} * \alpha_r * w_r^-) * w_r \quad \text{rel } \{0,1\}.$$

O.E. daher: $\alpha(t_r) = p_{i_{r-1}i_r}^{s_{r-1}}$. Nun ist aber:

$$\alpha_r \simeq (\delta_{r-1,r}^{s_{r-1}}) * \gamma_{r-1,r}^{s_r} \text{ rel } \{0,1\}.$$

Aber von Wegen der Art ($i_0 = i_m$)

$$\beta = (\delta_{i_0 i_1}^{s_1})^- * \gamma_{i_1 i_2}^{s_1} * (\delta_{i_1 i_2}^{s_2})^- * \cdots * (\delta_{i_{m-1} i_m}^{s_m})^- * \gamma_{i_{m-1} i_m}^{s_m}$$

gibt es nur abzählbar viele. $\square$

Anhang A.

A Der Igelsatz

Siehe [Mi, §5].

(A.1) Definition.

(a) Sei $\mathbb{H}^n := \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, x^1 \geq 0\}$. Eine **topologische Mannigfaltigkeit M der Dimension n mit Rand** ist ein Hausdorff-Raum mit abzählbarer Topologie, so dass jeder Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung $U \subseteq M$ hat, die homöomorph zu einer offenen Menge $V \subseteq \mathbb{H}^n$ ist.

(b) Ein Atlas von Homöomorphismen $\mathfrak{A} = (\varphi_i \colon U_i \to V_i)_{i \in I}$ (also $M = \bigcup_{i \in I} U_i$) heißt **glatt**, wenn alle Übergange

$$\varphi_{ij} \colon \underbrace{\varphi_j(U_i \cap U_j)}_{\subseteq \mathbb{H}^n} \to \underbrace{\varphi_i(U_i \cap U_j)}_{\subseteq \mathbb{H}^n},\ x \mapsto \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(x)$$

glatt sind ($i, j \in I$). (Eine Abbildung $f \colon V \to \mathbb{R}^m$, mit $V \subseteq \mathbb{H}^n$ offen, heißt glatt, wenn es ein offenes $\tilde{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\tilde{V} \supseteq V$ und ein glattes $\tilde{f} \colon \tilde{V} \to \mathbb{R}^m$ gibt mit $\tilde{f}|V = f$.)

(c) Zwei glatte Atlanten $\mathfrak{A} = (\varphi_i)_{i \in I}$ und $\mathfrak{B} = (\psi_j)_{j \in J}$ auf M heißen **äquivalent**, wenn auch $\mathfrak{C} = (\varphi_i, \psi_j)_{i \in I, j \in J}$ noch glatt ist. Eine Äquivalenzklasse $c = [\mathfrak{A}]$ auf einer topologischen Mannigfaltigkeit M mit Rand heißt eine **glatte Struktur** und ein Paar (M, c) heißt eine **glatte Mannigfaltigkeit mit Rand der Dimension n**.

(A.2) Kommentar.

(a) Sei (M^n, c) eine glatte Mannigfaltigkeit mit Rand und $p \in M$ ein Punkt, so dass es eine Karte $\varphi \colon U \to V \subseteq \mathbb{H}^n$ um p gibt (also $p \in U$), so dass $\varphi^1(p) = 0$ ist (also $\varphi(p)$ in

$$\partial\mathbb{H}^n := \{x \in \mathbb{H}^n \,:\, x^1 = 0\}$$

liegt). Für jede andere Karte $\psi \colon \tilde{U} \to \tilde{V} \subseteq \mathbb{H}^n$ um p gilt dies dann auch, denn wäre $\psi^1(p) > 0$, so würde der Übergang $\tau = \varphi \circ \psi^{-1} \colon \psi(U \cap \tilde{U}) \to \varphi(U \cap \tilde{U})$, der um $y_0 := \psi(p)$ ein Diffeomorphismus ist, eine offene Menge in $\mathbb{H}^n \setminus \partial\mathbb{H}^n$ in eine offene Menge um $x_0 = \varphi(p) \in \mathbb{R}^n$ transportieren, was er aber nicht macht, da eine solche offene Menge immer Punkte mit $x^1 < 0$ enthält.

⌜$\sigma \circ \tau = \mathbb{1} \implies D\tau(y_0) \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R}) \implies \tau(W)$ ist Umgebung von x_0 in $\mathbb{R}^n$ (für W klein genug): ↯ (da $\tau(W) \subseteq \mathbb{H}^n$). ⌟

(b) Man nennt

$$\partial M := \{p \in M \,:\, \exists \text{ Karte } \varphi \colon U \to V \subseteq \mathbb{H}^n \text{ um } p \text{ mit } \varphi(p) \in \partial\mathbb{H}^n\}$$

den **Rand von M**.

Ist $\mathfrak{A} = (\varphi_i \colon U_i \to V_i)_{i \in I}$ ein Atlas von M, so ist wegen (a)

$$\tilde{\mathfrak{A}} = (\underbrace{\varphi_i|U_i \cap \partial M}_{=:\tilde{\varphi}_i} \colon \underbrace{U_i \cap \partial M}_{=:\tilde{U}_i} \to \underbrace{V_i \cap \overbrace{\partial \mathbb{H}^n}^{\cong \mathbb{R}^{n-1}}}_{=:\tilde{V}_i})_{i \in I}$$

ein glatter Atlas von ∂M (weil für die Übergänge $\tilde{\varphi}_{ij}$ von $\tilde{\mathfrak{A}}$ gilt:

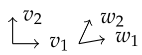
$$\tilde{\varphi}_{ij} = \varphi_{ij}|\tilde{\varphi}_j(\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j),$$

und damit glatt). Ist $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$, so ist auch $\tilde{\mathfrak{A}} \sim \tilde{\mathfrak{B}}$ und damit macht $\tilde{c} = [\tilde{A}]$, ∂M zu einer glatten Mannigfaltigkeit der Dimension $n-1$.

(c) Eine glatte Mannigfaltigkeit M der Dimension n (im bisherigen Sinn) ist eine glatte Mannigfaltigkeit mit Rand, denn $\partial M = \emptyset$ ist zugelassen. Z.B. ist für eine glatte Mannigfaltigkeit mit Rand M sets $\partial(\partial M) = \emptyset$. $\partial M \subseteq M$ ist auch eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit (für den naheliegenden Begriff von Untermannigfaltigkeiten auch bei Mannigfaltigkeiten mit Rand, Übung).

(A.3) Definition. Sei V ein reeller Vektorraum der Dimension $n \in \mathbb{N}_0$.

(a) Zwei Basen $\mathfrak{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ und $\mathfrak{B} = (w_1, \ldots, w_n)$ von V heißen **gleichorientiert**, $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$, wenn für die Basiswechselmatrix $A = (a^i_j)$, also $w_j = a^i_j v_i$, gilt: $\det A > 0$.



(b) Eine Äquivalenzklasse $\sigma = [\mathfrak{A}]$ gleichorientierter Basen heißt eine **Orientierung auf V** und ein Paar (V, σ) heißt eine **orientierter Vektorraum**.

(A.4) Kommentar.

(a) Gleichorientierung ist wegen $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ (und damit $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$), $\forall A, B \in \mathrm{Gl}_n \mathbb{R}$, tatsächlich eine Äquivalenzrelation.

(b) Zwei Basen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heißen **entgegen gesetzt orientiert**, wenn für ihre Basiswechselmatrix $A \in \mathrm{Gl}_n \mathbb{R}$ gilt: $\det A < 0$. Ist $\mathfrak{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ (und $n \in \mathbb{N}$), so ist z.B. $\mathfrak{B} := (-v_1, v_2, \ldots, v_n)$ entgegen gesetzt orientiert, da

$$\det\bigl(\mathrm{diag}(-1, 1, \ldots, 1)\bigr) = -1 < 0$$

ist. Sind $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ entgegen gesetzt orientiert zu $\mathfrak{A}$, so gilt: $\mathfrak{B}_1 \sim \mathfrak{B}_2$. Deshalb gibt es bei $n \in \mathbb{N}$ genau zwei Äquivalenzklassen von Basen (von denen i.a. keine gegenüber der anderen ausgezeichnet ist). Ist eine fixiert und mit σ bezeichnet, so notieren wir die andere mit $-\sigma$.

Für $n = 0$ gibt es auf $V = (0)$ nur eine Orientierung denn V hat nur eine Basis, nämlich das leere Tupel ( ).

(c) Sei $V = \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$). Dann nennen wir die Klasse $\sigma = \bigl[(e_1, \ldots, e_n)\bigr]$ $\bigl((e_1, \ldots, e_n)$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^n\bigr)$ die **Standard-Orientierung von $\mathbb{R}^n$**.

(d) Seien (V, σ_V) und (W, σ_W) orientierte Vektorräume (gleicher Dimension). Man nennt einen Isomorphismus $T\colon V \to W$ **orientierungserhaltend**, wenn für ein (und dann jedes) $\mathfrak{A} \in \sigma_V$ gilt: $T(\mathfrak{A}) \in \sigma_W$. $\big($Ist $\mathfrak{A} = (v_1, \dots, v_n)$, so sei $T(\mathfrak{A}) = (Tv_1, \dots, Tv_n)$.$\big)$ Es ist dann $T(\sigma_V) = \sigma_W$. Ist $T(\mathfrak{A}) \notin \sigma_W$ für ein $\mathfrak{A} \in \sigma_V$, so ist $T(\sigma_V) = -\sigma_W$. T heißt dann **orientierungsumkehrend**. Wir schreiben: $\operatorname{sgn}\colon \operatorname{Isom}(V, W) \to \{\pm 1\}$,

$$\operatorname{sgn}(T) := \begin{cases} +1, & \text{falls } T \text{ orientierungserhaltend,} \\ -1, & \text{falls } T \text{ orientierungsumkehrend.} \end{cases}$$

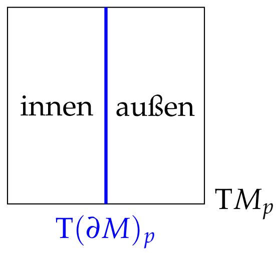
Es ist dann

$$\operatorname{sgn}(S \circ T) = \operatorname{sgn}(S) \cdot \operatorname{sgn}(T), \ \forall S, T.$$

(A.5) Definition. Sei M^n eine glatte Mannigfaltigkeit mit Rand. Eine Familie $\sigma = (\sigma_p)_{p \in M}$ von Orientierungen auf $(\mathrm{T}M_p)_{p \in M}$ heißt eine **Orientierung auf M**, wenn es für alle $p \in M$ eine Karte $\varphi\colon U \to V \subseteq \mathbb{H}^n$ um p gibt, so dass $\mathrm{D}\varphi_q\colon \mathrm{T}M_q \to \mathrm{T}V_{\varphi(q)} \underset{\text{kan.}}{\cong} \mathbb{R}^n$ orientierungserhaltend ist, $\forall q \in U$ (wobei man $\mathbb{R}^n$ mit der Standard-Orientierung betrachtet).

(A.6) Kommentar.

(a) Auch ein Randpunkt $p \in \partial M \subseteq M$ hat einen „vollen“ Tangentialraum $\mathrm{T}M_p$ (und $\mathrm{T}M$ wird eine glatte Mannigfaltigkeit mit Rand der Dimension $2n$, sogar ein Vektorbündel über M). Er hat eine ausgezeichnete Hyperebene, nämlich $T(\partial M)_p$ und die beiden Komponenten von $\mathrm{T}M_p \setminus \mathrm{T}(\partial M)_p$ kann man in „innen“ und „außen“ unterscheiden (Übung).



⌜$\xi \in \mathrm{T}M_p$ heißt **außen**, wenn es eine glatte Kurve $\alpha\colon (-\varepsilon, 0] \to M$ gibt mit $\alpha(0) = p$, $\dot\alpha(0) = \xi$ und $\xi \notin \mathrm{T}(\partial M)_p$. ⌟

(b) Der kanonische Isomorphismus $\mathbb{R}^n \to \mathrm{T}V_x$, mit $V \subseteq \mathbb{H}^n$ offen und $x \in \partial\mathbb{H}^n$,

$$\xi \mapsto \left(t \mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} (x + t\xi) \right)$$

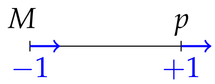
funktioniert immer noch, in dem man $\alpha\colon t \mapsto x + t\xi$ für ξ innen auf $[0, \varepsilon)$, für ξ außen auf $(-\varepsilon, 0]$ $\big($und für $\xi \in \mathrm{T}(\partial V)_x$ gar nicht$\big)$ einschränkt ($\varepsilon > 0$ klein).

(c) (A.5) macht präzise, dass die Orientierung σ_p auf $\mathrm{T}M_p$ ($p \in M$) glatt von Parameter p abhängen soll.

(d) Eine Mannigfaltigkeit (mit Rand) M der Dimension $n \geq 1$ heißt **orientierbar**, wenn es eine Orientierung σ auf M gibt. Das Paar (M, σ) heißt dann eine **orientierte Mannigfaltigkeit**. Ist $\dim M \geq 1$ und M zusammenhängend und $\sigma = (\sigma_p)$ eine Orientierung auf M, so gibt es genau ein weitere Orientierung, nämlich $-\sigma := (-\sigma_p)_{p \in M}$ (Übung). Es gibt Mannigfaltigkeiten, die nicht orientierbar sind, z.B. das Möbiusband oder die projektive Ebene $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ (ohne Beweis).

(e) Eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit der Dimension 0 ist ein Punkt, $M = \{p\}$. Eine Mannigfaltigkeit der Dimension 0 ist also eine abzählbare Menge mit der diskreten Topologie, $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{p_n\}$. Eine orientierte Mannigfaltigkeit der Dimension 0 ist ein Paar (M, σ), wobei $\sigma\colon M \to \{\pm 1\}$ eine (Gewichts-) Funktion auf M ist.

(f) Ist M eine Mannigfaltigkeit mit Rand der Dimension $n \geq 1$ und ist M orientiert, so erbt ihr Rand ∂M eine Orientierung wie folgt: Sei $n \geq 2$: Für $p \in \partial M$ heißt eine Basis $(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ von $\mathrm{T}(\partial M)_p$ positiv orientiert, wenn es ein $\nu \in \mathrm{T}M_p^{\text{außen}}$ gibt, so dass $(\nu, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ positiv orientierte Basis von $\mathrm{T}M_p$ ist. Das versieht ∂M tatsächlich mit einer Orientierung (Übung). Für $n = 1$ ist M eine disjunkte Vereinigung von Kreislinien und (abgeschlossenen, offenen oder halboffenen) Intervallen [Mi, Appendix].



Ist $p \in \partial M$ ein Randpunkt, so geben wir ihm das Gewicht $+1$, falls ein positiv orientierter Vektor $\xi \in \mathrm{T}M_p$ nach außen zeigt. Zeigt er nach innen, bekommt er das Gewicht -1.

(g) Wir nennen eine Mannigfaltigkeit **geschlossen**, wenn sie kompakt, zusammenhängend, ohne Rand und orientiert ist.

(A.7) Vorbereitung. Seien nun M und N geschlossene Mannigfaltigkeit der Dimension $n \in \mathbb{N}$ und $\Phi\colon M \to N$ glatt.

(a) Ist nun $q \in N$ ein regulärer Wert von Φ, d.h.: für alle $p \in \Phi^{-1}(q)$ ist das Differential $\mathrm{D}\Phi_p\colon \mathrm{T}M_p \to \mathrm{T}N_q$ surjektiv und damit ein Isomorphismus, so gibt es offene Umgebungen $U_p \subseteq M$ von p und $V \subseteq N$ von $\Phi(p)$, so dass $\Phi(U_p) = V$ ist und $\Phi|U_p\colon U_p \to V$ ein Diffeomorphismus (Umkehrsatz). Kein anderer Punkt, außer p, in U_p geht also auf q, d.h. $\Phi^{-1}(q) \subseteq M$ liegt diskret. Damit muss $\Phi^{-1}(q)$ endlich sein. $\big($Denn sonst müsste $\Phi^{-1}(q)$ einen Häufungspunkt haben, der zudem in $\Phi^{-1}(q)$ liegen würde, da $\Phi^{-1}(q)$ abgeschlossen ist. Dieser wäre aber nicht isoliert.$\big)$

(b) Beachte auch, dass wegen der Kompaktheit von M die Teilmenge

$$\operatorname{reg}(\Phi) := \{q \in N \,:\, q \text{ ist regulärer Wert von } \Phi\}$$

offen sein muss, denn $A := M \setminus \bigcup_{p \in \Phi^{-1}(q)} U_p$ ist abgeschlossen, also kompakt und damit auch $\Phi(A) \subseteq N$ kompakt und damit abgeschlossen und $q \notin \Phi(A)$. Nach evtl. Verkleinerung von V (und der U_p's) liegen dann auch alle Urbilder von $\tilde{q} \in V$ auch in $\bigcup_{p \in \Phi^{-1}(q)} U_p$ und sind damit auch regulär.

(c) Nach einem **Satz von Sard** [Mi, §3] ist $\operatorname{reg}(\Phi) \subseteq N$ auch dicht, insbesondere nicht-leer. (Beachte: $q \notin \operatorname{im}\Phi \implies q \in \operatorname{reg}\Phi$)

(A.8) Definition. Seien M und N geschlossen der Dimension $n \in \mathbb{N}$ und $\Phi\colon M \to N$ glatt. Für jeden regulären Wert $q \in N$ definieren wir den **Abbildungsgrad von Φ (bzgl. q)** als

$$\deg(\Phi; q) := \sum_{p \in \Phi^{-1}(q)} \operatorname{sgn}(\mathrm{D}\Phi_p) \in \mathbb{Z}.$$

(A.9) Satz. *Seien M und N geschlossen gleicher Dimension und $\Phi\colon M \to N$ glatt. Dann hängt der Abbildungsgrad* $\deg(\Phi; q)$ *nicht von* $q \in \operatorname{reg}(\Phi)$ *ab* $\big($*und wir nennen ihn den Abbildungsgrad von* Φ, $\deg(\Phi) := \deg(\Phi; q)\big)$.

(A.10) Definition. Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten (und M ohne Rand). Zwei glatte Abbildungen $f, g\colon M \to N$ heißen **homotop**, $f \simeq g$, wenn es eine glatte Abbildung $H\colon M \times [0,1] \to N$ gibt mit

$$H(p, 0) = f(p),\ H(p, 1) = g(p), \quad \forall p \in M.$$

(A.11) Satz. *Seien M und N geschlossen von gleicher Dimension. Sind dann $f, g\colon M \to N$ homotop, $f \simeq g$, so gilt:*

$$\deg(f) = \deg(g).$$

(A.12) Beispiel.

(a) Sei $M = N = \mathbb{S}^n$ ($n \in \mathbb{N}$), $i \in \{1, \dots, n+1\}$ und $s_i\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ die Spiegelung an der Hyperebene $H_i := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x^i = 0\}$,

$$s_i(p^1, \dots, p^{n+1}) = (p^1, \dots, p^{i-1}, -p^i, p^{i+1}, \dots, p^{n+1}).$$

$\mathbb{S}^n$ trage die **Standardorientierung**, d.h. die, die sich als Rand von $\mathbb{B}^{n+1} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ergibt. Für $i \neq n+1$ betrachte $p = (0, \dots, 0, 1)$, also $s(p) = p$ und

$$\mathbb{R}^n \cong \mathrm{T}\mathbb{S}^n{}_p = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x^{n+1} = 0\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

Es folgt:

$$(\mathrm{D}s_i)_p\colon \mathrm{T}\mathbb{S}^n{}_p \to \mathrm{T}\mathbb{S}^n{}_p,\ \xi = (\xi^1, \dots, \xi^n) \mapsto (\xi^1, \dots, -\xi^i, \dots, \xi^n)$$

also:

$$\operatorname{sgn}(\mathrm{D}s_i)_p = -1. \qquad \deg(s_i) = \deg(s_i, p) = \operatorname{sgn}(\mathrm{D}s_i)_p = -1.$$

(b) Für $M = N$ und $\Phi = \mathbb{1}$ folgt: $\deg(\Phi) = +1$.

(c) Sind M, N und P geschlossen von gleicher Dimension und $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to P$, so gilt (Übung):

$$\deg(g \circ f) = \deg(g) \cdot \deg(f).$$

(d) Insbesondere gilt für die Antipodenabbildung $d\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, $p \mapsto -p$, weil $d = s_{n+1} \circ \dots \circ s_1$ ist:

$$\deg(d) = (-1)^{n+1}.$$

(A.13) Theorem (Igelsatz). *Sei $n \in \mathbb{N}$ gerade. Dann hat jedes glatte Vektorfeld auf $\mathbb{S}^n$ (mindestens) eine Nullstelle.*

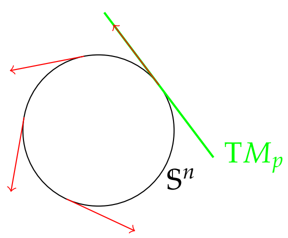
(A.14) Kommentar.

(a) Stellt man sich im Fall $n = 2$ die Sphäre als Oberfläche eines (eingerollten) Igel vor und für ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^n)$ den Tangentialvektor X_p als ein (gekämmtes) Haar an der Stelle p, so besagt (A.13): „Man kann einen Igel nicht ohne Scheitel kämmen“.

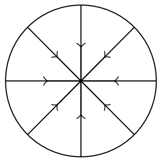
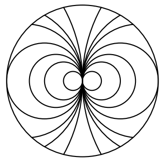
(b) Für n ungerade ist der Satz falsch, denn für $n = 2k+1$ ($k \in \mathbb{N}_0$) ist offenbar $X\colon \mathbb{S}^n \to \mathrm{T}\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^{n+1} = \underline{\mathbb{R}^{n+1}}$ (wo wir nun $\mathrm{T}\mathbb{S}^n_p$ mit $\{\xi \in \mathbb{R}^{n+1},\ \langle \xi, p\rangle = 0\}$ identifizieren),

$$X(p^1, \dots, p^{2k+2}) = (p; -p^2, p^1, -p^4, p^3, \dots, -p^{2k+2}, p^{2k+1})$$

ein glattes Vektorfeld ohne Nullstellen.



(c) Versuche ein Vektorfeld X auf $\mathbb{S}^n$ zu konstruieren (für n gerade), dass möglichst wenig Nullstellen hat (eingezeichnet sind die Flusslinien des zugehörigen Flusses, Nullstellen entsprechen hierbei Gleichgewichtslagen): Hier sind zwei Beispiele für $n = 2$:

Beweis von (A.13)**.** Sei $X\colon \mathbb{S}^n \to \mathrm{T}\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^{n+1}$

$$X(p) = \big(p, F(p)\big)$$

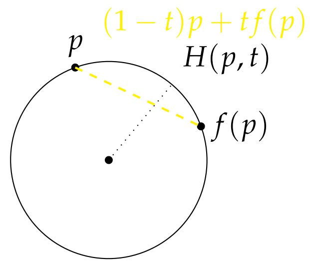
mit $F\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, ein Vektorfeld ohne Nullstellen, also $F(p) \neq 0$ und

$$\langle F(p), p\rangle = 0, \quad \forall p \in \mathbb{S}^n.$$

($\mathrm{T}\mathbb{S}^n$ ist ein Unterbündel des trivialen Bündels $\underline{\mathbb{R}^{n+1}}$ auf $\mathbb{S}^n$.) Setze dann $f\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$,

$$f(p) := \frac{F(p)}{\|F(p)\|}$$

(wo $\|\ \|$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^{n+1}$ sei, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, $\langle\ ,\ \rangle$ das kanonische Skalarprodukt). Es ist (weiterhin) $\langle f(p), p\rangle = 0$, insbesondere $f(p) \neq -p$ und $f(p) \neq +p$. Deshalb ist nun



$$H\colon \mathbb{S}^n \times [0,1] \to \mathbb{S}^n, \quad H(p,t) = \frac{(1-t)p + tf(p)}{\|(1-t)p + tf(p)\|}$$

eine Homotopie von $h_0 = \mathbb{1}$ nach $h_1 = f$ $\big(h_t = H(\,\cdot\,, t)\big)$. Es ist also: $f \simeq \mathbb{1}$. Andererseits ist auch $G\colon \mathbb{S}^n \times [0,1] \to \mathbb{S}^n$

$$G(p,t) = \frac{(1-t)(-p) + tf(p)}{\|(1-t)(-p) + tf(p)\|}$$

eine Homotopie von $g_0 = d$ nach $g_1 = f$. Also ist auch $f \simeq d$ (d die Antipodenabbildung). Nun ist aber $\simeq$ eine Äquivalenzrelation, insbesondere transitiv (Übung), also ist auch $\mathbb{1} \simeq d$. Nach (A.11) folgt:

$$\deg(\mathbb{1}) = \deg(d).$$

Aber nach (A.12) ist $\deg(d) = (-1)^{n+1} = -1$ (bei n gerade), während $\deg(\mathbb{1}) = +1$ ist: $\lightning$ $\square$

(A.15) Lemma. *Seien M und N geschlossen und gleicher Dimension und sei $f\colon M \to N$ glatt. Sei weiter X eine orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial X = M$ (als orientierte Mannigfaltigkeit) und $F\colon X \to N$ eine glatte Fortsetzung von f, $F|M = f$. Dann gilt für jeden regulären Wert $q \in N$ von f:*

$$\deg(f, q) = 0.$$

Beweis. *Schritt 1:* Wir nehmen an, dass q auch ein regulärer Wert von F ist (also auch $F^{-1}(q) \subseteq X$ keine kritischen Punkte enthält).

Dann ist $F^{-1}(q)$ eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $(n+1) - n = 1$, wobei der Rand von $C = F^{-1}(q)$ gerade $f^{-1}(q)$ ist: $\partial C = f^{-1}(q)$.
$\ulcorner$Im Inneren $X \setminus \partial X$ von X ist C glatte Mannigfaltigkeit der Dimension 1 ohne Rand, auf ∂X ist $C \cap X = f^{-1}(q)$ glatte Mannigfaltigkeit der Dimension 0 und lokal um $p \in f^{-1}(q)$ ist $f^{-1}(q)$ diffeomorph zu $[0, \varepsilon)$, weil $\ker(\mathrm{D}F_p) \subseteq \mathrm{T}X_p$ transversal zu $\mathrm{T}(\partial X)_p$ liegt,

$$\mathrm{T}X_p = \mathrm{T}(\partial X)_p \oplus \ker(\mathrm{D}F_p)$$

Benutze nun: Jede kompakte zusammenhängende Mannigfaltigkeit C der Dimension 1 ist diffeomorph zu $\mathbb{S}^1$ (dann ist $\partial C = \emptyset$) oder zu $I = [0,1]$ (dann ist $\partial C = \{p_1, p_2\}$ für $p_1 \neq p_2$) [Mi, Appendix S.55-57]. $\lrcorner$

Sei nun $A \subseteq C$ eine Zusammenhangs-Komponente mit $A \cap M \neq \emptyset$. $\Longrightarrow \partial A = \{a, b\}$ mit $a \neq b$.

Definiere nun für $x \in A$ eine Orientierung auf $\mathrm{T}A_x$ wie folgt: $v \in \mathrm{T}A_x \setminus \{0\}$ heißt positiv orientiert, falls es eine Ergänzung $(v, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ zu einer positiv orientierte Basis von $\mathrm{T}X_x$, so dass $\big(\mathrm{D}F_x(\xi_1), \ldots, \mathrm{D}F_x(\xi_n)\big)$ positiv orientierte Basis von $\mathrm{T}N_{F(x)}$ ist. $\Longrightarrow \sigma = (\sigma_x)_{x \in A}$ ist Orientierung auf A. Sind nun $v_b \in \mathrm{T}A_b$ bzw. $v_a \in \mathrm{T}A_a$ positiv orientiert, so zeigt einer nach außen, einer nach innen, o.E.: $v_a \in \mathrm{T}X_a^{\text{innen}}$, $v_b \in \mathrm{T}X_b^{\text{außen}}$.

Ist nun $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ positiv orientierte Basis von $\mathrm{T}M_b \Longrightarrow (v_b, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ ist positiv orientierte Basis von $\mathrm{T}X_b$ (nach Definition der induzierten Orientierung auf $M = \partial X$) $\Longrightarrow \big(\mathrm{D}f_b(\xi_1), \ldots, \mathrm{D}f_b(\xi_n)\big)$ ist positiv orientierte Basis von $\mathrm{T}N_q$ (nach Definition der Orientierung von A)

$$\Longrightarrow \operatorname{sgn}(\mathrm{D}f_b) = +1.$$

Ähnlich sieht man: $\operatorname{sgn}(\mathrm{D}f_a) = -1$ (da v_a nun innen liegt). Summiert man über alle Zusammenhangs-Komponenten A von C auf, so folgt:

$$\deg(f; q) = 0.$$

2.Schritt: Ist $\Phi\colon U \to \mathbb{R}^n$ lokaler Diffeomorphismus und $U \subseteq \mathbb{R}^n$ zusammenhängend, so ist $\mathrm{D}\Phi_x\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\mathfrak{A}$-erhaltend, $\operatorname{sgn}(\mathrm{D}\Phi_x) = +1$, $\forall x \in U$, oder orientierend-umkehrend, $\forall x \in U$ (und nicht gemischt) $\big($Übung: Zwischenwertsatz auf $x \mapsto \deg(\mathrm{D}\Phi_x)\big)$. Es folgt: Für $\Phi\colon M \to N$ ist $\deg(\Phi, -)\colon \operatorname{reg}(\Phi) \to \mathbb{Z}$ lokal konstant, denn ist $q_0 \in \operatorname{reg}(\Phi)$ und $U_1, \ldots, U_n \subseteq M$ disjunkte, offene und zusammenhängende Umgebungen von $p_1, \ldots, p_n$ $\big($mit $\Phi^{-1}(q_0) = \{p_1, \ldots, p_n\}\big)$, so ist $K = \Phi\big(M \setminus (U_1 \cup \cdots \cup U_n)\big)$ kompakt, also abgeschlossen, also ist für $q \in N \setminus K$:

$$\Phi^{-1}(q) = \{\tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_n\}$$

mit $\tilde{p}_i \in U_i$. Da $\operatorname{sgn}(\Phi|U_i, p_i) = \operatorname{sgn}(\Phi|U_i, \tilde{p}_i)$ ist, folgt:

$$\deg(\Phi; q) = \deg(\Phi; q_0).$$

Ist nun $q_0 \in N$ regulär für $f\colon M \to N$, aber nicht für $F\colon X \to N$, so wähle in einer offenen Umgebung $V \subseteq N$, wo $\deg(f; q) = \deg(f; q_0)$ ist, $\forall q \in V$, einen regulären Wert (auch) von F. (Benutze: Satz von Sard, dass $\operatorname{reg}(F) \subseteq N$ dicht liegt!)

$$\Longrightarrow \deg(f, q_0) = \deg(f, q) \overset{\text{Schritt 1}}{=} 0. \qquad \square$$

(A.16) Korollar. *Seien M und N geschlossen von gleicher Dimension, $f, g\colon M \to N$ glatt und $q \in N$ ein regulärer Wert von f und von g. Dann gilt: Ist $f \simeq g$, so ist*

$$\deg(f; q) = \deg(g; q).$$

Beweis. Das Produkt $M \times N$ von orientierten Mannigfaltigkeiten M und N trägt eine natürliche Orientierung, weil

$$\mathrm{T}(M \times N)_{(p,q)} \cong \mathrm{T}M_p \oplus \mathrm{T}N_q$$

(Ist $\mathfrak{A} = (v_1, \dots, v_n)$ positiv orientiert für $\mathrm{T}M_p$ und $\mathfrak{B} = (w_1, \dots, w_r)$ positiv orientiert für $\mathrm{T}N_q$, so sei $(v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_r)$ positiv orientiert für $\mathrm{T}(M \times N)_{(p,q)}$.) Deshalb trägt nun $X := [0,1] \times M$ eine natürliche Orientierung (wo $[0,1]$ durch $\frac{\partial}{\partial x}$ orientiert sei, wenn x die Standardkarte ist). Die induzierte Orientierung auf

$$\partial X = \{0\} \times M \cup \{1\} \times M$$

ist dann auf $\{1\} \times M$ „die richtige" auf M (d.h.: $i_1 \colon M \to \partial X$, $p \mapsto (1,p)$ ist orientierungserhaltend) und auf $\{0\} \times M$ „die falsche" (d.h.: $i_0 \colon M \to \partial X$, $p \mapsto (0,p)$ ist orientierungsumkehrend). Sei nun $F \colon X \to N$ eine Homotopie von f nach g, also $F_0 = f$ und $F_1 = g$. Ist nun $q \in N$ regulärer Wert für $F|\partial X$, so gilt:

$$0 = \deg(F|\partial X; q) = \deg(g;q) + \underbrace{(-1)}_{\text{wegen Or.-wechsel}} \deg(f;q) \Longrightarrow \deg(f;q) = \deg(g;q). \qquad \square$$

(A.17) Lemma. *Sei M eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit und $p, q \in M$. Dann gibt es einen Diffeomorphismus $\Phi \colon M \to M$ mit $\Phi \simeq \mathbb{1}$ (sogar **isotop** $\Phi \simeq_{iso} \mathbb{1}$) und $\Phi(p) = q$.*

(A.18) Kommentar. Zwei Diffeomorphismen $f, g \colon M \to N$ heißen **isotop**, $f \simeq_{\mathrm{iso}} g$, wenn es eine Homotopie $H \colon M \times [0,1] \to N$ von f nach g gibt, so dass auch $h_t = H(-,t) \colon M \to M$ ein Diffeomorphismus ist, $\forall t \in [0,1]$.

Beweis. *Schritt 1:* Sei $p \in M$ und $\psi \colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine zentrierte Karte mit $V = B(3) = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, \|x\| < 3\}$. Sei weiter $c \in B(1) \setminus \{0\}$ und $\rho \colon \mathbb{R}^n \to [0,1]$ eine Abschneidefunktion für $B(1) \subseteq B(2)$, d.h.:

$$\rho|B(1) \equiv 1, \quad \rho|\mathbb{R}^n \setminus B(2) \equiv 0.$$

Setze nun zunächst $\tilde{X} \colon B(3) \to \mathbb{R}^n$, $\tilde{X}(x) = c$ (also konstant), schneide dann $\tilde{X}$ mit ρ ab und setzte danach, via ψ, $\tilde{X}$ trivial zu einem glatten Vektorfeld auf M fort,

$$X(q) := \begin{cases} \mathrm{D}\psi^{-1}{}_q(\rho \circ \psi(q) \cdot \tilde{X} \circ \psi(q)), & \text{für } q \in U \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}.$$

Die Flusslinien $t \mapsto \varphi^t(q)$ von X existieren für alle $t \in \mathbb{R}$, da $\mathrm{supp}(X) \subseteq \psi^{-1}\big(\overline{B}(2)\big)$ kompakt ist und für den Anfang p gilt

$$\psi\big(\varphi^t(p)\big) = tc \text{ für } |t| \leq 1,$$

weil $\alpha(t) = tc$ für $|t| \leq 1$ die Differentialgleichung

$$\dot{\alpha}(t) = c = \tilde{X}\big(\alpha(t)\big)$$

löst.

Der Diffeomorphismus $\Phi = \varphi^1$ transportiert deshalb p nach $\psi^{-1}(c) =: q$ und $\Phi \simeq_{\mathrm{iso}} \mathbb{1}$, weil $H(q,t) = \varphi^t(q)$ eine Homotopie, sogar eine *Isotopie*, ist (weil alle $\varphi^t(-)$ Diffeomorphismus sind).

Schritt 2: Definiere nun p und q als äquivalent, $p \sim q$, wenn es einen Diffeomorphismus $\Phi \colon M \to M$ gibt mit $\Phi \simeq_{\mathrm{iso}} \mathbb{1}$ und $\Phi(p) = q$. Dann ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation und Schritt 1 zeigt, dass alle Äquivalenzklassen $[p] \subseteq M$ offen sind. Aber M ist zusammenhängend. Deshalb kann es nur eine solche Äquivalenzklasse geben $\Longrightarrow$ Behauptung des Lemmas. $\square$

(A.19) ***Beweis von*** **(A.9).** Seien q_1 und q_2 zwei reguläre Werte von $f\colon M \to N$. Wir wählen nach (A.17) einen Diffeomorphismus $\Phi\colon N \to N$ mit $\Phi \simeq_{\text{iso}} \mathbb{1}$ und $\Phi(q_1) = q_2$. Da $\Phi \simeq_{\text{iso}} \mathbb{1}$ ist, folgt: Φ ist orientierungerhaltend, d.h.: $\operatorname{sgn}(\mathrm{D}\Phi_q) = +1$, für alle $q \in N$ $\big($Übung:

$$X = \big\{(q,t) \in M \times [0,1] \;:\; \operatorname{sgn}\big(\mathrm{D}h_t(q)\big) = +1\big\} \qquad \big(\text{wo } H\colon \Phi \simeq_{\text{iso}} \mathbb{1},\ H(-,t) = h_t\big)$$

ist offen, abgeschlossen $\big($weil auch $\ldots \operatorname{sgn}(\mathrm{D}h_t(q)) = -1$ offen ist$\big)$ und nicht-leer, da $(q,1) \in X$ ist, $\forall q \in N$; also: $X = M \times [0,1]\big)$. Sind nun $p_1, \ldots, p_r \in M$ die (paarweise verschiedenen) Urbilder von q_1 unter f, so ist

$$\begin{aligned}
\deg(f;q_1) &= \sum_{i=1}^{r} \operatorname{sgn}(\mathrm{D}f_{p_i}) = \sum_{i=1}^{r} \underbrace{\operatorname{sgn}(\mathrm{D}\Phi_{q_1})}_{=1} \cdot \operatorname{sgn}(\mathrm{D}f_{p_i}) \\
&= \sum_{i=1}^{r} \operatorname{sgn}(\mathrm{D}\Phi_{q_1} \circ \mathrm{D}f_{p_i}) = \sum_{i=1}^{r} \operatorname{sgn}\big(\mathrm{D}(\Phi \circ f)_{p_i}\big) = \deg(\Phi \circ f; q_2)
\end{aligned}$$

denn $p_1, \ldots, p_n$ sind auch die Urbilder unter $\Phi \circ f$ von q_2 (und q_2 ist regulärer Wert für $\Phi \circ f$). Aber wegen (A.16) ist

$$\deg(\Phi \circ f, q_2) = \deg(f; q_2),$$

denn $\Phi \circ f \simeq \mathbb{1} \circ f = f$ und q_2 ist regulärer für f und für $\Phi \circ f$. Es ist also tatsächlich:

$$\deg(f;q_1) = \deg(f;q_2). \qquad \square$$

(A.20) ***Beweis von*** **(A.11).** Da die regulären Werte von f und g jeweils dicht liegen, gibt es einen gemeinsamen regulären Wert $q \in N$, $\operatorname{reg}(f) \cap \operatorname{reg}(g) \neq \emptyset$. Es folgt:

$$\deg(f) \overset{(A.9)}{=} \deg(f;q) \overset{(A.16)}{=} \deg(g;q) \overset{(A.9)}{=} \deg(g). \qquad \square$$

B Anhang B.

Der Satz von Stokes

(B.1) Motivation.

(a) Um nun auch Integralrechnung auf Mannigfaltigkeiten betreiben zu können, erinnern wir an die **Transformationsformel für Mehrfachintegrale** (siehe Analysis IV):

Sind $\Omega, D \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Mengen und $\tau\colon \Omega \to D$ ein (C^∞-) Diffeomorphismus, so gilt für eine (Lebesgue-) integrierbare Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$, dass auch $g\colon \Omega \to \mathbb{R}$,

$$g(x) := |\det \mathrm{D}\tau(x)| \cdot f \circ \tau(x)$$

integrierbar ist, und es gilt:

$$\int_D f(y)\mathrm{d}\mathcal{L}(y) = \int_\Omega g(x)\mathrm{d}\mathcal{L}(x).$$

(b) Nehmen wir nun an, M sei eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension $n \in \mathbb{N}_0$ und ω eine glatte n-Form, $\omega \in \mathcal{E}^{(n)}(M)$, deren **Träger**

$$\mathrm{supp}(\omega) := \overline{\{p \in M \,:\, \omega_p \neq 0\}} \subseteq M$$

ganz im Definitionsgebiet einer Karte $\varphi\colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ enthalten ist. Es ist dann

$$\omega|U = f(y)\mathrm{d}y^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y^n,$$

genauer ist

$$(\varphi^{-1})^*\omega = f(y)\mathrm{d}y^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y^n \in \mathcal{E}^{(n)}(V)$$

mit einer glatten Funktion $f\colon V \to \mathbb{R}$.

Nehmen wir nun auch noch an, dass der Träger von ω kompakt ist (i.A. hat man sonst keine Lebesgue-Integrierbarkeit). Dann ist auch

$$L := \varphi\big(\mathrm{supp}(\omega)\big) = \mathrm{supp}(f) = \overline{\{y \in V \,:\, f(y) \neq 0\}} \subseteq V$$

kompakt und damit f Lebesgue-integrierbar. Man setzt nun (vorläufig):

$$\int_M \omega := \int_V (\varphi^{-1})^*(\omega) := \int_V f(y)\mathrm{d}y := \int_V f(y)\mathrm{d}\mathcal{L}(y) \tag{$*$}$$

(c) Ist nämlich nun $\psi\colon \tilde{U} \to \tilde{V}$ eine weitere Karte so, dass $\mathrm{supp}(\omega) \subseteq \tilde{U}$ und kompakt ist, so ist

$$(\psi^{-1})^*\omega = g(x)\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$$

mit einer glatten Funktion $g\colon \tilde{V} \to \mathbb{R}$, die kompakten Träger $K = \psi\big(\mathrm{supp}(\omega)\big) \subseteq \tilde{V}$ hat und damit integrierbar ist.

Nehmen wir nun schließlich an, dass der Kartenübergang $\tau\colon \Omega \to D$ mit $\Omega = \psi(U \cap \tilde{U})$ und $D = \varphi(U \cap \tilde{U})$ überall positive Funktionaldeterminante hat, also

$$\det \mathrm{D}\tau(x) = |\det \mathrm{D}\tau(x)|, \quad \forall x \in \Omega.$$

Dann gilt wegen des Transformationsverhalten von n-Formen (vgl. (4.56,c))

$$g(x) = \det\big(\mathrm{D}\tau(x)\big) \cdot f \circ \tau(x)$$

und daher tatsächlich

$$\begin{aligned}\int_{\tilde{V}} g(x)\mathrm{d}\mathcal{L}(x) &= \int_{\Omega} g(x)\mathrm{d}\mathcal{L}(x) \overset{\text{Trafo.-Formel}}{=} \int_D f(y)\mathrm{d}\mathcal{L}(y)\\ &= \int_V f(y)\mathrm{d}\mathcal{L}(y)\end{aligned}$$

und in dem Sinne ist $(*)$ unabhängig von der gewählten Karte.

(d) Man hat es deshalb mit folgenden Problemen zu tun:

i) Man braucht Atlanten, deren Übergänge überall positive Funktionaldeterminante haben; $\rightsquigarrow$ Orientierbarkeit.

ii) Man sollte $\omega \in \mathcal{E}^{(n)}(M)$ zerlegen können in eine Summe von Formen $\omega_i \in \mathcal{E}^{(n)}(M)$,

$$\omega = \sum_{i \in I} \omega_i, \tag{$**$}$$

so, dass $\operatorname{supp}(\omega_i)$ ganz in einem Definitionsgebiet U_i einer Karte φ_i enhalten ist und kompakten Träger hat, die Summe $(**)$ **lokal endlich** ist, d.h. in jedem $p \in M$ gibt es eine offene Umgebung $U \subseteq M$ so, dass $\omega_i(q) \neq 0$ für nur endlich viele $i \in I$ ist, bei $q \in U$, damit $(**)$ überhaupt Sinn macht.

iii) Man würde dann die Definition wagen:

$$\int_M \omega := \sum_{i \in I} \int_M \omega_i,$$

wobei man noch darauf achten muss, dass die Summe endlich ist, und natürlich auch, dass die Definition nicht von der Wahl der Zerlegung $(**)$ abhängt.

(B.2) Bemerkung. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit (mit Rand). Dann ist M genau dann orientierbar, wenn es einen glatten Atlas von M gibt, so dass die Funktionaldeterminanten der Übergänge alle positiv sind.

Beweis. „$\Longrightarrow$“: Sei $\sigma = (\sigma_p)_{p \in M}$ eine Orientierung auf M und $\tilde{\mathfrak{A}} = (\tilde{\varphi}_i\colon \tilde{U}_i \to \tilde{V}_i)_{i \in I}$ zunächst ein beliebiger Atlas auf M. Indem wir nötigenfalls jede Karte $\tilde{\varphi}_i$ auf jede Zusammenhangs-Komponente von $\tilde{U}_i$ einschränken (und diese Einschränkung dann als neue Karten betrachten), dürfen wir annehmen, dass jedes Kartengebiet $\tilde{U}_i \subseteq M$ zusammenhängend ist. Dann ist $\tilde{\varphi}_i$ entweder orientierungserhaltend, also

$$(\mathrm{D}\tilde{\varphi}_i)_p\colon \mathrm{T}M \to (\mathrm{T}\tilde{V}_i)_{\tilde{\varphi}_i(p)} \cong \mathbb{R}^n$$

orientierungserhaltend für alle $p \in \tilde{U}$, oder orientierungsumkehrend, d.h. alle $(\mathrm{D}\tilde{\varphi}_i)_p$ sind orientierungsumkehrend, für alle $p \in \tilde{U}$. Setze nun $U_i := \tilde{U}_i$, $V_i := \tilde{V}_i$ und $\varphi_i := \tilde{\varphi}_i\colon U_i \to V_i$, falls $\tilde{\varphi}_i$ orientierungserhaltend ist, und $U_i := \tilde{U}_i$, $V_i := \tau(\tilde{V}_i)$ und $\varphi_i = \tau \circ \tilde{\varphi}_i\colon U_i \to V_i$, falls $\tilde{\varphi}_i$ orientierungsumkehrend ist. Hierbei ist τ die Einschränkung von

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ (x^1, \dots, x^n) \mapsto (x^1, \dots, x^{n-1}, -x^n).$$

Da τ orientierungsumkehrend ist, folgt dann wegen

$$\operatorname{sgn}(D\varphi_i)_p = \operatorname{sgn}(D\tau)_{\tilde{\varphi}_i(p)} \cdot \operatorname{sgn}(D\tilde{\varphi}_i)_p = (-1)\cdot(-1) = 1,$$

dass auch φ_i orientierungserhaltend ist.

Die Übergänge (φ_{ij}) des neuen Atlas' $\mathfrak{A} = (\varphi_i)$ haben nun alle positive Funktionaldeterminanten, denn wiederum ist

$$\operatorname{sgn}(D\varphi_{ij})_y = \operatorname{sgn}(D\varphi_i)_p \cdot \operatorname{sgn}(D\varphi_j^{-1})_y = (+1)\cdot(+1) = 1$$

und das Signum von $(D\varphi_{ij})_y\colon (TV_j)_y \cong \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \cong (TV_i)_x$ $\big(x = \varphi_{ij}(y) = \varphi_i(p),\ y = \varphi_j(p)\big)$ ist gerade durch das Vorzeichen von $\det(D\varphi_{ij})_y$ bestimmt.

„$\Longleftarrow$": Ist andererseits $\mathfrak{A} = (\varphi_i\colon U_i \to V_i)_{i\in I}$ ein Atlas auf M mit $\det(D\varphi_{ij}) > 0$, für alle $i, j \in I$, so wähle man für $p \in M$ eine $j \in I$ aus, so dass $p \in U_j$ ist und setze $\sigma_p := (D\varphi_j)_p^*(\sigma_{\mathrm{Std}})$, d.h. derart, dass

$$(D\varphi_j)_p\colon TM_p \to (TV_j)_{\varphi_j(p)} \cong \mathbb{R}^n$$

orientierungserhaltend wird. Das ist unabhängig von der Kartenwahl, denn ist $i \in I$ ein weiteres Element mit $p \in U_i$, so ist -mit der Wahl von σ_p via φ_j- auch

$$(D\varphi_i)_p\colon TM_p \to (TV_i)_{\varphi_i(p)} \cong \mathbb{R}^n$$

orientierungserhaltend, weil mit $\varphi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ auch

$$(D\varphi_i)_p = D(\varphi_{ij}\circ\varphi_j)_p = (D\varphi_{ij})_{\varphi_j(p)} \cdot (D\varphi_j)_p$$

ist und damit

$$\operatorname{sgn}(D\varphi_i)_p = \operatorname{sgn}(D\varphi_{ij})_{\varphi_j(p)} \cdot \operatorname{sgn}(D\varphi_j)_p = (+1)\cdot(+1) = +1$$

$\sigma := (\sigma_p)_{p\in M}$ wird damit zu einer Orientierung auf M. □

(B.3) Kommentar.

(a) Ist (M, σ) eine orientierte Mannigfaltigkeit (mit Rand), so nennen wir einen Atlas $\mathfrak{A} = (\varphi_i)_{i\in I}$ einen **Orientierungsatlas von M**, wenn alle Karten orientierungserhaltend sind. Ist $\mathfrak{B} = (\psi_j)_{j\in J}$ ein weiterer Orientierungsatlas von M, so ist auch $\mathfrak{C} = (\varphi_i, \varphi_j)_{i\in I, j\in J}$ eine solcher und man kann so eine Orientierung σ auf M eine Äquivalenzklasse $c = [\mathfrak{A}]$ von Atlanten zuordnen, deren Übergänge positive Funktionaldeterminante haben $\big($und natürlich $(\varphi_i) = \mathfrak{A} \sim \mathfrak{B} = (\psi_j)$, wenn auch $\mathfrak{C} = (\varphi_i, \varphi_j)$ nur Übergänge mit positiver Funktionaldeterminante hat$\big)$.

(b) Umgekehrt legt eine solche Struktur $c = [\mathfrak{A}]$ von derartigen Atlanten vermöge **dem induzierten $\boldsymbol{\sigma}$**, so dass alle $\mathfrak{A}$'s Orientierungsatlanten werden, eine Orientierung auf M fest und die Zuordnungen aus (a) und (b) sind invers zueinander. Deshalb kann man eine Orientierung auf M auch als eine solche Äquivalenzklasse von Atlanten auf M betrachten.

(c) Bei dem Übergang von $\tilde{\varphi}_i$ zu $\varphi_i = \tau\circ\tilde{\varphi}_i$ ist im Falle, dass M eine Mannigfaltigkeit der Dimension 1 mit Rand ist, etwas Vorsicht geboten. Dann ist mit $\tilde{V}_1 \subseteq \mathbb{H}^1$ offen $V_1 = \tau(\tilde{V}_1)$ nur noch enthalten in $-\mathbb{H}^1 = \{x \in \mathbb{R} : x \le 0\}$ und damit nicht mehr in $\mathbb{H}^1$. $\big($Für $n \ge 2$ ist natürlich mit $\tilde{V} \subseteq \mathbb{H}^n$ auch $V = \tau(\tilde{V}) \subseteq \mathbb{H}^n$.$\big)$ Wir müssen deshalb dort die erlaubten Karten auf Homöomorphismen $\varphi\colon U \to V$ mit $V \subseteq \mathbb{H}^1$ erweitern. (Ich danke Robin Raymond für diesen Hinweis.)

(B.4) Bemerkung. Sei (M,σ) eine orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand und $\mathfrak{A} = (\varphi_i \colon U_i \to V_i \subseteq \mathbb{H}^n)_{i\in I}$ ein Orientierungsatlas und $n \geq 2$. Ist dann der Rand $\tilde{M} := \partial M$ von M mit der induzierten Orientierung $\tilde{\sigma}$ versehen (vgl. (A.6,f)), so ist

$$\mathfrak{A} = (\underbrace{\varphi_i|U_i \cap \partial M}_{=:\tilde{\varphi}_i} \colon \underbrace{U_i \cap \partial M}_{=:\tilde{U}_i} \to \underbrace{V_i \cap \partial\mathbb{H}^n}_{=:\tilde{V}_i} \subseteq \mathbb{R}^{n-1})_{i\in I}$$

ein Orientierungsatlas von $(\partial M, -\tilde{\sigma})$.

Beweis. Identifiziert man $\partial\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x^1 = 0\}$ kanonisch mit $\mathbb{R}^{n-1}$ via $y = (y^2,\dots,y^n) \to (0,y^2,\dots,y^n)$, so induziert die Standard-Orientierung auf $\mathbb{H}^n$, $\mathrm{T}\mathbb{H}^n_x \cong \mathbb{R}^n$ kanonisch, das Negative der Standard-Orientierung auf $\partial\mathbb{H}^n \cong \mathbb{R}^{n-1}$, denn eine Basis $(\xi_2,\dots,\xi_n)$ von $\mathbb{R}^{n-1} \cong \mathrm{T}(\partial\mathbb{H}^n)_x$ ist positiv orientiert, genau wenn $(-e_1,\xi_2,\dots,\xi_n)$ positiv orientiert von $\mathbb{R}^n \cong \mathrm{T}\mathbb{H}^n_x$ ist, da $-e_1 \in \mathbb{R}^n \cong \mathrm{T}\mathbb{H}^n_x$ ein äußerer Vektor ist.

Ist daher $\varphi \colon U \to V \subseteq \mathbb{H}^n$ eine positiv orientierte Karte von (M,σ), also $(\mathrm{D}\varphi)_p$ orientierungserhaltend für $p \in \partial M$, so ist die Einschränkung

$$(\mathrm{D}\tilde{\varphi}) \colon \mathrm{T}(\partial M) \to (\mathrm{T}\tilde{V}) \cong \mathbb{R}^{n-1}$$

orientierungsumkehrend, denn ist $(\xi_2,\dots,\xi_n)$ positiv orientierte Basis von $\mathrm{T}(\partial M)_p$, so ist für einen äußeren Vektor $v \in \mathrm{T}M_p^{\text{außen}}$ nach Definition $(v,\xi_2,\dots,\xi_n)$ positiv orientiert für $\mathrm{T}M_p$ und damit $\big(\mathrm{D}\varphi_p(v),\mathrm{D}\varphi_p(\xi_2),\dots,\mathrm{D}\varphi_p(\xi_n)\big)$ positiv orientiert für $\mathrm{T}\mathbb{H}^n_x \cong \mathbb{R}^n$, $x = \varphi(p)$. Da $\mathrm{D}\varphi_p(v) \in (\mathrm{T}\mathbb{H}^n_x)^{\text{außen}}$ ist, ist daher $\big(\mathrm{D}\varphi_p(\xi_2),\dots,\mathrm{D}\varphi_p(\xi_n)\big)$ negativ orientiert für $\mathrm{T}(\partial\mathbb{H}^n)_x \cong \mathbb{R}^{n-1}$, also $\tilde{\varphi} \colon \tilde{U} \to \tilde{V} \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ positiv orientiert für $-\tilde{\sigma}$ auf ∂M. $\square$

Frage: Wie erreicht man

$$\omega = \sum_{\alpha\in I} \omega_\alpha$$

mit $\operatorname{supp}(\omega_\alpha) \subseteq U_{\iota(\alpha)}$ mit $\iota \colon A \to I$ bei einer vorgegebenen Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$?

(B.5) Definition. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit (mit Rand) und $\mathfrak{A} = (U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von M. Eine Familie glatter Funktionen $(\lambda_\alpha)_{\alpha\in A}$, $\lambda_\alpha \in \mathcal{E}(M)$, heißt **eine $\mathfrak{A}$ untergeordnete Teilung der Eins**, wenn gilt:

(i) Es gibt eine Abbildung $\iota \colon A \to I$, so dass gilt:

$$\operatorname{supp}(\lambda_\alpha) \subseteq U_{\iota(\alpha)}, \quad \forall \alpha \in A;$$

(ii) $(\lambda_\alpha)_{\alpha\in A}$ ist **lokal endlich**, d.h. für alle $p \in M$ existiert eine offene Umgebung $U \subseteq M$ von p und $\alpha_1,\dots,\alpha_r \in A$ $(r \in \mathbb{N})$, so dass gilt:

$$\lambda_\beta(q) = 0,$$

für alle $q \in U$ und allen $\beta \in A \setminus \{\alpha_1,\dots,\alpha_r\}$;

(iii) für alle $p \in M$ gilt:

$$\sum_{\alpha\in A} \lambda_\alpha(p) = 1.$$

(B.6) Kommentar.

(a) Beachte, dass wegen (ii) für jedes $p \in M$ nur endlich viele Summanden in (iii) von Null verschieden sind.

(b) Die Funktion $f \equiv 1$ auf M wird zerlegt in Funktionen $\lambda_\alpha \in \mathcal{E}(M)$, die gegenüber f den Vorteil haben, dass sie nur auf einem Kartengebiet (eines gegebenes Atlas') „leben". Mit ihrer Hilfe kann man globale Probleme auf M lokalisieren: z.B. kann man für eine n-Form $\omega \in \mathcal{E}^{(n)}(M)$ setzen: $\omega_\alpha := \lambda_\alpha \cdot \omega$, und man erhält wie in (B.1,d) gewünscht: $\operatorname{supp}(\omega_\alpha) \subseteq U_{\iota(\alpha)}$ und

$$\sum_{\alpha \in A} \omega_\alpha = \omega.$$

Beispiel: Teilung der Eins auf $M = \mathbb{R}$ mit $I = A = \mathbb{Z}$, $\iota = \mathbb{1}$, und $\mathfrak{A} = (U_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, $U_n = (n-1, n+1)$.

(B.7) Lemma. *Sei M ein lokal kompakter (Hausdorff-) Raum mit abzählbarer Topologie (z.B. eine Mannigfaltigkeit). Dann gibt es eine Familie offener Teilmengen $(G_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von M, so dass gilt:*

(i) $\overline{G}_k$ *ist kompakt,* $\forall k \in \mathbb{N}$;

(ii) $\overline{G}_k \subseteq G_{k+1}$, $\forall k \in \mathbb{N}$;

(iii) $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} G_k = M$.

Beweis. (a) Sei $\mathfrak{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Basis von M. Dann ist auch

$$\tilde{\mathfrak{B}} := \{B \in \mathfrak{B} : \overline{B} \text{ ist kompakt}\}$$

eine abzählbare Basis, denn ist $U \subseteq M$ eine beliebige offene Menge, so wähle man für jedes $p \in U$ zunächst offene Mengen $V_p \subseteq M$ und kompakte Mengen $K_p \subseteq M$ mit

$$p \in V_p \subseteq K_p.$$

Das geht, weil X lokal kompakt ist. Dann wähle man ein $n_p \in \mathbb{N}$ mit

$$p \in B_{n_p} \subseteq V_p \cap U$$

(was geht, da $\mathfrak{B}$ Basis der Topologie ist). Es ist dann

$$\overline{B}_{n_p} \subseteq \overline{V}_p \subseteq K_p$$

und daher als abgeschlossene Menge (auch in K_p) eines Kompaktums selber kompakt (vgl. (1.52)). Aber nun ist

$$U = \bigcup_{p \in U} B_{n_p}$$

und $B_{n_p} \in \tilde{\mathfrak{B}}$, für alle $p \in U$. Also ist auch $\tilde{\mathfrak{B}}$ Basis.

(b) Wir nehmen nun gleich an, dass $\mathfrak{B}$ aus **relativ kompakten Teilmengen** besteht (d.h.: für $B \in \mathfrak{B}$ gilt: $\overline{B}$ ist kompakt) und nummerieren die Elemente von $\mathfrak{B}$ durch: $\mathfrak{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$. Setzen wir nun $G_1 := B_1$ und nehmen an, dass wir G_k für $k \in \mathbb{N}$ schon von der Form

$$G_k = B_1 \cup \cdots \cup B_{j_k}$$

für ein $j_k \in \mathbb{N}$ gewählt haben. Dann ist

$$\overline{G}_k = \overline{B}_1 \cup \cdots \cup \overline{B}_{j_k}$$

und daher kompakt. Es existiert deshalb ein $j_{k+1} > j_k$ mit

$$\overline{G}_k \subseteq B_1 \cup \cdots \cup B_{j_{k+1}}.$$

Wir setzen dann rekursiv:

$$G_{k+1} := B_1 \cup \cdots \cup B_{j_{k+1}}.$$

Dann gilt: $\overline{G}_k$ ist kompakt, $\overline{G}_k \subseteq G_{k+1}$ nach Konstruktion und

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} G_k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_1 \cup \cdots \cup B_{j_k} \underset{j_k \geq k}{=} \bigcup_{m\in\mathbb{N}} B_m = M. \qquad \square$$

(B.8) Satz. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit mit Rand und $\mathfrak{A} = (U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung. Dann existiert eine $\mathfrak{A}$-untergeordnete Teilung der Eins $(\lambda_m)_{m\in\mathbb{N}}$, so dass gilt:* $\operatorname{supp}(\lambda_m) \subseteq M$ *ist kompakt, für alle $m \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Sei $(G_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine **relativ-kompakte Ausschöpfung von M** wie in (B.7) und $p \in M$ beliebig. Wir setzen $G_0 := \emptyset$ und

$$k_p := \max\{k \in \mathbb{N} \,:\, p \notin \overline{G}_k\} \in \mathbb{N}_0.$$

Dann ist also $p \in \overline{G}_{k_p+1} \subseteq G_{k_p+2}$ und damit

$$p \in G_{k_p+2} \setminus \overline{G}_{k_p}.$$

Sei $i_p \in I$ so, dass $p \in U_{i_p}$ und $V_p \subseteq M$ offen, so dass

$$p \in V_p \subseteq U_{i_p} \cap (G_{k_p+2} \setminus \overline{G}_{k_p}).$$

Nach evtl. Verkleinerung von V_p dürfen wir annehmen, dass V_p das Definitionsgebiet einer Karte $\varphi_p\colon V_p \to B$ ist, wobei $B = B(3) \subseteq \mathbb{R}^n$ ist und $\varphi_p(p) = 0$. Sei nun $\tilde{\varrho}_p\colon \mathbb{R}^n \to [0,1]$ eine Abschneidefunktion für B $\big($vgl. (3.26)$\big)$, d.h.:

$$\varrho_p|B(1) \equiv 1,\ \varrho_p|\mathbb{R}^n \setminus B(2) \equiv 0.$$

Wir setzen schließlich

$$W_p := \varphi_p^{-1}\big(B(1)\big), \quad \tilde{\lambda}_p := \begin{cases} \varrho_p \circ \varphi_p & \text{auf } V_p \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} : M \to [0,1]$$

Da nun $\overline{G}_{k+1} \setminus G_k$ kompakt ist, existieren endlich viele $p_1^{(k)}, \ldots, p_{r_k}^{(k)} \in \overline{G}_{k+1} \setminus G_k$, so dass

$$\overline{G}_{k+1} \setminus G_k \subseteq \bigcup_{j=1}^{r_k} W_{p_j^{(k)}}$$

ist. Da

$$\operatorname{supp}(\tilde{\lambda}_p) \subseteq V_p \subseteq G_{k_p+2} \setminus \overline{G}_{k_p}$$

ist, existiert für jedes $p \in M$ eine offene Umgebung, so dass nur endlich viele $\operatorname{supp}(\tilde{\lambda}_{p_j^{(k)}})$ dieses U treffen $\big(k \in \mathbb{N},\, j \in \{1, \ldots, r_k\}\big)$, nämlich z.B. $U = G_{k_p+2} \setminus \overline{G}_{k_p}$, welches höchstens von

$$W_{p_1^{(k_p-1)}}, \ldots, W_{p_{r_{k_p+1}}^{(k_p+1)}}$$

getroffen wird. Wir nummerieren nun die Familie $(\tilde{\lambda}_{p_j^{(k)}})_{k\in\mathbb{N},\, j=1,\ldots,r_k}$ zu einer Folge $(\tilde{\lambda}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ um, $m = m(k,j)$. Dann ist also $(\tilde{\lambda}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ lokal endlich, also

$$\tilde{\lambda} := \sum_{m\in\mathbb{N}} \tilde{\lambda}_m$$

wohldefiniert und, weil $(W_m)_{m\in\mathbb{N}}$ ganz M überdecken, ist:

$$\tilde{\lambda} > 0. \qquad \big(W_m := W_{p_j^{(k)}},\ m = m(k,j)\big)$$

$\ulcorner \bigcup_{m\in\mathbb{N}} W_m = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \overline{G}_{m+1} \setminus G_m \subseteq \bigcup G_{m+1} = M.$ $\lrcorner$

Setzen wir nun noch

$$\lambda_m := \frac{\tilde{\lambda}_m}{\tilde{\lambda}},$$

und $\iota\colon \mathbb{N} \to I$ so, dass $\iota(m) = i_{p_m}$ $\big(\Longrightarrow \operatorname{supp}(\lambda_m) \subseteq V_{p_m} \subseteq U_{i_{p_m}} = U_{\iota(m)}\big)$, so ist (λ_m) die gesuchte Teilung der Eins auf M. Nach Konstruktion ist

$$\operatorname{supp}(\lambda_m) \subseteq \varphi_{\iota(m)}^{-1}\big(\overline{B(2)}\big),$$

also auch kompakt. □

(B.9) Kommentar.

(a) In vielen Anwendung ist es günstig, wenn man die Indexmenge A der $(U_i)_{i\in I}$ untergeordneten Teilung der Eins gleich I und die „Nummerierung“ $\iota\colon A \to I$ als die Identität wählen kann. Verzichtet man darauf, dass die Träger $\operatorname{supp}(\lambda_i) \subseteq U_i$ kompakt sein sollen - und das muss man, wie das Beispiel einer nicht-kompakter Mannigfaltigkeit mit $\mathfrak{A} = (M)$ zeigt - so kann man dies wie folgt erreichen: Man setze im Beweis von (B.8) noch $\lambda_i\colon M \to [0,1]$

$$\lambda_i := \sum_{\substack{m\in\mathbb{N}\\ \iota(m)=i}} \lambda_m.$$

Dann ist $(\lambda_i)_{i\in I}$ tatsächlich eine Teilung der Eins mit $\operatorname{supp}(\lambda_i) \subseteq U_i$.

(b) Beachte, das für überabzählbares I dabei nur abzählbar viele $i \in I$ existieren $\big($nämlich die aus $\operatorname{im}(\iota)\big)$, wo $\lambda_i \not\equiv 0$ sein kann.

(B.10) Definition. Sei (M,σ) eine orientierte Mannigfaltigkeit der Dimension n mit Rand und ω eine glatte n-Form mit kompakten Träger.

(a) Sei $n \geq 1$. Gibt es eine orientierungserhaltende Karte $\varphi\colon U \to V \subseteq \mathbb{H}^n$ (bzw. $-\mathbb{H}^1$ im Fall $n = 1$) mit $\operatorname{supp}(\omega) \subseteq U$, so setzen wir

$$\int_M \omega := \int_V (\varphi^{-1})^*(\omega|U) = \int_V f(x)\mathrm{d}\mathcal{L}(x),$$

wenn $\omega|U = f(x)\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$ mit $f \in \mathcal{E}(V)$ ist.

(b) Sei $n \geq 1$. Sei $\mathfrak{A} = (\varphi_i\colon U_i \to V_i)_{i\in I}$ ein Orientierungsatlas von M und $(\lambda_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine (U_i)-untergeordnete Teilung der Eins. Wir setzen dann:

$$\int_M \omega := \sum_{m\in\mathbb{N}} \int_M \lambda_m\omega,$$

wobei die Integrale auf der rechten Seite nach (a) definiert sind, da $\operatorname{supp}(\lambda_m\omega)$ kompakten Träger in einer Karte hat.

(c) Für $n = 0$ ist $\omega \in \mathcal{E}^0(M) = \mathcal{E}(M)$ eine (glatte) Funktion mit kompakten Träger. Ist dann (M,σ) orientiert, also $\sigma\colon M \to \{\pm 1\}$ eine Gewichtsfunktion auf dem abzählbaren diskreten Raum M, so setzt man

$$\int_M \omega := \sum_{p\in M} \sigma(p)\cdot\omega(p).$$

Die Summe auf der rechten Seite ist endlich, weil ω kompakten Träger hat, d.h. in diesem Falle: es gibt nur endlich viele p's mit $\omega(p) > 0$.

(B.11) Kommentar.

(a) Wir haben schon in (B.1,c) schon geprüft, dass (B.10,a) nicht von der Wahl der orientierten Karte abhängt.

(b) Die Summe auf der rechten Seite in (B.10,b) ist endlich, das soll hier heißen: Nur endlich viele Summanden sind von Null verschieden. Jedes $p \in M$ hat ja eine offene Umgebung $U_p \subseteq M$, die nur endlich viele der Träger von $\omega_m := \lambda_m \omega$ trifft.

$$\#\{m \in \mathbb{N} \,:\, U_p \cap \operatorname{supp}(\omega_m) \neq \emptyset\} < \infty.$$

Da $\operatorname{supp}(\omega) \subseteq M$ kompakt ist, ist aber

$$\operatorname{supp}(\omega) \subseteq U_{p_1} \cup \cdots \cup U_{p_r}$$

mit nur endlich vielen Punkten $p_1, \ldots, p_r \in M$ ($r \in \mathbb{N}$). Also ist auch

$$\#\{m \in \mathbb{N} \,:\, \operatorname{supp}(\omega_m) \neq \emptyset\} < \infty.$$

(c) Beachte auch, dass

$$\int_M : \mathcal{E}^{(n)}_{\text{cs}}(M) \to \mathbb{R},$$

mit

$$\mathcal{E}^{(n)}_{\text{cs}}(M) := \{\omega \in \mathcal{E}^n(M) \,:\, \omega \text{ hat kompakten Träger}\},$$

linear ist, weil die Lebesgue-Integrale $\mathcal{E}_{\text{cs}}(V) \to \mathbb{R}$ linear sind.

(d) Im Falle, dass $\operatorname{supp}(\omega)$ in einem Kartengebiet ist, stimmt Definition (b) mit Definition (a) wegen $\sum_m \lambda_m = 1$ überein.

(e) Es bleibt zu prüfen, dass (B.10,b) nicht von der Auswahl des Orientierungsatlas $\mathfrak{A}$ und nicht von der gewählten Teilung der Eins (λ_m) abhängt:

(B.12) Bemerkung. Die Definition (B.10) des Integrals über n-Formen mit kompakten Träger über orientierte Mannigfaltigkeiten (mit Rand) der Dimension n ist wohldefiniert.

Beweis. Sei o.E. $n \geq 1$ und seien $\mathfrak{A} = (\varphi_i \colon U_i \to V_i)_{i \in I}$ und $\tilde{\mathfrak{A}} = (\tilde{\varphi} \colon \tilde{U}_j \to \tilde{V}_j)_{j \in J}$ zwei Orientierungsatlanten auf M und $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ bzw. $(\tilde{\lambda}_l)_{l \in \mathbb{N}}$ ihnen untergeordnete Teilungen der Eins. Es ist dann für ein $\omega \in \mathcal{E}^{(n)}_{\text{cs}}(M)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{l \in \mathbb{N}} \int_M \tilde{\lambda}_l \omega &= \sum_{l \in \mathbb{N}} \int_M \tilde{\lambda}_l \Big(\sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k \omega \Big) && \Big(\text{da } \textstyle\sum \lambda_k = 1 \text{ ist}\Big) \\
&= \sum_{l \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_M \tilde{\lambda}_l \lambda_k \omega && \begin{pmatrix} \text{da das Lebesgue-Integral auf } \tilde{V}_{\iota(l)} \\ \text{linear ist, } \iota \colon \mathbb{N} \to J \end{pmatrix} \\
&= \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_M \lambda_k \Big(\sum_{l \in \mathbb{N}} \tilde{\lambda}_l \omega \Big) && \begin{pmatrix} \text{da auch das Lebesgue-Integral auf} \\ V_{\iota(k)} \text{ linear ist, } \iota \colon \mathbb{N} \to J \end{pmatrix} \\
&= \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_M \lambda_k \omega && \Big(\text{da } \textstyle\sum \tilde{\lambda}_l = 1 \text{ ist}\Big)
\end{aligned}$$

□

(B.13) Lemma. *Sei $V \subseteq \mathbb{H}^n$ (bzw. auch in $-\mathbb{H}^1$ für $n = 1$) offen und $\omega \in \mathcal{E}^{(n-1)}_{\mathrm{cs}}(V)$. Dann hat auch $\mathrm{d}\omega \in \mathcal{E}^{(n)}(V)$ kompakten Träger und mit der Einbettung $\iota\colon V \cap \partial\mathbb{H}^n \hookrightarrow \mathbb{H}^n$, $y \mapsto (0, y)$, der Standard-Orientierung auf V und der induzierten Orientierung auf ∂V $(:= V \cap \partial\mathbb{H}^n)$:*

$$\int_V \mathrm{d}\omega = \int_{\partial V} \iota^*(\omega).$$

Beweis. (a) Sei $n \geq 2$. Seien $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{E}(V)$ die glatten Funktion mit

$$\omega = f_1 \mathrm{d}x^2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n + (-f_2)\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^3 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n + \cdots + (-1)^n f_n \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{n-1}.$$

Es ist dann einerseits:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega &= \mathrm{d}\Big(\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} f_i \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n\Big) \\
&= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{\partial f_i}{\partial x^i} \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n \\
&= \Big(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x^i}\Big) \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n = \operatorname{div}(f) \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n
\end{aligned}$$

mit

$$\operatorname{div}(f) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x^i} \in \mathcal{E}(V).$$

Andererseits ist

$$\iota^*\omega = \iota^* f_1 \mathrm{d}y^2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y^n = f_1(0, y)\mathrm{d}y^2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y^n,$$

denn ist $\iota^*\omega = g(y)\mathrm{d}y^2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y^n$ $\big(y = (y^2, \ldots, y^n)\big) \implies$

$$\begin{aligned}
g(y) &= \iota^*\omega\Big(\frac{\partial}{\partial y^2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y^n}\Big) \\
&= \omega(\iota_*\Big(\frac{\partial}{\partial y^2}\Big), \ldots, \iota_*\Big(\frac{\partial}{\partial y^n}\Big)) = \omega\Big(\frac{\partial}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big)|_{i(y)} = f_1(0, y),
\end{aligned}$$

da

$$\iota^*(\mathrm{d}x^1)\Big(\frac{\partial}{\partial y^j}\Big) = \Big\langle \mathrm{d}x^1, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big\rangle = 0$$

ist für $j = 2, \ldots, n$, denn $\iota_*(\frac{\partial}{\partial y^i}) = \frac{\partial}{\partial x^i}$. Nun ist zunächst

$$\operatorname{supp}\Big(\frac{\partial f_i}{\partial x^i}\Big) \subseteq \operatorname{supp}(f),$$

damit $\operatorname{supp}(\mathrm{d}\omega) \subseteq \operatorname{supp}(\omega)$ und damit auch kompakt. Wir können daher $a^2, \ldots, a^n \in \mathbb{R}$ und $b^1, \ldots, b^n \in \mathbb{R}$ wählen, so dass

$$\operatorname{supp}(\omega) \subseteq [0, b^1] \times [a^2, b^2] \times \cdots \times [a^n, b^n].$$

Setzen wir nun noch ω trivial zu $\hat{\omega}$ auf ganz $\mathbb{H}^n$ fort

$$\hat{\omega}(x) := \begin{cases} \omega(x) & \text{für } x \in V \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\big($und nennen die Fortsetzung wieder ω mit den trivial fortgesetzten f_i auf $\mathbb{H}^n$, die weiterhin f_i (statt $\hat{f}_i$) heißen mögen$\big)$ so gilt mit den Satz von Fubini:

$$\begin{aligned}\int_V \mathrm{d}\omega &= \int_{\mathbb{H}^n} \mathrm{d}\hat{\omega} = \int_{\mathbb{H}^n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \hat{f}_i}{\partial x^i} \mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^n \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{a^n}^{b^n} \cdots \widehat{\int_{a^i}^{b^i}} \cdots \int_{a^1}^{b^1} \Big(\int_{a^i}^{b^i} \frac{\partial f_i}{\partial x^i} \mathrm{d}x^i \Big) \mathrm{d}x^1 \cdots \widehat{\mathrm{d}x^i} \cdots \mathrm{d}x^n\end{aligned}$$

mit $a^1 := 0$ und mit dem Hauptsatz der Differential und Integralrechnung:

$$\begin{aligned}\int_V \mathrm{d}\omega = \sum_{i=1}^n \int_{a^n}^{b^n} \cdots \widehat{\int_{a^i}^{b^i}} \cdots \int_{a^1}^{b^1} \big(& f_i(x^1, \ldots, x^{i-1}, b^i, x^{i+1}, \ldots, x^n) \\ & - f_i(x^1, \ldots, x^{i-1}, a^i, x^{i+1}, \ldots, x^n) \big) \mathrm{d}x^1 \cdots \widehat{\mathrm{d}x^i} \cdots \mathrm{d}x^n.\end{aligned}$$

Da nun $\operatorname{supp}(\omega) \subseteq [0, b^1] \times [a^2, b^2] \times \cdots \times [a^n, b^n]$ ist, gilt:

$$f_i(x^1, \ldots, x^{i-1}, a^i, x^{i+1}, \ldots, x^n) = f_i(x^1, \ldots, x^{i-1}, b^i, x^{i+1}, \ldots, x^n) = 0$$

für $i = 2, \ldots, n$ und

$$f_1(b^1, x^2, \ldots, x^n) = 0,$$

so dass nur noch überbleibt:

$$\begin{aligned}\int_V \mathrm{d}\omega &= -\int_{a^n}^{b^n} \cdots \int_{a^2}^{b^2} f_1(0, x^2, \ldots, x^n) \mathrm{d}x^2 \cdots \mathrm{d}x^n \\ &= -\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \iota^* \omega = +\int_{\partial \mathbb{H}^n} \iota^* \omega = +\int_{\partial V} \iota^* \omega,\end{aligned}$$

mit der von V auf ∂V induzierten Orientierung $\big($vgl. (B.4)$\big)$.

(b) Der Fall $n = 1$ sei als Übung überlassen. Er liefert im Fall, dass $V = [0, b) \subseteq \mathbb{H}^1$ zusammenhängend ist, dass

$$\int_V \mathrm{d}\omega = \int_0^b f'(x) \mathrm{d}x = -f(0) = \int_{\partial V} \iota^*(\omega),$$

wenn $\omega = f$ ist, und ähnlich für $V = (a, 0] \subseteq -\mathbb{H}^1$ bei $\omega = f(x)$:

$$\int_V \mathrm{d}\omega = \int_{-a}^0 f'(x) \mathrm{d}x = +f(0) = \int_{\partial V} \iota^*(\omega),$$

weil $\partial V = \{0\}$ im ersten Fall das Gewicht -1 bekommt und im zweiten Fall das Gewicht $+1$. □

(B.14) Kommentar.

(a) Der folgende Satz gilt als der Höhepunkt der Differential- und Integralrechnung. Auf der rechten müsste es genauer $\iota^*\omega$ statt ω heißen, wenn $\iota\colon \partial M \hookrightarrow M$ die Inklusion bezeichnet. (So ist die Formulierung ästhetischer, weil das „runde d“ vor dem Integranden lediglich in das „partielle ∂“ des Definitionsgebiet wandert.)

(b) Er enthält als Spezialfall den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (für glatte Funktionen), denn ist $M = [a, b]$ und $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ glatt, so gilt mit einer Stammfunktion $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, dass

$$\alpha := f(x)\mathrm{d}x = F'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}\omega$$

ist, wenn man die Nullform $\omega \in \mathcal{E}^{(0)}(M)$ als $\omega := F$ setzt. Die Standard-Orientierung auf $[a,b]$ induziert die Gewichte -1 auf a und $+1$ auf b von $\partial M = \{a,b\}$, so dass für das Randintegral

$$\int_{\partial M} \iota^* \omega = -F(a) + F(b)$$

wird. Man erhält also:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} \mathrm{d}\omega \overset{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial[a,b]} \iota^*\omega = F(b) - F(a).$$

(c) Tatsächlich haben wir in (B.13) gesehen, dass der Hauptsatz der wesentliche Bestandteil im Beweis ist, der den Spezialfall betrachtet, wo $\mathrm{supp}(\omega)$ ganz in einem Kartengebiet liegt. Der Rest des Beweises besteht nur aus „Kartenzauber“.

(d) Tatsächlich ist der Satz von Stokes ein Beispiel dafür, dass die Tiefe eines Satzes durchaus im Entdecken der richtigen Begriffsbildungen liegen kann, sozusagen in den Definitionen (hier z.B.: Mannigfaltigkeiten, Differentialformen und Orientierungen). Der eigentliche Beweis ist dann (mehr oder weniger) trivial.

(B.15) Theorem (Stokes). *Sei M eine orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand der Dimension n. Dann gilt für jede $(n-1)$-Form ω mit kompaktem Träger:*

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Beweis. Sei $n \geq 2$. Wir wählen einen Orientierungsatlas $\mathfrak{A} = (\varphi_i \colon U_i \to V_i \subseteq \mathbb{H}^n)_{i\in I}$ und eine ihm untergeordnete Teilung der Eins $(\lambda_m)_{m\in\mathbb{N}}$ $\big($mit $\iota\colon \mathbb{N} \to I$, so dass $\mathrm{supp}(\lambda_m) \subseteq U_{\iota(m)}$ ist$\big)$ mit kompakten Trägern $\mathrm{supp}(\lambda_m) \subseteq U_{\iota(m)}$. Bezeichnen wir mit $\tilde{\mathfrak{A}}$ den induzierten Atlas von ∂M, dessen Karten für die induzierte Orientierung orientierungsumkehrend sind so ist $(\tilde{\lambda}_m)$ mit

$$\tilde{\lambda}_m := \lambda_m | \partial M$$

eine $\tilde{\mathfrak{A}}$-untergeordnete Teilung der Eins ist, $\tilde{\mathfrak{A}} := (\tilde{U}_i)$, $\tilde{U}_i := U_i \cap \partial M$, $i \in I$ $\big($und natürlich ist auch $\mathrm{supp}(\tilde{\lambda}_m)$ kompakt$\big)$. Jetzt dürfen wir rechnen.

$$\begin{aligned}
\int_M \mathrm{d}\omega &= \sum_{m\in\mathbb{N}} \int_M \mathrm{d}(\lambda_m\omega) && \Big(\text{weil } \textstyle\sum \lambda_m = 1 \text{ und d und } \int_M - \text{ linear sind}\Big)\\
&= \sum_{m\in\mathbb{N}} \int_{V_{\iota(m)}} (\varphi_{\iota(m)}^{-1})^*(\mathrm{d}\omega_m) && \left(\begin{array}{l}\text{mit } \omega_m := \lambda_m\omega, \text{ da } \mathrm{d}\omega_m \text{ kompakten}\\ \text{Träger in } U_{\iota(m)} \text{ hat.}\end{array}\right)\\
&\overset{(4.67)}{=} \sum_{m\in\mathbb{N}} \int_{V_{\iota(m)}} \mathrm{d}\big((\varphi_{\iota(m)}^{-1})^*\omega_m\big)\\
&\overset{(B.13)}{=} \sum_{m\in\mathbb{N}} \int_{\partial V_{\iota(m)}} j^*\big((\varphi_{\iota(m)}^{-1})^*\omega_m\big) && \left(\begin{array}{l}\text{wo } j\colon \tilde{V}_{\iota(m)} = \partial V_{\iota(m)} \hookrightarrow V_{\iota(m)} \text{ die}\\ \text{Inklusion bezeichnet}\end{array}\right)\\
&= \sum_{m\in\mathbb{N}} \int_{\partial V_{\iota(m)}} (\tilde{\varphi}_{\iota(m)}^{-1})^*(j^*\omega_m) && \left(\begin{array}{l}\text{wo } j \text{ nun die Inklusion } \partial M \hookrightarrow M\\ \text{bezeichnet, denn es kommutieren}\\ \varphi_{\iota(m)}^{-1} \circ j = j \circ \tilde{\varphi}_{\iota(m)}^{-1}\end{array}\right)\\
&= \sum_{m\in\mathbb{N}} \int_{\partial M} j^*(\omega_m)\\
&\overset{\int \text{ ist linear}}{=} \int_{\partial M} j^*\Big(\underbrace{\sum_{m\in\mathbb{N}} \omega_m}_{=\omega}\Big) = \int_{\partial M} j^*\omega.
\end{aligned}$$

Der Fall $n = 1$ ist ähnlich, aber einfacher, weil man keine Teilung der Eins mehr auf ∂M braucht. Man beachte aber, dass man hier $V_1 \subseteq \mathbb{H}^1$ oder $V_1 \subseteq -\mathbb{H}^1$ zulassen muss (Übung). $\square$

(B.16) Korollar. *Ist M geschlossen und $\omega \in \mathcal{E}^{(n-1)}(M)$ beliebig, so ist:*

$$\int_M \mathrm{d}\omega = 0.$$

(B.17) Proposition. *Sei M^n eine Mannigfaltigkeit. Dann ist M genau dann orientierbar, wenn es eine globale n-Form ohne Nullstellen auf M gibt.*

Beweis. „$\Longrightarrow$“: Sei $\mathfrak{A} = (\varphi_i \colon U_i \to V_i)_{i \in I}$ ein Orientierungsatlas von M. Auf jedem U_i definieren wir $\omega_i \in \mathcal{E}^{(n)}(U_i)$ durch

$$\tilde{\omega}_i = \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n.$$

Sei nun $(\lambda_i)_{i \in I}$ eine Teilung der Eins mit $\operatorname{supp}(\lambda_i) \subseteq U_i$. Dann können wir $\lambda_i \tilde{\omega}_i \in \mathcal{E}^{(n)}(U_i)$ trivial außerhalb von U_i zu einer glatten n-Form $\omega_i \in \mathcal{E}^{(n)}(M)$ fortsetzen,

$$\omega_i(p) := \begin{cases} \lambda_i(p)\tilde{\omega}_i(p) & \text{für } p \in U_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Wir setzen dann

$$\omega = \sum_{i \in I} \omega_i$$

und stellen fest, dass für ein $p \in M$ die Summe auf der rechten Seite auf einer ganzen Umgebung von p endlich ist, damit ist ω wohldefiniert und glatt, $\omega \in \mathcal{E}^{(n)}(M)$.

Sei nun $p \in M$ beliebig und $i_0, \ldots, i_r \in I$ die Indizes, wo $\lambda_i(p) \neq 0$ ist. Ist

$$\tilde{\omega}_{i_0} = \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n,$$

so ist

$$\tilde{\omega}_{i_k} = f_k(x)\mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n \quad (k = 1, \ldots, r),$$

wo $x = \varphi_{i_0}$ und f_k die Funktionaldeterminante des Übergangs von φ_{i_k} zu φ_{i_0} ist und damit positiv. Es ist deshalb

$$\omega(p) = \Big(\lambda_{i_0}(p) + \sum_{k=1}^{r} \lambda_{i_k}(p) f_k(x_k)\Big)\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n \quad \big(\text{mit } x_k = \varphi_{i_k}(p)\big)$$

und da mindestens ein $\lambda_{i_k}(p) > 0$ sein muss, weil $\sum_{k=0}^{r} \lambda_{i_k}(p) = 1$ ist, ist

$$\lambda_{i_0}(p) + \sum_{k=1}^{r} \lambda_{i_k}(p) f_k(x_k) > 0.$$

„$\Longleftarrow$“: Sei $\omega \in \mathcal{E}^{(n)}(M)$ ohne Nullstellen. Da $\dim(\Lambda^n \mathrm{T}^* M_p) = 1$ ist, folgt für $\alpha \in \Lambda^n \mathrm{T}M_p^*$, dass es genau ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\alpha = \lambda \omega_p,$$

denn (ω_p) ist dann eine Basis von $\Lambda^n \mathrm{T}M_p^*$.

Sei nun $\mathfrak{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ eine Basis von $\mathrm{T}M_p$ und $(\alpha^1, \ldots, \alpha^n)$ die dazu duale Basis von $\mathrm{T}M_p^*$. Wir nennen $\mathfrak{B}$ positiv orientiert, wenn für $\alpha := \alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^n \in \Lambda^n \mathrm{T}M_p^*$ gilt: Ist $\alpha = \lambda \omega_p$, so ist $\lambda > 0$. Das definiert tatsächlich eine Orientierung σ_p auf $\mathrm{T}M_p$, denn ist für eine weitere Basis $\tilde{\mathfrak{B}} = (f_1, \ldots, f_n)$ der Übergang zu $\mathfrak{B}$ durch eine Matrix $S = (s^i_j) \in \mathrm{GL}_n \mathbb{R}$ gegeben, $f_j = s^i_j e_i$ $(j = 1, \ldots, n)$, so gilt für die duale Basis $(\beta^1, \ldots, \beta^n)$, dass $\beta^i = t^i_j \alpha^j$ ist mit $(t^i_j) =: T = S^{-1}$. Es folgt

$$\beta = \beta^1 \wedge \cdots \wedge \beta^n = \det(T)\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^n = \det(T)\alpha.$$

Das zeigt: $\tilde{\mathfrak{B}}$ ist genau dann auch positiv orientiert, wenn $\det(S) > 0$ ist.

Es ist auch $\sigma = (\sigma_p)_{p \in M}$ dann tatsächlich eine Orientierung auf M, denn ist $\varphi\colon U \to V$ eine Karte um p, so dass

$$\omega | U = f(x) \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n,$$

sagen wir, $f(x_0) > 0$, so ist auch $f(x) > 0$ auf einer Umgebung von x_0, sagen wir $\tilde{V} \subseteq V$, und damit $(\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p)$ positiv orientiert, für alle $q \in \tilde{U} = \varphi^{-1}(\tilde{V})$. Damit ist $\mathrm{D}\varphi_q\colon (\mathrm{T}M_q, \sigma_q) \to \mathbb{R}^n$ orientierungserhaltend für alle $q \in U$, denn $\mathrm{D}\varphi_q(\frac{\partial}{\partial x^j}|_q) = e_j$ (mit der kanonischen Basis $(e_1, \ldots, e_n)$ von $\mathbb{R}^n$). Es ist also M orientierbar. □

(B.18) Kommentar.

(a) Ein Geradenbündel $\pi\colon L \to M$ über M ist genau dann trivial, $L \cong \underline{\mathbb{R}}$, wenn es einen nullstellenfreien Schnitt hat (Übung: $s \in \Gamma(L)$ ohne Nullstelle $\Longrightarrow$ $\underline{\mathbb{R}} \to L$, $(p, \lambda) \to \lambda \cdot s(p)$ ist ein Isomorphismus). M ist also genau dann orientierbar, wenn ihr, so genanntes **kanonische Bündel** $\Lambda^n \mathrm{T}^* M$ trivial ist.

(b) Eine Orientierung auf einem (endlich-dimensionalen) $\mathbb{R}$-Vektorraum V kann man also als eine der beiden Zusammenhangskomponenten von

$$\Lambda^n V^* \setminus \{0\} \cong \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (n \in \mathbb{N})$$

betrachten. Ist M zusammenhängend und orientierbar, so hat also mit $L := \Lambda^n \mathrm{T}^* M$ und dem Nullschnitt $s\colon M \to L$ die Mannigfaltigkeit $L \setminus s(M)$ zwei Zusammenhangskomponenten. (Im nicht orientierbaren Fall ist sie zusammenhängend, Übung.)

(B.19) Definition. Sei M^n eine Mannigfaltigkeit und $\omega \in \mathcal{E}^{(n)}(M)$ ohne Nullstellen. Dann nennt man ω eine **Volumenform auf M**.

(B.20) Kommentar. Zwei Volumenformen ω_1, ω_2 induzieren nach dem Beweis von (B.17) also genau dann die gleiche Orientierung σ auf M, wenn für $f\colon M \to \mathbb{R}$, so dass

$$\omega_2 = f\omega_1 \tag{$*$}$$

ist, gilt: $f(p) > 0$, für alle $p \in M$. Da jede Orientierung von einer Volumenform nach (B.17) auch induziert wird (man nehme zu σ das ω, welches in (B.17, „$\Longrightarrow$“) konstruiert wurde), kann man eine Orientierung auf M auch als eine Äquivalenzklasse von Volumenformen $[\omega]$ betrachten (mit $\omega_1 \sim \omega_2$, genau wenn $(*)$ gilt).

(B.21) Bemerkung. Sei M^n eine kompakte Mannigfaltigkeit, $\omega \in \mathcal{E}^{(n)}(M)$ eine Volumenform und σ die von ω induzierte Orientierung auf M. Dann gilt auf (M, σ):

$$\int_M \omega > 0.$$

Beweis. Ist $\mathfrak{A} = (\varphi_i\colon U_i \to V_i)_{i \in I}$ ein Orientierungsatlas von M, so ist mit

$$\omega | U_i = f_i(x) \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$$

offenbar $f_i > 0$, da ω_p und $dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n|_p$ die gleiche Orientierung σ_p auf TM_p induzieren. Ist nun $(\lambda_i)_{i\in I}$ eine Teilung der Eins mit $\operatorname{supp}(\lambda_i) \subseteq U_i$, $\forall i \in I$, so ist auch $\lambda_i f_i \geq 0$ und damit

$$\int_M \omega_i = \int_{V_i} \underbrace{\lambda_i \circ \varphi_i^{-1}(x) f_i(x)}_{\geq 0} \, d\mathcal{L}(x) \geq 0 \quad (\text{mit } \omega_i := \lambda_i \omega)$$

(Wir dürfen hier $A = I$ und $\iota = \mathbb{1}$ annehmen, da $\operatorname{supp}(\lambda_i) \subseteq M$ stets kompakt ist, weil M kompakt ist.) Es folgt also zunächst

$$\int_M \omega = \sum_{i\in I} \int_M \omega_i \geq 0.$$

Zu $p \in M$ gibt es aber ein $i \in I$ mit $p \in U_i$ und $\lambda_i(p) > 0$. Da auch $f_i(x_0) > 0$ (mit $x_0 = \varphi_i(p)$) ist, ist

$$\lambda_i \circ \varphi_i^{-1}(x) f_i(x) > 0$$

auf einer ganzen Umgebung von x_0 und damit sogar

$$\int_M \omega_i > 0$$

und damit auch $\int_M \omega > 0$. □

(B.22) Kommentar.

(a) Ist $\omega \in \mathcal{E}^{(n)}(M)$ eine Volumenform, so nennt man (M, ω) auch eine **Volumen-Mannigfaltigkeit**. Ist M kompakt, so ist ihr **Volumen** dann (bzgl. der induzierten Orientierung)

$$\operatorname{Vol}(M) := \int_M \omega \in (0, \infty).$$

(b) Sei (M, ω) eine Volumen-Mannigfaltigkeit und $A \subseteq M$ eine Borel-Menge (d.i. ein Element in der Borelschen σ-Algebra von M). Ist $\mathfrak{A} = (\varphi_i \colon U_i \to V_i)_{i\in I}$ ein Orientierungsatlas und $(\lambda_i)_{i\in I}$ eine untergeordnete Teilung der Eins, so setzt man für eine n-Form $\alpha \in \mathcal{E}^{(n)}(M)$ mit $\operatorname{supp}(\alpha) \subseteq U_i$:

$$\int_A \alpha := \int_{\varphi_i(A)\cap V_i} f(x) d\mathcal{L}(x) \in [0, \infty],$$

wenn $f \geq 0$ ist. Für eine beliebige n-Form $\alpha \in \mathcal{E}^{(n)}(M)$ mit $\alpha = f\omega$ und $f \geq 0$ sei dann

$$\int_A \alpha := \sum_{i\in I} \underbrace{\int_A \lambda_i \alpha}_{\geq 0} \in [0, \infty].$$

Man setzt nun $\mu \colon \mathfrak{B}(M) \to [0, \infty]$ ($\mathfrak{B}(M)$ die Borel-Algebra von M),

$$\mu(A) := \int_A \omega$$

μ ist dann ein Maß und macht $(M, \mathcal{L}_M, \mu)$ zu einem Maßraum. Für jede glatte Funktion (mit kompakten Träger) gilt dann (Übung):

$$\int_M f d\mu = \int_M f\omega.$$

(B.23) Definition. Sei V ein reeller Vektorraum und $p \in \mathbb{N}$. Identifiziert man $\Lambda^p V^*$ kanonisch mit $\mathrm{Alt}_p(V)$, so nennt man für jedes $v \in V$ die Abbildung

$$\iota_v \colon \Lambda^p V^* \to \Lambda^{p-1} V^*$$

gegeben durch

$$(\iota_v \omega)(w_1, \dots, w_{p-1}) := \omega(v, w_1, \dots, w_{p-1})$$

die Kontraktion von ω durch v (oder die **innere Multiplikation von ω mit v**).

(B.24) Kommentar.

(a) Tatsächlich ist $\iota_v \omega$ $(p-1)$-linear und alternierend, wenn ω p-linear und alternierend ist. Es ist auch ι_v tatsächlich linear und schließlich auch die Zuordnung

$$\iota \colon V \to \mathrm{Hom}(\Lambda^p V^*, \Lambda^{p-1} V^*),\ v \mapsto \iota_v$$

ist linear.

(b) Ist nun M eine Mannigfaltigkeit, $\omega \in \mathcal{E}^{(n)}(M)$ und $X \in \mathfrak{X}(M)$, so kann man also ω mit X zu einer $(n-1)$-Form $\iota_X \omega$ kontrahieren. Dann ist $\mathrm{d}(\iota_X \omega)$ wieder eine n-Form. Ist nun $\omega \in \mathcal{E}^{(n)}(M)$ eine Volumenform, so gibt es ein eindeutig bestimmtes glattes $f \colon M \to \mathbb{R}$ mit

$$\mathrm{d}(\iota_X \omega) = f \cdot \omega,$$

und dieses f hängt linear von X ab. Wir setzen:

(B.25) Definition. Sei (M, ω) eine Volumen-Mannigfaltigkeit. Dann heißt für jedes glatte Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ die Funktion $f =: \mathrm{div}_\omega(X)$ mit

$$\mathrm{d}\iota_X \omega = \mathrm{div}_\omega(X) \cdot \omega$$

die **Divergenz von X**.

(B.26) Bemerkung. Sei (M, ω) eine Volumen-Mannigfaltigkeit und $x \colon U \to V \subseteq \mathbb{H}^n$ eine Karte. Ist dann $\omega|U = f(x)\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$ und $\xi^i \in \mathcal{E}(V)$ mit $X|U = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, so gilt für $\mathrm{div}(X) \colon M \to \mathbb{R}$ bzgl. der Karte x:

$$\mathrm{div}(X) = \frac{1}{f} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}(f \xi^i).$$

(B.27) Kommentar.

(a) Das zeigt (erneut), dass $\mathrm{div} \colon \mathfrak{X}(M) \to \mathcal{E}(M)$ ein lokaler (linearer) Operator ist.

(b) Ist bzgl. einer Karte x die Volumenform $\omega = \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$, so stimmt div mit der üblichen Divergenz von Vektorfeldern $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$ auf offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ überein,

$$\mathrm{div}(\xi) = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^i}.$$

Beweis. Schreiben wir $\iota_X \omega | U$ als

$$\iota_X \omega = (-1)^{i-1} \eta_i \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$$

mit glatten Funktionen $\eta_i \in \mathcal{E}(V)$ $(i = 1, \ldots, n)$, so ist

$$\begin{aligned}
\eta_i &= (-1)^{i-1}\iota_X\omega\Big(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \widehat{\frac{\partial}{\partial x^i}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big) \\
&= (-1)^{i-1}\omega\Big(X, \frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \widehat{\frac{\partial}{\partial x^i}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big) \\
&= (-1)^{i-1} f \cdot \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n \Big(\xi^j \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \widehat{\frac{\partial}{\partial x^i}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big) \\
&= (-1)^{i-1} f \cdot (-1)^{i-1}\xi^i \underbrace{\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n \Big(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big)}_{=1} \\
&= f\xi^i.
\end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\iota_X\omega|U &= \mathrm{d}\big((-1)^{i-1}\eta_i \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n\big) \\
&= (-1)^{i-1}\frac{\partial \eta_i}{\partial x^j}\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n \\
&= \frac{\partial \eta_i}{\partial x^i}\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n \\
&= \frac{1}{f}\frac{\partial \eta_i}{\partial x^i}(f\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n) \\
&= \frac{1}{f}\frac{\partial \eta_i}{\partial x^i} \cdot \omega,
\end{aligned}$$

also:

$$\operatorname{div}(X)|U = \frac{1}{f}\frac{\partial(f\xi^i)}{\partial x^i}. \qquad \square$$

(B.28) Satz. *Sei (M, ω) eine kompakte Volumen-Mannigfaltigkeit und X ein glattes Vektorfeld auf M. Dann gilt:*

$$\int_M \operatorname{div}(X)\omega = \int_{\partial M} \iota_X\omega.$$

Beweis. Es ist nach Definition

$$\mathrm{d}(\iota_X\omega) = \operatorname{div}(X)\omega,$$

also nach Stokes

$$\int_M \operatorname{div}(X)\omega = \int_M \mathrm{d}(\iota_X\omega) = \int_{\partial M} \iota_X\omega. \qquad \square$$

(B.29) Beispiel. Für $M = \mathbb{R}^n$ (und dann auch für jede offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$) ist

$$\omega := \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$$

eine Volumenform. Sie wird als die **Standard-Volumenform auf** $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.

Ist $X\colon U \to \mathbb{R}^n$, $X = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$ ein glattes Vektorfeld auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$, so ist seine Divergenz bzgl. der Standard-Volumenform also gegeben durch

$$\operatorname{div}(X) = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^i}.$$

(B.30) Erinnerung.

(a) Eine kompakte Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ hat **glatten Rand**, wenn es für jedes $x \in \partial K$ eine offene Umgebung $U \subseteq K$ von x, ein offenes $V \subseteq \mathbb{H}^n$ und einen Diffeomorphismus $\varphi\colon U \to V$ gibt. Überdeckt man ∂K mit (endlich-vielen) solchen Karten und nimmt noch $\varphi_0 = \mathbb{1}\colon K \setminus \partial K \to K \setminus \partial K$, so wird K offenbar zu einer Mannigfaltigkeit mit Rand. Wir orientieren sie mit der Einschränkung der Standard-Volumenform auf $\mathbb{R}^n$.

(b) $0 \leq k \leq n$ $\big($sogar $k \in [0,n]\big)$ ist erlaubt. Das k-dimensionale Hausdorff-Maß $\mathcal{H}^{k,n}$ auf der Borel-Algebra von $\mathbb{R}^n$ (und durch Einschränkung damit auf jeder Borel-Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$) misst den k-dimensionalen Flächeninhalt einer Borel-Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{H}^{k,n}\colon \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty].$$

Ist $V \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, $\psi\colon V \to \mathbb{R}^n$ eine **reguläre Parametrisierung**, d.h.: ψ ist eine injektive Immersion, so gilt für jede $\mathcal{H}^k$-integrable Funktion $f\colon M \to \mathbb{R}$, $M = \psi(V)$, dass $g\colon V \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$g(u) := J_\psi(u) \cdot f \circ \psi(u)$$

$\mathcal{L}^k$-integrabel auf V ($\mathcal{L}^k\colon \mathcal{L}(V) \to [0,\infty]$ das Lebesgue-Maß auf V) und es gilt die sogenannte **Flächenformel:**

$$\int_M f(x)\mathrm{d}\mathcal{H}^k(x) = \int_V g(u)\mathrm{d}\mathcal{L}(u).$$

Hierbei ist $J_\psi\colon V \to \mathbb{R}$ die **Jacobische von $\boldsymbol{\psi}$**, d.i.:

$$J_\psi(u) := \sqrt{\det\big(g_{ij}(u)\big)_{i,j}}$$

mit

$$g_{ij}(u) := \Big\langle \frac{\partial \psi}{\partial u^i}, \frac{\partial \psi}{\partial u^j} \Big\rangle(u) \quad (1 \leq i,j \leq k).$$

Für $g(u) = \big(g_{ij}(u)\big)$ gilt also

$$g(u) = {}^t\mathrm{D}\psi(u) \cdot \mathrm{D}\psi(u).$$

$f\colon M \to \mathbb{R}$ ist z.B. dann $\mathcal{H}^k$-integrabel, wenn f glatt ist und kompakten Träger hat.

(c) Ist $M \subseteq \mathbb{R}^n$ der Rand eines Kompaktums K mit glatten Rand, $M = \partial K$, so gibt es ein eindeutig bestimmtes äußeres Einheits-Normalenfeld $\nu\colon M \to \mathbb{R}^n$ (d.i. ein globaler Schnitt im $\mathrm{T}\mathbb{R}^n|M$), d.h.: $\nu(p) \in \mathrm{T}K_p^{\text{außen}}$, $\|\nu(p)\| = 1$ (bzgl. des Standard-Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle_p$ auf $\mathrm{T}K_p \cong \mathbb{R}^n$).

(B.31) Satz (Gauß). *Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glatten Rand und X ein glattes Vektorfeld auf K. Ist $\nu\colon \partial K \to \mathbb{R}^n$ das äußere Einheits-Normalenfeld entlang ∂K, so gilt:*

$$\int_K \mathrm{div}(X)\mathrm{d}\mathcal{L} = \int_{\partial K} \langle X, \nu\rangle \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}.$$

(B.32) Lemma. *Seien $w_1, \ldots, w_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathrm{Mat}\big(n \times (n-1), \mathbb{R}\big)$ die Matrix, die $w_1, \ldots, w_{n-1}$ als Spalten hat. Für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei $A^i \in \mathrm{Mat}(n-1, \mathbb{R})$ die Untermatrix von A, bei der die i Zeile gestrichen ist und $x^i := \det(A^i) \in \mathbb{R}$. Wir setzen*

$$v := w_1 \times \cdots \times w_{n-1} := (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n.$$

Dann gilt:

(a) *v steht senkrecht auf w_j, $j = 1, \dots, n-1$;*

(b) *es ist* $\det({}^tAA) \geq 0$ *und* $(w_1, \dots, w_{n-1})$ *ist linear unabhängig, genau wenn*

$$J(w_1, \dots, w_{n-1}) := \sqrt{\det({}^tAA)} > 0$$

ist.

(c) *Bzgl. des Standard-Skalarproduktes auf $\mathbb{R}^n$ ist*

$$\|v\| = J(w_1, \dots, w_{n-1})$$

und für $(w_1, \dots, w_{n-1})$ linear unabhängig ist $(v, w_1, \dots, w_{n-1})$ eine positiv orientierte Basis von $\mathbb{R}^n$.

Beweis von (B.31)**.** (a) Es reicht den Satz für ein Vektorfeld X zu beweisen, dessen Träger ganz in einer Karte $\varphi\colon U \to \tilde{V} \subseteq \mathbb{H}$ liegt, denn beide Seiten in (B.31) sind linear in X. Mit einer Teilung der Eins kann man dann nämlich X in eine Summe von solchen Vektorfeldern $X_0, \dots, X_r$ zerlegen, die ihren Träger in einer Karte haben,

$$X = X_0 + \cdots + X_r.$$

Gilt der Satz nun für X_i ($i = 0, \dots, r$), so auch für X:

$$\int_K \operatorname{div}(X) \mathrm{d}\mathcal{L} = \sum_{i=0}^{r} \int_K \operatorname{div}(X_i) \mathrm{d}\mathcal{L} = \sum_{i=0}^{r} \int_{\partial K} \langle X_i, \nu \rangle \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\partial K} \langle X, \nu \rangle \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}.$$

(b) Ist daher $\varphi\colon U \to \tilde{V} \subseteq \mathbb{H}^n$ eine positiv-orientierte Karte (evtl. $\subseteq -\mathcal{H}^1$ bei $n = 1$), so ist $\psi := \varphi^{-1}|\partial\tilde{V} \to U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V := \partial\tilde{V} \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ offen, eine reguläre Parametrisierung. Setzen wir nun $\omega := \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n \in \mathcal{E}^{(n)}(U)$ und

$$\alpha^i := (-1)^{i-1} \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n \in \mathcal{E}^{(n-1)}(U)$$

($i = 1, \dots, n$), so ist mit $X = (\xi^1, \dots, \xi^n) \in \mathfrak{X}(U)$ $\big($vgl. Beweis von (B.26)$\big)$:

$$\iota_X \omega = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \alpha^i =: \alpha.$$

Wegen (B.27) ist dann

$$\int_K \operatorname{div}(X) \mathrm{d}\mathcal{L} = \int_K \operatorname{div}(X) \cdot \omega = \int_K \mathrm{d}(\iota_X \omega) = \int_{\partial K} \iota_K \omega = \int_{\partial K} \alpha = \int_V \psi^* \alpha.$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned}
\psi^*(\alpha^i) &= (-1)^{i-1} \mathrm{d}(x^1 \circ \psi) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\widehat{(x^i \circ \psi)} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}(x^n \circ \psi) \\
&= (-1)^{i-1} \frac{\partial \psi^1}{\partial u^{j_1}} \mathrm{d}u^{j_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{\frac{\partial \psi^i}{\partial u^{j_i}} \mathrm{d}u^{j_i}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial \psi^n}{\partial u^{j_n}} \mathrm{d}u^{j_n} \\
&= (-1)^{i-1} \det(A^i) \mathrm{d}u^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u^{n-1},
\end{aligned}$$

wo $A(u) \in \operatorname{Mat}(n-1, n)$ nun die Jacobi-Matrix von ψ ist,

$$A = \mathrm{D}\psi(u).$$

Da die Spalten $\frac{\partial\psi}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial\psi}{\partial u^{n-1}}$ von A den Tangentialraum $\mathrm{T}M_x \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $M = \partial K$ aufspannen, ist dann wegen $J_\psi(u) = \sqrt{\det {}^t A(u) \cdot A(u)} = J\left(\frac{\partial\psi}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial\psi}{\partial u^{n-1}}\right)$:

$$\frac{\partial\psi}{\partial u^1} \times \dots \times \frac{\partial\psi}{\partial u^{n-1}} = J_\psi(u) \cdot \nu\big(\psi(u)\big),$$

also

$$\psi^*(\alpha^i) = J_\psi \cdot \nu^i \circ \psi \cdot \mathrm{d}u^1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}u^{n-1}. \tag{$*$}$$

Deshalb ist

$$\begin{aligned}\int_K \operatorname{div}(X)\mathrm{d}\mathcal{L} &= \sum_{i=1}^n \int_V J_\psi(\xi^i \circ \psi) \cdot (\nu^i \circ \psi)\mathrm{d}\mathcal{L}(u) = \int_V \langle \xi, \nu\rangle \circ \psi \cdot J_\psi \mathrm{d}\mathcal{L}(u) \\ &\overset{\text{(FF)}}{=} \int_{\partial K} \langle X, \nu\rangle \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}.\end{aligned}$$ □

(B.33) Kommentar.

(a) Ist ω eine Volumenform auf einer Mannigfaltigkeit M, so notiert man ω häufig auch als $\mathrm{d}V$, weil für das Volumen $V = \operatorname{vol}(M)$ im kompakten Fall dann gilt:

$$V = \int_M \mathrm{d}V$$

und nennt $\mathrm{d}V$ das „infinitesimale Volumenelement“ auf M. Das ist etwas verwirrend, weil zumindest im kompakten Fall (und M ohne Rand) ω definitiv nicht exakt ist, weil einerseits $V = \int \omega > 0$ ist nach (B.21) und andererseits nach Stokes für eine exakte Form $\mathrm{d}\alpha \in \mathcal{E}^{(n)}(M)$, $\alpha \in \mathcal{E}^{(n-1)}(M)$, gilt:

$$\int_M \mathrm{d}\alpha = 0.$$

(b) Ist $K \subseteq \mathbb{R}^n$ Kompaktum mit glatten Rand $M = \partial K$ und $\varphi\colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ eine positiv orientierte Karte auf M, so setzen sich die Formen,

$$\omega^\varphi := \varphi^*\big(J_\psi(u)\mathrm{d}u^1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}u^{n-1}\big)$$

mit $\psi = \varphi^{-1}$ und $J_\psi\colon V \to \mathbb{R}_+$ der Jacobischen von ψ, zu einer globalen Volumenform $\alpha \in \mathcal{E}^{(n-1)}(M)$ zusammen. Nach dem Beweis von (B.31) ist nämlich

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \nu^i \iota^*(\alpha_i),$$

wenn man $(*)$ mit $\nu^i \circ \psi$ multipliziert, aufsummiert und $\|\nu\| = 1$ verwendet, und wo $\iota\colon M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ die Inklusion bezeichnet.

Diese Volumenform wird klassischer Weise als $\mathrm{d}S$ notiert und als „infinitesimales Oberflächenelement“ bezeichnet. Mit diesen Notationen liest sich der Satz von Gauß für glatte Vektorfelder auf K dann so:

$$\int_K \operatorname{div}(X)\mathrm{d}V = \int_{\partial K} \langle X, \nu\rangle \mathrm{d}S.$$

(B.34) Vorbereitung.

(a) Sei nun $M \subseteq \mathbb{R}^3$ eine orientierte Untermannigfaltigkeit (evtl. mit Rand). Dann gibt es zu jedem $p \in M$ eine eindeutig bestimmte Einheits-Normale $\nu_p \in \mathbb{R}^3$, also $\nu_p \perp \mathrm{T}M_p$ und $\|\nu_p\| = 1$ (bzgl. des kanonischen Skalarproduktes auf $\mathbb{R}^3$), so dass für eine positiv orientierte Basis (e_1, e_2) von $\mathrm{T}M_p$ gilt: (ν_p, e_1, e_2) ist positiv orientierte Basis von $\mathbb{R}^3$. Die Zuordnung $M \to \mathbb{R}^3$, $p \mapsto \nu_p$, ist dann ein glattes Vektorfeld auf $\mathbb{R}^3$ entlang M. Bzgl. einer positiv orientierten lokalen Parametrisierung $\psi\colon V \to U \subseteq M \subseteq \mathbb{R}^3$ wäre z.B.

$$\nu \circ \psi = \frac{\frac{\partial \psi}{\partial u^1} \times \frac{\partial \psi}{\partial u^2}}{\|\frac{\partial \psi}{\partial u^1} \times \frac{\partial \psi}{\partial u^2}\|}$$

und damit glatt (Übung). Wir nennen ν das positiv orientierte Einheitsnormalenfeld an M.

(b) Sei nun $M \subseteq \mathbb{R}^3$ wie unter (a) und $U \subseteq \mathbb{R}^3$ eine offene Umgebung von M. Für ein glattes Vektorfeld $X = (\xi^1, \xi^2, \xi^3)\colon U \to \mathbb{R}^3$ ist dessen **Rotation** erklärt durch $\mathrm{rot}(X)\colon U \to \mathbb{R}^3$

$$\mathrm{rot}(X) = \Big(\frac{\partial \xi^3}{\partial x^2} - \frac{\partial \xi^2}{\partial x^3}, \frac{\partial \xi^1}{\partial x^3} - \frac{\partial \xi^3}{\partial x^1}, \frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} - \frac{\partial \xi^1}{\partial x^2}\Big) \quad (= \text{“}\vec{\nabla} \times X\text{„}),$$

wobei $\vec{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^3})$. Setzen wir $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathcal{E}^{(2)}(U)$,

$$\beta_1 := \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3,\ \beta_2 := \mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^1,\ \beta_3 := \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2,$$

so erhalten wir für das infinitesimale Flächenelement $\mathrm{d}S$ auf M, welches bzgl. einer orientierten Karte $\varphi\colon U \to V \subseteq \mathbb{H}^2$ gegeben ist durch

$$\mathrm{d}S = J_\psi(u)\mathrm{d}u^1 \wedge \mathrm{d}u^2$$

mit $\psi = \varphi^{-1}$, dass

$$\mathrm{d}S = \sum_{i=1}^{3} \nu^i \beta^i \in \mathcal{E}^{(2)}(M)$$

⌜$\Longrightarrow \beta^i = \nu^i \mathrm{d}S$ auf M ⌟

ist. $\big($Eigentlich $\sum_i \nu^i \iota^*(\beta^i)$, wo $\iota\colon M \to \mathbb{R}^3$ die Inklusion ist, die wir aber unterdrücken.$\big)$ Setzen wir nun $\alpha^i := \mathrm{d}x^i \in \mathcal{E}^{(1)}(U)$ und

$$\alpha := \sum_{i=1}^{3} \xi^i \alpha^i \in \mathcal{E}^{(1)}(U),$$

so gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\alpha &= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^i \\ &= \Big(\frac{\partial \xi^3}{\partial x^2} - \frac{\partial \xi^2}{\partial x^3}\Big)\mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 + \cdots + \Big(\frac{\partial \xi^3}{\partial x^1} - \frac{\partial \xi^1}{\partial x^2}\Big)\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \\ &= \sum_{i=1}^{3} \mathrm{rot}(X)^i \cdot \beta^i. \end{aligned}$$

Das zeigt, dass die Funktion $\langle \mathrm{rot}(X), \nu \rangle\colon M \to \mathbb{R}$, nur von $X|M$ abhängt, denn:

$$\langle \mathrm{rot}(X), \nu \rangle \mathrm{d}S = \sum_{i=1}^{3} \mathrm{rot}(X)^i \cdot \underbrace{\nu^i \mathrm{d}S}_{=\beta^i} = \mathrm{d}\alpha$$

auf M. Man braucht nämlich nur α auf M zu kennen $\big($eigentlich nur $\iota^*(\alpha)$, s.o.$\big)$ und dieses dann auf M differenzieren. Der Koeffizient vor $\mathrm{d}S$ ist dann $\langle \mathrm{rot}(X), \nu \rangle$.

(c) Ist nun $M \subseteq \mathbb{R}^3$ orientierte Untermannigfaltigkeit mit Rand $C = \partial M$, so sei für jedes $p \in C$ dann $\tau_p \in \mathrm{T}C_p$ positiv orientierte Einheits-Tangentenvektor von C an p. Ist $\psi\colon I \to C \subseteq \mathbb{R}^3$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, eine reguläre und orientierungserhaltende Parametrisierung, so ist

$$\tau \circ \psi(t) = \frac{\dot\psi(t)}{\|\dot\psi(t)\|},$$

also

$$\dot\psi = \|\dot\psi\| \cdot (\tau \circ \psi). \tag{$*$}$$

Beachte auch, dass $t \mapsto \|\dot\psi(t)\|$ in diesem Fall die Jacobische von ψ ist:

$$J_\psi(t) = \sqrt{\det\bigl({}^t\dot\psi(t) \cdot \dot\psi(t)\bigr)} = \sqrt{\sum \dot\psi^i \dot\psi^i} = \|\dot\psi\|.$$

(B.35) Satz (klassischer Satz von Stokes). *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ eine kompakte, orientierte Untermannigfaltigkeit mit Rand, $\nu\colon M \to \mathbb{R}^3$ ihr positives Einheitsnormalenvektorfeld und $\tau\colon \partial M \to \mathbb{R}^3$ ihr positives Einheitstangentenfeld auf dem Rand. Für jedes glatte Vektorfeld X auf M gilt dann:*

$$\int_M \langle \mathrm{rot}(X), \nu \rangle \mathrm{d}\mathcal{H}^2 = \int_{\partial M} \langle X, \tau \rangle \mathrm{d}\mathcal{H}^1.$$

Beweis. Wir haben schon gesehen, dass mit dem allgemeinen Satz von Stokes

$$\int_M \langle \mathrm{rot}(X), \nu \rangle \mathrm{d}\mathcal{H}^2 = \int_M \langle \mathrm{rot}(X), \nu \rangle \mathrm{d}S = \int_M \mathrm{d}\alpha = \int_{\partial M} \alpha$$

ist, wo

$$\alpha = \sum_{i=1}^3 \xi^i \mathrm{d}x^i \in \mathcal{E}^{(1)}(M)$$

ist. Mit einem üblichen Argument, das eine Teilung der Eins benutzt, dürfen wir annehmen, dass X seinen Träger im Definitionsgebiet einer positiv orientierten Karte $\varphi\colon U \to V \subseteq \mathbb{H}^2$ hat und wir nennen $\psi\colon I \to C$ mit $\psi := \varphi^{-1}|\partial V$, $I = \partial V$. Dann ist

$$\psi^*(\mathrm{d}x^i) = \mathrm{d}(x^i \circ \psi) = \frac{\mathrm{d}\psi^i}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}t = \dot\psi^i \mathrm{d}t,$$

also

$$\begin{aligned}
\psi^*(\alpha) &= \sum_{i=1}^3 \xi^i \circ \psi \cdot \psi^*(\mathrm{d}x^i) = \sum_{i=1}^3 \xi^i \circ \psi \cdot \dot\psi^i \mathrm{d}t \\
&= \sum_{i=1}^3 (\xi^i \circ \psi) \cdot (\tau^i \circ \psi) \cdot \|\dot\psi\| \mathrm{d}t \qquad \bigl(\text{wegen } (*)\bigr) \\
&= \langle X, \tau \rangle \circ \psi J_\psi \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Es folgt also:

$$\begin{aligned}
\int_M \langle \mathrm{rot}(X), \nu \rangle \mathrm{d}\mathcal{H}^2 &= \int_{\partial M} \alpha = \int_I \psi^*(\alpha) = \int_I \langle X, \tau \rangle \circ \psi \cdot J_\psi \mathrm{d}t \\
&= \int_{\partial M} \langle X, \tau \rangle \mathrm{d}\mathcal{H}^1.
\end{aligned}$$

□

(B.36) Kommentar.

(a) Auch hier setzen sich die Elemente $\|\dot\psi(t)\|\mathrm{d}t \in \mathcal{E}^{(1)}(I)$ zu einer globalen 1-Form $\mathrm{d}s \in \mathcal{E}^{(1)}(C)$ zusammen, denn es ist

$$\mathrm{d}s = \sum_{i=1}^{3} \tau^i \mathrm{d}x^i,$$

weil

$$\psi^*(\mathrm{d}x^i) = \dot\psi^i \mathrm{d}t \Longrightarrow \psi^*\Big(\sum_i \tau^i \mathrm{d}x^i\Big) = \sum_i \frac{\dot\psi^i}{\|\dot\psi\|}\psi^*(\mathrm{d}x^i)$$

$$= \sum_i \frac{\dot\psi^i}{\|\dot\psi\|} \cdot \dot\psi^i \mathrm{d}t = \|\dot\psi\|\mathrm{d}t.$$

Es heißt das **infinitesimale Bogenelement** von C.

(b) In Termen der induzierten Volumenelemente $\mathrm{d}S \in \mathcal{E}^{(2)}(M)$ und $\mathrm{d}s \in \mathcal{E}^{(1)}(C)$, $C = \partial M$, liest sich der klassische Satz von Stokes für glatte Vektorfelder $X \in \mathfrak{X}(M)$ also dann so:

$$\int_M \langle \mathrm{rot}(X), \nu\rangle \mathrm{d}S = \int_{\partial M} \langle X, \tau\rangle \mathrm{d}s.$$

(B.37) Erinnerung. Ist X ein topologischer Raum, so heißt ein Teilraum $A \subseteq X$ ein **Retrakt von X**, wenn es eine stetige Abbildung $r\colon X \to A$ mit $r(a) = a$, für alle $a \in A$, gibt. Eine solche Abbildung heißt dann eine **Retraktion**. Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit und $N \subseteq M$ eine Untermannigfaltigkeit, so betrachten wir zunächst nur glatte Retraktionen $r\colon M \to N$.

(B.38) Satz (Retraktionssatz). *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es keine Retraktion von $\mathbb{B}^n$ auf $\mathbb{S}^{n-1} \subseteq \mathbb{B}^n$.*

Beweis. Da $\mathbb{S}^{n-1}$ orientierbar ist, gibt es eine Volumenform $\omega \in \mathcal{E}^{(n-1)}(\mathbb{S}^{n-1})$, z.B. $\omega = \mathrm{d}S$, wenn $\mathrm{d}S$ die von $\mathbb{B}^n$ induzierte Standard-Volumenform auf $\mathbb{S}^{n-1}$ ist (vgl. (B.33,b)). Da $\mathbb{S}^{n-1}$ auch kompakt ist, ist bzgl. der von ω induzierten Orientierung nach (B.21) einerseits

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \omega > 0.$$

Andererseits ist natürlich $\mathrm{d}\omega = 0$, weil jede n-Form auf $\mathbb{S}^{n-1}$ gleich Null sein muss, und daher wegen (4.67) auch

$$\mathrm{d}(r^*\omega) = r^*(\mathrm{d}\omega) = 0,$$

wenn $r\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$ (doch) eine (glatte) Retraktion ist. Da für die Inklusion $i\colon \mathbb{S}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{B}^n$ aber $r \circ i = \mathbb{1}$ ist, ist nach dem Satz von Stokes

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \omega = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} (r\circ i)^*\omega = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} i^*(r^*\omega) \overset{\text{Stokes}}{=} \int_{\mathbb{B}^n} \mathrm{d}(r^*\omega) = \int_{\mathbb{B}^n} 0 = 0. \qquad \square$$

(B.39) Satz (Fixpunktsatz von Brouwer). *Ist $\Phi\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ eine glatte Abbildung, so hat Φ einen Fixpunkt, d.h. es gibt $\xi \in \mathbb{B}^n$ mit $\Phi(\xi) = \xi$.*

Beweis. Angenommen $\Phi\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ hätte keinen Fixpunkt, also $\Phi(p) \neq p$, $\forall p \in \mathbb{B}^n$. Sei dann $r(p) \in \mathbb{S}^{n-1}$ der Schnittpunkt des Strahls, der in $\Phi(p)$ startet und in Richtung $p - \Phi(p)$ geht, mit $\mathbb{S}^{n-1}$,

$$\{r(p)\} = \mathbb{S}^{n-1} \cap L_p,$$
$$L_p = \Phi(p) + \mathbb{R}_{>0}\cdot\big(p - \Phi(p)\big).$$

Dann ist $r\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$ auch glatt, weil r gegeben ist durch

$$r(x) = x + t(x) \cdot u(x)$$

mit

$$u(x) = \frac{x - \Phi(x)}{\|x - \Phi(x)\|}, \quad t(x) = -\langle x, u\rangle + \Big(\underbrace{\underbrace{1 - \|x\|^2}_{\geq 0} + \underbrace{\langle x, u\rangle^2}_{\geq 0}}_{\substack{\text{und mindestens einer} \\ \text{der Summanden ist positiv}}} \Big)^{1/2}.$$

Aber nach Konstruktion wäre $r(p) = p$, für alle $p \in \mathbb{S}^{n-1}$, also r eine Retraktion. Die gibt es aber nicht. $\square$

(B.40) Kommentar.

(a) (B.38) und (B.39) gelten auch für stetige Abbildungen. Ist etwa in (B.39) $\Phi\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ nur stetig, so kann man Φ nach dem **Approximationssatz von Weierstraß** gleichmäßig (bzgl. der euklidischen Norm) durch glatte Funktionen approximieren (sogar durch Polynome), da $\mathbb{B}^n$ kompakt ist. Sei daher $f_n\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ glatt und $\|f_n - \Phi\| \to 0$ (in der Supremumsnorm $\|f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n}|f(x)|$). Ist dann $\xi_n \in \mathbb{B}^n$ ein Fixpunkt von f_n, $f_n(\xi_n) = \xi_n$, so sei $\xi \in \mathbb{B}^n$ ein Häufungspunkt von (ξ_n) und o.E.: $\lim(\xi_n) = \xi$ $\big($sonst gehe zu einer geeigneten Teilfolge von (ξ_n) über$\big)$. Aber dann ist für jedes $\varepsilon > 0$

$$\|\Phi(\xi) - \xi\| \leq \underbrace{\|\Phi(\xi) - \Phi(\xi_n)\|}_{<\varepsilon/3,\text{ da }\Phi\text{ stetig}} + \overbrace{\|\Phi(\xi_n) - \underbrace{f_n(\xi_n)}_{=\xi_n}\|}^{<\varepsilon/3,\text{ da }(f_n)\xrightarrow{\text{glm}}\Phi} + \underbrace{\|\xi_n - \xi\|}_{<\varepsilon/3,\text{ da }(\xi_n)\to\xi} < \varepsilon,$$

wenn $n = n(\varepsilon)$ groß genug gewählt ist. Also ist auch $\Phi(\xi) = \xi$.

(b) Wäre in (B.36) $r\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$ eine (nur stetige) Retraktion, so hätte man $\Phi\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ gleich $d \circ r$, wo $d\colon \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$ die Antipodenabbildung ist. Dann wäre Φ stetig ohne Fixpunkte, denn für $p \notin \mathbb{S}^{n-1}$ ist $\Phi(p) \neq p$, da $\Phi(p) \in \mathbb{S}^{n-1}$ ist, und für $p \in \mathbb{S}^{n-1}$ ist $\Phi(p) = -p \neq p$, da $\Phi(p) = d(p)$ in diesem Fall ist.

Anhang C.

Überlagerungstheorie

(C.1) Definition. Sei M ein topologischer Raum und $p \in M$. Auf

$$\mathcal{S}(M,p) := \{\alpha \colon I \to M \text{ stetig} : \alpha(0) = \alpha(1) = p\}$$

(mit $I := [0,1]$) definiert man eine Verknüpfung $*\colon \mathcal{S}(M,p) \times \mathcal{S}(M,p) \to \mathcal{S}(M,p)$ durch:

$$\alpha * \beta(t) := \begin{cases} \alpha(2t) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

(C.2) Definition. Zwei **geschlossene Wege** $\alpha, \beta \in \mathcal{S}(M,p)$ heißen **homotop** (rel $\{0,1\}$), wenn es eine stetige Abbildung $H\colon I \times I \to M$ gibt mit

$$\begin{aligned} H(0,s) = H(1,s) = p, &\quad \forall s \in I \\ H(t,0) = \alpha(t),\, H(t,1) = \beta(t), &\quad \forall t \in I \end{aligned}$$

$H = (h_s)_{s\in I}$, $h_s\colon I \to M$ und $h_s(t) = H(s,t)$, heißt dann eine **Homotopie von $\boldsymbol{\alpha}$ nach $\boldsymbol{\beta}$**, $H\colon \alpha \simeq \beta$.

(C.3) Kommentar.

(a) H kann man als eine Kurve in $\mathcal{S}(M,p)$ von α nach β betrachten. Die „Stetigkeit der Kurve“ wird dadurch ausgedrückt, dass H als Abbildung auf $I \times I$ stetig sein soll. (Wir haben $\mathcal{S}(M,p)$ nicht mit einer Topologie versehen.)

(b) Es ist nicht schwer zu sehen, dass $\simeq$ auf $\mathcal{S}(M,p)$ eine Äquivalenzrelation ist und auch nicht, dass sich

(C.4) Definition. Sei M ein topologischer Raum und $p \in M$. Dann heißt

$$\pi_1(M,p) := \mathcal{S}(M,p)/\simeq$$

zusammen mit der Verknüpfung

$$[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha * \beta]$$

die Fundamentalgruppe von (M,p).

(C.5) Kommentar.

(a) Es ist wieder nicht all zu schwer einzusehen, dass $\big(\pi_1(M,p), \,\cdot\,\big)$ tatsächlich eine Gruppe ist. Das neutrale Element $1 \in \pi_1(M,p)$ ist dabei die Homotopieklasse des **konstanten Weges** $c_p\colon I \to M$, $c_p(t) = p$, $\forall t \in I$,

$$[\alpha] \cdot [c_p] = [\alpha] = [c_p] \cdot [\alpha].$$

Das inverse Element zu einem gegebenen Element $\gamma = [\alpha] \in \pi_1(M,p)$ wird durch den **rückwärts durchlaufenen Weg** (eines Repräsentanten α von $\gamma \in \pi_1(M,p)$)

$$\alpha^- \colon I \to M, \quad \alpha^-(t) = \alpha(1-t)$$

(unabhängig von der Repräsentantenwahl) gegeben,

$$[\alpha] \cdot [\alpha^-] = [c_p] = [\alpha^-] \cdot [\alpha]$$

(b) $\pi_1(M,p)$ soll so etwas wie die „1-dimensionale Löcher in M“ detektieren.

(c) π_1 ist so etwas wie der Prototyp eines **Funktors in der Kategorientheorie** von einer geometrisch-topologischen Kategorie in eine algebraische Kategorie: In der Kategorie der punktierten topologischen Räume $\underline{\mathrm{Top}_0}$ sind die **Objekte** die Paare (M,p) (M topologische Raum, $p \in M$), die **Morphismen** die stetigen Abbildung $f\colon (M,p) \to (N,q)$ mit $f(p) = q$ und die **Komposition** die Hintereinanderausführung von stetigen Abbildungen: Kategorie: $\mathscr{C}$

- $\mathrm{Ob}(\mathscr{C}) = \{X\}$ (i.a. nur eine **Klasse**, keine Menge)
- $\mathrm{Mor}(X,Y)$, einer Menge; $\forall X,Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$
- $\forall X,Y,Z \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$:

$$\mathrm{Mor}(X,Y) \times \mathrm{Mor}(Y,Z) \to \mathrm{Mor}(X,Z), \quad (f,g) \mapsto gf,$$

so dass

(a) $h(gf) = (hg)f, \quad \forall f \in \mathrm{Mor}(X,Y)$, $g \in \mathrm{Mor}(Y,Z)$, $h \in \mathrm{Mor}(Z,W)\, \forall X,Y,Z,W \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$.

(b) $\forall x \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})\, \exists \mathbb{1}_X \in \mathrm{Mor}(X,X)\, \forall Y,W \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})\, \forall g \in \mathrm{Mor}(X,Y)$, $h \in \mathrm{Mor}(W,X)$:

$$g\mathbb{1}_X = g, \quad \mathbb{1}_X h = h.$$

Beispiel. $\mathscr{C}_1 = \underline{\mathrm{Top}_0}$, $\mathscr{C}_2 = \underline{\mathrm{Grp}}$, Objekte in $\mathscr{C}_2$: Gruppen, Morphismen in $\mathscr{C}_2$: Gruppenhomomorphismen, Komposition: Hintereinanderschaltung.

Ein (covarianter) **Funktor** $T\colon \mathscr{C}_1 \to \mathscr{C}_2$ ist eine Abbildung $T\colon \mathrm{Ob}(\mathscr{C}_1) \to \mathrm{Ob}(\mathscr{C}_2)$ zwischen den Objekten und den Morphismen $T^{(X,Y)}\colon \mathrm{Mor}(X,Y) \to \mathrm{Mor}\big(T(X),T(Y)\big)$, so dass gilt:

(a) $T(\mathbb{1}_X) = \mathbb{1}_{T(X)}$, $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}_1)$,

(b) $T(gf) = T(g)T(f), \quad X,Y,Z \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}_1)$, $\forall f \in \mathrm{Mor}(X,Y)$, $g \in \mathrm{Mor}(Y,Z)$.

T auf Morphismen wird oft mit $(\ )_*$ notiert, $T(f) = f_*$, also: $\mathbb{1}_* = \mathbb{1}$, $(gf)_* = g_* f_*$.

Beispiel. Ist $f\colon (M,p) \to (N,q)$ stetig, $\alpha,\beta \in \mathcal{S}(M,p)$ mit $\alpha \simeq \beta$, so ist $f \circ \alpha, f \circ \beta \in \mathcal{S}(N,q)$ und $f \circ \alpha \simeq f \circ \beta$. Man erhält also

$$f_*\colon \pi_1(M,p) \to \pi_1(N,q), \quad f_*\big([\alpha]\big) := [f \circ \alpha]$$

f_* ist Gruppenhomomorphismus und $\pi_1\colon \underline{\mathrm{Top}_0} \to \underline{\mathrm{Grp}}$ ist tatsächlich ein Funktor, $\mathbb{1}_* = \mathbb{1}$, $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

(d) Zwei Objekte X, Y in einer Kategorie $\mathscr{C}$ heißen **isomorph**, wenn es $f \in \mathrm{Mor}(X,Y)$, $g \in \mathrm{Mor}(Y,X)$ gibt mit

$$gf = \mathbb{1}_X, \quad fg = \mathbb{1}_Y$$

Wir schreiben: $X \simeq Y$. **Beachte:** Ist $T\colon \mathscr{C}_1 \to \mathscr{C}_2$ ein Funktor und $X \simeq Y \Longrightarrow T(X) \simeq T(Y)$, denn ist $f \in \mathrm{Mor}(X,Y)$ ein **Isomorphismus** $\big($d.h. $\exists g \in \mathrm{Mor}(Y,X)$ mit $gf = \mathbb{1}_X$, $fg = \mathbb{1}_Y\big)$, so ist $f_* \in \mathrm{Mor}(TX, TY)$ ein Isomorphismus, denn:

$$g_* f_* \overset{\text{(b)}}{=} (gf)_* = (\mathbb{1}_X)_* \overset{\text{(a)}}{=} \mathbb{1}_{T(X)}$$

und analog $f_* g_* = \mathbb{1}_{T(Y)}$.

Beispiel. Sind (M,p), (N,q) punktierte topologische Räume mit $\pi_1(M,p) \not\cong \pi_1(N,q)$, so muss $(M,p) \not\simeq (N,q)$ sein $\big($d.i: (M,p) und (N,q) sind nicht homöomorph, d.i.: es gibt keinen Homöomorphismus $f\colon M \to N$ mit $f(p) = q$.$\big)$

(C.6) Beispiel. Man sagt (M,p) ist **einfach zusammenhängend**, wenn $\pi_1(M,p) = (1)$ ist. $(\mathbb{R}^n, 0)$ (mit $n \in \mathbb{N}_0$) ist einfach zusammenhängend, denn ist $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^n$ mit $\alpha(0) = \alpha(1) = 0$, so ist $H\colon I \times I \to \mathbb{R}^n$, $H(t,s) = (1-s)\alpha(t)$ ist eine Homotopie von $h_0 = \alpha$ nach $h_1 = c_0$, $\alpha \simeq c_0$, also $[\alpha] = 1$.

(C.7) Kommentar.

(a) Ist M wegzusammenhängend, so hängt der Isomorphietyp von $\pi_1(M,p)$ nicht von $p \in M$ ab, denn ist $q \in M$ beliebig und $\gamma\colon [0,1] \to M$ ein Weg von p nach q, $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$, so ist

$$\Phi_\gamma\colon \pi_1(M,p) \to \pi_1(N,q), \quad [\alpha] \mapsto [\gamma^- * \alpha * \gamma]$$

wohldefiniert und ein Isomorphismus (mit Inversem Φ_{γ^-}).

(b) Wir sagen daher für ein topologischen Raum M, dass er **einfach zusammenhängend** ist, wenn er wegzusammenhängend ist und $\pi_1(M,p) = (1)$ ist, für ein (und dann jedes $p \in M$).

(c) Zum Beispiel ist $\mathbb{R}^n$ einfach zusammenhängend.

(C.8) Bemerkung. Für alle punktierte topologische Räume (M,p), (N,q) gilt:

$$\begin{aligned} \pi_1\big(M \times N, (p,q)\big) &\underset{\cong}{\text{kan.}} \pi_1(M,p) \times \pi_1(N,q) \\ [\gamma] &\mapsto \big([\pi_1 \circ \gamma], [\pi_2 \circ \gamma]\big) \\ \big[(\alpha,\beta)\big] &\leftarrow \big([\alpha],[\beta]\big) \end{aligned}$$

(C.9) Beispiel. Wir werden später sehen:

(i) $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$. Außerdem (nicht so einfach, wie es aussieht):

(ii) $\pi_1(\mathbb{S}^2) = (1)$ (also $\mathbb{S}^2$ einfach zusammenhängend)

Es folgt: $\mathbb{T}^2 \not\cong \mathbb{S}^2$, weil:

$$\pi_1(\mathbb{T}^2) = \pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) = \pi_1(\mathbb{S}^1) \times \pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \not\cong (1) = \pi_1(\mathbb{S}^2).$$

(C.10) Definition. Sei M ein zusammenhängender topologischer Raum. Ein Paar $(\tilde{M}, \pi)$ heißt **eine Überlagerung von** M, wenn auch $\tilde{M}$ zusammenhängend ist und $\pi\colon \tilde{M} \to M$ stetig, so dass gilt: Für alle $p \in M$ existiert eine offene Umgebung $U \subseteq M$ von p, so dass

$$\pi^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} \tilde{U}_i$$

mit offenen Mengen $\tilde{U}_i \subseteq \tilde{M}$ (und einer Indexmenge I) derart, dass $\pi|\tilde{U}_i\colon \tilde{U}_i \to U$ ein Homöomorphismus ist.

(C.11) Kommentar.

(a) Offene Mengen $U \subseteq M$ mit dieser Eigenschaft, heißen **gleichmäßig überlagert**.

(b) Jede Faser von π, d.i.

$$F = \pi^{-1}(p) \quad (\text{für } p \in M)$$

trägt offenbar als Teilraumtopologie die diskrete Topologie.

(c) Die Kardinalität der Indexmenge in (C.10) ist unabhängig von p und damit ist die Kardinalität aller Fasern gleich. Denn sei I_0 die Indexmenge von p_0, also $\operatorname{card}(I_0) = \operatorname{card}(F_0)$, $F_0 = \pi^{-1}(p_0)$, so ist

$$M_0 := \{p \in M \,:\, \operatorname{card}(F_p) = \operatorname{card}(I_0)\}$$

offen, aber auch abgeschlossen, weil das Komplement eine Vereinigung von ebenfalls offenen Mengen $M_q = \big\{p \in M \,:\, \operatorname{card}(F_p) = \operatorname{card}(F_q)\big\}$ $(q \in M \setminus M_0)$

$$M = \underbrace{M_0}_{\text{offen}} \sqcup \underbrace{\bigcup_{q \notin M_0} M_q}_{\text{offen}}.$$

Da M zusammenhängend ist und $M_0 \neq \emptyset$ folgt: $M = M_0$. $\operatorname{card}(F_p)$ $(p \in M)$ heißt **Blätterzahl von $\boldsymbol{\pi}$**: $\tilde{M} \to M$. Insbesondere ist π surjektiv.

(d) Ist $U \subseteq M$ gleichmäßig überlagert und zusammenhängend, so sind $\tilde{U}_i$ $(i \in I)$ die Zusammenhangskomponenten von $\pi^{-1}(U)$ und heißen **die Blätter von $\boldsymbol{\pi}$ über U**.

(e) π ist stets lokaler Homöomorphismus.

(C.12) Beispiel.

(a) Sei $M = \mathbb{S}^1$ und $\tilde{M} = \mathbb{R}$ und $\pi = \operatorname{ex}\colon \tilde{M} \to M$, $\operatorname{ex}(t) = e^{2\pi i t}$. Dann ist π eine Überlagerung, denn für $U = \mathbb{S}^1 \setminus \{1\}$, $V = \mathbb{S}^1 \setminus \{-1\}$ gilt:

$$\pi^{-1}(U) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} (n, n+1), \quad \pi^{-1}(V) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} (n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2})$$

und $\operatorname{ex}|(n, n+1)\colon (n, n+1) \to U$ bzw. $\operatorname{ex}|(n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2})\colon (n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}) \to V$ sind Homöomorphismen (die Umkehrfunktionen sind geeignete Zweige des komplexen Logarithmus.)

(b) Auch $\operatorname{pot}_n\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, $z \mapsto z^n$ $(n \in \mathbb{N})$ ist Überlagerung (der Blätterzahl n) (benutze geeignete Zweige der komplexen n-ten Einheitswurzeln)

(c) Die Identität ist eine Überlagerung der Blätterzahl 1. Umgekehrt: Ist $\pi\colon \tilde{M} \to M$ Überlagerung der Blätterzahl 1, so ist π ein Homöomorphismus (da lokaler Homöomorphismus und injektiv).

(d) Die kanonische Projektion $\pi\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n/\{\pm 1\} = \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ ist eine Überlagerung der Blätterzahl 2.

(C.13) Erinnerung. Eine Gruppenwirkung einer Gruppe Γ auf einen topologischen Raum M durch Homöomorphismen $\Gamma \times M \to M$, $(\gamma, p) \mapsto \gamma.p$, heißt eigentlich diskontinuierlich, wenn es zu $p \in M$ eine offene Umgebung $U \subseteq M$ von p gibt, so dass für alle $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ mit $\gamma \neq \gamma'$ gilt:

$$\gamma(U) \cap \gamma'(U) = \varnothing.$$

(C.14) Kommentar.

(a) Ein Paar $(G, \cdot\,)$ heißt eine **topologische Gruppe**, wenn $(G, \cdot\,)$ einerseits eine Gruppe und G andererseits ein topologischer Raum, so dass die Gruppenoperationen $G \times G \to G$, $(g, h) \mapsto g \cdot h$ und $G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$, stetig sind.

(b) Eine Operation einer topologischen Gruppe auf einem topologischen Raum M heißt **stetig**, wenn $G \times M \to M$, $(g, p) \mapsto g.p$ stetig ist. Man spricht dann bei G (zusammen mit der Wirkung) von einer topologischen Transformation $\big($weil man einen Homomorphismus $G \to$ Homöo., $g \mapsto g.p$ hat$\big)$.

(c) Operiert eine Gruppe Γ zunächst nur durch Homöomorphismen auf einem Raum M (d.h. jedes $\gamma\colon M \to M$, $p \mapsto \gamma.p$, ist ein Homöomorphismus), so kann man $\Gamma \curvearrowright M$ zu einer stetigen Wirkung machen, wenn man Γ die diskrete Topologie gibt.

(d) Ist umgekehrt $\Gamma \times M \to M$ eine stetige Operation und ist sie eigentlich diskontinuierlich, so muss Γ die diskrete Topologie tragen, denn jede Bahnabbildung

$$\rho_p\colon \Gamma \to \Gamma p = \{\gamma.p \;:\; \gamma \in \Gamma\}$$

ist dann stetig (und bijektiv). Weil aber $\Gamma p \subseteq M$ diskret ist, muss daher Γ die diskrete Topologie tragen.

(C.15) Proposition (vgl. Diffgeo I). *Sei $\tilde{M}$ ein zusammenhängender Raum und eine Gruppe Γ operiere eigentlich diskontinuierlich auf $\tilde{M}$. Dann ist der Bahnenraum $M := \tilde{M}/\Gamma$ (mit der Quotiententopologie) zusammen mit der kanonischen Projektion $\pi\colon \tilde{M} \to M$, $\tilde{p} \mapsto \Gamma\tilde{p} = [\tilde{p}] = p$ eine Überlagerung*

Beweis. Sei $p \in M$ beliebig $\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)$. Wähle $\tilde{U} \in \mathfrak{A}(p)$ offen, so dass $\gamma_1(\tilde{U}) \cap \gamma_2(\tilde{U}) = \varnothing$. Setze dann $U := \pi(\tilde{U}) \subseteq M$. Vorher: π ist offen, weil für $\tilde{V} \subseteq \tilde{M}$ offen gilt:

$$\pi^{-1}\big(\pi(\tilde{V})\big) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \underbrace{\gamma(\tilde{V})}_{\text{offen}}$$

$\Longrightarrow$ U ist offen, $p \in U$ und $\pi^{-1}(U) = \bigsqcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma\tilde{U}$. Außerdem ist $\pi|\tilde{U}\colon \tilde{U} \to U$ stetig, offen, surjektiv und injektiv, denn ist $\pi(\tilde{q}_1) = \pi(\tilde{q}_2)$ mit $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2 \in \tilde{U} \Longrightarrow \exists \gamma \in \Gamma$ mit $\tilde{q}_2 = \gamma.\tilde{q}_1 \Longrightarrow \tilde{q}_2 \in \gamma(\tilde{U}) \cap \tilde{U} \Longrightarrow \gamma = 1 \Longrightarrow \tilde{q}_2 = \tilde{q}_1$. Also ist $\pi|\tilde{U}$ Homöomorphismus.

$$\Longrightarrow \pi|\gamma(\tilde{U}) = \underbrace{\pi|\tilde{U}}_{\text{Homöo.}} \circ \underbrace{\gamma^{-1}|\gamma(\tilde{U})}_{\text{Homöo.}} \quad (\text{weil } \pi \circ \gamma = \pi)$$

auch Homöomorphismus. $\Longrightarrow$ π ist Überlagerung. $\square$

(C.16) Erinnerung.

(a) Ist $\tilde{M}$ glatte Mannigfaltigkeit, operiere Γ auf $\tilde{M}$ eigentlich diskontinuierlich durch Diffeomorphismen und ist $\tilde{M}/\Gamma$ hausdorffsch (mit seiner Quotiententopologie), so besitzt $M = \tilde{M}/\Gamma$ eine Mannigfaltigkeit-Struktur mit einer universellen Eigenschaft:

$$\begin{tikzcd} \tilde{M} \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\Phi\circ\pi"] & \\ M \arrow[r, "\Phi"'] & N \end{tikzcd}$$

$\Phi\colon M \to N$ (N glatte Mannigfaltigkeit) ist glatt, genau wenn $\Phi \circ \pi$ glatt ist $\big($vgl. (2.26)$\big)$.

π ist genau dann ein lokaler Diffeomorphismus und damit eine glatte Überlagerung, d.i.: $\forall p \in M\ \exists U \in \mathfrak{A}(p)$ offen: $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{i\in I} \tilde{U}_i$ mit $\tilde{U}_i \subseteq \tilde{M}_i$ offen und $\pi|\tilde{U}_i\colon \tilde{U}_i \to U$ sind Diffeomorphismen.

(b) Ist $\tilde{G}$ Liegruppe und $\Gamma \subseteq \tilde{G}$ ein diskreter Normalteiler, so operiert Γ auf $\tilde{G}$ durch Linksmultiplikation eigentlich diskontinuierlich und $G := \tilde{G}/\Gamma$ ist hausdorffsch (Übung). Zusammen mit der Mannigfaltigkeit-Struktur aus (a) und der natürlichen Gruppenstruktur ist dann G eine Liegruppe und $\pi\colon \tilde{G} \to G$ ein Lie-Homomorphismus mit folgender universellen Eigenschaft: Ist (H, φ) ein Konkurrent mit $\Gamma \subseteq \ker(\varphi)$, $\varphi\colon \tilde{G} \to H$, so gibt es genau einen Lie-Homomorphismus $\Phi\colon G \to H$ mit $\Phi \circ \pi = \varphi$ $\big($siehe (5.12)$\big)$. π ist dann eine **Lie-Überlagerung**, d.i.: Lie-Homomorphismus und glatte Überlagerung.

(C.17) Bemerkung. Seien G und H zusammenhängende Liegruppen mit Lie-Algebren $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$, und $\pi\colon G \to H$ eine Lie-Überlagerung. Dann ist $\pi_*\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ ein Lie-Isomorphismus.

Beweis. Identifiziert man $\mathfrak{g}$ bzw. $\mathfrak{h}$ vermöge der Auswertungen im neutralen Element $\alpha_G\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{T}G_e$ bzw. α_H mit dem Tangentialraum im neutralen Element, so kommutiert $\big($vgl. (5.26,a)$\big)$:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\pi_*"] \arrow[d, "\alpha_G"', "\cong"] & \mathfrak{h} \arrow[d, "\alpha_H", "\cong"'] \\ \mathrm{T}G_e \arrow[r, "\mathrm{D}\pi_e"'] & \mathrm{T}H_e \end{tikzcd}$$

Da $\pi\colon G \to H$ ein lokaler Diffeomorphismus ist, folgt insbesondere, dass $\mathrm{D}\pi_e\colon \mathrm{T}G_e \to \mathrm{T}H_e$ ein (Vektorraum-) Isomorphismus ist. Es folgt: Auch π_* ist Vektorraum-Isomorphismus und damit auch, dass π_* ein Lie-Algebren-Isomorphismus ist. □

(C.18) Satz. *Seien G und H zusammenhängend mit Lie-Algebren $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ und $\pi\colon G \to H$ ein Lie-Homomorphismus, so dass $\pi_*\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ ein Lie-Isomorphismus ist. Dann ist $\pi\colon G \to H$ eine (Lie-) Überlagerung.*

Beweis. **Schritt 1:** Konstruktion einer gleichmäßig überlagerten, offenen Umgebung $V \subseteq H$ von e: Sei $U \subseteq G$ eine offene Umgebung von e so klein, dass gilt:

- $\pi|U\colon U \to V$ mit $V := \pi(U)$ ist Diffeomorphismus ($V \subseteq H$ offen; Umkehrsatz)
- Sei $\Gamma := \ker(\pi)$; $U^{-1} \cdot U \cap \Gamma = \{e\}$ $\big($sonst gehe von U aus (a) zu $U \cap U^{-1}$ über$\big)$.

Behauptung: $V \subseteq H$ ist gleichmäßig überlagert. Dazu:

(i) $\pi^{-1}(V) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} U \cdot \gamma$: Da $V = \pi(U)$ ist und $\pi(U \cdot \gamma) = V$, folgt: $\pi^{-1}(V) \supseteq \bigcup_{\gamma\in\Gamma} U \cdot \gamma$. „$\subseteq$“: Sei $g \in \pi^{-1}(V)$, also $\pi(g) \in \pi(U)$, also $\pi(g) = \pi(u)$ für ein $u \in U$. $\Longrightarrow \gamma := u^{-1}g \in \Gamma$, weil $\pi(u^{-1}g) = \pi(u)^{-1}\pi(g) = e \Longrightarrow g = u\gamma \in U\gamma \Longrightarrow$ „$\subseteq$“.

(ii) $U\gamma_1 \cap U\gamma_2 = \emptyset$ für $\gamma_1 \neq \gamma_2$: Angenommen $g \in U\gamma_1 \cap U\gamma_2$, also

$$g = u_1\gamma_1 = u_2\gamma_2;\ u_1, u_2 \in U \Longrightarrow \gamma_1\gamma_2^{-1} = u_1^{-1}u_2 \in U^{-1}U \cap \Gamma = \{e\} \Longrightarrow \gamma_1 = \gamma_2.$$

Schließlich: $\pi|U\gamma = \pi|U \circ r_{\gamma^{-1}}|U\gamma$ (weil $\pi \circ r_{\gamma^{-1}} = \pi$) ist Diffeomorphismus.

Schritt 2: Jedes $h \in H$ hat eine gleichmäßige überlagerte Umgebung. Da $V = \pi(U)$ offene Umgebung ist, folgt: π ist surjektiv. Sei $h = \pi(g)$. Betrachte $V_h := h \cdot V$. Dann ist:

$$\pi^{-1}(V_h) = \bigsqcup_{\gamma \in \Gamma} gU\gamma \quad \text{und} \quad \pi|gU\gamma = l_h \circ \pi|U \circ l_{g^{-1}} \circ r_{\gamma^{-1}}$$

ist Diffeomorphismus von $gU\gamma$ nach V_h. □

(C.19) Motivation.

(a) Bisher geklärt: Welche „Unterlagerungen" hat eine vorgegebene zusammenhängende Liegruppe G:

(i) Ist $\Gamma \subseteq G$ Normalteiler und diskret $\Longrightarrow H := G/\Gamma$ ist Liegruppe und die kanonische Projektion $\pi\colon G \to H$ eine (Lie-) Überlagerung.

(ii) Ist andererseits $\pi\colon G \to H$ Lie-Überlagerung $\Longrightarrow \Gamma := \ker(\pi)$ ist diskrete Normalteiler und das induzierte $\overline{\pi}\colon G/\Gamma \to H$ ein Lie-Isomorphismus: $\overline{\pi}$ ist Gruppenisomorphismus nach Homomorphiesatz der Gruppentheorie, $\overline{\pi}$ ist glatt nach Diffgeo I und lokaler Diffeomorphismus, da $\pi_*\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ Isomorphismus.

Frage 1: Für welche diskrete Normalteiler $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq G$ sind die Überlagerungen $\pi_1\colon G \to G/\Gamma_1$ und $\pi_2\colon G \to G/\Gamma_2$ **äquivalent**, d.h. es gibt einen Lie-Isomorphismus $\varphi\colon G/\Gamma_1 \to G/\Gamma_2$ mit $\varphi \circ \pi_1 = \pi_2$.

(b) (i) Noch zu klären: Gegeben zusammenhängendes G. Welche Überlagerungen $\pi\colon \tilde{G} \to G$ gibt es bis auf Äquivalenz? Hier sollen $\pi_1\colon \tilde{G}_1 \to G$ und $\pi_2\colon \tilde{G}_2 \to G$ **äquivalent** heißen, wenn es einen Lie-Isomorphismus $\varphi\colon \tilde{G}_1 \to \tilde{G}_2$ gibt mit $\pi_2 \circ \varphi = \pi_1$.

(ii) Allgemeiner: Klassifiziere zu gegebenem zusammenhängenden Raum X alle Überlagerungen $\pi\colon \tilde{X} \to X$ bis auf Äquivalenz. Schlüssel dazu: **Liftungstheorie**.

(C.20) Definition. Sei $\pi\colon \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung und Y ein weiterer topologischer Raum, $f\colon Y \to X$ stetig. Eine stetige Abbildung $\tilde{f}\colon Y \to \tilde{X}$ heißt **Lift von f**, wenn gilt: $\pi \circ \tilde{f} = f$.

(C.21) Bemerkung. Sei $\pi\colon \tilde{X} \to X$ Überlagerung, $f\colon Y \to X$ stetig, Y zusammenhängend, und $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$, $x_0 \in X$ und $y_0 \in Y$ mit $\pi(\tilde{x}_0) = x_0$, $f(y_0) = x_0$. Dann kann es höchstens einen Lift $\tilde{f}\colon Y \to \tilde{X}$ von f mit $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$ geben.

Beweis. Sind $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2\colon (Y, y_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ zwei solche, so betrachte

$$Z := \{y \in Y \ : \ \tilde{f}_1(y) = \tilde{f}_2(y)\}.$$

Z ist nicht-leer, denn $y_0 \in Z$ und Z ist offen: ist nämlich $y \in Z$, so wähle gleichmäßig überlagertes $U \subseteq X$ von $x := f(y)$ und sei $\tilde{U} \subseteq \tilde{X}$ das Blatt über U, welches $\tilde{x} := \tilde{f}_1(y) = \tilde{f}_2(y)$ enthält und $V := \tilde{f}_1^{-1}(\tilde{U}) \cap \tilde{f}_2^{-1}(\tilde{U}) \Longrightarrow V$ ist offene Umgebung von y. Weil $\pi \circ \tilde{f}_1 = f = \pi \circ \tilde{f}_2$ ist, und $\pi|\tilde{U}$ invertierbar, ist $\pi|\tilde{U} \circ \tilde{f}_1|V = f|V = \pi|\tilde{U} \circ \tilde{f}_2|V \Longrightarrow \tilde{f}_1|V = (\pi|U)^{-1} \circ f|V = f_2|V$, also $V \subseteq Z$. Ähnlich sieht man auch, dass $Y \setminus Z$ offen ist, also Y abgeschlossen und damit $Z = Y \Longrightarrow \tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$. □

(C.22) Kommentar. Sei $\pi\colon \tilde{X} \to X$ Überlagerung, $x_0 \in X$ und $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$. Dann nennen wir die Untergruppe

$$\Gamma := \operatorname{Im}\bigl(\pi_*\colon \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0)\bigr)$$

die **charakteristische Untergruppe** von $\pi\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$.

(C.23) Lemma (Kurvenliftung). *Sei $\pi\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ Überlagerung und $\alpha\colon (I, 0) \to (X, x_0)$ ein Weg $\bigl($mit Anfang x_0, $I = [0,1]\bigr)$. Dann existiert (genau) ein Lift $\tilde{\alpha}\colon (I, 0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ von α.*

Beweis. Wähle Unterteilung $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = 1$ von I so klein, dass $\alpha\bigl([t_{i-1}, t_i]\bigr) \subseteq U_i \subseteq X$, wo U_i gleichmäßig überlagert ist $(i = 1, \ldots, k)$ (Kompaktheitsargument). Sei $\tilde{U}_1 \subseteq \tilde{X}_0$ das Blatt über U_1, welches $\tilde{x}_0$ enthält. Setze

$$\tilde{\alpha}(t) := (\pi|\tilde{U}_1)^{-1} \circ \alpha(t) \quad \text{für } 0 \leq t \leq t_1.$$

Sei nun $\tilde{U}_2 \subseteq \tilde{X}$ das Blatt über U_2, welches $\tilde{\alpha}(t_1)$ enthält. Setze dann

$$\tilde{\alpha}(t) := (\pi|\tilde{U}_2)^{-1} \circ \alpha(t) \quad \text{für } t_1 \leq t \leq t_2$$

usw. $\Longrightarrow \tilde{\alpha}\colon (I, 0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ ist Lift von α. ☐

(C.24) Kommentar. Für $Y = [0,1]$ ist also das Liftungsproblem gelöst. Beachte: $\pi_1(I, 0) = (1)$, also $\operatorname{Im}(\alpha_*) \subseteq \Gamma$ trivialerweise erfüllt. „Das Schräubchen wird nun etwas weitergedreht“:

(C.25) Lemma (Homotopieliftung). *Sei $\pi\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ Überlagerung und $H\colon (I^2, 0) \to (X, x_0)$ stetig. Dann existiert (genau) ein Lift $\tilde{H}\colon (I^2, 0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$.*

Beweis. Wähle Unterteilung $0 = t_0 < \cdots < t_k = 1$ so klein, dass $H(V_{ij}) \subseteq U_{ij} \subseteq X$ mit $V_{ij} := [t_{i-1}, t_i] \times [t_{j-1}, t_j]$ in gleichmäßig überlagerten offenen Mengen $U_{ij} \subseteq X$ $(1 \leq i, j \leq k)$ (Kompaktheit von I^2). Sei dann $\tilde{U}_{11}$ das Blatt über U_{11}, welches $\tilde{x}_0$ enthält. Setze

$$\tilde{H}_{11}(t, s) := (\pi|\tilde{U}_{11})^{-1} \circ H(t, s) \quad \text{für } 0 \leq t, x \leq t_1.$$

Sei nun $\tilde{U}_{21} \subseteq \tilde{X}$ das Blatt über U_{21}, welches $\tilde{H}(t_1, 0)$ enthält und setze

$$\tilde{H}_{21}(t, s) := (\pi|\tilde{U}_{21})^{-1} \circ H(t, s) \quad \text{für } \begin{matrix} t_1 \leq t \leq t_2 \\ 0 \leq s \leq t_1 \end{matrix}.$$

Nun beachte, dass $s \mapsto \tilde{\alpha}(s) := \tilde{H}_{11}(t_1, s)$ und $s \mapsto \tilde{\beta}(s) := \tilde{H}_{21}(t_1, s)$ beides Lifte der Kurve $\alpha\colon [0, t_1] \to X$, $\alpha(s) = H(t_1, s)$ sind mit $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0)$. Nach (C.22) muss deshalb $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta}$ sein und daher passen $\tilde{H}_{11}$ und $\tilde{H}_{21}$ an der „Nahtstelle“ $\{t_1\} \times [0, t_1]$ stetig zusammen. Setze Verfahren auf $V_{31}, \ldots, V_{k1}$, dann auf V_{12} $\bigl($mit Nahtstelle $(t_1, 0)\bigr)$ usw. fort und erhalte schließlich H. ☐

(C.26) Korollar. *Seien $\alpha, \beta\colon I \to X$ Wege mit gleichen Endpunkten, $\alpha(0) = \beta(0) = x_0$, $\alpha(1) = \beta(1) = x_1$, und seien α und β homotop $\bigl($rel. $\{0,1\}\bigr)$. Sei weiter $\pi\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ eine Überlagerung und $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}\colon I \to \tilde{X}$ die Lifts von α und β $\bigl($mit $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0) = \tilde{x}_0\bigr)$. Dann haben $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$ auch die gleichen Endpunkte, $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1) =: \tilde{x}_1$ und auch $\tilde{\alpha} \simeq \tilde{\beta}$ $\bigl($rel. $\{0,1\}\bigr)$.*

Beweis. Sei $H\colon I^2 \to X$ eine Homotopie von α nach β mit festen Endpunkten, also $H(0, s) = x_0$, $H(1, s) = x_1$, $\forall s \in I$. Sei $\tilde{H}\colon I^2 \to \tilde{X}$ der Lift von H mit $\tilde{H}(0,0) = \tilde{x}_0$. $\Longrightarrow \tilde{H}(0, s) \in \pi^{-1}(x_0)$, $\forall s \in I$, und weil $\pi^{-1}(x_0) \subseteq \tilde{X}$ diskret ist, muss $\tilde{H}(0, s) = \tilde{x}_0$, $\forall s \in I$, sein $\bigl(s \mapsto \tilde{H}(0, s)$ ist Lift der konstanten Kurve $\bigr)$

$$\tilde{\beta}(1) = \tilde{H}(1, 1) = \tilde{x}_1 = \tilde{H}(1, 0) = \tilde{\alpha}(1).$$

Außerdem ist nun offenbar $\tilde{H}$ Homotopie von $\tilde{\alpha}$ nach $\tilde{\beta}$ $\bigl($rel. $\{0,1\}\bigr)$. ☐

(C.27) Korollar. *Sei X lokal wegzusammenhängend und einfach zusammenhängend also $\pi_1(X, x_0) = (1)$ (für $x_0 \in X$). Ist nun $\pi \colon \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung, so ist π ein Homöomorphismus (also π einblättig) und damit π äquivalent zur Identität.*

Beweis. Seien $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in \pi^{-1}(x_0)$ beliebig. Da $\tilde{X}$ zusammenhängend (und lokal wegzusammenhängend, weil X es ist), also wegzusammenhängend, gibt es einen Weg $\tilde{\alpha} \colon I \to \tilde{X}$ von $\tilde{x}_0$ nach $\tilde{x}_1$. Sei $\alpha := \pi \circ \tilde{\alpha}$. Dann ist α geschlossen,

$$\alpha(0) = \pi \circ \tilde{\alpha}(0) = \pi(\tilde{x}_0) = x_0 = \pi(\tilde{x}_1) = \pi \circ \tilde{\alpha}(1) = \alpha(1).$$

Da $\pi_1(X, x_0) = (1)$ ist, existiert eine Homotopie H von α auf den konstanten Weg c_{x_0}, $H \colon \alpha \simeq c_{x_0}$. Nun ist offenbar $\tilde{\alpha}$ der Lift von α $\big($mit $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}_0\big)$ und $c_{\tilde{x}_0}$ der Lift von c_{x_0} $\big($mit $c_{\tilde{x}_0}(0) = \tilde{x}_0\big)$. nach (C.26) ist $\tilde{x}_1 = \tilde{\alpha}(1) = c_{\tilde{x}_0}(1) = \tilde{x}_0$. Also ist π einblättrig und damit ein Homöomorphismus wegen der Kommutativität von

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\mathbb{1}"'] & \tilde{X} \arrow[l, "\pi"'] \arrow[dl, "\pi"] \\ X & \end{tikzcd}$$

äquivalent zu Identität. □

(C.28) Kommentar.

(a) Sind zwei geschlossene Wege $\alpha, \beta \colon (I, 0) \to (X, x_0)$ homotop, $\alpha \simeq \beta$, und $\pi \colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ Überlagerung und sind $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \colon (I, 0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ die Lifte von $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$, so haben $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$ den gleichen Endpunkt, $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$.

(b) Umgekehrt: Sei $\hat{\pi} \colon (\hat{X}, \hat{x}_0) \to (X, x_0)$ Überlagerung und $\pi_1(\hat{X}, \hat{x}_0) = (1)$, $\hat{X}$ einfach zusammenhängend. Seien nun $\alpha, \beta \colon (I, 0) \to (X, x_0)$ geschlossene Wege in (X, x_0) und $\hat{\alpha}, \hat{\beta} \colon (I, 0) \to (\hat{X}, \hat{x}_0)$ ihre Lifte. Haben nun $\hat{\alpha}$ und $\hat{\beta}$ auch den gleichen Endpunkt, $\hat{\alpha}(1) = \hat{\beta}(1)$, so sind α und β homotop, denn: Ist $\hat{H} \colon \big(I^2, (0,0)\big) \to (\hat{X}, \hat{x}_0)$ eine Homotopie von $\hat{\alpha} * \hat{\beta}^-$ auf den konstanten Weg $c_{\hat{x}_0}$ (beachte: $\hat{\alpha} * \hat{\beta}^-$ ist geschlossen), so ist $H := \pi \circ \hat{H}$ eine Homotopie von $\alpha * \beta^-$ auf c_{x_0}, also:

$$1 = [\alpha * \beta^-] = [\alpha] \cdot [\beta]^{-1} \Longrightarrow [\alpha] = [\beta],$$

d.h.: $\alpha \simeq \beta$. Insgesamt dann also für $\alpha, \beta \colon (I, 0) \to (X, x_0)$ geschlossen: $\alpha \simeq \beta \Longleftrightarrow \hat{\alpha}(1) = \hat{\beta}(1)$. Man erhält also eine Bijektion:

$$\pi_1(X, x_0) \to \pi^{-1}(x_0), \quad [\alpha] \mapsto \hat{\alpha}(1). \tag{$*$}$$

(C.29) Beispiel. Da $\pi_1(\mathbb{R}) = (1)$ und $\mathrm{ex} \colon (\mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{S}^1, 1)$, $\mathrm{ex}(t) = \exp(2\pi t)$, Überlagerung mit $\pi^{-1}(1) = \mathbb{Z}$, so folgt schon mal, dass $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$ bijektiv zu $\mathbb{Z}$ ist. $\big($Gleich werden wir auch noch sehen, dass die Bijektion $(*)$ sogar ein Gruppenisomorphismus ist, wenn wir $\pi^{-1}(x_0)$ - und damit in unserem Beispiel $\mathbb{Z}$ - mit einer Gruppenstruktur versehen haben.$\big)$

(C.30) Satz (Liftungssatz). *Sei $\pi \colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ Überlagerung mit charakteristischer Untergruppe $\Gamma = \mathrm{Im}(\pi_*) \subseteq \pi_1(X, x_0)$. Sei weiter Y zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend und $y_0 \in Y$. Sei schließlich $f \colon (Y, y_0) \to (X, x_0)$ stetig. Dann gibt es genau dann einen Lift $\tilde{f} \colon (Y, y_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ von f, wenn gilt:* $\mathrm{Im}(f_*) \subseteq \Gamma$.

Beweis. Das $\operatorname{Im}(f_*) \subseteq \Gamma$ notwendig ist, ist bereits gezeigt.

„$\Longleftarrow$“: **Schritt 1.** Konstruktion von $\tilde{f}$: Sei $y \in Y$ beliebig. Da Y zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend ist, folgt: Y wegzusammenhängend $\big($vgl. (1.47)$\big)$. Sei $w\colon I \to Y$ Weg von y_0 nach y. Setze $\alpha := f \circ w$ $\big($ Wenn f überhaupt einen Lift $\tilde{f}$ hat, so ist $\tilde{f} \circ w$ auch Lift von α: $\pi \circ \tilde{f} = f \implies \pi \circ \tilde{f} \circ w = f \circ w = \alpha$, also $\tilde{f} \circ w = \tilde{\alpha}$, insbesondere: $\tilde{f}(y) = \tilde{f} \circ w(1) = \tilde{\alpha}(1)$.$\big)$ Setze:

$$\tilde{f}\colon Y \to \tilde{X}, \quad \tilde{f}(y) := \tilde{\alpha}(1),$$

wo $\tilde{\alpha}$ der (eindeutige) Lift von α nach $\tilde{X}$ ist mit $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}_0$.

Beachte: $\tilde{f}(y)$ hängt nicht von der Wahl des Weges w ab. Denn: Ist $v\colon I \to Y$ ein weiterer Weg $\implies v * w^-$ ist geschlossen, also auch $f \circ (v * w^-) = (f \circ v) * f \circ w^- = (f \circ v) * (f \circ w)^-$. Setze $\beta := f \circ v \implies \beta * \alpha^-$ geschlossen mit Aufpunkt x_0. Da $\operatorname{Im}(f_*) \subseteq \Gamma = \pi_*\big(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)\big)$, folgt: $\exists \tilde{u}\colon I \to \tilde{X}$ geschlossen (mit Aufpunkt $\tilde{x}_0$), so dass

$$\pi_*\big([\tilde{u}]\big) = [\beta * \alpha^-] = f_*\big([v * w^-]\big),$$

also für $u := \pi \circ \tilde{u}$:

$$u \simeq (f \circ v) * (f \circ w)^- \implies u * (f \circ w) \simeq (f \circ v).$$

Da $\tilde{u}$ Lift von u ist, ist $\tilde{u} * \tilde{\alpha} = \widetilde{u * \alpha} \simeq \tilde{\beta}$, wo $\tilde{\beta}$ der Lift von β sei (Homotopieliftung) und $\tilde{\beta}(1) = \tilde{u} * \tilde{\alpha}(1) = \tilde{\alpha}(1)$. Klar ist: $\pi \circ \tilde{f}(y) = \pi \circ \tilde{\alpha}(1) = \alpha(1) = f\big(w(1)\big) = f(y)$, also $\tilde{f}$ Lift von f.

Schritt 2. $\tilde{f}$ ist stetig. $\big($Benutze lokalen Wegzusammenhang von Y, siehe [Lo]$\big)$ $\square$

(C.31) Korollar. *Seien $\pi\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$, $\pi'\colon (\tilde{X}', \tilde{x}'_0) \to (X, x_0)$ Überlagerungen mit charakteristischen Untergruppe $\Gamma, \Gamma' \subseteq \pi_1(X, x_0)$ Dann ist $\pi \sim \pi' \iff \Gamma = \Gamma'$.*

(C.32) Kommentar. Sei X zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend, $x_0 \in X$.

(a) Wir sagen zwei (punktierte) Überlagerungen $\pi\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ und $\pi'\colon (\tilde{X}', \tilde{x}'_0) \to (X, x_0)$ heißen **äquivalent**, wenn es einen Homöomorphismus $f\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (\tilde{X}', \tilde{x}'_0)$ gibt mit $\pi' \circ f = \pi$. (f heißt dann auch **Überlagerungsisomorphismus** er ist dann selbst eine Überlagerung).

$$\begin{tikzcd}
(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \arrow[r, "f", "\cong"'] \arrow[d, "\pi"'] & (\tilde{X}', \tilde{x}'_0) \arrow[dl, "\pi'"] \\
(X, x_0) &
\end{tikzcd}$$

(b) Beachte auch, dass die charakteristische Untergruppe $\Gamma \subseteq \pi_1(X, x_0)$ einer punktierten Überlagerung $\pi\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ vermöge $\pi_*\colon \pi_1(\tilde{X}, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ isomorph zu $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ ist, weil π_* injektiv ist, denn: Ist $\tilde{\alpha}$ geschlossen in $\tilde{X}$ mit $\pi_*\big([\tilde{\alpha}]\big) = 1$, also $\pi \circ \tilde{\alpha} \simeq c_{x_0}$, so muss $\tilde{\alpha} \simeq \tilde{c}_{x_0} = c_{\tilde{x}_0}$ sein (Homotopieliftung), also $[\tilde{\alpha}] = 1$.

(c) Es gibt also (bis auf Äquivalenz) höchstens so viele Überlagerungen von (X, x_0), wie es Untergruppen in $\pi_1(X, x_0)$ gibt. Z.B. gehört die Untergruppe $\Gamma = \pi_1(X, x_0)$ offenbar zur Identität, $\mathbb{1}\colon (X, x_0) \to (X, x_0)$.

   Frage: Gibt es auch zu jeder Untergruppe $\Gamma \subseteq \pi_1(X, x_0)$ eine Überlagerung $\pi\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ mit $\operatorname{Im}(\pi_*) = \Gamma$?

(d) Insbesondere wäre die Frage für die triviale Untergruppe $\Gamma = (1)$ zu klären. Dann wäre also $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = (1)$, also $(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ einfach zusammenhängend.

Beweis von (C.32) ***(a).*** „$\Longrightarrow$“: f ist Lift von π für $\pi' \Longrightarrow \mathrm{Im}(\pi_*) \subseteq \mathrm{Im}(\pi'_*)$, also $\Gamma \subseteq \Gamma'$. Aus Symmetriegründen $\Longrightarrow \Gamma = \Gamma'$.

„$\Longleftarrow$“: Wegen $\Gamma \subseteq \Gamma'$ existiert Lift f für π; wegen $\Gamma' \subseteq \Gamma$ existiert $g\colon (\tilde{X}', \tilde{x}'_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$. Da $g \circ f\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ Lift von π für π ist, und $\mathbb{1}$ auch, folgt: $g \circ f = \mathbb{1}$. Genauso: $f \circ g = \mathbb{1} \Longrightarrow f$ ist Überlagerungisomorphismus. $\square$

(C.33) Definition. Sei (X, x_0) punktiert, zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend Raum. Eine Überlagerung $\hat{\pi}\colon (\hat{X}, \hat{x}_0) \to (X, x_0)$ heißt **universell**, wenn $(\hat{X}, \hat{x}_0)$ einfach zusammenhängend ist.

(C.34) Kommentar. $\hat{\pi}\colon (\hat{X}, \hat{x}_0) \to (X, x_0)$ heißt universell für $\pi_1(\hat{X}, \hat{x}_0) = (1)$, weil es für eine beliebige Überlagerung $\pi\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ genau einer Überlagerungsisomorphismus $f\colon (\hat{X}, \hat{x}_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ gibt (d.h.: f stetig mit $\pi \circ f = \hat{\pi}$)

$$\begin{tikzcd}
(\hat{X}, \hat{x}_0) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\hat{\pi}"'] & (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \arrow[dl, "\pi"] \\
(X, x_0) &
\end{tikzcd}$$

$\big($denn $\hat{\pi}_*\big(\pi_1(\hat{X}, \hat{x}_0)\big) = \hat{\pi}_*\big((1)\big) = (1) \subseteq \pi_*\big(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)\big)$ und damit nach dem Liftungssatz die Existenz von $f\big)$. Insbesondere ist $\hat{\pi}\colon (\hat{X}, \hat{x}_0) \to (X, x_0)$, wenn sie existiert, bis auf Äquivalenz, eindeutig bestimmt (s.o.).

(C.35) Definition. Sei $\pi\colon \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung. Einen Überlagerungsmorphismus $f\colon \tilde{X} \to \tilde{X}$ (also $\pi \circ f = \pi$) heißt eine **Decktransformation von $\boldsymbol{\pi}$**, wenn es einen Überlagerungsmorphismus $g\colon \tilde{X} \to \tilde{X}$ gibt mit $g \circ f = \mathbb{1}$ und $f \circ g = \mathbb{1}$; $\pi \circ f = \pi$, $\pi \circ g = \pi$.

(C.36) Kommentar. (a) Sind $f, g\colon \tilde{X} \to \tilde{X}$, so ist offenbar auch $g \circ f^{-1}$ eine Decktransformation. Es ist also

$$\mathrm{Deck}(\tilde{X}, X) := \{f \in \mathrm{Homo}(\tilde{X}) \ : \ f \text{ ist Decktr. für } \pi\}$$

eine Untergruppe von $\mathrm{Homo}(\tilde{X})$. Sie heißt die **Decktransformationgruppe von $\boldsymbol{\pi}$**.

(b) Eine Decktransformation vertauscht also über einer gleichmäßig überlagerten (zusammenhängenden) offenen Menge $U \subseteq X$ lediglich die Blätter $\tilde{U}_i \subseteq \tilde{X}$ über X ($i \in I$). Weil eine Decktransformation $f\colon \tilde{X} \to \tilde{X}$ ein Lift von π über π ist, liegt f durch ihren Wert auf einem einzigen Punkt $\tilde{x} \in \tilde{X}$ fest $\big($vgl. (C.21)$\big)$.

(c) **Umgekehrt:** Sei $\hat{\pi}\colon (\hat{X}, \hat{x}_0) \to (X, x_0)$ universelle Überlagerung und $\hat{x}'_0 \in \hat{\pi}^{-1}(x_0)$ beliebig, so folgt aus dem Liftungssatz, dass es genau einen Lift $f\colon (\hat{X}, \hat{x}_0) \to (\hat{X}, \hat{x}'_0)$ für π und ebenso genau einen Lift $g\colon (\hat{X}, \hat{x}'_0) \to (\hat{X}, \hat{x}_0)$ für π gibt. Wegen der Eindeutigkeit des Lifts folgt, dass $g \circ f = \mathbb{1}$ und $f \circ g = \mathbb{1}$ sein müssen. Es gibt also ein eindeutiges $f \in \mathrm{Deck}(\hat{X}, X)$ mit $f(\hat{x}_0) = \hat{x}'_0$.

(C.37) Korollar. *Sei $\hat{\pi}\colon (\hat{X}, \hat{x}_0) \to (X, x_0)$ universelle Überlagerung. Für jedes $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ sei $\Phi\big([\alpha]\big) \in \mathrm{Deck}(\hat{X}, X)$ die Decktransformation von $\hat{\pi}$, die $\hat{x}_0$ nach $\hat{\alpha}(1)$ abbildet. Dann ist $\Phi\colon \pi_1(X, x_0) \to \mathrm{Deck}(\tilde{X}, X)$ ein Gruppenisomorphismus.*

Beweis. (i) Beachte, dass Φ zunächst wohldefiniert ist, weil für den Lift $\hat{\alpha}\colon (I, 0) \to (\hat{X}, \hat{x}_0)$ eines Repräsentanten α eines Elementes $c \in \pi_1(X, x_0)$, $c = [\alpha]$, des Endpunktes $\hat{\alpha}(1)$ nicht von der Auswahl des Repräsentanten abhängt.

(ii) Sind nun $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X, x_0)$, so seien $f_\alpha, f_\beta \in \operatorname{Deck}(\hat{X}, X)$ die Decktransformationen mit $f_\alpha(\hat{x}_0) = \hat{\alpha}(1)$ $f_\beta(\hat{x}_0) = \hat{\beta}(1)$,

$$\Phi\big([\alpha]\big) = f_\alpha, \quad \Phi\big([\beta]\big) = f_\beta.$$

Es ist dann $f_\alpha \circ \hat{\beta}\colon I \to \hat{X}$ der Lift von β mit $f_\alpha \circ \beta(0) = f_\alpha(\hat{x}_0) = \hat{\alpha}(1)$ $\big($denn $\pi \circ (f_\alpha \circ \hat{\beta}) = \pi \circ \hat{\beta} = \beta\big) \implies \hat{\alpha} * (f_\alpha \circ \hat{\beta})$ ist Lift von $\alpha * \beta$ (mit Aufpunkt $\hat{x}_0$) $\implies \widehat{(\alpha * \beta)}(1) = \hat{\alpha} * (f_\alpha \circ \hat{\beta})(1) = f_\alpha \circ \hat{\beta}(1) = f_\alpha \circ f_\beta(\hat{x}_0) \implies \Phi\big([\alpha] \cdot [\beta]\big) = f_\alpha \circ f_\beta = \Phi\big([\alpha]\big) \cdot \Phi\big([\beta]\big)$.

(iii) Wir hatten schon gesehen, dass die Abildungen $\pi_1(X, x_0) \to \hat{\pi}^{-1}(x_0)$ und $\pi^{-1}(x_0) \to \operatorname{Deck}(\hat{X}, X)$ $\hat{x}_0' \mapsto f_{\hat{x}_0'}$, bijektiv sind. Also ist ihre Komposition Φ bijektiv. $\square$

(C.38) Kommentar. Das ergibt nun die Möglichkeit, die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ zu bestimmen, wenn man ihre universelle Überlagerung kennt:

(a) $X = \mathbb{S}^1$. Dann ist $\operatorname{ex}\colon (\mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{S}^1, 1)$ universelle Überlagerung und $\operatorname{Deck}(\mathbb{R}, \mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$, weil für $m \in \operatorname{ex}^{-1}(1) \in \mathbb{Z}$ gerade die Translation $t_m\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x + m$, die Decktranformation von ex, mit $t_m(0) = m$. Da $t_m \circ t_n = t_{m+n}$ ist, ist $\operatorname{Deck}(\mathbb{R}, \mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$ und damit (erst) $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \cong \mathbb{Z}$.

(b) $\pi\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ (für $n \geq 2$) ist universelle Überlagerung da $\pi_1(\mathbb{S}^n) = (1)$ ist, für $n \geq 2$. Die Decktransformationen sind $f = \mathbb{1}$ und die Antipodenabbildung $d\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, $d(x) = -x$. Es folgt:
$$\pi_1\big(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})\big) \cong \operatorname{Deck}(\mathbb{S}^n, \mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\big(\cong \{\pm 1\}\big).$$

(C.39) Bemerkung. Ist $\Gamma \subseteq \operatorname{Homo}(\hat{X})$ die Decktransformation einer Überlagerung $\pi\colon \hat{X} \to X$, so operiert Γ eigentlich diskontinuierlich auf $\hat{X}$.

Beweis. Sei $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ beliebig, $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ und $\gamma_1 \neq \gamma_2$. $\implies \gamma_1(\tilde{x}_0) \neq \gamma_2(\tilde{x}_0)$ (da γ_1, γ_2 beides Lifts von π über π sind; sonst wäre $\gamma_1 = \gamma_2$), $\pi \circ \gamma_j = \pi$ $(j = 1, 2)$. Sei $U \subseteq X$ gleichmäßig überlagerte offene Umgebung von $x_0 := \pi(\tilde{x}_0)$ und o.E. U wegzusammenhängend. Sei $\tilde{U}, \tilde{U}_1, \tilde{U}_2 \subseteq \tilde{X}$ die Blätter über U, die $\tilde{x}_0, \gamma_1(\tilde{x}_0), \gamma_2(\tilde{x}_0)$ enthalten. Es ist dann $\gamma_1(\tilde{U}) = \tilde{U}_1$, $\gamma_2(\tilde{U}) = \tilde{U}_2$ $\big($weil z.B. $\gamma_1|\tilde{U} = (\pi|\tilde{U}_1)^{-1} \circ (\pi|\tilde{U})$ ist$\big)$. $\implies \gamma_1(\tilde{U}) = \gamma_2(\tilde{U}) = \tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2 = \emptyset \implies$ Behauptung. $\square$

(C.40) Satz. *Sei $\hat{X}$ lokal wegzusammenhängend und einfach zusammenhängend.*

(a) Sei $\pi\colon (\hat{X}, \hat{x}_0) \to (X, x_0)$ Überlagerung und $\Gamma = \operatorname{Deck}(\hat{X}, X)$. Dann ist π äquivalent zu $\pi'\colon (\hat{X}, \hat{x}_0) \to (\hat{X}/\Gamma, [\hat{x}_0])$.

(b) Sei $\gamma \subseteq \operatorname{Homo}(\hat{X})$ Untergruppe, die eigentlich diskontinuierlich auf $\hat{X}$ operiert. Dann gilt für $\pi\colon \hat{X} \to \hat{X}/\Gamma$:
$$\operatorname{Deck}(\hat{X}, X) = \Gamma$$

Beweis. (a) Da Γ eigentlich diskontinuierlich operiert, ist $\pi'\colon \hat{X} \to \hat{X}/\Gamma$ eine Überlagerung. Da $\pi \circ \gamma = \pi$ ist, $\forall \gamma \in \Gamma \implies \exists \Phi\colon \hat{X}/\Gamma \to X$ stetig mit $\Gamma \circ \pi' = \pi$ (universelle Eigenschaft der Quotiententopolgie) und $\Phi\big([\hat{x}_0]\big) = x_0$.

Da π surjektiv und $\pi = \Phi \circ \pi'$, folgt: Φ surjektiv. Ist $\Phi\big([\hat{x}_1]\big) = \Phi\big([\hat{x}_2]\big) \implies \pi(\hat{x}_1) = \pi(\hat{x}_2) \implies \exists \gamma \in \Gamma$: $\gamma(\hat{x}_1) = \hat{x}_2$, da Γ transitiv auf den Fasern operiert (Liftungssatz) $\implies [\hat{x}_1] = [\hat{x}_2]$. Da lokal $\Phi|U = (\pi|\hat{U}) \circ (\pi'|\hat{U})^{-1}$ ist, ist Φ lokaler Homöomorphismus. Also folgt: Φ ist Homöomorphismus.

(b) Für jedes $\gamma \in \Gamma$ ist $\pi \circ \gamma = \pi$ (und $\pi \circ \gamma^{-1} = \pi$) also operiert Γ durch Decktransformationen für $\pi\colon \hat{X} \to \hat{X}/\Gamma$: $\Gamma \subseteq \operatorname{Deck}(\hat{X}, X)$. Andererseits: Sei $\hat{x}_0 \in \hat{X}$, $x' \in \operatorname{Deck}(\hat{X}, \hat{X}/\Gamma)$ und $\hat{x}_1 := \gamma'(\hat{x}_0) \in \pi^{-1}(x_0)$, $x_0 := \pi(\hat{x}_0)$. $\implies \exists \gamma \in \Gamma$ mit $\gamma(\hat{x}_0) = \hat{x}_1$. Da γ', γ Lifts von π sind, folgt: $\gamma = \gamma'$. Also: $\operatorname{Deck}(\hat{X}, \hat{X}/\Gamma) = \Gamma$. $\square$

(C.41) Satz (Hauptsatz der Überlagerungstheorie). *Sei (X, x_0) lokal wegzusammenhängend, zusammenhängend mit universellen Überlagerung. Dann gibt es zu jeder Untergruppe $\Gamma \subseteq \pi_1(X, x_0)$ bis auf Äquivalenz genau eine Überlagerung $\pi\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$, so dass Γ charakteristische Untergruppe für π ist.*

Beweisidee. Falls es $\pi\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ mit charakteristischer Untergruppe $\Gamma \subseteq \pi_1(X, x_0) = \mathrm{Deck}(\hat{X}, X)$ gibt, so muss $\Gamma \cong \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ und es gibt ein $f\colon (\hat{X}, \hat{x}_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ Überlagerung mit $\mathrm{Deck}(\hat{X}, \tilde{X}) = \Gamma$, also $f \sim \pi\colon \hat{X} \to \hat{X}/\Gamma$.

$$\begin{tikzcd}
(\hat{X}, \hat{x}_0) \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "\hat{\pi}"] & \\
(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \arrow[r, "\pi"'] & (X, x_0)
\end{tikzcd}$$

Setze daher: $\tilde{X} := \hat{X}/\Gamma$, $f\colon \hat{X} \to \tilde{X}$ kanonische Projektion, $\tilde{x}_0 := f(\hat{x}_0)$, $\pi\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$. Prüfe dann nach, dass $\pi\big([\hat{x}]\big) = \hat{\pi}(\hat{x})$ (wohldefiniert). π die gewünsche Eigenschaft hat. $\square$

Index

Literaturverzeichnis

[Wa] *F. Warner*: *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer-Verlag.

[SZ] *R. Stöcker ; H. Zieschang*: *Algebraische Topologie*; Teubner-Verlag.

[BC] *Bishop ; Crittenden*: *Geometry of Manifolds*; Academic Press.

[Hi] *Hirsch*: *Differential Topology*; Springer-Verlag.

[Mi] *J. Milnor*: *Topology from the Differentiable Viewpoint*; University of Virginia Press.

[Sp] *Spirak*: *Calculus on Manifolds*; Westview Press.

[He] *Helgason*: *Differential Geometrie, Lie groups and Symmetric Spaces*; Academic Press.

[Ho] *Hochschild*: *The structure of Lie groups*; Holden-Day.

[Ch] *Chevallier*: *Theorie des Groupes de Lie, II & III*; Heimann.

[HS] *Friedrich Hirzebruch ; Winfried Scharlau*: *Einführung in die Funktionalanalysis*; B.I.

[Lo] *F. Loose*: *Algebraische Topologie I & II*.