**Vorlesungsmitschrieb**

# Differentialgeometrie I

Prof. Dr. Frank Loose

im Wintersemester 2010/2011
an der Eberhard-Karls-Univerität Tübingen

gesetzt von Christian Power mit LaTeX

Letzte Änderung: 3. Februar 2011

# Vorwort

Dieses Scriptum ist ein Mitschrieb der Vorlesung Diffgeo I aus dem Wintersemester 2010/2011.
Wer Fehler findet, schickt mir bitte ein E-mail an: power2c@aol.com.

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Kapitel 1

# Mengentheoretische Topologie

**(1.1) Definition.** Sei $M$ eine Menge. Eine Abbildung $d : M \times M \to [0,\infty)$ heißt eine **Metrik** auf $M$, wenn gilt:

(a) $d(p,q) = 0 \iff p = q$;

(b) $d(q,p) = d(p,q)$, $\forall p,q \in M$;

(c) $d(p,r) \le d(p,q) + d(q,r)$, $\forall p,q,r \in M$ (Dreiecksungleichung).

Das Paar $(M,d)$ heißt dann ein **metrischer Raum**.

**(1.2) Beispiel.**

(a) Sei $\|\,.\,\|\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$, $\|x\| := \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$. Dann ist

$$d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0,\infty),\ d(x,y) := \|y - x\|$$

eine Metrik auf $\mathbb{R}^n$ (Übung). Es heißt $d = d_{\text{eukl}}$ die **euklidische Metrik** und $(\mathbb{R}^n, d_{\text{eukl}})$ der **euklidische Raum**.

(b) Sei $M$ eine beliebige Menge. Dann ist $d : M \times M \to [0,\infty)$,

$$d(p,q) := \begin{cases} 0 & \text{für } p = q, \\ 1 & \text{für } p \neq q \end{cases}.$$

eine Metrik auf $M$ (Übung). Sie heißt die **diskrete Metrik** auf $M$.

(c) Sei $V = \mathscr{C}\big([0,1]\big) := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ ist stetig}\}$. Setze $\|f\| := \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| < \infty$, und dann $d(f,g) := \|g - f\|$. Dann ist $d$ eine Metrik auf $V$ (Übung).

**(1.3) Beispiel.** Sei $(M,d)$ metrischer Raum und $A \subseteq M$ beliebige Teilmenge. Dann *erbt* $A$ durch $d_A : A \times A \to [0,\infty)$, $d_A(p,q) := d(p,q)$ eine Metrik. Sie heißt die **induzierte Metrik**. Insbesondere: Ist $M \subseteq \mathbb{R}^n$ beliebige Teilmenge, so $d := d_{\text{eukl}}|M \times M$ die **induzierte euklidische Metrik**.

**(1.4) Definition.** Sei $(M,d)$ ein metrischer Raum, $p \in M$, $r > 0$.

(a) Es heißt dann $B(p;r) := \{q \in M : d(q,p) < r\}$ der (offene) **Ball** *um $p$ mit Radius $r$*.

(b) Es heißt eine Teilmenge $U \subseteq M$ **offen**, wenn es zu jedem $p \in U$ ein $r > 0$ gibt mit $B(p;r) \subseteq U$.

(c) Es heißt $S \subseteq M$ eine **Umgebung** *von $p$*, wenn es ein offenes $U \subseteq M$ gibt mit $p \in U \subseteq S$.

**(1.5) Definition.** Seien $(M_1, d_1)$ und $(M_2, d_2)$ metrische Räume.

(a) Eine Abbildung $\Phi : M_1 \to M_2$ heißt **stetig** *in* $p_1 \in M_1$, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass aus $d_1(x, p_1) < \delta$ folgt: $d_2\big(\Phi(x), \Phi(p_1)\big) < \varepsilon$.

(b) $\Phi$ heißt **stetig**, wenn $\Phi$ stetig ist in $p \in M_1$, für alle $p \in M_1$.

**(1.6) Bemerkung.** Sei $\Phi : M_1 \to M_2$ eine Abbildung zwischen metrischen Räumen, $p_1 \in M_1$. Dann gilt:

(a) Es ist $\Phi$ stetig in $p_1$ genau, wenn für jede Umgebung $S_2 \subseteq M_2$ von $p_2 := \Phi(p_1)$ gilt: $\Phi^{-1}(S_2)$ ist Umgebung von $p_1$.

(b) Es ist $\Phi$ stetig, genau wenn das Urbild jeder offenen Menge offen ist.

***Beweis.*** (a) „$\Longrightarrow$“: Sei $S_2$ Umgebung von $p_2$ und $U_2 \subseteq M_2$ offen mit $p_2 \in U_2 \subseteq S_2$. Da $U_2$ offen ist, existiert $\varepsilon > 0$, so dass $B(p_2; \varepsilon) \subseteq U_2$. Da $\Phi$ stetig in $p_1$ ist, existiert nun ein $\delta > 0$ so klein, dass $\Phi\big(B(p_1; \delta)\big) \subseteq B(p_2; \varepsilon)$ ist. Also ist

$$B(p_1; \delta) \subseteq \Phi^{-1}\Big(\Phi\big(B(p_1; \delta)\big)\Big) \subseteq \Phi^{-1}\big(B(p_2; \varepsilon)\big) \subseteq \Phi^{-1}(S_2),$$

und da $B(p_1; \delta)$ offen ist (Übungsaufgabe, Blatt 1), folgt: $\Phi^{-1}(S_2)$ ist Umgebung von $p_1$.

„$\Longleftarrow$“: Sei $\varepsilon > 0$ und $S_2 := B(p_2; \varepsilon) \Longrightarrow S_2$ ist Umgebung von $p_2$, also ist auch $\Phi^{-1}(S_2)$ Umgebung von $p_1 \Longrightarrow \exists \delta > 0 : B(p_1; \delta) \subseteq \Phi^{-1}(S_2) \Longrightarrow$

$$\Phi\big(B(p; \delta)\big) \subseteq \Phi\big(\Phi^{-1}(S_2)\big) \subseteq S_2 = B(p_2; \varepsilon).$$

$\Longrightarrow \Phi$ ist stetig in $p_1$.

(b) Übung (Blatt 1). □

**(1.7) Bemerkung.** Sei $M$ ein metrischer Raum. Dann gilt:

(a) Ist $(U_i)_{i \in I}$ beliebige Familie offener Mengen in $M$, so ist auch $\bigcup_{i \in I} U_i$ offen;

(b) Ist $n \in \mathbb{N}$, $U_1, \ldots, U_n \subseteq M$ offen so ist auch $\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ offen.

***Beweis.*** (a) Sei $p \in U := \bigcup_{i \in I} U_i. \Longrightarrow \exists i_0 \in I : p \in U_{i_0}. \Longrightarrow \exists r > 0 : B(p; r) \subseteq U_{i_0} \subseteq U.$

(b) Sei $p \in U := \bigcap_{i=1}^{n} U_i \Longrightarrow \forall i, \exists r_i > 0 : B(p; r_i) \subseteq U_i$. Setze $r := \min_{i=1,\ldots,n}(r_i) > 0$. $\Longrightarrow B(p; r) \subseteq B(p; r_i) \subseteq U_i$, $\forall i = 1, \ldots, n. \Longrightarrow B(p; r) \subseteq U.$ □

**(1.8) Kommentar.** Stetige Abbildungen $\Phi : M_1 \to M_2$ zwischen metrischen Räumen sind viel flexibler als **abstandstreue Abbildungen** $\big($d.h.: $\forall p_1, q_1 \in M_1 : d_2\big(\Phi(p_1), \Phi(q_1)\big) = d_1(p_1, q_1)\big)$ z.B. ist für $\mathbb{S}^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ und $\mathbb{E} := \{x \in \mathbb{R}^3 : (\frac{x_1}{a_1})^2 + (\frac{x_2}{a_2})^2 + (\frac{x_3}{a_3})^2 = 1\}$ $(a_1, a_2, a_3 > 0)$ die Abbildung $\Phi : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{E}$, $\Phi(x) = (a_1 x_1, a_2 x_2, a_3 x_3)$ bijektiv, stetig und auch $\Phi^{-1}$ ist stetig, aber $\Phi$ ist im allgemeinen nicht abstandstreu. Man sagt, $\mathbb{S}^2$ und $\mathbb{E}$ haben *die gleiche Gestalt*, $\mathbb{S}^2 \simeq \mathbb{E}$. Um Räume zunächst auf ihre bloße Gestalt zu untersuchen, führt man das Konzept der topologische Räume ein.

**(1.9) Definition.** Sei $M$ ein Menge. Ein System $\tau$ von Teilmengen von $M$, $\tau \subseteq \mathfrak{P}(M)$ $\big(\mathfrak{P}(M) :=$ Potenzmenge von $M\big)$ heißt eine **Topologie** auf $M$, wenn gilt:

(a) Ist $I$ eine beliebige (Index-) Menge und $U_i \in \tau$, so ist auch $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$, die leere Menge $\emptyset \in \tau$.

(b) Ist $n \in \mathbb{N}$ und sind $U_1, \ldots, U_n \in \tau$, so ist auch $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \tau$, die volle Teilmenge $M \in \tau$.

Man nennt $U \subseteq M$ dann **offen**, wenn $U \in \tau$. Das Paar $(M, \tau)$ heißt dann ein **topologischer Raum**.

**(1.10) Beispiel.**

(a) Sei $(M, d)$ ein metrischer Raum. Dann ist das System $\tau \subseteq \mathfrak{P}(M)$ aller offenen Teilmengen von $M$ eine Topologie auf $M$ $\big($siehe (1.7)$\big)$. Man nennt dies die von der Metrik **induzierte Topologie** auf $M$.

(b) Sei $M$ eine beliebige Menge und $\tau$ die volle Potenzmenge, $\tau = \mathfrak{P}(M)$. Dann ist $\tau$ eine Topologie auf $M$. Sie heißt die **diskrete Topologie** auf $M$.

(c) Sei $M$ eine beliebige Menge und $\tau = \{\emptyset, M\}$. Es heißt dann $\tau$ die **indiskrete Topologie** auf $M$.

**(1.11) Definition.** Sei $(M, \tau)$ ein topologischer Raum.

(a) Eine Teilmenge $A \subseteq M$ heißt **abgeschlossen**, wenn das Komplement $\complement A = M \setminus A$ offen ist;

(b) Sei $p \in M$. Eine Teilmenge $S \subseteq M$ heißt **Umgebung** von $p$, wenn es ein offenes $U \subseteq M$ gibt mit
$$p \in U \subseteq S.$$

**(1.12) Definition.** Seien $M$ und $N$ topologische Räume und $\Phi : M \to N$ eine Abbildung.

(a) Es heißt $\Phi$ **stetig** in $p$, wenn das Urbild jeder Umgebung von $\Phi(p)$ eine Umgebung von $p$ ist;

(b) es heißt $\Phi$ **stetig**, wenn das Urbild jeder offenen Menge offen ist;

(c) es heißt $\Phi$ ein **Homöomorphismus**, wenn $\Phi$ stetig ist und es ein stetiges $\Psi : N \to M$ gibt mit
$$\Psi \circ \Phi = \mathbb{1}_M, \ \Phi \circ \Psi = \mathbb{1}_N$$
($\mathbb{1}_M$ bezeichnet die Identität auf $M$, $\mathbb{1}_M(p) = p, \forall p \in M$). $M$ und $N$ heißen **homöomorph**, $M \simeq N$, wenn es einen Homöomorphismus zwischen ihnen gibt.

**(1.13) Kommentar.** Es ist $\Phi : M \to N$ stetig, genau wenn $\Phi$ stetig in jedem Punkt $p \in M$ ist (Übung).

**(1.14) Kommentar.**

(a) Ist $(M, d)$ ein metrischer Raum und $\tau \subseteq \mathfrak{P}(M)$ die induzierte Topologie, so gibt es viele andere Metriken $\tilde{d}$, die die gleiche Topologie induzieren, z.B. $\tilde{d} = \alpha \cdot d$ $(\alpha > 0)$.

(b) Ist umgekehrt $(M, \tau)$ ein topologischer Raum, so heißt $(M, \tau)$ **metrisierbar**, wenn es eine Metrik $d$ auf $M$ gibt, so dass $\tau$ von $d$ induziert ist.

**(1.15) Definition.** Man nennt einen topologischen Raum $M$ **hausdorffsch**, wenn er folgendes **Trennungsaxiom** erfüllt: zu je zwei verschiedenen Punkten $p, q \in M$, $p \neq q$, existieren offene Mengen $U, V \subseteq M$ mit $p \in U, q \in V$ und $U \cap V = \emptyset$.

**(1.16) Bemerkung.** Ist $(M, d)$ ein metrischer Raum, so ist ihre induzierte Topologie hausdorffsch.

***Beweis.*** Seien $p, q \in M$, $p \neq q$ und $d := d(p,q) > 0$. Wähle dann $U := B(p; \frac{d}{2})$, $V := B(q; \frac{d}{2})$. Dann ist $U$ und $V$ offen, $p \in U$, $q \in V$ und auch $U \cap V = \emptyset$, denn wäre $x \in U \cap V$, so wäre

$$d = d(p,q) \leq d(p,x) + d(x,q) = d(x,p) + d(x,q) < \frac{d}{2} + \frac{d}{2} = d \lightning$$

$\square$

**(1.17) Definition.**

(a) Sei $(M, \tau)$ ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $\mathfrak{B} \subseteq \tau$ heißt eien **Basis** der Topologie, wenn jede offene Menge $U$ Vereinigung von Elementen aus $\mathfrak{B}$ ist,

$$U = \bigcup_{\substack{B \in \mathfrak{B} \\ B \subseteq U}} B.$$

(b) Es heißt $(M, \tau)$ von **abzählbarer Topologie**, wenn $M$ eine abzählbare Basis besitzt.

**(1.18) Beispiel.** Der euklidische Raum $\mathbb{E}^n := (\mathbb{R}^n, d_{\text{eukl}})$ hat abzählbare Topologie, denn

$$\mathfrak{B} = \left\{ B(q; \frac{1}{n}) : q \in \mathbb{Q}^n, m \in \mathbb{N} \right\}$$

ist eine abzählbare Basis (Übung).

**(1.19) Definition.** Ist $(M, \tau)$ ein topologischer Raum und $N \subseteq M$ eine Teilmenge. Wir definieren die **Relativtopologie** (oder auch **induzierte Topologie** oder **Teilraumtopologie**) auf $N$ wie folgt: $V \subseteq N$ ist offen genau dann, wenn es ein $U \subseteq M$, $U \in \tau$ gibt mit $U \cap N = V$.

**(1.20) Kommentar.**

(a) Sei $(M, \tau)$ topologischer Raum und $N \subseteq M$ mit der Relativtopologie versehen. Dann ist die **Inklusion** $i : N \to M$, $i(p) = p$ stetig. Die Relativtopologie ist die **gröbste Topologie** auf $N$, so dass $i$ stetig ist.

(b) Eine Topologie $\tau_1$ auf $N$ heißt **gröber** als ein Topologie $\tau_2$ auf $N$, wenn $\tau_1 \subseteq \tau_2$ (und $\tau_2$ heißt dann **feiner** als $\tau_1$). Man beachte: Ist $\tau_1$ **echt gröber** als $\tau_2$, d.h.: $\tau_1 \subsetneqq \tau_2$, so ist die Identität $\mathbb{1} : (N, \tau_2) \to (N, \tau_1)$ stetig und bijektiv, ihre Umkerung $\mathbb{1}^{-1} = \mathbb{1} : (N, \tau_1) \to (N, \tau_2)$ aber nicht stetig.

(c) Die Relativtopologie hat folgende **universelle Eigenschaft**: Ist $P$ ein topologischer Raum und $\Phi : P \to N$ eine Abbildung, so ist $\Phi$ genau dann stetig, wenn $i \circ \Phi : P \to M$ stetig ist (Übung).

$$\begin{tikzcd} P \arrow[d, "\Phi"'] \arrow[dr, "i \circ \Phi"] \arrow[dr, phantom, shift right=3, "\circlearrowleft"] & \\ N \arrow[r, "i"'] & M \end{tikzcd}$$

(d) Ist $M$ ein Hausdorffraum und $N \subseteq M$ eine Teilmenge, so ist die Teilraumtopologie auf $N$ auch hausdorfsch.

(e) Ist $M$ von abzählbarer Topologie, so auch $N$. Insbesondere ist also jede Teilmenge $M$ des euklidischen Raumes $\mathbb{E}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) mit ihrer induzierten Topologie hausdorffsch und von abzählbarer Topologie.

**(1.21) Beispiel.** Sei $\mathbb{R}^n$ mit der Standard-Topologie versehen. Wir nennen

$$\mathbb{B}^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x\| \leq 1\}$$

zusammen mit der Teilraumtopologie den **n-dimensionalen Ball** und

$$\mathbb{S}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \ \|x\| = 1\}$$

die **n-dimensionale Sphäre**.

**(1.22) Beobachtung.** Sei $(\tau_i)_{i\in I}$ eine Familie von Topologien auf einer Menge $M$. Dann ist auch

$$\tau := \bigcap_{i\in I} \tau_i$$

eine Topologie auf $M$.

**(1.23) Kommentar.**

(a) Ist $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(M)$ eine beliebige Teilmenge ($M$ Menge), so gibt es deshalb eine kleinste Topologie $\tau$ auf $M$, die $\mathfrak{A}$ enthält, nämlich

$$\tau = \bigcap \{\sigma \subseteq \mathfrak{P}(M) : \ \sigma \text{ ist Topologie}, \sigma \supseteq \mathfrak{A}\}$$

$\tau$ heißt *die von* $\mathfrak{A}$ *erzeugte Topologie* und $\mathfrak{A}$ ein **Erzeugendensystem** oder eine **Subbasis** von $\tau$.

(b) Expliziter kann man $\tau$ so beschreiben: zunächst bilde man das System $\mathfrak{B}$ aller endlicher Durschnitte von $\mathfrak{A}$, dann das System aller (beliebigen) Vereinigungen von Elementen aus $\mathfrak{B}$.

(c) Es reicht also z.B. die Stetigkeit einer Abbildung $\Phi : \ M \to N$ auf einer Subbasis $\mathfrak{A}$ der Topologie auf $N$ zu prüfen: $f$ stetig $\iff f^{-1}(V)$ offen, $\forall V \in \mathfrak{A}$.

**(1.24) Definition.** Seien $M_1$ und $M_2$ topologische Räume, $M = M_1 \times M_2$ ihr cartesisches Produkt und $\pi_i : \ M \to M_i$ ($i = 1, 2$) die kanonische Projektionen, $\pi_i(p_1, p_2) = p_i$. Sei

$$\mathfrak{A} := \{\pi_i^{-1}(U_i) \subseteq M : \ U_i \subseteq M \text{ offen}, i = 1, 2\}.$$

Die von $\mathfrak{A}$ erzeugte Topologie heißt die **Produkttopologie** auf $M$.

**(1.25) Kommentar.**

(a) Es ist also die Produkttopologie auf $M$ die *gröbste* Topologie, bzgl. der $\pi_1$ und $\pi_2$ stetig sind.

(b) Bezeichnet

$$\mathfrak{B} := \{U_1 \times U_2 \subseteq M : \ U_i \subseteq M_i \text{ offen } (i = 1, 2)\},$$

so ist also $\mathfrak{B}$ eine Basis der Produkttopologie auf $M$.

(c) Ist $P$ ein weiterer topologischer Raum, so ist eine Abbildung $\Phi : P \to M = M_1 \times M_2$ genau dann stetig, wenn $\pi_i \circ \Phi : \ P \to M_i$ stetig ist ($i = 1, 2$) (universelle Eigenschaft der Produkttopologie) (Übung)

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
M_1 & & M_2 \\
 & P \arrow[ul, "\pi_1\circ\Phi"] \arrow[ur, "\pi_2\circ\Phi"'] \arrow[uu, "\Phi"] &
\end{tikzcd}$$

(d) Sind $M_1$ und $M_2$ hausdorffsch, so ist auch $M_1 \times M_2$ hausdorffsch. Sind $M_1$ und $M_2$ von abzählbarer Topologie, so auch $M_1 \times M_2$.

**(1.26) Beispiel.**

(a) Die Produkttopologie auf $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}^n$ (wo $\mathbb{R}$ die Standard-Topologie trage) stimmt mit der Standard-Topologie überein (Übung).

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichnet man mit

$$\mathbb{T}^n := \mathbb{S}^1 \times \ldots \times \mathbb{S}^1$$

(zusammen mit der Produkttopologie) als den **n-dimensionalen Torus**.

**(1.27) Definition.** Sei $M$ ein topologischer Raum, $R \subseteq M \times M$ eine Äquivalenz-Relation $\big((p,q) \in R \Longleftrightarrow p \sim_R q\big)$, $[p] := \{q \in M : p \sim q\}$ eine Äquivalenz-Klasse und

$$M/R = \{[p] \subseteq \mathfrak{P}(M) : \; p \in M\}$$

die Quotientenmenge. Bezeichne $\pi : \; M \to M/R$, $p \mapsto [p]$, die kanonische Projektion. Eine Teilmenge $U \subseteq M/R$ heißt *offen*, wenn $\pi^{-1}(U) \subseteq M$ offen.

**(1.28) Kommentar.**

(a) Die so definierten offenen Mengen bilden eine Topologie auf $M/R$.

(b) Sie ist die **feinste** Topologie auf $M$, so dass $\pi$ stetig ist.

(c) Für einen topolgischen Raum $P$ ist eine Abbildung $\Phi : \; M/R \to P$ genau dann stetig, wenn $\Phi \circ \pi \; : \; M \to P$ es ist (universelle Eigenschaft der **Quotienten-Topologie**). (Übung)

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\Phi\circ\pi"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & P \\ M/R \arrow[ur, "\Phi"'] & \end{tikzcd}$$

**(1.29) Beispiel.**

(a) Sei $I = [0,1]$ (mit der induzierten Topologie) und $R \subseteq I \times I$ die von $(0,1)$ *erzeugte Äquivalenz-Relation* $\big($d.h.: die kleinste, die $(0,1)$ enthält$\big)$, also

$$R = \big\{(0,1),\,(1,0),\,(p,p) : \; p \in I\big\}.$$

Dann ist $I/R \simeq \mathbb{S}^1$ vermöge

$$I/R \to \mathbb{S}^1,\; \Phi\big([t]\big) = \big(\cos(2\pi t),\, \sin(2\pi t)\big)$$

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\widetilde{\Phi}(t)=e^{2\pi i t}"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{S}^1 \\ I/R \arrow[ur, dashed, "\Phi"'] & \end{tikzcd}$$

ein Homöomorphismus (Übung).

(b) Sei $R$ auf $M = I \times I$ die von $(0,t) \sim (1,t)$ und $(s,0) \sim (s,1)$ erzeugte Äquivalenz-Relation. Dann ist

$$\Phi : \; M/\!\sim \; \to \mathbb{T}^2 \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{C},\; \Phi\big([s,t]\big) = (e^{2\pi \mathrm{i} s}, e^{2\pi \mathrm{i} t})$$

ein Homöomorphismus.

(c) Sei $R$ die Äquivalenz-Relation auf $M = I \times I$, die von $(0,t) \sim (1,t)$ erzeugt wird. Dann nennt man $Z := M/\!\sim$ den **Zylinder**.

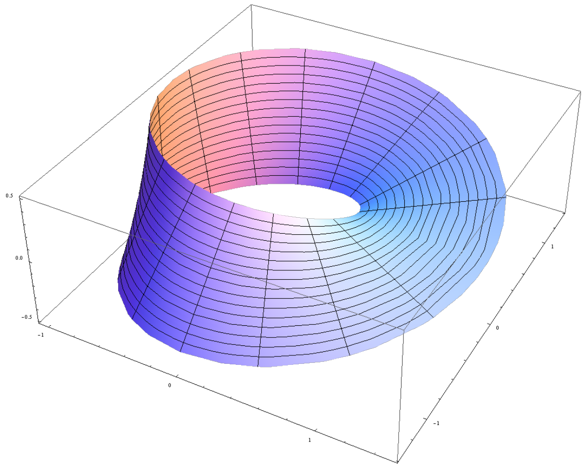


Abbildung 1.1: Möbiusband

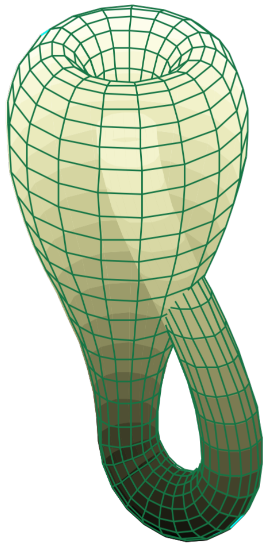


Abbildung 1.2: Kleinsche Flasche

(d) Sei nun $R$ auf $M = I \times I$ von $(0,t) \sim (1, 1-t)$ erzeugt. Dann nennt man $M = X/\sim$ das **Möbiusband**.

(e) Sei schließlich $R$ auf $M = I \times I$ von $(0,t) \sim (1,t)$ und $(s,0) \sim (1-s,1)$ erzeugt. Dann heißt $K = M/\sim$ die **Kleinsche Flasche**.

**(1.30) Definition.** Seien $p, q \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ äquivalent, wenn wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gibt mit $q = \lambda p$. Der Quotientenraum

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) := \left(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}\right) / \sim$$

heißt *der n-dimensionale* (reell-) **projektive Raum**.

**(1.31) Kommentar.**

(a) Für einen Punkt $[p] \in \mathbb{P}^n$ schreibt man häufig

$$[p] = (p_0 : p_1 : \ldots : p_n),$$

weil der Repräsentant $(p_0, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ bis auf ein multiplikatives Inverses eindeutig ist. Die Abbildung $j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{P}^n$,

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (1 : x_1 : \ldots : x_n)$$

ist eine **Einbettung** (d.h.: $\mathbb{R}^n \to j(R^n) \subseteq \mathbb{P}^n$ ist ein Homöomorphismus). Die Teilmenge

$$H := \{(x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n : x_0 = 0\},$$

also $H = \mathbb{P}^n \setminus j(\mathbb{R}^n)$ wird als **unendlich ferne Hyperebene** bezeichnet.

(b) Identifiziert man auf $\mathbb{S}^n$ **Antipoden**, $x \sim \pm x$, so ist $\mathbb{P}^n \simeq \mathbb{S}^n/\sim$ vermöge

$$[x] \mapsto \left[\frac{x}{\|x\|}\right] \qquad \text{(Übung).}$$

**(1.32) Vorbereitung.** Seien $M_1$ und $M_2$ Mengen. Dann gibt es (bis auf Isomorphie) genau eine Menge $M$ zusammen mit injektiven Abbildungen $i_1 : M_1 \to M$, $i_2 : M_2 \to M$, so dass $M = i_1(M_1) \sqcup i_2(M_2)$ (d.h.: $i_1(M_1) \cap i_2(M_2) = \emptyset$). Diese Menge wird im folgenden mit $M_1 + M_2$ bezeichnet.

**(1.33) Definition.** Seien $M_1$ und $M_2$ topologische Räume und $M = M_1 + M_2$ ihre mengentheoretische Summe mit ihren natürlichen Inklusionen $i_j : M_j \to M$ $(j = 1, 2)$. Wir nennen dann $U \subseteq M$ **offen**, wenn $i_j^{-1}(U) \subseteq M_j$ offen ist.

**(1.34) Kommentar.**

(a) Die so definierten offenen Mengen bilden eine Topologie auf $M$. Sie heißt die **Summentopologie** und ist die feinste Topologie auf $M$, so dass $i_j : M_j \to M$ stetig ist $(j = 1, 2)$.

(b) Ist $N$ ein weiterer topologischer Raum und $\Phi : M_1 + M_2 \to N$ eien Abbildung, so ist $\Phi$ stetig genau dann wenn $\Phi \circ i_j : M_j \to N$ stetig ist $(j = 1, 2)$. (Übung)

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[dr, "i_1"] \arrow[drr, bend left, "\Phi\circ i_1"] & & \\
& M \arrow[r, "\Phi"] & N \\
M_2 \arrow[ur, "i_2"'] \arrow[urr, bend right, "\Phi\circ i_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

**(1.35) Beispiel.** Seien $M$ und $N$ topologische Räume, $p \in M$ und $q \in N$. Identifiziert man $p$ mit $q$ in $M + N$, so nennt man $M + N/\sim$ die **Einpunktvereinigung** von $M$ und $N$ (entlang $p$ und $q$) und schreibt

$$M \vee N := M + N/\sim .$$

Zum Beispiel ist $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ die Figur "Acht".

**(1.36) Definition.** Ein topologischer Raum $M$ heißt **zusammenhängend**, wenn folgendes gilt: Sind $U, V \subseteq M$ offen mit $U \cup V = M$ und $U \cap V = \emptyset$, so muss $U = \emptyset$ oder $V = \emptyset$ gelten.

**(1.37) Kommentar.**

(a) Ein Raum $M$ ist also genau dann zusammenhängend, wenn die einzigen Teilmengen von $M$, die zugleich offen und abgeschlossen sind, nur die leere Menge $\emptyset$ und die volle Menge sind.

(b) Ein topologischer Raum ist zusammenhängend, wenn er nicht homöomorph zu der topologischen Summe $U + V$ zweier nicht-leerer Teilräume $U, V \subseteq M$ ist (Übung).

**(1.38) Beispiel.** Das abgeschlossene Intervall $I = [0, 1]$ ist zusammenhängend.

***Beweis.*** Sei $I = U \sqcup V$ mit $U \neq \emptyset \neq V$ und setze $a := \sup(U)$, $b := \sup(V)$ (Vollständigkeit von $\mathbb{R}$!). Da $U \subseteq I$ abgeschlossen, $I \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen $\Longrightarrow U \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen $\Longrightarrow a \in U$. Weil $U$ offen ist $\Longrightarrow a = 1$; genau so $b = 1 \Longrightarrow U \cap V \neq \emptyset$ $\lightning$ $\Longrightarrow I$ ist zusammenhängend. $\square$

**(1.39) Proposition.** *Seien $M$ und $N$ topologischer Raum, $\Phi : M \to N$ stetig. Ist $M$ zusammenhängend, so auch $\Phi(M) \subseteq N$.*

***Beweis.*** O.E.: $\Phi$ surjektiv $\big($sonst betrachte $\Phi' : M \to \Phi(M)$ mit $\Phi'(p) := \Phi(p)\big)$. Seien nun $V_1, V_2 \subseteq N$ offen mit $N = V_1 \sqcup V_2$. $\Longrightarrow M = \Phi^{-1}(V_1) \sqcup \Phi^{-1}(V_2) \Longrightarrow \Phi^{-1}(V_1) = \emptyset$ oder $\Phi^{-1}(V_2) = \emptyset$. Da $\Phi$ surjektiv ist, muss also $V_1 = \emptyset$ oder $V_2 = \emptyset$, also: $N$ zusammenhängend. $\square$

**(1.40) Definition.** Sei $M$ ein topologischer Raum.

(a) Ein **Weg in** $M$ ist eine stetige Abbildung $\alpha : I \to M$, $I = [0,1]$. Es heißt $\alpha(0)$ der **Anfangspunkt** von $\alpha$ und $\alpha(1)$ der **Endpunkt** von $\alpha$.

(b) $M$ heißt **wegzusammenhängend**, wenn es zu beliebigen $p, q \in M$ einen Weg $\alpha$ in $M$ gibt mit $\alpha(0) = p$ und $\alpha(1) = q$.

**(1.41) Beispiel.** $M = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist nicht wegzusammenhängend (Zwischenwertsatz).

**(1.42) Bemerkung.** Ist $M$ wegzusammenhängend, so auch zusammenhängend.

***Beweis.*** Sei $M = U \sqcup V$ mit $U, V \subseteq M$ offen, $U \neq \emptyset \neq V$. Wähle $p \in U$, $q \in V$ und einen Weg $\alpha : I \to M$ von $p$ nach $q$. $\Longrightarrow I = \alpha^{-1}(U) \sqcup \alpha^{-1}(V) \Longrightarrow$ da $I$ zusammenhängend ist muss $\alpha^{-1}(U) = \emptyset$ oder $\alpha^{-1}(V) = \emptyset$: $\lightning$, da $0 \in \alpha^{-1}(U)$, $1 \in \alpha^{-1}(V)$. $\square$

**(1.43) Beispiel.** Der Teilraum

$$M = \big\{(t, \sin\frac{1}{t}) \in \mathbb{R}^2 : t > 0\big\} \sqcup \big\{(0,y) : y \in [-1,1]\big\}$$

ist zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend (Übung).

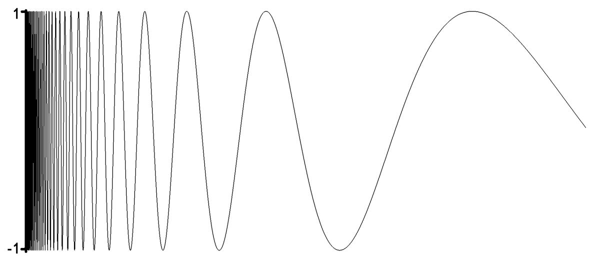



Abbildung 1.3: Sinuskurve der Topologen

**(1.44) Definition.** Sei $M$ ein topologischer Raum und $p \in M$. Das System aller Umgebungen wird mit $\mathfrak{A}(p) \subseteq \mathfrak{P}(M)$ bezeichnet. Man nennt nun ein Teilsystem $\mathfrak{B}(p) \subseteq \mathfrak{A}(p)$ eine **Umgebungsbasis von** $p$, wenn es zu jedem $S \in \mathfrak{A}(p)$ ein $B \in \mathfrak{B}(p)$ gibt mit $B \subseteq S$.

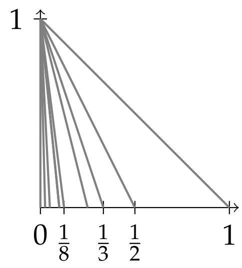
**(1.45) Definition.** Ein topologischer Raum heißt **lokal wegzusammenhängend**, wenn jeder Punkt $p \in M$ eine Umgebungsbasis aus wegzusammenhängenden Mengen besitzt.

**(1.46) Kommentar.**

(a) Ein lokal wegzusammenhängender Raum braucht nicht wegzusammenhängend sein. Beispiel: $M = \mathbb{R}^*$.

(b) Ein wegzusammenhängender Raum braucht auch nicht lokal wegzusammenhängend zu sein. Beispiel: (Übung)

$$M = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{\begin{pmatrix} 1/n \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \sqcup \overline{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \quad (\overline{pq} = \text{ Strecke von } p \text{ nach } q)$$




**(1.47) Proposition.** *Sei $M$ lokal wegzusammenhängend. Dann gilt: $M$ zusammenhängend $\iff$ $M$ wegzusammenhängend.*

***Beweis.*** „$\Longleftarrow$“: Siehe (1.45).
„$\Longrightarrow$“: Sei $p \in M$ und $U := U(p)$ die **Wegkomponente von** $p$, d.h.:

$$U(p) := \{x \in M : \exists \text{ Weg von } p \text{ nach } x\}$$

(also die größte wegzusammenhängende Teilmenge von $M$, die $p$ enthält). Es ist $U$ offen, denn sei $x \in U$. Sei $V \in \mathfrak{U}(x)$, $V$ wegzusammenhängend $\Longrightarrow$ $V \subseteq U$. Klar ist weiter: Für $q \in M$ ist entweder $U(p) = U(q)$ oder $U(p) \cap U(q) = \emptyset$.

$$\Longrightarrow M = \underbrace{U(p)}_{\text{offen}} \sqcup \underbrace{\bigcup_{q \notin U(p)} U(q)}_{\text{offen}}.$$

$\Longrightarrow M = U(p) \Longrightarrow M$ ist wegzusammenhängend. □

**(1.48) Beispiel.** $\mathbb{R}^n \not\approx \mathbb{R}$ für $n \geq 2$.

***Beweis.*** Angenommen $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ ist Homöomorphismus $\Longrightarrow$ $\Psi := \Phi|\mathbb{R}^* : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^* \setminus \{\Phi(0)\}$ ist auch Homöomorphismus. Aber $\mathbb{R}^*$ ist nicht (weg-) zusammenhängend, $\mathbb{R}^n \setminus \{p\}$ $(p = \Phi(0))$ für $n \geq 2$ aber wohl: $\lightning$. □

**(1.49) Definition.** Sei $M$ ein topologischer Raum.

(a) Eine Familie $(U_i)_{i \in I}$ von Teilmengen von $M$ heißt eine **offene Überdeckung von** $M$, wenn alle $U_i$ offen sind $(i \in I)$ und $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ ist.

(b) Es heißt $M$ **kompakt**, wenn $M$ hausdorffsch und jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung hat.

**(1.50) Kommentar.**

(a) Ist $M$ ein topologischer Raum, $N \subseteq M$ und $(U_i)_{i \in I}$ Familie offener Mengen von $M$ mit $N \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$, so spricht man auch von einer offenen Überdeckung von $N$. Es ist ja dann $V_i := U_i \cap N$ offen in $N$ und $(V_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $N$ im Sinne von (1.49).

(b) Durch Komplementbildung kann man eien äquivalente Beschreibung der kompakten Räumen so bekommen: $M$ ist hausdorffsch und ist $(A_i)_{i \in I}$ Familie abgeschlossener Teilmengen mit $\bigcap_{i \in I} A_i = \emptyset$, so gibt es $i_1, \ldots, i_n \in I$, so dass $A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_n} = \emptyset$ ist.

**(1.51) Proposition.** *Seien $M$ und $N$ Hausdorff-Räume und $\Phi : M \to N$ stetig. Ist $M$ kompakt, so auch $\Phi(M)$.*

***Beweis.*** O.E.: $\Phi$ ist surjektiv, $\Phi(M) = N$. Sei $N = \bigcup_{i\in I} V_i$, $V_i \subseteq N$ offen. $\Longrightarrow M = \bigcup_{i\in I} \Phi^{-1}(V_i) \Longrightarrow \exists i_1, \ldots, i_n \in I$:

$$M = \bigcup_{j=1}^{n} \Phi^{-1}(V_{i_j}) \Longrightarrow N = \bigcup_{j=1}^{n} V_{i_j}.$$

□

**(1.52) Lemma.**

*(a) Sei $M$ ein kompakter topologischer Raum und $A \subseteq M$ abgeschlossen. Dann ist auch $A$ kompakt.*

*(b) Sei $M$ ein Hausdorff-Raum und $K \subseteq M$ kompakt. Dann ist $K$ abgeschlossen.*

***Beweis.*** **Zu (a):** Sei $A_i \subseteq A$ abgeschlossen, $i \in I$ und $\bigcap_{i\in I} A_i = \emptyset$. Da $A$ abgeschlossen $\Longrightarrow A_i \subseteq M$ abgeschlossen in $M \Longrightarrow \exists i_1, \ldots, i_n \in I : \bigcap_{j=1}^{n} A_{i_j} = \emptyset$, also $A$ kompakt.

**Zu (b):** Sei $p \in \complement K = M \setminus K$. Zu $x \in K$ wähle offene Mengen $U_x \in \mathfrak{A}(x)$, $V_x \in \mathfrak{A}(p)$ mit $U_x \cap V_x = \emptyset$. Weil $K = \bigcup_{x\in K} U_x \Longrightarrow \exists x_1, \ldots, x_n \in K : K \subseteq U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_n}$. Setze $V := V_{x_1} \cap \ldots \cap V_{x_n} \Longrightarrow V \in \mathfrak{A}(p)$ und $V \cap K = \emptyset \Longrightarrow \complement K$ ist offen, also $K$ abgeschlossen. □

**(1.53) Kommentar.** In einem kompakten Raum ist eine Teilmenge also genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen ist.

**(1.54) Proposition.** *Sei $M$ ein kompakter Raum und $N$ hausdorffsch. Ist dann $\Phi : M \to N$ stetig und bijektiv, so ist $\Phi$ bereits ein Homöomorphismus.*

***Beweis.*** Zeige: $A \subseteq M$ abgeschlossen impliziert $\Phi(A)$ abgeschlossen ($\Longrightarrow \forall U \subseteq M$ offen: $\Phi(U) \subseteq N$ offen $\Longrightarrow \Phi^{-1}$ ist stetig, also $\Phi$ Homöomorphismus). Sei $A \subseteq M$ abgeschlossen. Mit (1.51,a) ist $A$ kompakt und mit (1.50) folgt, dass auch $\Phi(A)$ kompakt. Mit (1.51,b) gilt, dass auch $\Phi(A) \subseteq N$ abgeschlossen ist. □

**(1.55) Definition.** Sei $M$ ein topologischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $M$. Ein Punkt $p \in M$ heißt **Häufungspunkt** von $(x_n)$, wenn in jeder Umgebung von $p$ unendlich viele Folgenglieder liegen.

**(1.56) Lemma.** *Ein Punkt $p \in M$ ist Häufungspunkt von $(x_n)$ genau dann, wenn er im Abschluss aller Endstücke der Folge liegt.*

***Beweis.*** Sei $E_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\} \subseteq M$ ($n \in \mathbb{N}$) Endstück.

„$\Longrightarrow$“: Sei $p$ Häufungspunkt und $S \in \mathfrak{A}(p)$ beliebig. $\Longrightarrow S \cap E_n \neq \emptyset$. $\Longrightarrow p \in \overline{E_n}$, $\forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow p \in \bigcap \overline{E_n}$.

„$\Longleftarrow$“: Sei $p \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{E_n}$ und $S \in \mathfrak{A}(p) \Longrightarrow S \cap E_n \neq \emptyset \Longrightarrow S \cap E_1$ hat unendlich viele Folgenglieder, d.h.: $p$ ist Häufungspunkt. □

**(1.57) Proposition.** *Sei $M$ ein Hausdorff-Raum mit abzählbarer Topologie. Dann gilt: $M$ ist genau dann kompakt, wenn jede Folge in $M$ einen Häufungspunkt hat.*

***Beweis.*** „$\Longrightarrow$“: $(x_n)$ sei Folge, $E_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$ Endstück. Für endlich viele $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ ist stets $\bigcap_{j=1}^{k} E_{n_j} \neq \emptyset$, erst recht $\bigcap_{j=1}^{k} \overline{E_{n_j}} \neq \emptyset \Longrightarrow$ (Kompaktheit) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{E_n} \neq \emptyset \Longrightarrow \exists$ Häufungspunkt von $(x_n)$.

„$\Longleftarrow$“: Sei $(U_i)_{i\in I}$ offene Überdeckung von $M$. Sei $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ Basis der Topologie von $M$. Sei

$$J := \{k \in \mathbb{N} : \exists i_k \in I : B_k \subseteq U_{i_k}\}, \quad J = \{n_1, n_2, n_3, \ldots\}.$$

$\Longrightarrow M = \bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{k \in J} B_k$, erst recht: $M = \bigcup_{k \in J} U_{i_k} = \bigcup_{j=1}^{\infty} U_{i_{n_j}}$. Also: Es existiert eine abzählbare Teilüberdeckung. O.B.d.A. sei daher: $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$, $U_n \subseteq M$ offen. Setze

$$V_n := U_1 \cup \ldots \cup U_n.$$

Angenommen: Es gibt keine endliche Teilüberdeckung $\Longrightarrow \complement V_n \neq \emptyset$; wähle $x_n \in \complement V_n$. Sei $p$ Häufungspunkt von $(x_n) \Longrightarrow \exists m \in \mathbb{N} : p \in U_m \subseteq V_m \Longrightarrow V_m \in \mathfrak{A}(p)$, aber $x_n \notin V_m$, $\forall n \geq m$, also $p$ kein Häufungspunkt von $(x_n)$ $\lightning$. Es muss also doch eine endliche Teilüberdeckung existieren, also: $M$ kompakt. $\square$

**(1.58) Proposition (Tychonoff).** *Sei $I$ abzählbar (oder endlich) und $(X_i)_{i \in I}$ Familie von Hausdorff-Räumen mit abzählbarer Topologie. Das Produkt $M = \prod_{i \in I} M_i$ ist kompakt genau dann, wenn $M_i$ kompakt ist, $\forall i \in I$.*

***Beweis.*** $M_k$ Hausdorffsch und hat abzählbare Topologie. Also ist auch $\prod M_k$ Hausdorff-Raum mit abzählbarer Topologie.

„$\Longrightarrow$“: $M$ kompakt. Die kanonische Projektion $\pi_k : M \to M_k$ ist stetig und surjektiv. Damit ist auch $\pi(M) = M_k$ kompakt.

„$\Longleftarrow$“: Sei $\left(x^{(0,n)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in $M \Longrightarrow \left(x_1^{(0,n)}\right)$ Folge in $M_1 \Longrightarrow \exists$ Teilfolge $\left(x^{(1,n)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ von $\left(x^{(0,n)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ : $\left(x_1^{(1,n)}\right)$ in $M_1$ gegen $p_1$ konvergent. $\Longrightarrow \exists$ Teilfolge $\left(x^{(2,n)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ von $\left(x^{(1,n)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$: $\left(x_2^{(2,n)}\right)$ konvergent in $M_2$, sagen wir $p_2$ usw. Ist $I$ endlich, $I = \{1, \ldots, N\}$, so konvergiert $\left(x^{(N,n)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ in $M$ (gegen $p = (p_1, p_2, \ldots, p_N)$. Ist $I = \mathbb{N}$, so konvergiert die Folge $\left(X^{(n,n)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ in $M$ gegen $(p_1, p_2, \ldots)$. Also ist $M$ kompakt. $\square$

**(1.59) Beispiel.**

(a) Sei $M = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Nach Bolzano-Weierstraß hat jede Folge in $M$ einen Häufungspunkt ist also kompakt.

(b) Sei $Q = [-R, R]^n \subseteq \mathbb{R}^n$. Wegen Tychonoff ist $Q$ kompakt.

**(1.60) Proposition (Heine-Borel).** *Eine Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) ist kompakt, genau wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

***Beweis.*** „$\Longrightarrow$“: $\mathbb{R}^n$ hausdorffsch, $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt. Mit (1.51,b) ist $K$ abgeschlossen. $K \subseteq \mathbb{R}^n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B(0; n) \Longrightarrow \exists n_1, \ldots, n_k : K \subseteq K \subseteq B(0; n_1) \cup \ldots \cup B(0; n_k)$. Setzte $R := \max\{n_1, \ldots, n_k\} \Longrightarrow K \subseteq B(0; R) \Longrightarrow K$ ist beschränkt.

„$\Longleftarrow$“: Sei $K$ beschränkt. Also gibt es ein $R > 0 : K \subseteq [-R, R]^n = Q$ und $Q$ kompakt; $K \subseteq Q$ abgeschlossen, also folgt mit (1.52,a), dass $K$ kompakt ist. $\square$

Kapitel 2

# 2 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

**(2.1) Definition.** Sei $n \in \mathbb{N}$. Ein Hausdorff-Raum mit abzählbarer Topologie $M$ heißt eine **n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit** , wenn jeder Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung besitzt, die homöomorph zu einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist.

**(2.2) Kommentar.**

(a) Man kann also eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension $n$ (manchmal auch mit $M^n$ notiert) mit einer Familie $(U_i)_{i\in I}$ offener Teilmengen überdecken, die homöomorph zu offenen Teilmengen $V_i \subseteq \mathbb{R}^n$ sind, $U_i \simeq V_i$,

$$M = \bigcup_{i\in I} U_i.$$

Man nennt dann eine Familie von Homöomorphismen

$$\mathfrak{A} = \left(\varphi_i : U_i \xrightarrow{\simeq} V_i\right)_{i\in I}$$

einen (topologischen) **Atlas** für $M$. Die Mitglieder $\varphi_i : U_i \to V_i$ heißen **Karten** und ihre Umkehrungen $\varphi_i^{-1} : V_i \to U_i$ heißen **lokale Koordinatensysteme** auf $M$.

(b) Ist $M^n$ ein topologische Mannigfaltigkeit und $\mathfrak{A} = (\varphi_i : U_i \to V_i)_{i\in I}$ ein topologischer Atlas, so nennt man für jedes Paar $(i,j) \in I \times I$ (mit $U_i \cap U_j \neq \emptyset$) die Abbildung

$$\varphi_{ij} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \to \varphi_i(U_i \cap U_j), \quad \varphi_{ij}(x) := \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(x),$$

eine **Übergangsfunktion** des Atlas $\mathfrak{A}$.

(c) Lokal ist also eine topologische Mannigfaltigkeit etwas Wohlbekanntes, global kann $M^n$ sehr kompliziert sein. Ist $\mathfrak{A} = (\varphi_i : U_i \to V_i)$ ein topologischer Atlas mit Übergangsfunktionen $(\varphi_{ij})$, so kann man sich $M^n$ als (zunächst disjunkte) Vereinigung der offenen Mengen $V_i \subseteq \mathbb{R}^n$ vorstellen, bei denen man die Teilmengen $V_{ij} := \varphi_i(U_i \cap U_j) \subseteq V_i$ vermöge $\varphi_{ij} : V_{ji} \to V_{ij}$ „zusammenklebt“:

**(2.3) Bemerkung.** *Sei $M^n$ eine topologische Mannigfaltigkeit, $\mathfrak{A} = (\varphi_i : U_i \to V_i)_{i\in I}$ ein topologischer Atlas mit Übergängen $(\varphi_{ij} : V_{ji} \to V_{ij})$. Auf der topologische Summe $\widetilde{Q} := \sum_{i\in I} V_i$ definiere man eine Äquivalenzrelation durch*

$$\iota_i(x_i) \sim \iota_j(x_j) :\Longleftrightarrow x_i = \varphi_{ij}(x_j)$$

*(für $\iota_k : V_k \to \widetilde{Q}$ die kanonische Inklusionen, $x_k \in V_k$, $k \in I$). Dann gilt, dass der Quotientenraum $Q := \widetilde{Q}/\sim$ homöomorph zu $M$ ist.*

***Beweis.*** Sei $j_k : U_k \hookrightarrow M$ die Inklusion $k \in I$. Dann induzieren die Abbildungen $j_k \circ \varphi_k^{-1}$ : $V_k \to M$ eine (eindeutig bestimmte) Abbildung $\Phi : \widetilde{Q} \to M$ mit $\Phi \circ \iota_k = j_k \circ \varphi_k^{-1}$, welche nach der universellen Eigenschaft der Summentopologie stetig ist. Ist nun $\iota_i(x_i) \sim \iota_j(x_j)$, so ist

$$\begin{tikzcd} & M & \\ V_i \arrow[ur, "j_i\circ\varphi_i^{-1}"] \arrow[dr, "\iota_i"'] & & V_j \arrow[ul, "j_j\circ\varphi_j^{-1}"'] \arrow[dl, "\iota_j"] \\ & \widetilde{Q} \arrow[uu, dashed, "\Phi"] & \end{tikzcd}$$

$$\Phi\big(\iota_i(x_i)\big) = j_i \circ \varphi_i^{-1}(x_i) = \varphi_i^{-1}(x_i) =$$

$$\varphi_i^{-1}\big(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(x_j)\big) = \varphi_j^{-1}(x_j) = (j_j \circ \varphi_j^{-1})\,(x_j) = \Phi\big(\iota_j(x_j)\big).$$

Ist daher $Q = \widetilde{Q}/\sim$ und $\pi : \widetilde{Q} \to Q$ die kanonische Projektion, so gibt es eine eindeutig bestimmte Abbildung $\Psi : Q \to M$ mit $\Psi \circ \pi = \Phi$, welche nach der universellen Eigenschaft der Quotiententopologie stetig ist. Man prüft nun leicht nach, dass $\Psi$ surjektiv, injektiv und auch $\Psi^{-1}$ stetig ist (Übung). Also ist $\Psi$ ein Homöomorphismus. $\square$

$$\begin{tikzcd} \widetilde{Q} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M \\ Q \arrow[ur, "\Psi"'] & \end{tikzcd}$$

**(2.4) Beobachtung.** Ist $M^n$ eine topologische Mannigfaltigkeit, $f : M \to \mathbb{R}$ und $p \in M$, so ist offenbar $f$ genau dann stetig in $p$, wenn $f|_U \circ \varphi^{-1} : V \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 = \varphi(p) \in V \subseteq \mathbb{R}^n$ für eine Karte $\varphi : U \to V$ um $p$ ist, denn:

$$\begin{aligned} f \text{ stetig in } p &\Longleftrightarrow f|_U \text{ stetig in } p \\ &\Longleftrightarrow f|_U \circ \varphi^{-1} \text{ stetig in } x_0 \text{ (denn } \varphi \text{ ist ja Homöomorphismus).} \end{aligned}$$

Ist nun $\mathfrak{A} = (\varphi_i : U_i \to V_i)_{i \in I}$ ein topologischer Atlas, $p \in U_i \cap U_j$ und $\varphi_{ij}$ der Übergang bzgl. $(i,j)$, so ist für $x \in V_{ji} := \varphi_j(U_i \cap U_j)$:

$$f \circ \varphi_j^{-1}(x) = f \circ \varphi_i^{-1} \circ \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(x) = (f \circ \varphi_i^{-1}) \circ \varphi_{ij}(x),$$

und deshalb (natürlich) $f|_{U_j} \circ \varphi_j^{-1} : V_j \to \mathbb{R}$ stetig in $x_j = \varphi_j(p)$ genau dann wenn $f|_{U_i} \circ \varphi_i^{-1} : V_i \to \mathbb{R}$ stetig in $x_i = \varphi_i(p)$ ist, denn $\varphi_{ij} : V_{ji} \to V_{ij}$ ist ja Homöomorphismus. Beachte nun: Für $f|_{U_i} \circ \varphi_i^{-1} : V_i \to \mathbb{R}$ macht es auch Sinn darüber zu sprechen, dass diese Abbildung **differenzierbar** in $x_i$ ist und diese Beobachtung wäre bei Vorgabe von $\mathfrak{A}$ unabhängig von der Wahl der Karte, in der $p$ liegt, wenn alle Übergänge $(\varphi_{ij} : V_{ji} \to V_{ij})$ nicht nur Homöomorphismen wären, sondern sogar Diffeomorphismen sind! Deshalb:

**(2.5) Definition.** Sei $M^n$ eine topologische Mannigfaltigkeit.

(a) Man nennt einen (topologischen) Atlas $\mathfrak{A} = (\varphi_i)$ von $M$ **differenzierbar**, wenn alle seine Übergänge $\varphi_{ij}$ differenzierbar sind.

(b) Zwei differenzierbare Atlanten $\mathfrak{A} = (\varphi_i)_{i \in I}$ und $\mathfrak{B} = (\psi_j)_{j \in J}$ auf $M$ heißen **äquivalent**, wenn auch $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} := (\varphi_i, \psi_j)_{i \in I, j \in J}$ ein differenzierbarer Atlas ist.

(c) Eine Äquivalenzklasse $c = [\mathfrak{A}]$ differenzierbarer Atlanten auf $M$ heißt eine **differenzierbare Struktur auf M**. Ein Paar $(M, c)$ heißt eine **differenzierbare Mannigfaltigkeit**.

**(2.6) Kommentar.**

(a) Auf einer topologischen Mannigfaltigkeit kann es sehr viele verschiedene differenzierbare Strukturen geben. Z.B. ist $M = \mathbb{R}$ sicher eine topologische Mannigfaltigkeit (der Dimension 1) und folgende beiden Atlanten sind sicher differenzierbar:

$$\mathfrak{A} = (\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \varphi(x) = x), \quad \mathfrak{B} = (\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \psi(x) = x^3).$$

Denn: $\mathfrak{A}$ ist differenzierbar, denn der einzige Übergang ist $\varphi \circ \varphi^{-1} = \mathbb{1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\mathbb{1}$ ist sicher differenzierbar. Ebenso ist $\mathfrak{B}$ differenzierbar, weil auch $\mathfrak{B}$ aus nur einer Karte besteht. Es ist aber $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = (\varphi, \psi)$ nicht mehr differenzierbar, denn $\varphi \circ \psi^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\varphi \circ \psi^{-1}(x) = \sqrt[3]{x},$$

ist nicht mehr differenzierbar (im Nullpunkt). Für die differenzierbare Strukturen $c_1 = [\mathfrak{A}]$ und $c_2 = [\mathfrak{B}]$ gilt also: $c_1 \neq c_2$.

(b) Wir werden aber bald sehen, dass $(\mathbb{R}, c_1) \cong (\mathbb{R}, c_2)$ „diffeomorph" ist, nämlich vermöge $x \mapsto \sqrt[3]{x}$. (siehe 2.12)

**(2.7) Beispiel.**

(a) $M = \mathbb{R}^n$ trägt die Struktur einer $n$-dimensionaler Mannigfaltigkeit. Man nehme den Atlas $\mathfrak{A} = (\varphi)$ mit $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\varphi = \mathbb{1}$ $\big($und setze $c = [\mathfrak{A}]\big)$. Das ist die **Standard-Struktur** auf $\mathbb{R}^n$.

(b) Ebenso wird jede offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $V := U$ und $\varphi = \mathbb{1} : U \to V$ $\big($und $\mathfrak{A} = (\varphi)$ sowie $c = [\mathfrak{A}]\big)$ zu einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit der Dimension $n$.

(c) Ist $M^n$ eine Mannigfaltigkeit und $N \subseteq M$ offen, so trägt $N$ in natürlicher Weise die Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit der Dimension $n$: Ist nämlich $\mathfrak{A} = (\varphi_i : U_i \to V_i)_{i \in I}$ ein Repräsentant der differenzierbare Struktur $c$ auf $M$, so betrachte man einfach $\mathfrak{B} := (\widetilde{\varphi}_i : \widetilde{U}_i \to \widetilde{V}_i)_{i \in I}$ mit $\widetilde{U}_i := U_i \cap N$, $\widetilde{V}_i := \mathrm{Im}(\widetilde{\varphi}_i) \subseteq V_i \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\widetilde{\varphi}_i := \varphi_i|_{\widetilde{U}_i}$. Dann wird $N$ zusammen mit $\tilde{c} := [\mathfrak{B}]$ zu einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit der Dimension $n$ (und diese Struktur hängt nicht von der Wahl $\mathfrak{A} \in c$ ab).

(d) Sei $V$ ein (abstrakter) reeller Vektorraum der Dimension $n$. Sei dann $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von $V$ und $\iota : V \to \mathbb{R}^n$ der zugehörige Koordinatenisomorphismus, also

$$\iota(v) = x = (x^1, \ldots, x^n) \iff v = \sum_{i=1}^{n} x^i v_i.$$

(Beachte: Komponenten eines Vektors $x \in \mathbb{R}^n$ werden mit "Exponenten" bezeichnet: $x^1, \ldots, x^n$.) Versehe nun $V$ mit der Topologie, so dass $\iota$ ein Homöomorphismus wird, d.h.: $U \subseteq V$ sei offen, genau wenn $\iota(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ offen ist. Damit ist $V$ zunächst eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension $n$. $\big($Übung: Diese Topologie hängt nicht von der Basiswahl ab, weil lineare Isomorphismen $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\big(S \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})\big)$ Homöomorphismen sind.$\big)$ Definiere schließlich (wieder) $\mathfrak{A} := (\iota)$ und $c = [\mathfrak{A}]$. Dann hängt auch $c$ nicht von der Basiswahl ab, weil lineare Isomorphismen sogar Diffeomorphismen sind.

**(2.8) Beispiel.** Betrachte die **n-Sphäre** ($n \geq 1$)

$$\mathbb{S}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$$

(mit ihrer von $\mathbb{R}^{n+1}$ induzierten Teilraumtopologie). Da $\mathbb{R}^{n+1}$ (mit der Standard-Topologie) hausdorffsch und von abzählbarer Topologie ist, ist $\mathbb{S}^n$ hausdorffsch und von abzählbarer Topologie.

Übrigens ist $\mathbb{S}^n$ auch zusammenhängend (Übung) und kompakt (nach Heine-Borel). Daher kann man $\mathbb{S}^n$ sicher nicht mit einer einzigen Karte $\varphi : \mathbb{S}^n \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ überdecken, denn eine nicht-leere offene Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ist niemals kompakt.

Betrachte nun $N := (0,\dots,0,1) \in \mathbb{S}^n$ und $S := (0,\dots,0,-1) \in \mathbb{S}^n$ und die **stereographischen Projektionen**

$$\mathbb{S}^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n,\ p \mapsto \frac{1}{1-p^{n+1}}(p^1,\dots,p^n),$$
$$\mathbb{S}^n \setminus \{S\} \to \mathbb{R}^n,\ p \mapsto \frac{1}{1+p^{n+1}}(p^1,\dots,p^n).$$

Es sind $\varphi$ und $\psi$ stetig (weil Einschränkungen stetiger Abbildungen stetig sind) und auch

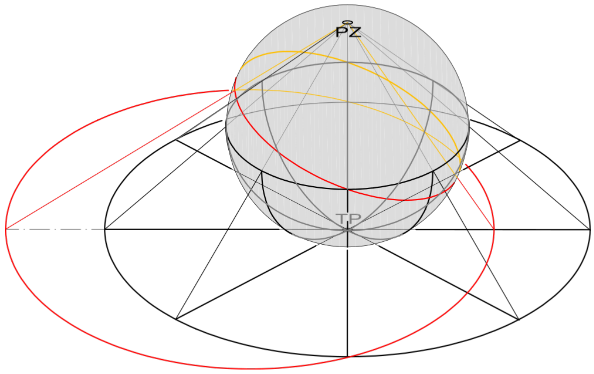



Abbildung 2.1: stereographische Projektion der $\mathbb{S}^2$

bijektiv, denn

$$(x^1,\dots,x^n) \mapsto \frac{1}{1+\|x\|^2}(2x^1,\dots,2x^n,-1+\|x\|^2),\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$$

bzw.

$$(x^1,\dots,x^n) \mapsto \frac{1}{1+\|x\|^2}(2x^1,\dots,2x^n,1-\|x\|^2),\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^n \setminus \{S\}$$

sind Inverse für $\varphi$ und $\psi$ (Übung). Sie sind offenbar auch stetig und schließlich ist

$$\mathbb{S}^n = \big(\mathbb{S}^n \setminus \{N\}\big) \cup \big(\mathbb{S}^n \setminus \{S\}\big).$$

Damit ist $\mathbb{S}^n$ eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension $n$.

Es ist aber $\mathfrak{A} = (\varphi,\psi)$ auch differenzierbar, denn für die Übergänge $\varphi \circ \psi^{-1}$ bzw. $\psi \circ \varphi^{-1}$ von $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ nach $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt (Übung)

$$\varphi \circ \psi^{-1}(x) = \psi \circ \varphi^{-1}(x) = \frac{x}{\|x\|^2}.$$

Also ist $\big(\mathbb{S}^n, [(\varphi,\psi)]\big)$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension $n$.

**(2.9) Definition.** Sei $(M,c)$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, $p \in M$. Eine stetige Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heißt **differenzierbar in p**, wenn für ein $\mathfrak{A} \in c$ und eine Karte $\varphi : U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ aus $\mathfrak{A}$ mit $p \in U$ gilt: $f \circ \varphi^{-1} : V \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar in $x_0 = \varphi(p)$. Es heißt $f$ **differenzierbar**, wenn $f$ differenzierbar in allen Punkten $p \in M$ ist.

**(2.10) Kommentar.** Wie in der Definition für den Begriff der differenzierbaren Mannigfaltigkeit bereits vermerkt, ist diese Definition nun unabhängig von der gewählten Karte um $p$, denn für zwei Karten $\varphi_1 : U_1 \to V_1$ und $\varphi_2 : U_2 \to V_2$ in $p \in U_1 \cap U_2$ ist ja nun

$$f \circ \varphi_2^{-1} = (f \circ \varphi_1^{-1}) \circ (\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}) \ \text{ auf } \varphi_2(U_1 \cap U_2),$$

also differenzierbar in $x_2 = \varphi_2(p)$, genau dann wenn $f \circ \varphi_1^{-1}$ differenzierbar in $x_1 = \varphi_1(p)$ ist (mit $\varphi_1$ Karte aus $\mathfrak{A}_1$, $\varphi_2$ Karte aus $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2 \in c$).

**(2.11) Definition.**

(a) Seien $(M^n, [\mathfrak{A}])$ und $(N^r, [\mathfrak{B}])$ differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $p \in M$. Eine stetige Abbildung $\Phi : M \to N$ heißt **differenzierbar in p**, wenn für eine (und dann jede) Wahl von Karten $\varphi : U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ um $p$ und $\psi : \widetilde{U} \to \widetilde{V} \subseteq \mathbb{R}^r$ um $\Phi(p) = q$ gilt, dass
$$\psi \circ \Phi \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \supseteq \varphi\big(U \cap \Phi^{-1}(\widetilde{U})\big) \to \widetilde{V} \subseteq \mathbb{R}^r$$
differenzierbar in $x_0 = \varphi(p)$ ist.

(b) Es heißt $\Phi$ **differenzierbar**, wenn $\Phi$ differenzierbar in allen Punkten ist.

(c) Ist $\Phi : M \to N$ differenzierbar und bijektiv, so dass auch $\Phi^{-1} : N \to M$ differenzierbar ist, so nennt man $\Phi$ einen **Diffeomorphismus**. Es heißt $M$ **diffeomorph zu** $N$, $M \cong N$, wenn es einen Diffeomorphismus zwischen $M$ und $N$ gibt.

**(2.12) Beispiel.** Wir wissen bereits, dass $c_1 = \big[(\varphi)\big]$ und $c_2 = \big[(\psi)\big]$ mit $\varphi = \mathbb{1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$, zwei verschiedene differenzierbare Strukturen auf $\mathbb{R}$ liefert. Es ist aber $(\mathbb{R}, c_1) \cong (\mathbb{R}, c_2)$ vermöge $\Phi : (\mathbb{R}, c_1) \to (\mathbb{R}, c_2)$, $p \mapsto \sqrt[3]{p}$, denn in den Karten lautet diese Abbildung ja $\psi \circ \Phi \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$\psi \circ \Phi \circ \varphi^{-1}(x) = \psi \circ \Phi(x) = \psi\big(\sqrt[3]{x}\big) = \big(\sqrt[3]{x}\big)^3 = x$$
und das ist sicher differenzierbar und auch $\varphi \circ \Phi^{-1} \circ \psi^{-1} = \mathbb{1}$. Also ist $\Phi$ Diffeomorphismus.

**(2.13) Kommentar.**

(a) Ist $f : M \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion im Sinne von Definition (2.9), so ist $f$ offenbar differenzierbar im Sinne von (2.10), wenn man $\mathbb{R}$ mit seiner Standard-Struktur $\big(c = [(\mathbb{1})]\big)$ versieht und umgekehrt, denn für eine Karte $\varphi$ auf $M$ ist
$$f \circ \varphi^{-1} = \mathbb{1} \circ f \circ \varphi^{-1}.$$

(b) Jede Karte $\varphi$ auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit ist selbst ein Diffeomorphismus (Übung).

(c) Es ist übrigens durchaus möglich, dass eine topologische Mannigfaltigkeit keine differenzierbare Struktur trägt und auch, dass sie paarweise nicht diffeomorphe Strukturen trägt. Ein spektakuläres Ergebnis von J. Milnor (1956) ist, dass auf der $\mathbb{S}^7$ neben der Standard-Struktur weitere (sogenannte exotische) Strukturen existieren (genau 27 Stück (Kervaire/Milnor 1963)).

(d) Ist $M^n$ eine Mannigfaltigkeit und $N \subseteq M$ offen, so gilt offenbar für die induzierte Struktur von (2.7,c), dass die Inklusion $i : N \hookrightarrow M$ differenzierbar ist.

**(2.14) Konstruktion.** Seien $(M_1^{n_1}, c_1)$ und $(M_2^{n_2}, c_2)$ differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $M := M_1 \times M_2$ ihr cartesisches Produkt versehen mit der Produkttopologie.

(i) Es ist dann $M$ eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension $n_1 + n_2$, denn zunächst ist $M$ hausdorffsch und von abzählbarer Topologie, weil $M_1$ und $M_2$ es sind. Ist nun $p = (p_1, p_2) \in M$, so gibt es offene Umgebungen $U_1 \subseteq M_1$ von $p_1$, $U_2 \subseteq M_2$ von $p_2$ und offene Mengen $V_1 \subseteq \mathbb{R}^{n_1}$, $V_2 \subseteq \mathbb{R}^{n_2}$ sowie Homöomorphismen $\varphi_1 : U_1 \to V_1$ und $\varphi_2 : U_2 \to V_2$. Es ist dann $U := U_1 \times U_2 \subseteq M$ offene Umgebung von $p$, es ist $V := V_1 \times V_2 \subseteq \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} = \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ offen und es ist $\varphi := \varphi_1 \times \varphi_2 : U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$, $n := n_1 + n_2$ ein Homöomorphismus.

(ii) Ist nun $\mathfrak{A}_1 \in c_1$, $\mathfrak{A}_1 = (\varphi_1^i : U_1^i \to V_1^i \subseteq \mathbb{R}^{n_1})_{i\in I}$ ein Repräsentant für die differenzierbare Struktur $c_1$ auf $M_1$ und $\mathfrak{A}_2 = (\varphi_2^j : U_2^j \to V_2^j)_{j\in J}$, so betrachten wir

$$\mathfrak{A} := (\varphi_1^i \times \varphi_2^j : U_1^i \times U_2^j \to V_1^i \times V_2^j \subseteq \mathbb{R}^n)_{(i,j)\in I\times J}$$

und stellen fest, dass $\mathfrak{A}$ ein differenzierbarer Atlas auf $M$ ist und $c = [\mathfrak{A}]$ nur von $c_1$ und $c_2$ abhängt (nicht von Repräsentantenwahl $\mathfrak{A}_1 \in c_1$ und $\mathfrak{A}_2 \in c_2$). Damit ist dann $(M, c)$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension $n = n_1 + n_2$.

(iii) Sind $\pi_1 : M \to M_1$ und $\pi_2 : M \to M_2$ die kanonischen Projektionen, so gilt für eine Karte $\varphi_1 : U_1 \to V_1$ von $M_1$, $\varphi_2 : U_2 \to V_2$ von $M_2$ und $\varphi_1 \times \varphi_2 : U_1 \times U_2 \to V_1 \times V_2$ von $M$, dass z.B.

$$\varphi_1 \circ \pi_1 \circ (\varphi_1 \times \varphi_2)^{-1} : \mathbb{R}^n \supseteq V_1 \times V_2 \to V_1 \subseteq \mathbb{R}^{n_1},\ (x_1, x_2) \mapsto x_1,$$

welches differenzierbar ist. Also sind $\pi_1$ und $\pi_2$ differenzierbar.

**(2.15) Beispiel.**

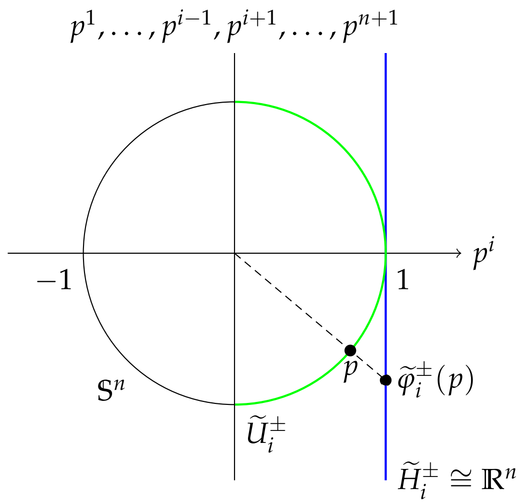
(a) Betrachte für $\widetilde{M} = \mathbb{S}^n$ den folgenden $2 \cdot (n+1)$-seitigen Atlas (der dem 2-seitigen Atlas der stereographischen Projektion aus Nord- und Südpol heraus äquivalent ist (Übung)). Sei

$$\widetilde{U}_i^\pm := \{p \in \mathbb{S}^n : \pm p^i > 0\}$$

und $\widetilde{V}_i^\pm = \mathbb{R}^n$. Betrachte nun die **Zentralprojektion** aus dem Nullpunkt heraus von $\widetilde{U}_i^\pm$ auf

$$\widetilde{H}_i^\pm = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} : p^i = \pm 1\} \cong \mathbb{R}^n = \widetilde{V}_i^\pm :$$

$$\widetilde{\varphi}_i : \widetilde{U}_i^\pm \to \widetilde{V}_i^\pm = \mathbb{R}^n,\ (p^1, \dots, p^{n+1}) \mapsto \pm\frac{1}{p^i}(p^1, \dots, p^{i-1}, p^{i+1}, \dots, p^{n+1})$$




$\widetilde{\varphi}_i^\pm$ ist bijektiv und für die Umkehrung $(\widetilde{\varphi}_i^\pm)^{-1} : \widetilde{V}_i^\pm \to \widetilde{U}_i^\pm$ gilt:

$$(\widetilde{\varphi}_i^\pm)^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \|x\|^2}}(x^1, \dots, x^{i-1}, 1, x^i, \dots, x^n)$$

$(i = 1, \dots, n+1)$.

(b) Setze nun für den projektiven Raum $\mathbb{P}^n = \mathbb{S}^n/\pm$:

$$U_i := \left\{(p^1 : \ldots : p^{n+1}) \in \mathbb{P}^n : \ p^i \neq 0\right\}.$$

Weil $\widetilde{U}_i^\pm$ kein Antipodenpaar enthält, gilt für die kanonische Projektion $\pi : \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n$, $p \mapsto [p]$, dass $\pi|_{\widetilde{U}_i^\pm} : \widetilde{U}_i^\pm \to U_i$ ein Homöomorphismus ist. Man setzt nun als Karte $\varphi_i : U_i \to V_i = \mathbb{R}^n$:

$$\varphi_i := \widetilde{\varphi}_i^+ \circ (\pi|_{\widetilde{U}_i^+})^{-1},$$

also

$$\varphi_i(p^1 : \ldots : p^{n+1}) = \frac{1}{p^i}(p^1, \ldots, p^{i-1}, p^{i+1}, \ldots, p^{n+1}).$$

Für die Übergänge $\varphi_{ij}$ erhält man dann bei $i < j$, dass

$$\varphi_{ij}(x) = \frac{1}{x^i}(x^1, \ldots, x^{i-1}, x^{i+1}, \ldots, x^{j-1}, 1, x^j, \ldots, x^n)$$

(Übung, u. ä. bei $i > j$), also differenzierbar. Mit $\mathfrak{A} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1})$ wird daher $\mathbb{P}^n$ zu einer $n$-dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit (Übung: $\mathbb{P}^n$ ist hausdorffsch und von abzählbarer Topologie). Die kanonische Projektion $\pi : \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n$ wird mit dieser Struktur zu einer differenzierbaren Abbildung, sogar zu einem **lokalen Diffeomorphismus**, d.h.: zu jedem Punkt $p \in \mathbb{S}^n$ gibt es offene Umgebungen $U \subseteq \mathbb{S}^n$ von $p$ und $V \subseteq \mathbb{P}^n$ von $[p] = \pi(p)$, so dass $\pi(U) = V$ ist und $\pi|_U : U \to V$ ein Diffeomorphismus ist. Für $p \in \widetilde{U}_i^\pm$ ist nämlich mit den Karten $\widetilde{\varphi}_i^\pm$ von $\mathbb{S}^n$ um $p$ und $\varphi_i$ von $\mathbb{P}^n$ um $[p]$

$$\varphi_i \circ \pi \circ (\widetilde{\varphi}_i^\pm)^{-1}(x) = \widetilde{\varphi}_i^+ \circ (\pi|_{\widetilde{U}_i^+})^{-1} \circ \pi \circ (\widetilde{\varphi}_i^\pm)^{-1}(x) = \pm x,$$

also $\pi|_{\widetilde{U}_i^\pm} : \widetilde{U}_i^\pm \to U_i$ ein Diffeomorphismus. □

**(2.16) Definition.** Sei $M$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $\Gamma$ eine Gruppe. Eine **Operation von $\Gamma$ durch Diffeomorphismen** ist gegeben durch eine Abbildung $\Phi\colon \Gamma \times M \to M$,

$$\Phi(\gamma, p) =: \gamma.p,$$

so dass gilt:

(a) Für jedes $\gamma \in \Gamma$ ist die Abbildung $\Phi_\gamma\colon M \to M$, $p \mapsto \gamma.p$, differenzierbar;

(b) für alle $p \in M$ gilt: $1.p = p$;

(c) für alle $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ und $p \in M$ gilt: $(\gamma_1\gamma_2).p = \gamma_1.(\gamma_2.p)$.

**(2.17) Kommentar.**

(a) Jedes $\Phi_\gamma\colon M \to M$ ist tatsächlich ein Diffeomorphismus, denn für $\Phi_{\gamma^{-1}}\colon M \to M$ gilt:

$$\Phi_{\gamma^{-1}} \circ \Phi_\gamma(p) = \gamma^{-1}.(\gamma.p) = (\gamma^{-1}\gamma).p = 1.p = p = \mathbb{1}(p)$$

und ebenso

$$\Phi_\gamma \circ \Phi_{\gamma^{-1}} = \mathbb{1}.$$

Also ist $\Phi_\gamma$ bijektiv und $(\Phi_\gamma)^{-1} = \Phi_{\gamma^{-1}}$.

(b) Bezeichnet man mit

$$\mathrm{Diff}(M) := \{\Phi\colon M \to M \,:\, \Phi \text{ ist Diffeomorphismus}\},$$

so wird $\mathrm{Diff}(M)$ mit der Verkettung von Abbildungen zu einer Gruppe. Ist $\Phi\colon \Gamma \times M \to M$ eine Operation durch Diffeomorphismen, so ist die Abbildung

$$\Gamma \to \mathrm{Diff}(M),\ \gamma \mapsto \Phi_\gamma,$$

ein Gruppenhomomorphismus. Man spricht daher auch von einer **Darstellung von $\Gamma$** als einer **Transformationsgruppe von M**. (Man beachte aber, dass $\Gamma \to \mathrm{Diff}(M)$ nicht notwendig injektiv sein muss.)

**(2.18) Beispiel.**

(a) Sei $V$ ein reeller Vektorraum der Dimension $n$. Sei nun

$$\Gamma = \mathrm{Aut}(V) := \{T\colon V \to V \,:\, T \text{ ist linearer Automorphismus}\}.$$

Dann operiert $\Gamma$ durch Diffeomorphismen auf $V$ durch

$$T.v := Tv.$$

(b) Sei

$$\Gamma = \mathbb{O}(n+1) = \{A \in \mathrm{Mat}_{n+1}(\mathbb{R}) \,:\, A^t \cdot A = \mathbb{1}\}$$

die orthogonale Gruppe. Dann operiert $\Gamma$ auf $\mathbb{S}^n$ durch Diffeomorphismen vermöge

$$A.p := Ap,$$

denn für $A \in \mathbb{O}(n+1)$ ist $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$, für alle $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$ und dem kanonischen Skalarprodukt $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x^i y^i$, also ist mit $\langle p, p\rangle = 1$ auch $\langle Ap, Ap\rangle = 1$.

**(2.19) Definition.** Sei $\Gamma$ eine Gruppe und $M$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Es operiere $\Gamma$ auf $M$ durch Diffeomorphismen.

(a) Für $p \in M$ heißt dann

$$\Gamma p := \{\gamma.p \in M \,:\, \gamma \in \Gamma\} \subseteq M$$

**die Bahn** (oder der **Orbit**) von **p unter $\Gamma$**.

(b) Für $p \in M$ heißt

$$\Gamma_p := \{\gamma \in \Gamma \,:\, \gamma.p = p\} \subseteq \Gamma$$

die **Standgruppe in p**.

**(2.20) Kommentar.**

(a) Operiert $\Gamma$ auf $M$, $\Gamma \curvearrowright M$, so ist $M$ disjunkte Vereinigung seiner Bahnen, denn

$$p \sim q :\Longleftrightarrow q \in \Gamma_p$$

ist eine Äquivalenzrelation $\big(p = 1.p;\ q = \gamma.p \Longrightarrow \gamma^{-1}.q = p;\ q = \gamma_1.p,\ r = \gamma_2.q \Longrightarrow r = (\gamma_1\gamma_2).p\big)$. Besteht $M$ aus nur einer Bahn, d.h.: $\Gamma p = M$, für ein (und dann für jedes) $p \in M$, so sagt man, dass $\Gamma$ **transitiv** auf $M$ operiert.

(b) Zunächst prüft man ohne Mühe nach, dass $\Gamma_p \subseteq \Gamma$ eine Untergruppe ist (Übung). Für jede Bahn $\Gamma p \subseteq M$ erhält man dann eine bijektive Abbildung durch

$$\varrho_p \colon \Gamma/\,\Gamma_p \to \Gamma p,\ \varrho_p\big([\gamma]\big) = \gamma.p,$$

$$\begin{tikzcd} \Gamma \arrow[r, "\gamma\mapsto\gamma.p"] \arrow[d, "\pi"'] & \Gamma p \\ \Gamma/\Gamma_p \arrow[ur, "\varrho_p"'] & \end{tikzcd}$$

denn für zwei Repräsentanten $\gamma_1, \gamma_2$ der gleichen Linksnebenklasse gibt es offenbar ein $\delta \in \Gamma$, so dass $\gamma_2 = \gamma_1\delta$ ist und daher ist

$$\gamma_2.p = (\gamma_1\delta).p = \gamma_1.\underbrace{(\delta.p)}_{=p} = \gamma_1.p,$$

also ist $\varrho_p$ wohldefiniert. Es ist $\varrho_p$ nach Konstruktion surjektiv und auch injektiv. Ist $\Gamma_p = \{1\}$ für alle $p \in M$, so sagt man, dass $\Gamma$ **frei** (oder **fixpunktfrei**) operiert. Alle Bahnen sind dann (vermöge $\varrho_p$) Kopien von $\Gamma$.

**(2.21) Beispiel.**

(a) Die Operation von $\mathrm{Aut}(V)$ auf $V$ für einen (endlich-dimensionalen) reellen Vektorraum $V$ hat offenbar genau zwei Bahnen, nämlich $\{0\}$ und $V \setminus \{0\}$ (Übung).

(b) Es operiert $\mathbb{O}(n+1)$ offenbar transitiv auf $\mathbb{S}^n$, denn sind $p, q \in \mathbb{S}^n$ beliebig, so ergänze man $p =: e_1$ zu einer Orthonormal-Basis $(e_1, \ldots, e_{n+1})$ von $\big(\mathbb{R}^{n+1}, \langle -, - \rangle\big)$ und $q =: f_1$ zu einer Orthonormal-Basis $(f_1, \ldots, f_{n+1})$ und betrachte gerade das $A \in \mathbb{O}(n+1)$, welches durch $A\, e_i = f_i$ $(i = 1, \ldots, n+1)$ gegeben ist. Insbesondere ist

$$A\, p = A\, e_1 = f_1 = q.$$

(c) Die Standgruppe von $\mathbb{O}(n+1)$ auf $\mathbb{S}^n$ im Nordpol $N = (0, \ldots, 0, 1)$ ist (offenbar) gegeben durch

$$\left\{ \left( \begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & A & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right) \in \mathbb{O}(n+1) \ : \ A \in \mathbb{O}(n) \right\} \cong \mathbb{O}(n).$$

Es ist also (zunächst als Menge):

$$\mathbb{S}^n \cong \mathbb{O}(n+1)/\,\mathbb{O}(n).$$

**(2.22) Definition.** Sei $\Phi \colon \Gamma \times M \to M$ eine Operation einer Gruppe $\Gamma$ auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit $M$ durch Diffeomorphismen. Man sagt, dass $\Gamma$ **eigentlich diskontinuierlich** auf $M$ operiert, wenn es zu jedem Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung $U \subseteq M$ von $p$ gibt, so dass für alle $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ mit $\gamma \neq \gamma'$ gilt:

$$\Phi_\gamma(U) \cap \Phi_{\gamma'}(U) = \emptyset.$$

$\big($schreibe: $\gamma(U) := \Phi_\gamma(U) = \{\gamma.x \ : \ x \in U\}.\big)$

**(2.23) Bemerkung.** Ist $\Gamma$ endlich und operiert $\Gamma$ frei auf $M$, so operiert $\Gamma$ eigentlich diskontinuierlich.

***Beweis.*** Sei $p \in M$. Dann ist $\gamma.p \neq \gamma'.p$ für $\gamma \neq \gamma'$ $\big(\gamma.p = \gamma'.p \implies (\gamma'^{-1}\gamma).p = \gamma'^{-1}.(\gamma.p) = \gamma'^{-1}.(\gamma'.p) = (\gamma'^{-1}\gamma').p = 1.p = p \implies \gamma'^{-1}\gamma = 1 \implies \gamma = \gamma'\big)$. Da $M$ hausdorffsch ist, existieren offene Umgebungen $U_\gamma \subseteq M$ von $\gamma.p$, die paarweise disjunkt sind, $U_\gamma \cap U_{\gamma'} = \emptyset$ für $\gamma \neq \gamma'$ (da $\Gamma$ endlich ist). Sei nun

$$U := \bigcap_{\gamma\in\Gamma} \gamma^{-1}(U_\gamma).$$

Dann ist $p \in U$, $U$ ist offen (da $\Gamma$ endlich) und

$$\gamma(U) \subseteq \gamma\gamma^{-1}(U_\gamma) \subseteq U_\gamma,$$

also

$$\gamma(U) \cap \gamma'(U) \subseteq U_\gamma \cap U_{\gamma'} = \emptyset \text{ für } \gamma \neq \gamma'.$$

Also operiert $\Gamma$ eigentlich diskontinuierlich. □

**(2.24) Beispiel.**

(a) $\Gamma = \mathbb{Z}_2\ (= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \{\pm 1\}$ operiert auf $\mathbb{S}^n$ durch Punktspiegelung im Zentrum,

$$\pm 1.p := \pm p,$$

also eigentlich diskontinuierlich.

(b) $\Gamma = \mathbb{Z}^n$ operiert auf $M = \mathbb{R}^n$ durch **Translationen** eigentlich diskontinuierlich vermöge

$$\gamma.p := p + \gamma.$$

Ist nämlich $U := B(p; \frac{1}{2})$, so ist

$$\gamma(U) \cap \gamma'(U) = \emptyset$$

für $\gamma \neq \gamma'$ (Übung).

**(2.25) Definition.** Sei $\Gamma \curvearrowright M$ eine Operation einer Gruppe $\Gamma$ auf eine differenzierbaren Mannigfaltigkeit $M$. Für $p, q \in M$ sei $p \sim q$, wenn es ein $\gamma \in \Gamma$ mit $q = \gamma.p$ gibt. Man nennt dann den Quotientenraum $M/\sim$ den Bahnenraum von $M$ (unter $\Gamma$) und schreibt auch $M/\Gamma$.

**(2.26) Satz.** *Es operiere $\Gamma$ auf einer Mannigfaltigkeit $\widetilde{M}$ eigentlich diskontinuierlich. Sei $\pi\colon \widetilde{M} \to \widetilde{M}/\Gamma$ die kanonische Projektion und sei $M := \widetilde{M}/\Gamma$ hausdorffsch. Dann gibt es auf $M$ die Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit, so dass folgende universelle Eigenschaft erfüllt ist: Ist $N$ differenzierbare Mannigfaltigkeit, so ist eine stetige Abbildung $\Phi\colon M \to N$ genau dann differenzierbar, wenn $\Phi \circ \pi\colon \widetilde{M} \to N$ differenzierbar ist.*

$$\begin{tikzcd} \widetilde{M} \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\Phi\circ\pi"] & \\ M \arrow[r, "\Phi"'] & N \end{tikzcd}$$

**(2.27) Kommentar.** Da $\Phi = \mathbb{1}\colon M \to M$ differenzierbar ist, ist insbesondere $\pi$ differenzierbar.

***Beweis***

(i) $M$ ist topologische Mannigfaltigkeit: $M$ ist nach Voraussetzung hausdorffsch. Weiter ist $\pi\colon \widetilde{M} \to M$ eine offene Abbildung, denn für ein offenes $\widetilde{U} \subseteq \widetilde{M}$ gilt

$$\pi^{-1}\big(\pi(\widetilde{U})\big) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \underbrace{\gamma(\widetilde{U})}_{\substack{\text{offen, weil} \\ \Phi_\gamma\colon \widetilde{M}\to\widetilde{M} \text{ Homöo.}}}$$

Sei $(\widetilde{B}_n)$ eine abzählbare Basis von $\widetilde{M}$. Setze dann $B_n := \pi(\widetilde{B}_n)$. Dann gilt (Übung) $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Basis der Topologie auf $M$. Also hat auch $M$ abzählbare Topologie. Sei weiter $p \in M$ und $\widetilde{p} \in \pi^{-1}(p)$ also $p = [\widetilde{p}]$, $\widetilde{p} = \widetilde{p}(p)$. Dann gibt es eine offene Umgebung $\widetilde{U}_{\widetilde{p}}$, so dass gilt

$$\gamma(\widetilde{U}_{\widetilde{p}}) \cap \gamma'(\widetilde{U}_{\widetilde{p}}) = \emptyset \quad \text{für } \gamma \neq \gamma'. \tag{2.1}$$

Nach eventueller Verkleinerung von $\widetilde{U}_{\widetilde{p}}$ existiert nun eine Karte $\widetilde{\varphi}_{\widetilde{p}} \colon \widetilde{U}_{\widetilde{p}} \to \widetilde{V}_{\widetilde{p}} \subseteq \mathbb{R}^n$ von $\widetilde{p}$. Setze nun $U_p := \pi(\widetilde{U}_{\widetilde{p}}) \subseteq M$. Da $\pi$ offen ist, ist $U_p \subseteq M$ offen und wegen (2.1) ist $\pi|_{\widetilde{U}_{\widetilde{p}}} \colon \widetilde{U}_{\widetilde{p}} \to U_p$ zunächst injektiv. Aber surjektiv ist es sowieso, stetig auch und wegen der Offenheit damit sogar ein Homöomorphismus. Setze schließlich

$$\varphi_p \colon U_p \to V_p := \widetilde{V}_{\widetilde{p}} \subseteq \mathbb{R}^n, \; \varphi_p := \widetilde{\varphi}_{\widetilde{p}} \circ (\pi|_{\widetilde{U}_{\widetilde{p}}})^{-1}.$$

Damit ist also $M$ eine topologische Mannigfaltigkeit $\big($der Dimension $n = \dim(\widetilde{M})\big)$ und $\mathfrak{A} = (\varphi_p \colon U_p \to V_p)_{p\in M}$ ein topologischer Atlas.

(ii) Behauptung: $\mathfrak{A}$ ist sogar differenzierbarer Atlas. Seien nun $p_1, p_2 \in M$, so dass $U_0 := U_{p_1} \cap U_{p_2} \neq \emptyset$ und $p_0 \in U_{p_1} \cap U_{p_2}$. Sei $\widetilde{U}_1 := \widetilde{U}_{\widetilde{p}_1} \cap \pi^{-1}(U_0)$, $\widetilde{U}_2 := \widetilde{U}_{\widetilde{p}_2} \cap \pi^{-1}(U_0)$, $\widetilde{p}_0 := (\pi|_{U_1})^{-1}(p_0)$, $\widetilde{\widetilde{p}}_0 := (\pi|_{\widetilde{U}_2})^{-1}(p_0)$. Da $\pi(\widetilde{p}_0) = p_0 = \pi(\widetilde{\widetilde{p}}_0)$ ist, existiert ein $\gamma \in \Gamma$ mit $\widetilde{\widetilde{p}}_0 = \gamma.\widetilde{p}_0$. Es ist nun $\pi|_{\widetilde{U}_2} \circ \gamma = \pi|_{\widetilde{U}_1}$ (in einer Umgebung von $p_0$) und mit $\varphi_1 := \varphi_{p_1}$, $\varphi_2 := \varphi_{p_2}$, $\widetilde{\varphi}_1 := \widetilde{\varphi}_{\widetilde{p}_1}$ und $\widetilde{\varphi}_2 := \widetilde{\varphi}_{\widetilde{p}_2}$ gilt dann

$$\begin{aligned} \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(x) &= \big(\widetilde{\varphi}_2 \circ (\pi|_{\widetilde{U}_2})^{-1}\big) \circ \big(\widetilde{\varphi}_1 \circ (\pi|_{\widetilde{U}_1})^{-1}\big)^{-1}(x) \\ &= \widetilde{\varphi}_2 \circ \underbrace{(\pi|_{\widetilde{U}_2})^{-1} \circ (\pi|_{\widetilde{U}_1})}_{=\gamma} \circ \widetilde{\varphi}_1^{-1}(x), \end{aligned}$$

für alle $x$ aus einer Umgebung von $p_0$. Also ist $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ differenzierbar in $x_0 = \varphi_1(p_0)$, weil $\widetilde{\varphi}_1, \widetilde{\varphi}_2$ und $\gamma$ Diffeomorphismen sind. Also ist $\mathfrak{A}$ ein differenzierbarer Atlas.

(iii) Noch zu zeigen: $\Phi \colon M \to N$ differenzierbar $\iff \Phi \circ \pi \colon \widetilde{M} \to N$ differenzierbar.

"$\Longrightarrow$" Mit der eben definierten Struktur $c = [\mathfrak{A}]$ wird $\pi \colon \widetilde{M} \to M$ differenzierbar, denn für $\widetilde{\widetilde{p}} \in \widetilde{M}$ und $p := \pi(\widetilde{\widetilde{p}}) \in M$ existiert ein $\gamma \in \Gamma$, so dass $\widetilde{\widetilde{p}} = \gamma.\widetilde{p}$ $\big($wo $\widetilde{p} = \widetilde{p}(p)\big)$. In den Karten $\varphi$ um $p$, $\widetilde{\varphi}$ um $\widetilde{p}$ und $\widetilde{\varphi} \circ \gamma^{-1} =: \widetilde{\widetilde{\varphi}}$ um $\widetilde{\widetilde{p}}$ wird die Abbildung $\pi$ bzgl. $\widetilde{\widetilde{\varphi}}$ und $\varphi$:

$$\begin{aligned} \varphi \circ \pi \circ \widetilde{\widetilde{\varphi}}^{-1} &= \varphi \circ \pi \circ (\widetilde{\varphi} \circ \gamma^{-1})^{-1} \\ &= \big(\widetilde{\varphi} \circ (\pi|_{\widetilde{U}})^{-1}\big) \circ \underbrace{\pi \circ \gamma}_{=\pi} \circ \widetilde{\varphi}^{-1} = \mathbb{1}, \end{aligned}$$

also differenzierbar. Da Kompositionen von differenzierbaren Abbildungen wieder differenzierbar sind (Übung), folgt, dass mit einem differenzierbaren $\Phi$ auch $\Phi \circ \pi$ differenzierbar ist.

"$\Longleftarrow$" Ist $\Phi \colon M \to N$ stetig, so dass $\Phi \circ \pi$ differenzierbar ist und $p \in M$, so ist $\Phi$ in $p$ differenzierbar, weil für die Karte $\varphi := \varphi_p$ um $p$, eine beliebige Karte $\psi$ um $q := \Phi(p) \in N$ und der Karte $\widetilde{\varphi}_{\widetilde{p}}$ um $\widetilde{p} = \widetilde{p}(p) \in \widetilde{M}$ gilt:

$$\begin{aligned} \psi \circ \Phi \circ \varphi^{-1} &= \psi \circ \Phi \circ \underbrace{\big(\pi \circ (\pi|_{\widetilde{U}})^{-1}\big)}_{=\mathbb{1}} \circ \varphi^{-1} \\ &= \psi \circ (\Phi \circ \pi) \circ \big(\underbrace{\varphi \circ (\pi|_{\widetilde{U}})}_{=\widetilde{\varphi}}\big)^{-1} = \psi \circ (\Phi \circ \pi) \circ \widetilde{\varphi}^{-1} \end{aligned}$$

denn $\Phi \circ \pi$ ist in $\widetilde{p}$ differenzierbar. $\square$

**(2.28) Beispiel.**

(a) Für $\widetilde{M} = \mathbb{S}^n$ und $\Gamma = \mathbb{Z}_2$, sowie der natürlichen Wirkung von $\Gamma$ auf $\widetilde{M}$, erhält man für $\widetilde{M}/\Gamma$ gerade den projektiven Raum $\mathbb{P}^n$ (vergleiche die Konstruktion in (2.15) und (2.26)).

(b) Sei $\widetilde{M} = \mathbb{R}^n$ und $\Gamma = \mathbb{Z}^n$ operiere durch Translation. Dann ist also $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und vermöge

$$\Phi\colon \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \to \mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \ldots \times \mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C}^n,\ \big[(t_1, \ldots, t_n)\big] \mapsto (e^{2\pi \mathrm{i} t_1}, \ldots, e^{2\pi \mathrm{i} t_n}),$$

ist $\mathbb{T}^n \cong \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ (Übung).

**(2.29) Motivation.** Eine **Untermannigfaltigkeit** $M^n \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ der Dimension $n$ ist eine abgeschlossene Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$, so dass jeder Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ besitzt mit einer differenzierbaren Abbildung $F\colon U \to \mathbb{R}^k$, so dass gilt

(i) $F^{-1}(0) = M \cap U$,

(ii) $\mathrm{D}F_p\colon \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^k$ hat den Rang $k$.

Es heißt dann $\mathrm{T}M_p := \ker(DF_p) \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ der **Tangentialraum von M in p** und es war

$$\mathrm{T}M_p = \big\{\dot\alpha(0) \in \mathbb{R}^{n+k} \;:\; \alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M^n \text{ glatt } (C^\infty),\ \alpha(0) = p\big\} \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$$

der Raum der Tangentenvektoren an Kurven auf $M$ durch $p$.

*Problem:* Wie soll man "$\mathrm{T}M_p$" an eine abstrakte Mannigfaltigkeit definieren?

*Idee:* Fasse jeden Tangentialvektor $\xi = \dot\alpha(0) \in \mathrm{T}M_p \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ als eine **Richtungsableitung** von Funktionen $f\colon W \to \mathbb{R}$ auf, die auf einer offenen Umgebung $W \subseteq M$ von $p$ definiert sind,

$$\xi(f) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} (f \circ \alpha)(t)$$

Beachte: $\xi$ ist $\mathbb{R}$-linear und eine **Derivation**, d.h.

$$\xi(fg) = \xi(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot \xi(g),$$

denn mit Leibniz ist

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} \big((fg) \circ \alpha\big)(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} \big((f \circ \alpha) \cdot (g \circ \alpha)\big)(t) \\
&= (f \dot\circ \alpha)(0) \cdot (g \circ \alpha)(0) + (f \circ \alpha)(0) \cdot (g \dot\circ \alpha)(0) \\
&= \xi(f) g(p) + f(p) \xi(g).
\end{aligned}$$

**(2.30) Definition.** Sei $M^n$ eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension $n$. Ein differenzierbarer Atlas $\mathfrak{A} = (\varphi_i\colon U_i \to V_i)_{i \in I}$ heißt **$C^\infty$-Atlas**, wenn alle Übergänge $\varphi_{ij}$ $C^\infty$-Abbildungen sind. Zwei $C^\infty$-Atlanten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heißen äquivalent, wenn $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ auch noch $C^\infty$-Atlas ist. Eine Äquivalenzklasse $c = [\mathfrak{A}]$ ist eine $C^\infty$-Struktur auf $M$. Ein Paar $(M, c)$ heißt dann **eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension n**.

**(2.31) Kommentar.**

(a) In offensichtlicher Weise definiert man nun **glatte Funktionen** $f\colon M \to \mathbb{R}$ und **glatte Abbildung** $\Phi\colon M \to N$ für glatte Mannigfaltigkeiten $M$ und $N$.

(b) Für jede offene Teilmenge $U \subseteq M$, $M$ eine glatte Mannigfaltigkeit, schreiben wir:

$$\mathcal{E}(U) := \{f\colon U \to \mathbb{R} \,:\, f \text{ ist glatt}\} \quad \big(\text{auch } C^\infty(U) = \mathcal{E}(U)\big).$$

Es ist $\mathcal{E}(U)$ eine $\mathbb{R}$-Algebra vermöge:

$$\begin{aligned}(f+g)(p) :=& f(p)+g(p), \quad & (f\cdot g)(p) :=& f(p)\cdot g(p),\\ (\lambda f)(p) :=& \lambda f(p), & f,g \in& \mathcal{E}(U),\ \lambda\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

**(2.32) Definition.** Sei $M$ eine glatte Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Auf der mengentheoretischen Summe $\sum_{\substack{U\in\mathfrak{A}(p)\\ U \text{ offen}}} \mathcal{E}(U)$ definieren wir folgende Äquivalenzrelation: Für $f \in \mathcal{E}(U)$ und $g \in \mathcal{E}(\widetilde{U})$ sei $f \sim g$, wenn es ein offenes $W \in \mathfrak{A}(p)$ mit $W \subseteq U \cap \widetilde{U}$ gibt, so dass $f|_W = g|_W$ ist. Die Quotientenmenge $\mathcal{E}_p(M) := \big(\sum \mathcal{E}(U)\big)/\!\sim$ heißt der **Raum der glatten Funktionskeime von M in p**.

**(2.33) Kommentar.**

(a) Für einen Funktionskeim $s \in \mathcal{E}_p(M)$, der von $f \in \mathcal{E}(U)$ repräsentiert wird, schreiben wir $s = f_p := [f] \in \mathcal{E}_p(M)$. $\mathcal{E}_p(M)$ erbt von $\mathcal{E}(U)$, $U \in \mathfrak{A}(p)$, die Struktur einer $\mathbb{R}$-Algebra, in dem man diese repräsentantenweise definiert:

$$f_p + g_p := (f+g)_p,\ \lambda f_p := (\lambda f)_p,\ f_p\cdot g_p := (f\cdot g)_p \ \text{ für } f\in\mathcal{E}(U),\ g\in\mathcal{E}(\widetilde{U})$$

$\big($und $f+g, fg \in \mathcal{E}(U\cap\widetilde{U})\big)$, $\lambda\in\mathbb{R}$ und prüft (leicht) nach, dass dies wohldefiniert ist und $\mathcal{E}_p(M)$ zu einer $\mathbb{R}$-Algebra macht.

(b) Die $\mathbb{R}$-Algebra $A := \mathcal{E}_p(M)$, $p\in M$, kommt zudem mit einem Auswertungshomomorphismus $\varrho\colon A\to\mathbb{R}$, nämlich $f_p \mapsto f(p) =: f_p(p)$ was offensichtlich auch wohldefiniert und ein Homomorphismus ist. Man beachte, dass man einen Keim $s\in\mathcal{E}_p(M)$ nicht in Punkten $q \neq p$ auswerten kann.

**(2.34) Definition.** Sei $M^n$ eine glatte Mannigfaltigkeit, $p\in M$ und $\mathcal{E}_p(M)$ die $\mathbb{R}$-Algebra der glatten Funktionskeime in $p$.

(a) Ein $\mathbb{R}$-Vektorraumhomomorphismus $\xi\colon \mathcal{E}_p(M)\to\mathbb{R}$ heißt eine **Derivation** auf $\mathcal{E}_p(M)$, wenn für alle $f_p, g_p \in \mathcal{E}_p(M)$ gilt:

$$\xi(f_p g_p) = \xi(f_p)g_p(p) + f_p(p)\xi(g_p)$$

$\big($oder: $\xi(st) = \xi(s)\varrho(t) + \varrho(s)\xi(t)$, $\forall s,t\in\mathcal{E}_p(M)\big)$.

(b) Ein **Tangentialvektor an M in p** ist eine Derivation auf $\mathcal{E}_p(M)$. Die Menge aller Tangentialvektoren

$$\mathrm{T}M_p := \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}\big(\mathcal{E}_p(M),\mathbb{R}\big) := \{\xi\colon \mathcal{E}_p(M)\to\mathbb{R} \,:\, \xi \text{ ist Derivation}\}$$

heißt der **Tangentialraum von M in p**.

**(2.35) Kommentar.** Für jede $\mathbb{R}$-Algebra $A$ mit einem Algebra-Homomorphismus $\varrho\colon A\to\mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned}\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(A,\mathbb{R}) = \{\xi\colon A\to\mathbb{R},\ \xi \text{ ist } \mathbb{R}\text{-linear und } \textbf{derivativ},\\ \text{d.h.: } \xi(ab) = \xi(a)\varrho(b) + \varrho(a)\xi(b),\ \forall a,b\in A\}\end{aligned}$$

ein $\mathbb{R}$-Vektorraum vermöge

$$(\xi_1 + \xi_2)(a) := \xi_1(a) + \xi_2(a)$$
$$(\lambda \cdot \xi)(a) := \lambda \cdot \xi(a)$$

Es ist also $\mathrm{T}M_p = \mathrm{Der}_R\big(\mathcal{E}_p(M), \mathbb{R}\big)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

**(2.36) Beispiel.** Ist $\varepsilon > 0$ und $\alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ eine glatte Kurve auf $M$ durch $p$, d.h. $\alpha(0) = p$, so wird durch $\xi\colon \mathcal{E}_p(M) \to \mathbb{R}$,

$$\xi(f_p) := \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (f \circ \alpha)(t)$$

ein Tangentialvektor definiert, denn $\xi$ ist offenbar linear und auch derivativ $\big($siehe (2.29)$\big)$ und auch wohldefiniert. Wir schreiben $\dot{\alpha}(0) := \xi \in \mathrm{T}M_p$ und nennen dies den **Tangentenlvektor der Kurve $\alpha$ an p**.

**(2.37) Beispiel.** Sei $M^n$ glatte Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und $\varphi\colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte um $p$ mit $\varphi(p) =: x_0 \in V$. Für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$ definiert man:

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p : \mathcal{E}_p(M) \to \mathbb{R},\ f_p \mapsto \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_{x=x_0} (f \circ \varphi^{-1})(x)$$

Es ist $\frac{\partial}{\partial x^j}\big|_p$ offenbar $\mathbb{R}$-linear $\big($denn $(f+g) \circ \varphi^{-1} = f \circ \varphi^{-1} + g \circ \varphi^{-1}$ und $(\lambda f) \circ \varphi^{-1} = \lambda(f \circ \varphi^{-1})\big)$ und auch derivativ, denn mit Leibniz ist

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p (f_p \cdot g_p) &= \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_{x=x_0} (fg \circ \varphi^{-1}) = \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_{x_0} (f \circ \varphi^{-1} \cdot g \circ \varphi^{-1})(x) \\
&= \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_{x_0} (f \circ \varphi^{-1})(x) \cdot g \circ \varphi^{-1}(x_0) + (f \circ \varphi^{-1})(x_0) \cdot \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_{x_0} (g \circ \varphi^{-1})(x) \\
&= \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p (f_p) \cdot g_p(p) + f_p(p) \cdot \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p (g_p),
\end{aligned}$$

und wohldefiniert sowieso, weil man bei solchen Ableitungsoperatoren, ähnlich wie in Beispiel (2.36), die Funktion $f$ nur in einer „infinitesimalen" Umgebung von $p$ zu kennen braucht, d.h. nur den Keim $f_p$.

Wir nennen $\frac{\partial}{\partial x^j}|_p \in \mathrm{T}M$ **den j-ten Koordinatenvektor bzgl. der Karte $\varphi$**. Beachte: Ist $\alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ die Kurve $\alpha(t) = \varphi^{-1}(x_0 + te_j)$ ($\varepsilon > 0$ klein genug), so ist gerade $\frac{\partial}{\partial x^j}\big|_p = \dot{\alpha}(0)$, denn

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_{x_0} (f \circ \varphi^{-1})(x) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 (f \circ \varphi^{-1})(x_0 + te_j).$$

$\big($wo $(e_1, \dots, e_n)$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^n$ ist$\big)$.

**(2.38) Bemerkung.** Sei $M$ eine glatte Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und $\varphi\colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte um $p$. Dann ist die Familie der Tangentialvektoren $\big(\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p\big)$ linear unabhängig.

***Beweis.*** Sei $x^j\colon V \to \mathbb{R}$ die $j$-te Koordinatenfunktion $x \mapsto x^j$ und $\pi^j\colon U \to \mathbb{R}$, $\pi^j := x^j \circ \varphi$. Dann gilt für $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p\colon \mathcal{E}_p(M) \to \mathbb{R}$:

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p (\pi^j_p) = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{x_0} (\pi^j \circ \varphi^{-1})(x) = \left.\frac{\partial x^i}{\partial x^j}\right|_{x_0} = \delta^i_j \left(= \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}\right).$$

Ist also

$$\lambda^1 \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p + \ldots + \lambda^n \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p = 0$$

so insbesondere

$$0 = 0(\pi_p^j) = \sum_{i=1}^n \lambda^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p (\pi_p^j) = \sum_{i=1}^n \lambda^i \delta_i^j = \lambda^j,$$

also ist $(\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p)$ linear unabhängig. □

**(2.39) Vereinbarung.** Wir vereinbaren ab hier die **Einsteinsche Summenkonvention**, die besagt, dass falls in einer Formel ein Index doppelt auftaucht, und einmal oben und unten steht, so wird über diesen (von 1 bis $n = \dim M$) summiert.

**(2.40) Problem.** Wenn $\mathrm{T}M_p = \mathrm{Der}\big(\mathcal{E}_p(M), \mathbb{R}\big)$ wirklich ein adequates Konzept für den Tangentialraum von $M$ an $p$ sein soll, muss $(\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p)$ auch Erzeugendensystem sein, also $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{T}M_p = n$. Auf den ersten Blick wirkt dies vermessen. Man beachte aber, dass die Derivations-Eigenschaft folgendes liefert:

(a) Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\lambda_p \in \mathcal{E}_p(M)$ der von der konstanten Funktion $M \to \mathbb{R}$, $p \mapsto \lambda$, induzierte Funktionskeim, so ist für jede Derivation $\xi\colon \mathrm{T}M_p \to \mathbb{R}$

$$\xi(\lambda_p) = \xi(\lambda \cdot 1_p) = \lambda\, \xi(1_p)$$

wegen der $\mathbb{R}$-Linearität und

$$\xi(1_p) = \xi(1_p \cdot 1_p) = \xi(1_p) \cdot \underbrace{1_p(p)}_{=1} + \underbrace{1_p(p)}_{=1} \cdot \xi(1_p) = 2 \cdot \xi(1_p)$$

folgt, also

$$\xi(\lambda_p) = 0, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

(b) Sind $f_p, g_p \in \mathcal{E}_p(M)$ mit $f_p(p) = 0 = g_p(p)$, so ist

$$\xi(f_p g_p) = \xi(f) \cdot \underbrace{g_p(p)}_{=0} + \underbrace{f_p(p)}_{=0} \cdot \xi(g_p) = 0.$$

Eine Derivation $\xi$ ermittelt also gewissermaßen nur, was ein Keim „in 1.Ordnung" (bei $p$) macht.

**(2.41) Lemma.** *Sei $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ein sternförmiges Gebiet bzgl. $p = 0$, d.h.: mit jedem $x \in V$ ist auch die Strecke $\{tx \in \mathbb{R}^n \ : \ t \in [0,1]\}$ in $V$. Sei $g\colon V \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Dann gibt es glatte Funktionen $h_1, \ldots, h_n\colon V \to \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in V$ folgendes gilt:*

$$g(x) = g(0) + h_j(x) x^j.$$

**(2.42) Kommentar.** Man beachte, dass nach der Produktregel

$$\frac{\partial g}{\partial x^j}(0) = h_j(0)$$

ist.

***Beweis von*** (2.41)**.** Man setze $h_j\colon V \to \mathbb{R}$,

$$h_j(x) := \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x^j}(tx)\mathrm{d}t.$$

Dann ist $h_j$ auch glatt und nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist:

$$\begin{aligned} g(x) - g(0) &= \int_0^1 \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g(tx)\right) \mathrm{d}t \underset{\text{Kettenregel}}{=} \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x^j}(tx) \cdot x^j \mathrm{d}t \\ &= \left(\int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x^j}(tx)\mathrm{d}t\right) \cdot x^j = h_j(x) x^j. \end{aligned}$$

□

**(2.43) Satz.** *Sei $M$ eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension $n$. Dann ist für jedes $p \in M$ der Tangentialraum $\mathrm{T}M_p$ an $M$ in $p$ ein reeller Vektorraum der Dimension $n$. Ist $\varphi\colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte in $p$ und $\frac{\partial}{\partial x^j}|_p$ der induzierte $j$-te Koordinatenvektor, so ist $(\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p)$ eine Basis.*

***Beweis.***

(i) Lineare Unabhängigkeit: (2.38)

(ii) Erzeugendensystem: Sei $\xi \in \mathrm{T}M_p$ beliebig, $\varphi\colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte um $p$, $\varphi(p) = 0$ und $V$ sternförmig bzgl. $0 \in \mathbb{R}^n$. Das kann man nach einer eventuellen Translation mit der Karte und einer eventuellen Verkleinerung der Karte (z.B. auf einen Ball $V = B_\varepsilon(0)$ (mit $\varepsilon > 0$)) immer annehmen (Übung). Seien $\pi^j \in \mathcal{E}_p(U)$ die $j$-te Koordinatenfunktion bzgl. $\varphi$, also $\pi^j = x^j \circ \varphi$. Wir setzen $\lambda^j := \xi(\pi^j_p)$ und behaupten:

$$\xi = \lambda^j \frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_p .$$

Sei dazu $s \in \mathcal{E}_p(M)$ beliebig, $f \in \mathcal{E}(\widetilde{U})$ ein Repräsentant und ohne Einschränkung nach eventueller Verkleinerung von $U$ bzw. $\widetilde{U}$ sei $U = \widetilde{U}$, also $s = f_p$. Sei $g := f \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{E}(V)$. Mit (2.41) gibt es glatte Funktionen $h_1, \ldots, h_n \in \mathcal{E}(V)$ mit

$$g(x) = g(0) + h_j(x)x^j, \ \forall x \in V.$$

Also ist:

$$f = g \circ \varphi = g \circ \varphi(p) + (h_j \circ \varphi)(x^j \circ \varphi) = f(p) + H_j\pi^j$$

mit $H_j := h_j \circ \varphi \in \mathcal{E}(U)$. Wegen $\pi^j(p) = x^j(0) = 0$ folgt nun:

$$\begin{aligned} \xi(f_p) &= \xi\Big(\big(f(p)\big)_p + (H_j)_p \cdot \pi^j_p\Big) \\ &= \underbrace{\xi\big(f_p(p)\big)}_{=0} + \xi\big((H_j)_p\big) \cdot \underbrace{\pi^j_p(p)}_{=0} + (H_j)_p(p) \cdot \underbrace{\xi(\pi^j_p)}_{=\lambda^j} \end{aligned}$$

und andererseits:

$$H_j(p) = h_j\big(\varphi(p)\big) = h_j(0) \overset{(2.42)}{=} \frac{\partial g}{\partial x^j}(0) = \frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_p (f_p)$$

Für alle $f_p \in \mathcal{E}_p(M)$ gilt also:

$$\xi(f_p) = \lambda^j \frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_p (f_p)$$

also

$$\xi = \lambda^j \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

□

**(2.44) Kommentar.**

(a) Die Dimension einer Mannigfaltigkeit $M \neq \emptyset$ ist also eindeutig bestimmt:

$$\dim M = n = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{T}M_p, \ \forall p \in M.$$

(Es ist auch richtig, dass die Dimension einer topologischen Mannigfaltigkeit eindeutig definiert ist, weil für zwei offene Mengen $V \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V' \subseteq \mathbb{R}^{n'}$ gilt: Sind $V$ und $V'$ homöomorph so ist $n = n'$. Das ist ein Resultat der „Algebraischen Topologie", siehe z.B. [SZ])

(b) Jeder Tangentialvektor taucht als Tangentenvektor einer geeigneten Kurve auf. Ist nämlich $\xi \in \mathrm{T}M_p$ beliebig, $\varphi\colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte und $\lambda^1, \ldots, \lambda^n \in \mathbb{R}$ so, dass $\xi = \lambda^j \frac{\partial}{\partial x^j}\big|_p$ ist, so betrachte die Kurve $\alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$,

$$\alpha(t) = \varphi^{-1}(t\lambda)$$

$\big(\lambda := (\lambda^1, \ldots, \lambda^n) \in \mathbb{R}^n\big)$. Es ist dann für alle $f_p \in \mathcal{E}_p(M)$:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}(0)(f_p) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} (f \circ \alpha)(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} \big(f \circ \varphi^{-1}(t\lambda)\big) &\overset{\text{K.R.}}{=} \frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_0 (f \circ \varphi^{-1}) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} (t\lambda^j) \\ &= \lambda^j \cdot \frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_p (f_p),\end{aligned}$$

also

$$\dot{\alpha}(0) = \lambda^j \frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_p = \xi.$$

Also:

$$\mathrm{T}M_p = \{\dot{\alpha}(0) \in \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}\big(\mathcal{E}_p(M), \mathbb{R}\big) \ : \ \alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \text{ glatte Kurve mit } \alpha(0) = p \ (\varepsilon > 0)\}$$

**(2.45) Vereinbarung.**

(a) Ist $\varphi\colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte auf einer glatten Mannigfaltigkeit, so schreiben wir ab jetzt oft nur noch $x\colon U \to V$, wo "$x$" auch die Koordinate für $V$ bezeichnet.

(b) Sind $x\colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ und $y\colon \widetilde{U} \to \widetilde{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ zwei Karten und $U \cap \widetilde{U} \neq \emptyset$, so schreiben wir für den Übergang $y \circ x^{-1}\colon x(U \cap \widetilde{U}) \to y(U \cap \widetilde{U})$ ebenfalls nur kurz $y$ $\big($oder $y = y(x)\big)$.

(c) Ist z.B. $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion und $x\colon U \to V$ eine Karte von $M$, so schreibt man für die lokale Beschreibung $f \circ x^{-1}\colon V \to \mathbb{R}$ oft ebenfalls nur $f$ $\big($oder $f(x)\big)$ und benutzt keinen neuen Buchstaben.

**(2.46) Bemerkung.** Sei $M$ eine glatte Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und seien $x$ und $y$ zwei Karten um $p$, $x_0 = x(p)$, $y_0 = y(p)$. Dann gilt für alle $i, j = 1, \ldots, n$:

$$\frac{\partial}{\partial y^j}\bigg|_p = \frac{\partial x^i}{\partial y^j}\bigg|_{y_0} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p, \quad \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\bigg|_{x_0} \cdot \frac{\partial}{\partial y^j}\bigg|_p.$$

***Beweis.*** Nenne (nochmal einmal) $\varphi = x \colon U \to V$, $\psi = y \colon \widetilde{U} \to \widetilde{V}$ und ohne Einschränkung: $U = \widetilde{U}$, und $\tau = \psi \circ \varphi^{-1} \colon V \to \widetilde{V}$. Sei $s \in \mathcal{E}_p(M)$, $f \in \mathcal{E}(\widetilde{\widetilde{U}})$ mit $f_p = s$ und ohne Einschränkung: $\widetilde{\widetilde{U}} = U$. Dann ist $\big($ohne Einschränkung $\varphi(p) = 0 = \psi(p)$, also $\tau(0) = 0\big)$:

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p (f_p) = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p (f \circ \varphi^{-1}) = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_0 (f \circ \psi^{-1} \circ \tau),$$

weil $\tau \circ \varphi = \psi$ ist $\Longrightarrow$ (Kettenregel)

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p (f_p) = \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_0 (f \circ \psi^{-1}) \cdot \left.\frac{\partial \tau^j}{\partial x^i}\right|_0 = \frac{\partial \tau^j}{\partial x^i}(0) \cdot \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_p (f_p),$$

also

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p = \left.\frac{\partial \tau^j}{\partial x^i}\right|_0 \cdot \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_p .$$

□

**(2.47) Kommentar.** Ist $M$ glatte Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und hat $\xi \in \mathrm{T}M_p$ bzgl. einer Karte $x$ die Darstellung $(\lambda^1, \ldots, \lambda^n) \in \mathbb{R}^n$, d.h.: $\xi = \lambda^i \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$, und bzgl. einer Karte $y$ die Darstellung $\xi = \mu^j \cdot \frac{\partial}{\partial y^j}|_p$, so transformieren sich die Koordinaten $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^n$ so:

$$\lambda^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^j}(y_0)\mu^j,$$

denn:

$$\lambda^j \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p = \xi = \mu^j \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_p = \mu^j \frac{\partial x^i}{\partial y^j}(y_0) \cdot \frac{\partial}{\partial x^i},$$

also nach Koeffizientenvergleich

$$\lambda^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^j}(y_0)\mu^j.$$

**(2.48) Definition.** Sei $M^n$ eine glatte Mannigfaltigkeit und $p \in M$.

(a) Der Dualraum des Tangentialraums ist der **Cotangentialraum von M in p:**

$$\mathrm{T}M_p^* := \{\eta \colon \mathrm{T}M \to \mathbb{R} \,:\, \eta \text{ linear}\}.$$

(b) Ist $x \colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ um $p$ und ist $(\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p)$ die zugeordnete Basis von $\mathrm{T}M_p$ aus Koordinatenvektoren, so wird mit $(\mathrm{d}x^1|_p, \ldots, \mathrm{d}x^n|_p)$ die dazu duale Basis von $\mathrm{T}M_p^*$ bezeichnet, also:

$$\mathrm{d}x^i|_p \left( \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p \right) = \delta^i_j \quad (1 \leq i, j \leq n).$$

**(2.49) Kommentar.**

(a) Sind $x$ und $y$ zwei Karten um $p$, $x_0 = x(p)$, $y_0 = y(p)$ mit Übergängen $y = y(x)$ bzw. $x = x(y)$, so gilt für alle $i, j = 1, \ldots, n$:

$$\mathrm{d}y^j|_p = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(x_0) \cdot \mathrm{d}x^i|_p, \quad \mathrm{d}x^i|_p = \frac{\partial x^i}{\partial y^j}(y_0) \cdot \mathrm{d}y^j|_p,$$

denn

$$\mathrm{d}y^j|_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right) = \mathrm{d}y^j|_p\left(\frac{\partial y^k}{\partial x^i}(x_0)\cdot\left.\frac{\partial}{\partial y^k}\right|_p\right) = \frac{\partial y^k}{\partial x^i}(x_0)\underbrace{\mathrm{d}y^j|_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial y^k}\right|_p\right)}_{=\delta^j_k} = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(x_0)$$

(und ähnlich für $\mathrm{d}x^i|_p$).

(b) Ist $\eta \in \mathrm{T}M_p^*$ ein Cotangentialvektor mit Komponenten $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ bzgl. einer Karten $x$ und Komponenten $(\mu_1,\dots,\mu_n)$ bzgl. einer Karten $y$, so transformieren sich diese (vergleiche (2.47)):

$$\lambda_i = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(x_0)\mu_j,$$

denn aus

$$\lambda_i \mathrm{d}x^i|_p = \eta = \mu_j \mathrm{d}y^j|_p = \mu_j\frac{\partial y^j}{\partial x^i}(x_0)\cdot \mathrm{d}x^i|_p$$

folgt:

$$\lambda_i = \mu_j\frac{\partial y^j}{\partial x^i}(x_0) \quad (i=1,\dots,n).$$

(c) Man beachte die Feinheit mit der Schreibweise der Indizes oben und unten: In Matrix-Schreibweise transformieren sich die Koordinatenvektoren $\lambda,\mu\in\mathbb{R}^n$ von Tangentialvektoren (kurz: Vektoren) $\xi\in\mathrm{T}M_p$ bzw. Cotangentialvektoren (kurz: **Covektoren**) $\eta\in\mathrm{T}M_p^*$ so:

$$\text{Sei } A = \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}(x_0)\right)_{i,j} \quad \text{und} \quad B = \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}(y_0)\right)_{i,j}.$$

Dann ist $B = A^{-1}$, denn für den Koordinaten-Wechsel $y=\tau(x)$ ist

$$\mathrm{Jac}(\tau)(x_0) = \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}(x_0)\right)$$

und

$$\mathrm{Jac}(\tau^{-1})(y_0) = \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}(y_0)\right)$$

und

$$\mathrm{Jac}(\tau^{-1})(y_0) = \Big(\mathrm{Jac}(\tau)(x_0)\Big)^{-1}$$

wegen $\tau\circ\tau^{-1} = \mathbb{1}$ und der Kettenregel. In Index-Schreibweise liest sich das so:

$$\frac{\partial y^i}{\partial x^k}(x_0)\cdot\frac{\partial x^k}{\partial y^j}(y_0) = \delta^i_j.$$

Also ist:

$$\lambda^i = \left.\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right|_{y_0}\mu^j \Longrightarrow \lambda = B\mu = A^{-1}\mu \quad (2.47)$$

$$\lambda_i = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(x_0)\mu_j \Longrightarrow {}^t\lambda = {}^t\mu\, A \Longrightarrow \lambda = {}^tA\mu = {}^tB^{-1}\,\mu \quad (2.49)$$

Die Tatsache, dass man die Transformationsmatrix $A$ (bzw. $B$) nicht nur invertieren, sondern auch noch transponieren muss, ist in der Indexschreibweise „versteckt".

**(2.50) Motivation.** Also nächstes sollen "Felder" von Tangentialvektoren und Covektoren eingeführt werde: Setze dazu

$$\mathrm{T}M := \sum_{p \in M} \mathrm{T}M_p, \quad \mathrm{T}M^* := \sum_{p \in M} \mathrm{T}M_p^*,$$

sowie

$$\pi \colon \mathrm{T}M \ \to M,\ \pi(\xi) = p :\Longleftrightarrow \xi \in \mathrm{T}M_p$$

bzw.

$$\pi \colon \mathrm{T}M^* \to M,\ \pi(\eta) = p :\Longleftrightarrow \eta \in \mathrm{T}M_p^*.$$

Es heißt $\pi \colon \mathrm{T}M \to M$ das **Tangentialbündel von M** und $\pi \colon \mathrm{T}M^* \to M$ das **Cotangentialbündel von M**. ($\mathrm{T}M$ und $\mathrm{T}M^*$ sind hier zunächst nur Mengen.)

**(2.51) Definition.** Sei $M$ eine glatte Mannigfaltigkeit und $U \subseteq M$ offen.

(a) Eine Abbildung $X \colon U \to \mathrm{T}M$ heißt **Vektorfeld auf U**, wenn für alle $p \in U$ gilt, dass $X(p) \in \mathrm{T}M_p$ ist, also $\pi \circ X = \mathbb{1}_U$ ist.

(b) Eine Abbildung $\omega \colon U \to \mathrm{T}M^*$ heißt **Differentialformen auf U**, wenn für alle $p \in U$ gilt, dass $\omega(p) \in \mathrm{T}M_p^*$ ist, also:
$$\pi \circ \omega = \mathbb{1}_U.$$

**(2.52) Beispiel.** Sei $M$ glatte Mannigfaltigkeit, $U \subseteq M$ offen und $x \colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte. Man definiert dann die **Koordinatenvektorfelder** $\frac{\partial}{\partial x^i} \colon U \to \mathrm{T}M$ $(i = 1, \ldots, n)$ durch

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(p) := \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$$

und die Koordinaten-Differentialformen $\mathrm{d}x^i \colon U \to \mathrm{T}M^*$,

$$\mathrm{d}x^i(p) := \mathrm{d}x^i|_p.$$

**(2.53) Kommentar.**

(a) Ist $x \colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte auf $M$ und $X$ ein Vektorfeld auf $U$, so gibt es wegen Satz (2.43) eindeutig bestimmte Funktionen $\xi^1, \ldots, \xi^n \colon V \to \mathbb{R}$, so dass gilt:

$$X = \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

(Genau genommen bedeutet das mit der Kartenbezeichnung $\varphi$:

$$X = \xi^i \circ \varphi \frac{\partial}{\partial x^i}, \text{ also: } X(p) = \xi^i \circ \varphi(p) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p .)$$

(b) Entsprechend gibt es für eine Differentialform $\omega$ auf $U$, wenn $x \colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte ist, eindeutig bestimmte Funktionen $\eta_1, \ldots, \eta_n \colon V \to \mathbb{R}$, so das

$$\omega = \eta_i(x) \mathrm{d}x^i$$

ist.

(c) Seien $X\colon U \to \mathrm{T}M$ bzw. $\omega\colon U \to \mathrm{T}M^*$ ein Vektorfeld bzw. eine Differentialform auf $U$ und $x$ und $y$ Karten auf $U$, $x\colon U \to V$, $y\colon U \to \widetilde{V} \subseteq \mathbb{R}^n$, sowie

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i},\ X = \eta^j \frac{\partial}{\partial y^j},$$

mit $\xi^i\colon V \to \mathbb{R}$ und $\eta^j\colon \widetilde{V} \to \mathbb{R}$. Dann ist wegen (2.47)

$$\xi^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \cdot \eta^j$$

$\big($streng genommen: $\xi^i \circ \tau(y) = \frac{\partial \tau^i}{\partial y^j}(y) \cdot \eta^j(y)$, wenn $x = \tau(y)$ der Kartenwechsel ist$\big)$. Ähnlich ist für

$$\omega = \xi_i(x)\mathrm{d}x^i = \eta_j(y)\mathrm{d}y^j$$

nach (2.49):

$$\xi_i = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\eta_j.$$

**(2.54) Definition.** Sei $M$ glatte Mannigfaltigkeit und $U \subseteq M$ offen.

(a) Ein Vektorfeld $X\colon U \to \mathrm{T}M$ auf $U$ heißt **glatt**, wenn für alle Karten $x\colon \widetilde{U} \to \widetilde{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ (mit $U \cap \widetilde{U} = \emptyset$) gilt: ist $X|_{U\cap\widetilde{U}} = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ mit $\xi^i\colon x(\widetilde{U} \cap U) \to \mathbb{R}$, so muss $\xi^i$ glatt sein für $i = 1, \ldots, n$.

(b) Eine Differentialform $\omega\colon U \to \mathrm{T}M^*$ auf $U$ heißt **glatt**, wenn für alle Karten $x\colon \widetilde{U} \to \widetilde{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ (mit $U \cap \widetilde{U} = \emptyset$) gilt: ist $\omega|_{U\cap\widetilde{U}} = \eta_i \mathrm{d}x^i$ mit $\eta_i\colon x(\widetilde{U} \cap U) \to \mathbb{R}$, so muss $\eta_i$ glatt sein für $i = 1, \ldots, n$.

**(2.55) Kommentar.**

(a) Sei $U \subseteq M$ offen. Wir bezeichnen

$$\mathfrak{X}(U) := \{X\colon U \to \mathrm{T}M \,:\, X \text{ glattes Vektorfeld auf } U\}$$

und

$$\Omega(U) := \{\omega\colon U \to \mathrm{T}M^* \,:\, \omega \text{ glatte Differentialform auf } U\}.$$

(b) Man beachte, dass $\mathfrak{X}(U)$ bzw. $\Omega(U)$ vermöge

$$(X_1 + X_2)(p) := X_1(p) + X_2(p),\ (\lambda X)(p) := \lambda \cdot X(p),$$
$$(\omega_1 + \omega_2)(p) := \omega_1(p) + \omega_2(p),\ (\lambda\omega)(p) := \lambda \cdot \omega(p)$$

nicht nur zu einem $\mathbb{R}$-Vektorraum wird, sondern mit

$$(f \cdot X)(p) := f(p) \cdot X(p) \quad \text{bzw.} \quad (f \cdot \omega)(p) := f(p) \cdot \omega(p),$$

mit $f \in \mathcal{E}(U)$, sogar zu einem $\mathcal{E}(U)$-Modul.

(c) Ist $x\colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte, so gilt $\mathfrak{X}(U) \cong \mathcal{E}(U)^n$ bzw. $\Omega(U) \cong \mathcal{E}(U)^n$ als $\mathcal{E}(U)$-Moduln, in dem man $X \in \mathfrak{X}(U)$ gerade seine Komponentenfunktionen $\xi^1, \ldots, \xi^n \in \mathcal{E}(U)$ (genauer $\xi^1 \circ x, \ldots, \xi^n \circ x$) zuordnet,

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

(ähnlich für $\Omega(U)$). Ist $U \subseteq M$ kein Kartengebiet (z.B. wenn $M$ kompakt und $U = M$ ist), so kann die (Modul-)Struktur von $\mathfrak{X}(U)$ bzw. $\Omega(U)$ sehr viel komplizierter sein als $\mathcal{E}(U)^n$. Zum Beispiel kann für die 2-Sphäre $\mathbb{S}^2$ der $\mathcal{E}(\mathbb{S}^2)$-Modul $\mathfrak{X}(\mathbb{S}^2)$ nicht frei vom Rang 2 sein, d.h.: $\mathfrak{X}(\mathbb{S}^2) \not\cong \mathcal{E}(\mathbb{S}^2)^2$, denn sonst gäbe es eine Basis $(X_1, X_2)$, d.h. $\big(X_1(p), X_2(p)\big)$ müsste in jedem Punkt $p$ eine Basis von $\mathrm{T}M_p$ sein (Übung). Nach dem **Igelsatz** (vgl. Analysis IV oder Algebraische Topologie) hat aber jedes glatte Vektorfeld auf $\mathbb{S}^2$ eine Nullstelle.

**(2.56) Definition.** Sei $M$ eine glatte Mannigfaltigkeit, $U \subseteq M$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Für jedes $p \in U$ definieren wir das **Differential von f in p** durch

$$\mathrm{d}f_p\colon \mathrm{T}M_p \to \mathbb{R},\ \mathrm{d}f_p(\xi) := \xi(f_p),$$

und **das (totale) Differential** durch

$$\mathrm{d}f\colon U \to \mathrm{T}M^*,\ \mathrm{d}f(p) := \mathrm{d}f_p.$$

**(2.57) Bemerkung.** Sei $M$ glatte Mannigfaltigkeit, $U \subseteq M$ offen und $f \in \mathcal{E}(U)$.

(a) Es ist $\mathrm{d}f$ eine glatte Differentialform, $\mathrm{d}f \in \Omega(U)$;

(b) Ist $x\colon \widetilde{U} \to \widetilde{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte auf $M$ und bezeichnet $f \in \mathcal{E}(V)$ mit $V := x(U \cap \widetilde{U}) \subseteq \widetilde{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ auch die lokale Beschreibung von $f$ (genauer $f \circ x^{-1}$), so gilt für $\mathrm{d}f$ die Koordinatenbeschreibung:
$$\mathrm{d}f|_{U\cap\widetilde{U}} = \frac{\partial f}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i.$$

***Beweis.*** Offenbar ist $\mathrm{d}f_p\colon \mathrm{T}M_p \to \mathbb{R}$, $\xi \to \xi(f_p)$, linear, also $\mathrm{d}f_p$ ein Covektor in $p$, also $\mathrm{d}f$ eine Differentialform auf $U$. Ist $x\colon \widetilde{U} \to \widetilde{V}$ eine Karte, $p \in U \cap \widetilde{U}$, so ist mit $x_0 = x(p) \in V = x(U \cap \widetilde{U}) \subseteq \widetilde{V}$.

$$\mathrm{d}f_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right) = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{x_0}(f \circ x^{-1}) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0),$$

also $\mathrm{d}f_p = \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)\mathrm{d}x^i|_p$, also: $\mathrm{d}f|_{U\cap\widetilde{U}} = \frac{\partial f}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i$. Insbesondere ist $\mathrm{d}f$ glatt, $\mathrm{d}f \in \Omega(U)$. □

**(2.58) Kommentar.**

(a) Für eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine glatte Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}$ betrachtet man häufig den Gradienten von $f$,

$$\operatorname{grad}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^n}\right) : U \to \mathbb{R}^n$$

als ein Vektorfeld auf $U$. Bemerkung (2.57) (oder die Kettenregel) zeigt aber, dass bei einem Koordinatenwechsel $x = \tau(y)$ sich die Komponenten des Gradienten der Funktion $g = f \circ \tau$ wie die Komponenten einer Differentialform (und nicht wie die eines Vektorfeldes) transformieren:

$$\frac{\partial g}{\partial y^j} = \frac{\partial f}{\partial x^i} \circ \tau \cdot \frac{\partial x^i}{\partial y^j},$$

also mit

$$\eta_j = \frac{\partial f}{\partial y^i},\ \xi_i = \frac{\partial f}{\partial x^i} : \eta_j = \frac{\partial x^i}{\partial y^i}\xi_i.$$

Auf einer glatten Mannigfaltigkeit hat man daher *keinen* Gradienten im Sinne einer Abbildung „grad: $\mathcal{E}(U) \to \mathfrak{X}(U)$“, sondern nur ein totales Differential

$$\mathrm{d}\colon \mathcal{E}(U) \to \Omega(U),\ f \mapsto \mathrm{d}f.$$

(b) Ist $x\colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte auf $M$, so hat man insbesondere die Koordinatenfunktionen $f = x^i$ $\big($früher mit $\pi^i \in \mathcal{E}(U)$ bezeichnet$\big)$ und daher nun zwei Definitionen für die Ausdrücke $\mathrm{d}x^i \in \Omega(U)$ $\big($einmal ist $(\mathrm{d}x^1|_p, \ldots, \mathrm{d}x^n|_p)$ duale Basis zu $(\frac{\partial}{\partial x^i}|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p)$, ein anderes Mal ist nach (2.56) $\mathrm{d}x^i_p(\xi) = \xi(x^i_p)\big)$, die aber übereinstimmen wegen $\big(x_0 = x(p)\big)$:

$$\mathrm{d}x^i_p \left( \frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_p \right) = \frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_p (x^i_p) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j}(x_0) = \delta^i_j = \mathrm{d}x^i|_p \left( \frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_p \right),\ \forall 1 \leq i, j \leq n.$$

**(2.59) Definition.** Seien $M$ und $N$ glatte Mannigfaltigkeiten, $\Phi\colon M \to N$ eine glatte Abbildung, $p \in M$ und $q := \Phi(p)$. Wir definieren **das Differential von $\Phi$ in p** durch

$$\mathrm{D}\Phi_p\colon \mathrm{T}M_p \to \mathrm{T}N_q,\ \mathrm{D}\Phi_p(\xi)(g_q) := \xi\big((g \circ \Phi)_p\big),$$

$\xi \in \mathrm{T}M_q$, $g_q \in \mathcal{E}_p(N)$ $\big($und $g \in \mathcal{E}(U)$, $U \subseteq N$ offene Umgebung von $q$, $g$ ein Repräsentant von $s = g_q \in \mathcal{E}(N)\big)$.

**(2.60) Kommentar.**

(a) $\mathrm{D}\Phi_p(\xi)$ ist wohldefiniert, denn repräsentiert $g \in \mathcal{E}(U)$ und $\widetilde{g} \in \mathcal{E}(\widetilde{U})$ den gleichen Keim in $q$, $g_q = \widetilde{g}_q$, so repräsentieren auch $g \circ \Phi \in \mathcal{E}\big(\Phi^{-1}(U)\big)$ und $\widetilde{g} \circ \Phi \in \mathcal{E}\big(\Phi^{-1}(\widetilde{U})\big)$ den gleichen Funktionskeim in $p$, $(g \circ \Phi)_p = (\widetilde{g} \circ \Phi)_p$.

(b) Es ist $\mathrm{D}\Phi_p\colon \mathrm{T}M_p \to \mathrm{T}N_q$ eine lineare Abbildung:

$$\begin{aligned} \mathrm{D}\Phi_p(\xi_1 + \xi_2) &= \mathrm{D}\Phi_p(\xi_1) + \mathrm{D}\Phi_p(\xi_2), && \xi_1, \xi_2 \in \mathrm{T}M_p \\ \mathrm{D}\Phi_p(\lambda\xi) &= \lambda \cdot \mathrm{D}\Phi_p(\xi), && \lambda \in \mathbb{R},\ \xi \in \mathrm{T}M_p. \end{aligned}$$

**(2.61) Bemerkung.** Seien $M^n, N^r$ glatt, $\Phi\colon M \to N$ glatt, $p \in M$ und $q = \Phi(p) \in N$. Seien $x\colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ und $y\colon \widetilde{U} \to \widetilde{V} \subseteq \mathbb{R}^r$ Karten um $p$ bzw. $q$, $x_0 = x(p)$, $y_0 = y(q)$ und $\Phi(U) \subseteq \widetilde{U}$. Sei schließlich $\Phi\colon V \to \widetilde{V}$ die Koordinatenbeschreibung von $\Phi$ bzgl. $x$ und $y$ (also genauer $y \circ \Phi \circ x^{-1}$). Die Matrix der linearen Abbildung $\mathrm{D}\Phi_p$ bzgl. der Basen $(\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p)$ von $\mathrm{T}M_p$ und $(\frac{\partial}{\partial y^1}|_q, \ldots, \frac{\partial}{\partial y^r}|_q)$ von $\mathrm{T}N_q$ ist dann die Jacobi-Matrix von $\Phi$ in $x_0$, also:

$$\mathrm{D}\Phi_p \left( \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p \right) = \frac{\partial \Phi^j}{\partial x^i}(x_0)\, \frac{\partial}{\partial y^j}\bigg|_q.$$

***Beweis.*** Zwei Tangentenvektoren $\eta, \widetilde{\eta} \in \mathrm{T}N_q$ sind bereits dann gleich, wenn sie auf den Keimen der Koordinatenfunktionen übereinstimmen, $\eta(y^j_q) = \widetilde{\eta}(y^j_q)$ $(j = 1, \ldots, r)$ $\big($vgl. Satz (2.43)$\big)$,

$$\eta = \eta(y^j_q)\, \frac{\partial}{\partial y^j}\bigg|_q.$$

Es ist aber für $k = 1, \dots, r$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}\Phi_p\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p\right)(y^k_q) &= \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p\big((y^k\circ\Phi)_p\big) = \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{x_0}\underbrace{y^k\circ\Phi\circ x^{-1}}_{=\Phi^k} = \frac{\partial\Phi^k}{\partial x^i}(x_0)\\
&= \frac{\partial\Phi^j}{\partial x^i}(x_0)\cdot\delta^k_j = \frac{\partial\Phi^j}{\partial x^i}(x_0)\cdot\frac{\partial y^k}{\partial y^j} = \left(\frac{\partial\Phi^j}{\partial x^i}(x_0)\,\frac{\partial}{\partial y^j}\bigg|_q\right)(y^k_q)\\
\Longrightarrow \mathrm{D}\Phi_p\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p\right) &= \frac{\partial\Phi^j}{\partial x^i}(x_0)\,\frac{\partial}{\partial y^j}\bigg|_q.
\end{aligned}$$

□

**(2.62) Beispiel.**

(a) Sei $V$ ein endlich-dimensionaler, reeller Vektorraum mit seiner natürlichen Mannigfaltigkeit-Struktur. Dann ist für jedes $v \in V$ der Tangentialraum $\mathrm{T}V_v$ *kanonisch* isomorph zu $V$ vermöge

$$\lambda_v\colon V \to \mathrm{T}V_v,\ \lambda_v(w) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}(v+tw)$$

$\big($d.h.: $\lambda_v(w) = \dot\alpha(0)$ für $\alpha(t) = v + tw$, $t \in \mathbb{R}\big)$.

(b) Identifiziert man insbesondere $\mathbb{R}$ mit $\mathrm{T}\mathbb{R}_t$ vermöge $\lambda_t\colon \mathbb{R} \to \mathrm{T}\mathbb{R}_t$, für jedes $t \in \mathbb{R}$, so gilt für eine glatte Funktion $f\colon M \to \mathbb{R}$ ($M$ glatte Mannigfaltigkeit), dass

$$\mathrm{D}f_p = \lambda_{f(p)}\circ \mathrm{d}f_p$$

(kurz: $\mathrm{D}f_p = \mathrm{d}f_p$), Übung.

**(2.63) Bemerkung.** Seien $M$ und $N$ glatte Mannigfaltigkeiten, $\Phi\colon M \to N$ glatt, $p \in M$ und $\mathrm{D}\Phi_p\colon \mathrm{T}M_p \to \mathrm{T}N_q$ ihr Differential in $p, q := \Phi(p)$. Ist $\xi = \dot\alpha(0) \in \mathrm{T}M_p$, für eine glatte Kurve $\alpha\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ durch $p$, so ist:

$$\mathrm{D}\Phi_p\big(\dot\alpha(0)\big) = (\Phi\dot\circ\alpha)(0).$$

***Beweis.*** Sei $s = g_q \in \mathcal{E}_q(N)$ beliebig, $g \in \mathcal{E}(V)$ ein Vertreter, $V \in \mathfrak{A}(q)$ offen. Dann ist mit $\beta := \Phi\circ\alpha$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}\Phi_p\big(\dot\alpha(0)\big)(g_q) = \dot\alpha(0)\big((g\circ\Phi)_p\big) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}\big((g\circ\Phi)\circ\alpha\big)(t)\\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_0 (g\circ\beta)(t) = \dot\beta(0)(g_q),
\end{aligned}$$

also $\mathrm{D}\Phi_p\big(\dot\alpha(0)\big) = \dot\beta(0)$. □

**(2.64) Definition.** Sei $M^{n+k}$ eine glatte Mannigfaltigkeit und $N^n \subseteq M$ abgeschlossen. Es heißt $N^n$ eine **Untermannigfaltigkeit der Codimension k von M**, wenn gilt: Für jedes $p \in N$ gibt es eine offene Umgebung $U \subseteq M$ von $p$ und eine glatte Abbildung $F\colon U \to \mathbb{R}^k$, so dass gilt:

(a) $N \cap U = \{x \in U \,:\, F(x) = 0\}$

(b) $\mathrm{Rg}(\mathrm{D}F_q\colon \mathrm{T}M_p \to \mathrm{T}\mathbb{R}^k_{F(p)} \cong \mathbb{R}^k) = k$.

Ist $k = 1$, so spricht man von einer **Hyperfläche**.

**(2.65) Satz.** *Sei $N^n \subseteq M^{n+k}$ eine Untermannigfaltigkeit der Codimension $k$ in $M^{n+k}$ und $i\colon N \hookrightarrow M$ die Inklusion. Dann ist $N$ (zusammen mit seiner Teilraumtopologie) eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension $n$ und es gibt genau eine glatte Struktur auf $N$, so dass für eine beliebige stetige Abbildung $\Phi\colon P \to N$ ($P$ glatte Mannigfaltigkeit) gilt: $\Phi$ ist glatt genau dann, wenn $i \circ \Phi\colon P \to M$ glatt ist (universelle Eigenschaft).*

**(2.66) Kommentar.**

(a) Insbesondere zeigt das Beispiel $\Phi = \mathbb{1}\colon N \to N$, dass die Inklusion $i\colon N \to M$ selbst glatt ist.

(b) Für den Beweis erinnern wir an den **impliziten Funktionensatz**: Ist $U \subseteq \mathbb{R}^{n+k} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ offen, $F\colon U \to \mathbb{R}^k$ glatt, $(x_0, y_0) \in U$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \mathbb{R}^k$, mit $F(x_0, y_0) = 0$ und

$$\det\left(\frac{\partial F^i}{\partial y^j}\right)_{1\le i,j\le k}(x_0, y_0) \neq 0,$$

so gibt es offene Umgebungen $V \subseteq \mathbb{R}^n$ von $x_0$, $W \subseteq \mathbb{R}^k$ von $y_0$, so dass $V \times W \subseteq U$ ist und eine glatte Funktion $h\colon V \to W$, so dass für alle $(x, y) \in V \times W$ gilt:

$$F(x, y) = 0 \Longleftrightarrow y = h(x).$$

***Beweis von*** (2.65).

(a) Sei $N \subseteq M$ versehen mit der Teilraumtopologie, $p \in N$ und $\widetilde{U} \subseteq M$ offene Umgebung von $p$, sowie $F\colon \widetilde{U} \to \mathbb{R}^k$ mit $\widetilde{U} \cap N = F^{-1}(0)$ und $\mathrm{Rg}(\mathrm{D}F_p) = k$.

Sei (nach eventueller Verkleinerung von $\widetilde{U}$) $\varphi\colon \widetilde{U} \to U \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ eine Karte um $p$. Dann gilt für $G := F \circ \varphi^{-1}\colon U \to \mathbb{R}^k$: $G(x_0, y_0) = 0$, wo $(x_0, y_0) = \varphi(p)$ sei, und

$$\det\left(\frac{\partial G^i}{\partial y^j}(x_0, y_0)\right)_{1\le i,j\le k} \neq 0,$$

wenn die Anzahl der Koordinaten $y^1, \dots, y^k$ (aus $x^1, \dots, x^{n+k}$) geeignet ist, denn die volle Funktionalmatrix

$$\left(\frac{\partial G^i}{\partial x^j}\right)_{\substack{1\le j\le k\\ 1\le j\le n+k}}(x_0, y_0) \quad \text{hat vollen Rang } k.$$

Wir nehmen o.E. an, dass $y^1, \dots, y^k$ die letzten $k$ Koordinaten von $x^1, \dots, x^{n+k}$ ist, $y^i = x^{n+i}$ ($i = 1, \dots, k$). Nach dem impliziten Funktionensatz gibt es also offene Umgebungen $V \subseteq \mathbb{R}^n$ von $x_0$, $W \subseteq \mathbb{R}^k$ von $y_0$ mit $V \times W \subseteq U$ und ein glattes $h\colon V \to W$ mit

$$G(x, y) = 0 \Longleftrightarrow y = h(x), \quad \forall (x, y) \in V \times W.$$

Setze nun

$$\widetilde{V} := N \cap \varphi^{-1}(V \times W)$$

und

$$\psi\colon \widetilde{V} \to V \subseteq \mathbb{R}^n,\ \psi := \pi \circ \varphi$$

wo $\pi\colon \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^n$ die Projektion auf die ersten $n$ Koordinaten $x^1, \ldots, x^n$ ist. Es ist $\widetilde{V} \subseteq N$ offene Umgebung von $p$, $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Umgebung von $x_0$ und $\psi\colon \widetilde{V} \to V$ ein Homöomorphismus, denn

$$V \to \widetilde{V},\ x \mapsto \varphi^{-1}\big(x, h(x)\big)$$

ist sein stetiges Inverses. Als Teilraum von $M$ ist $N$ hausdorffsch und von abzählbarer Topologie. Also ist $N$ topologische Mannigfaltigkeit der Dimension $n$.

(b) Man versehe nun $N$ mit dem Atlas

$$(\psi_p\colon \widetilde{V}_p \to V_p)_{p\in N}$$

wie oben beschrieben. Dann sind die Übergänge $\psi_q \circ \psi_p^{-1}\colon \psi_p(\widetilde{V}_p \cap \widetilde{V}_q) \to \psi_q(\widetilde{V}_p \cap \widetilde{V}_q)$ alle glatt, denn: Sei o.E. $\widetilde{V}_p = \widetilde{V}_q =: \widetilde{V} \subseteq N$ und $\widetilde{V} = N \cap \widetilde{U}$. Es ist dann $\psi_q \circ \psi_p\colon V_p \to V_q$ gegeben durch

$$\psi_q \circ \psi_p^{-1}(x) = \psi_q \circ \varphi_p^{-1}\big(x, h_p(x)\big) = \pi_q \circ \varphi_q \circ \varphi_p^{-1}\big(x, h_p(x)\big),$$

wo $\pi_q\colon \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^n$ die Projektion auf die Koordinaten ist, mit der die Karte $\psi_q$ gebaut ist. Da $h_p$ glatt ist, $\varphi_q \circ \varphi_q^{-1}$ glatt ist und $\pi_q$ glatt ist, ist $\psi_q \circ \psi_p^{-1}$ glatt. (Man setze dann $c = [\mathfrak{A}]$.)

(c) Die universelle Eigenschaft folgt aus der Tatsache, dass eine stetige Abbildung $\Phi\colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, genau dann glatt ist, wenn mit einer glatten Funktion $h\colon V \to W \subseteq \mathbb{R}^k$ die Funktion $\Psi\colon U \to V \times W \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$, $z \mapsto \big(\Phi(z), h \circ \Phi(z)\big)$ glatt ist $\big($denn $\Phi = \pi \circ \Psi\big)$.

□

**(2.67) Kommentar.**

(a) Man beachte, dass $i\colon N \hookrightarrow M$ nach Definition der Teilraumtopologie ein Homöomorphismus auf sein Bild ist (klar), dass $i$ injektiv ist (ist auch klar) und dass $i$ eine **Immersion** ist (Übung), d.h.: $\mathrm{D}i_p\colon \mathrm{T}N_p \to \mathrm{T}M_p$ injektiv ist, denn bzgl. der obigen Karten $\psi$ von $N$ um $p$ und $\varphi$ von $M$ um $p$ ist

$$\varphi \circ i \circ \psi^{-1}(x) = \big(x, h(x)\big),$$

also

$$\mathrm{Jac}(\varphi \circ i \circ \psi^{-1})(x) = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_n \\ \hline \mathrm{Jac}(h)(x) \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{aligned} \dim(\ker \mathrm{D}i_p) &= n - \mathrm{Rg}(\mathrm{D}i_p) \\ &= n - \mathrm{Rg}\big(\mathrm{Jac}(\varphi \circ i \circ \psi^{-1})\big)(x_0) \\ &= n - n = 0. \end{aligned}$$

(b) Allgemein nennt man eine glatte Abbildung $\Phi\colon N \to M$ eine **Einbettung**, wenn $\Phi$

- injektiv,
- immersiv,
- Homöomorphismus auf das Bild ist.

Es gilt dann, dass $\Phi(N) \subseteq M$ eine (nicht notwendig abgeschlossene) Untermannigfaltigkeit von $M$ ist $\big($siehe (3.40)$\big)$.

**(2.68) Definition.** Eine glatte Abbildung $\Phi\colon M \to N$ heißt eine

(a) **Immersion**, wenn $\mathrm{D}\Phi_p\colon \mathrm{T}M_p \to \mathrm{T}N_{\Phi(p)}$ injektiv ist, für alle $p \in M$;

(b) **Submersion**, wenn $\mathrm{D}\Phi_p\colon \mathrm{T}M_p \to \mathrm{T}N_{\Phi(p)}$ surjektiv ist, für alle $p \in M$.

**(2.69) Vorbereitung.**

(a) Sind $M, N$ und $P$ glatte Mannigfaltigkeiten, $\Phi\colon M \to N$ und $\Psi\colon N \to P$ glatte Abbildungen, so ist auch $\Psi \circ \Phi\colon M \to P$ auch glatt und für alle $p \in M$ gilt $\big($mit $q = \Phi(p)\big)$:

$$\mathrm{D}(\Psi \circ \Phi)_p = \mathrm{D}\Psi_q \circ \mathrm{D}\Phi_p$$

(*Kettenregel*, Übung).

(b) Es folgt insbesondere für jeden Diffeomorphismus $\Phi\colon M \to M$, dass für jedes $p \in M$ das Differential $\mathrm{D}\Phi_p\colon \mathrm{T}M_p \to \mathrm{T}M_{\Phi(p)}$ ein Isomorphismus ist, denn $\mathrm{D}(\mathbb{1}_M)_p = \mathbb{1}_{\mathrm{T}M_p}$ und aus $\Phi^{-1} \circ \Phi = \mathbb{1}_M$ folgt:

$$\mathbb{1}_{\mathrm{T}M_p} = \mathrm{D}(\mathbb{1}_M)_p = \mathrm{D}(\Phi^{-1})_{\Phi(p)} \circ \mathrm{D}\Phi_p,$$

also $\mathrm{D}\Phi_p$ Isomorphismus mit:

$$(\mathrm{D}\Phi_p)^{-1} = \mathrm{D}(\Phi^{-1})_{\Phi(p)}.$$

**(2.70) Satz.** *Seien $M^{n+k}$ und $P^k$ glatte Mannigfaltigkeiten und $\Phi\colon M \to P$ eine glatte Abbildung. Sei $q \in P$, so dass $N := \Phi^{-1}(q) \neq \emptyset$ ist und $\mathrm{D}\Phi_p\colon \mathrm{T}M_p \to \mathrm{T}P_q$ surjektiv ist, für alle $p \in N$ ($q$ heißt dann ein regulärer Wert von $\Phi$). Dann ist $N \subseteq M$ eine Untermannigfaltigkeit der Codimension $k$.*

***Beweis.*** $N = \Phi^{-1}(q) \subseteq M$ ist abgeschlossen, da $\Phi$ stetig. Sei $p \in N$ und $\varphi\colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^k$ eine Karte um $q \in P$ mit $\varphi(q) = 0 \in V$. Dann gilt für die Abbildung $F\colon \Phi^{-1}(U) \to \mathbb{R}^k$,

$$F := \varphi \circ \Phi|_{\Phi^{-1}(U)}.$$

$F$ ist glatt, $F^{-1}(0) = N \cap \Phi^{-1}(U)$ und

$$\mathrm{D}F_p = \mathrm{D}(\varphi \circ \Phi)_p = \mathrm{D}\varphi_q \circ \mathrm{D}\Phi_p.$$

Da $\varphi\colon U \to V$ ein Diffeomorphismus ist, ist $\mathrm{D}\varphi_q\colon \mathrm{T}P_q \to \mathrm{T}\mathbb{R}^k_0 \cong \mathbb{R}^k$ ein Isomorphismus. Da $\mathrm{D}\Phi_p$ surjektiv ist, ist daher auch $\mathrm{D}F_p\colon \mathrm{T}M_p \to \mathbb{R}^k$ surjektiv. Also ist $N \subseteq M$ Untermannigfaltigkeit der Codimension $k$. $\square$

**(2.71) Beispiel.**

(a) Ist $f\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ glatt, $M = f^{-1}(0) \neq \emptyset$ und $\operatorname{grad}(f)(x) \neq 0$, für alle $x \in M$, so ist $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ also eine Hyperfläche. Z.B. gilt das für $M = \mathbb{S}^n$, denn für

$$f(x) = \|x\|^2 - 1$$

ist $\operatorname{grad}(f)(x) = 2x \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{S}^n$. $\big($Dies gibt dann eine glatte Struktur auf $\mathbb{S}^n$, die mit der bekannten übereinstimmt (Übung).$\big)$

(b) Betrachte $\Phi\colon \operatorname{Mat}_n \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^{n^2} \to \operatorname{Sym}_n \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n+1)}$, $\Phi(A) = {}^tA \cdot A$, wo $\operatorname{Mat}_n \mathbb{R}$ der Vektorraum aller $(n \times n)$-Matrizen (mit reellen Einträgen) und $\operatorname{Sym}_n \mathbb{R}$ den Unterraum der symmetrischen Matrizen bezeichnet. Wir behaupten, das $\mathbb{1} \in \operatorname{Sym}_n \mathbb{R}$ ein regulärer Wert von $\Phi$ ist. $\big($Übung: Berechne $\mathrm{D}\Phi_{\mathbb{1}}: \operatorname{Mat}_n(\mathbb{R}) \to \operatorname{Sym}_n(\mathbb{R}), B \to {}^tB + B$, $\mathrm{D}\Phi_{\mathbb{1}}(B) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0}\Phi(\mathbb{1} + tB)$.$\big)$ Es folgt:

$$\mathbb{O}(n) = \Phi^{-1}(\mathbb{1}),$$

die **orthogonale Gruppe**, ist eine Untermannigfaltigkeit der Codimension $\frac{1}{2}n(n+1)$ und daher nach (2.67) eine Mannigfaltigkeit der Dimension

$$n^2 - \frac{1}{2}n(n+1) = n^2 - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n = \frac{1}{2}n(n-1).$$

# Kapitel 3

# 3 Dynamische Systeme

**(3.1) Motivation.** Ein dynamisches System auf einer glatten Mannigfaltigkeit $M$ ordnet jedem Punkt $p \in M$ „seine Dynamik“ $\varphi(p) \colon I(p) \to M$ zu, dass ist eine glatte Kurve

$$t \mapsto \varphi(p)(t) =: \varphi^t(p),$$

wo $I(p) = \big(t_-(p), t_+(p)\big)$ ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$ ist mit $0 \in I(p)$, also

$$t_-(p) \in [-\infty, 0), \quad t_+ \in (0, \infty]$$

und $\varphi^0(p) = p$ ist. Dabei verlangt man die **Verträglichkeitsbedingung**: Für alle $p \in M$ und $t \in I(p)$ gilt:

$$s \in I\big(\varphi^t(p)\big) \iff s + t \in I(p)$$

und

$$\varphi^s\big(\varphi^t(p)\big) = \varphi^{s+t}(p).$$

Außerdem soll die Zuordnung $p \mapsto \varphi(p)$ „glatt“ sein.

**(3.2) Definition.** Sei $M$ eine glatte Mannigfaltigkeit. Ein **dynamisches System auf M** ist gegeben durch eine glatte Abbildung $\varphi \colon \Omega \to M$, so dass gilt:

(a) $\Omega \subseteq M \times \mathbb{R}$ ist offen, $M \times \{0\} \subseteq \Omega$ und für jedes $p \in M$ ist $I(p) := \pi_2\big(\Omega \cap (\{p\} \times \mathbb{R})\big)$ zusammenhängend (wo $\pi_2 \colon \Omega \to \mathbb{R}$ die Projektion auf den zweiten Faktor ist);

(b) Für alle $p \in M$ und $t \in I(p)$ ist $s \in I\big(\varphi^t(p)\big)$, genau wenn $s + t \in I(p)$ ist und dann gilt:

$$\varphi^s\big(\varphi^t(p)\big) = \varphi^{s+t}(p).$$

**(3.3) Kommentar.**

(a) Da die Projektion $\pi_2 \colon \Omega \to \mathbb{R}$ eine offene Abbildung ist, ist also $I(p) \subseteq \mathbb{R}$ offen und zusammenhängend mit $0 \in I(p)$, also $I(p)$ ein offenes Intervall

$$I(p) = \big(t_-(p), t_+(p)\big)$$

mit

$$t_-(p) = [-\infty, 0), \quad t_+(p) \in (0, \infty].$$

$t_-(p)$ heißt der **Anfang von p**, $t_+(p)$ **das Ende von p**.

(b) Beachte, dass für $p, q \in M$ die Kurven

$$C_p = \mathrm{Im}\Big(\varphi\big(\{p\} \times I(p)\big)\Big) \subseteq M$$

und $C_q$ entweder gleich sind (falls es ein $t \in I(p)$ gibt mit $\varphi^t(p) = q$) oder disjunkt, $C_p \cap C_q = \emptyset$, denn ist $r \in C_p \cap C_q$ also $r = \varphi^t(p) = \varphi^s(q)$, so ist

$$\begin{aligned} q = \varphi^0(q) &= \varphi^{-s+s}(q) = \varphi^{-s}\big(\varphi^s(q)\big) = \varphi^{-s}(r) \\ &= \varphi^{-s}\big(\varphi^t(p)\big) = \varphi^{t-s}(p), \end{aligned}$$

also $q \in C_p$ und damit $C_q = C_p$.

(c) Da $\Omega \subseteq M \times \mathbb{R}$ offen ist, ist auch für jedes $t \in \mathbb{R}$

$$D_t := \{p \in M \,:\, t \in I(p)\}$$

offen, denn ist $(p, t) \in \Omega$, so gibt es offene Umgebungen $U \subseteq M$ von $p$ und $J \subseteq \mathbb{R}$ von $t$, so dass $U \times J \subseteq \Omega$ und damit $(q, t) \in \Omega$, für alle $q \in U$, damit ist: $q \in D_t \Longrightarrow U \subseteq D_t$. Definiert man dann

$$\varphi^t \colon D_t \to M,\ p \mapsto \varphi^t(p),$$

so ist gerade das $\varphi^t(p) \in D_{-t} \subseteq M$, denn $0 \in I(p)$ und damit $-t \in I\big(\varphi^t(p)\big)$, also $\mathrm{Im}(\varphi^t) \subseteq D_{-t}$, und ist $q \in D_{-t}$, so ist $p := \varphi^{-t}(q)$ ein Urbild von $q$ unter $\varphi^t$.

**(3.4) Bemerkung.** Es ist $D_0 = M$ und für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist $\varphi^t \colon D_t \to D_{-t}$ ein Diffeomorphismus.

***Beweis.*** Da $0 \in I(p)$, für alle $p \in M$, folgt: $D_0 = M$. Da $\varphi$ glatt ist und die Inklusion $i^t \colon D \hookrightarrow M,\ p \mapsto (p, t)$, auch, ist auch $\varphi^t = \varphi \circ i^t$ glatt. Schließlich ist wegen $\varphi^0 = \mathbb{1}_M$ und

$$\varphi^{-t} \circ \varphi^t(p) = \varphi^{-t}\big(\varphi^t(p)\big) \overset{\text{Verträg.Bed.}}{=} \varphi^{-t+t}(p) = \varphi^0(p) = p$$

und

$$\varphi^t \circ \varphi^{-t}(p) = p$$

$\varphi^{-t}$ invers zu $\varphi^t$. □

**(3.5) Kommentar.**

(a) Ist $I(p) = \mathbb{R}$, für alle $p \in M$, also $\Omega = M \times \mathbb{R}$, so nennen wir das dynamische System **global**. In diesem Fall ist also $D_t = M$, für alle $t \in \mathbb{R}$, und

$$\varrho \colon \mathbb{R} \to \mathrm{Diff}(M),\ t \mapsto \varphi^t$$

ein Homomorphismus, d.h. die Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ operiert auf $M$ durch Diffeomorphismen vermöge

$$\Phi \colon \mathbb{R} \times M \to M,\ (t, p) \mapsto t.p = \varphi^t(p)$$

Beachte aber, dass hier nicht nur für jedes feste $t \in \mathbb{R}$ die Abbildung $\varphi^t \colon M \to N$ glatt ist, sondern sogar „das ganze $\Phi$" ($\mathbb{R}$ ist eben nicht nur eine Gruppe, sondern zudem eine Mannigfaltigkeit). Man nennt dann die Familie $(\varphi^t)_{t\in\mathbb{R}}$ eine **1-Parametergruppe** in $\mathrm{Diff}(M)$.

(b) Im Allgemeinen (auch wenn das System nicht global ist), nennt man die Familie

$$(\varphi^t\colon D_t \to D_{-t})_{t\in\mathbb{R}}$$

von Diffeomorphismen den zugeordneten **Fluss von $\boldsymbol{\varphi}$**.

**(3.6) Definition.** Sei $\varphi$ ein dynamisches System auf einer glatten Mannigfaltigkeit $M$. Dann nennen wir $X\colon M \to \mathrm{T}M$,

$$X(p) := \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \varphi^t(p) \in \mathrm{T}M_p$$

das **zugehörige Vektorfeld** auf $M$.

**(3.7) Bemerkung.** $X$ ist glatt, $X \in \mathfrak{X}(M)$.

***Beweis.*** Sei $p \in M$ und $x\colon \widetilde{U} \to \widetilde{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte um $p$. Da $\varphi$ stetig ist und $\varphi^0(p) = p$, existiert ein $\varepsilon > 0$ und eine Umgebung $U \subseteq M$ von $p$ mit $\varphi^t(q) \in \widetilde{U}$, für $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ und $q \in U$. Ohne Einschränkung: $U \subseteq \widetilde{U}$. In der Karte $\varphi(x,t)$ von $\Omega \subseteq M \times \mathbb{R}$ und $x$ um $p$ von $M$ sei dann beschrieben durch

$$\varphi(x,t) = \big(\varphi^1(x,t), \dots, \varphi^n(x,t)\big) \in V,\ V := x(U) \subseteq \widetilde{V},\ \varphi^j \in \mathcal{E}\big(V \times (-\varepsilon,\varepsilon)\big)$$

Für die Kurven $t \mapsto \varphi^t(q)$, $q \in U$, $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$, folgt dann in Koordinaten, dass

$$X_q = \frac{\partial\varphi^1}{\partial t}(q,0)\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_q + \dots + \frac{\partial\varphi^n}{\partial t}(q,0)\left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_q$$

ist (Übung). Da $\frac{\partial\varphi^j}{\partial t}(-,0) \in \mathcal{E}(V)$ ist, ist also $X$ glatt auf $U$, insbesondere um $p$. Da $p$ beliebig war, folgt: $X \in \mathfrak{X}(M)$. □

**(3.8) Bemerkung.** Sei $\varphi$ ein dynamisches System auf $M$ und $X \in \mathfrak{X}(M)$ sein zugeordnetes Vektorfeld. Dann gilt für alle $p \in M$ und sogar für alle $t \in I(p)$:

$$X_{\varphi^t(p)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi^t(p) \left(= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t} \varphi^s(p)\right)$$

***Beweis.*** Sei $p \in M$ und $t \in I(p)$. Dann gilt wegen der **Flusseigenschaft** $\varphi^{s+t} = \varphi^s \circ \varphi^t$:

$$X_{\varphi^t(p)} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \varphi^s\big(\varphi^t(p)\big) = \varphi^{t+s}(p)\big|_{s=0} = \varphi^s(p)|_{s=t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi^t(p).$$

□

**(3.9) Kommentar.**

(a) Ist $x\colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte auf $M$ und $X|_U$ bzgl. dieser Karte durch

$$X|_U = \xi^j \frac{\partial}{\partial x^j} \text{ mit } \xi^j \in \mathcal{E}(V),\ j = 1, \dots, n$$

gegeben, und $\varphi|_{\widetilde{U}\times(-\varepsilon,\varepsilon)}$ (mit eventuell verkleinerten $U$ und $\varepsilon > 0$ klein genug) durch

$$\varphi(x,t) = \big(\varphi^1(x,t), \dots, \varphi^n(x,t)\big) \text{ und } \varphi^j \in \mathcal{E}\big(V \times (-\varepsilon,\varepsilon)\big),\ j = 1, \dots, n$$

gegeben, so lösen also die Kurven

$$(-\varepsilon,\varepsilon) \to V \subseteq \mathbb{R}^n,\ t \mapsto \big(\varphi^1(x,t), \dots, \varphi^n(x,t)\big)$$

die **gewöhnliche Differentialgleichung** auf $V$, die durch

$$\begin{matrix} \dot{x}^1 = \xi^1(x) \\ \vdots \\ \dot{x}^n = \xi^n(x) \end{matrix}, \text{ kurz: } \dot{x} = \xi(x)$$

gegeben ist, zum Anfangswert $x$, denn

$$\frac{\mathrm{d}\varphi^j}{\mathrm{d}t}(x,t) \overset{(3.8)}{=} \xi^j\big(\varphi(x,t)\big),\ j = 1, \ldots, n$$

und

$$\varphi(x,0) = x.$$

(b) Man hat deshalb gute Chancen das dynamische System $\varphi$ auf $M$ durch **Integration der gewöhnlichen Differentialgleichungen**.

$$\dot{p} = X(p)$$

auf $M$, d.h.: durch Lösen der gewöhnlichen Differentialgleichung in den Karten $x$ von $M$,

$$\dot{x} = \xi(x)$$

$\big($wo $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$ und $X = \xi^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ ist$\big)$ zurück zu gewinnen.

**(3.10) Definition.** Sei $M$ eine glatte Mannigfaltigkeit und $X \in \mathfrak{X}(M)$.

(a) Man nennt eine glatte Kurve $\alpha\colon I \to M$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall eine **Integralkurve** (oder auch eine **Lösungskurve**) für $X$, wenn für alle $t \in I$ gilt:

$$\dot{\alpha}(t) = X_{\alpha(t)}$$

(b) Sie heißt **maximal**, wenn für jede Integralkurve $\beta\colon J \to M$ von $X$ mit $I \subseteq J$, $J \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall in $\mathbb{R}$, und $\beta|_I = \alpha$ gilt $J = I$.

**(3.11) Satz.** *Sei $M$ eine glatte Mannigfaltigkeit, $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $p \in M$. Dann gibt es genau eine maximale Integralkurve $\alpha\colon I \to M$ von $X$ mit $0 \in I$ und $\alpha(0) = p$.*

**(3.12) Vorbereitung.** Ist $x\colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$, $X|_U = \xi^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ und $\alpha|_{\alpha^{-1}(U)}\colon \alpha^{-1}(U) \to U$ gegeben durch $x(t) = \big(x^1(t), \ldots, x^n(t)\big)$ dort, so ist $\alpha$ Integralkurve, wenn $t \mapsto x(t)$ die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\dot{x} = \xi(x) \text{ auf } V$$

(für alle Karten $x$ von $M$) löst. Nach dem **Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf** existiert eine solche Lösung zunächst auf dem Definitionsgebiet $U$ einer Karte $x\colon U \to V$ um $p$ (und dort auch maximal). Es ist aber nicht so klar, wie man diese Lösung dann (sozusagen über etliche andere Karten Hinweg) zu einer maximalen Lösung auf $M$ fortsetzt.

***Beweis von*** (3.11). Wir notieren eine Lösung $\alpha\colon I \to M$ von

$$\dot{q} = X_q$$

auf $M$ mit Anfang $\alpha(0) = p$ mit $(I, \alpha)$. Es ist dabei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $0 \in I$. Nach dem Existenzsatz von Picard-Lindelöf existiert wenigstens eine solche Lösung $(I_0, \alpha_0)$, in dem man auf einer Karte $x\colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ das System

$$\dot{x} = \xi(x),\ x(0) = x_0$$

mit $x_0 = x(p)$ und $X|_U = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, löst. Seien nun $(I, \alpha)$ und $(J, \beta)$ zwei Lösungen. Dann ist $I \cap J$ wiederum offen und zusammenhängend mit $0 \in I \cap J$, also ein Intervall um 0. Betrachte die Teilmenge

$$K := \{t \in I \cap J \,:\, \alpha(t) = \beta(t)\}$$

Dann ist zunächst $K \neq \emptyset$, denn $0 \in K$, da $\alpha(0) = \beta(0) = p$ ist. Es ist weiter $K \subseteq I \cap J$ abgeschlossen, denn die **Diagonale**

$$\Delta := \big\{(p, q) \in M \times M \,:\, p = q\big\} \subseteq M \times M$$

in $M \times M$ ist für einen Hausdorff-Raum abgeschlossen (Übung) und die Abbildung

$$(\alpha, \beta)\colon I \cap J \to M \times M, \quad t \mapsto \big(\alpha(t), \beta(t)\big)$$

ist stetig. Deshalb ist auch

$$K = (\alpha, \beta)^{-1}(\Delta) \subseteq I \cap J$$

abgeschlossen. Es ist $K \subseteq I \cap J$ aber auch offen, denn ist $t_0 \in K$, so wähle eine Karte $x\colon U \to V$ (diesmal) um $q = \alpha(t_0) = \beta(t_0)$. Dann gibt es eine Umgebung $I_0 \subseteq I \cap J$ von $t_0$, so dass $\alpha(I_0) \subseteq U$, $\beta(I_0) \subseteq U$ ist, und, wenn $\alpha|_{I_0}$ durch $x(t) = \big(x^1(t), \ldots, x^n(t)\big)$ und $\beta|_{I_0}$ durch $\big(y^1(t), \ldots, y^n(t)\big)$ beschränkt werden, $x, y\colon I_0 \to V$ die gewöhnliche Differentialgleichung $\dot{x} = \xi(x)$ auf $V$ zum Anfangswert $x(t_0) = x_0$ $\big($mit $x_0 = x(q)\big)$ lösen $\big($wo $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)\colon V \to \mathbb{R}^n$ mit $X|_U = \xi \frac{\partial}{\partial x^i}$ ist$\big)$. Nach dem Eindeutigkeitsteil im Satz von Picard-Lindelöf ist damit $x(t) = y(t)$, für alle $t \in I_0$, d.h.: $I_0 \subseteq K$.

Da $I \cap J$ zusammenhängend ist, folgt: $K = I \cap J$ (also $\alpha|_{I \cap J} = \beta|_{I \cap J}$).
Sei nun $(I_j, \alpha_j)_{j \in J}$ die Familie *aller* Lösungen von $X$ zum Anfang $p$ ($J$ eine Indexmenge). Man setze

$$I_{\max} := \bigcup_{j \in J} I_j, \quad \alpha_{\max}\colon I_{\max} \to M,\ \alpha_{\max}(t) := \alpha_j(t)$$

für ein $j \in J$ mit $t \in I_j$. Dann ist $I_{\max}$ tatsächlich offen, $0 \in I_{\max}$, und $\alpha_{\max}$ wohldefiniert in dem Sinne, dass die Definition nicht von der Auswahl von $j \in J$ abhängt, denn je zwei Lösungen $\alpha_{j_1}\colon I_{j_1} \to M$ und $\alpha_{j_2}\colon I_{j_2} \to M$ mit $t \in I_{j_1} \cap I_{j_2}$ stimmen in $t$ überein. Ist daher $t_0 \in I_{\max}$ und $j_0 \in J$ mit $t_0 \in I_{j_0}$, so stimmt $\alpha_{\max}$ auf ganz $I_{j_0}$ mit $\alpha_{j_0}\colon I_{j_0} \to M$ überein und ist deshalb dort Lösung von $\dot{q} = X_q$. Also ist $\alpha_{\max}$ (überall) Lösung.

Nach Konstruktion von $(I_{\max}, \alpha_{\max})$ ist klar, dass $(I_{\max}, \alpha_{\max})$ maximale Lösung ist und auch, dass sie die einzige maximale Lösung ist. $\square$

**(3.13) Kommentar.**

(a) Wir nennen ein dynamisches System $\varphi\colon \Omega \to M$ auf einer glatten Mannigfaltigkeit **maximal**, wenn gilt: Ist $\psi\colon \widetilde{\Omega} \to M$ ein weiteres dynamisches System auf $M, \widetilde{\Omega} \supseteq \Omega$ und $\psi|_\Omega = \varphi$, so ist $\widetilde{\Omega} = \Omega$.

(b) Ist nun $X \in \mathfrak{X}(M)$, so fassen wir alle maximalen Integralkurven $\big(I_{\max}(p), \alpha_{\max}(p)\big)$ nun wie folgt zusammen: Setze zunächst

$$\Omega := \big\{(p, t) \in M \times \mathbb{R} \,:\, t \in I_{\max}(p)\big\} \subseteq M \times \mathbb{R}$$

und dann $\varphi\colon \Omega \to M$,

$$\varphi(p, t) = \varphi^t(p) := \alpha_{\max}(p)(t).$$

**(3.14) Bemerkung.** Sei $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $\varphi\colon \Omega \to M$ wie unter (3.13, b) definiert. Dann ist $\varphi$ ein maximales dynamisches System auf $M$.

**(3.15) Vorbereitung.**

(a) Ist $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\xi\colon V \to \mathbb{R}^n$ ein glattes Vektorfeld, so gilt, dass die maximalen Lösungen

$$\dot{x} = \xi(x) \text{ auf } V \tag{3.1}$$

auch **glatt von den Anfangswerten abhängen** (vgl. Analysis III), genauer: Ist $x_0 \in V$, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine offene Umgebung $W \subseteq V$ von $x_0$, so dass für alle $x \in W$ die maximale Lösungskurve von (3.1) zum Anfangswert $x \in W$, $t \mapsto \varphi^t(x)$, mindestens auf den Intervall $(-\varepsilon, \varepsilon)$ existiert, und die Abbildung $W \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to V$, $(x,t) \mapsto \varphi^t(x)$, glatt.

***Beweis von*** (3.14)**.** Wir prüfen zunächst die Flusseigenschaft (3.2, b): sei also $p \in M$ und $t \in I(p) := I_{\max}(p)$. Betrachte dann die Kurven

$$\alpha\colon I\big(\varphi^t(p)\big) \to M, \quad s \mapsto \varphi^s\big(\varphi^t(p)\big)$$

und

$$\beta\colon \big(t_-(p) - t, t_+(p) - t\big) \to M, \quad s \mapsto \varphi^{s+t}(p),$$

wobei nun $I(p) = \big(t_-(p), t_+(p)\big)$ mit $t_-(p) \in [-\infty, 0)$ und $t_+(p) \in (0, \infty]$ und wir $-\infty - t := -\infty$ und $+\infty - t := +\infty$ für alle $t \in \mathbb{R}$ verstehen wollen. Es sind nun beide Kurven Integralkurven zu $X$ zum gleichen Anfangswert $q = \varphi^t(p)$, denn

$$\alpha'(s) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\varphi^s(q) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\alpha_{\max}(q)(s) = X_{\alpha_{\max}(q)(s)} = X_{\varphi^s(q)} = X_{\alpha(s)}$$

und

$$\beta'(s) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\varphi^{s+t}(p) = \varphi^{\sigma}(p)\big|_{\sigma=s+t} = X_{\varphi^{s+t}(p)} = X_{\beta(s)}.$$

Es sind auch beide Kurven maximal: $\alpha$ nach Definition, weil es die maximale Integralkurve zum Anfang $q = \varphi^t(p)$ ist, und $\beta$, weil es die in der Parametrisierung mit verschobene Integralkurve zum Anfang $p$ ist. Nach (3.11) folgt: $\alpha = \beta$, also:

$$I\big(\varphi^t(p)\big) = \big(t_-(p) - t, t_+(p) - t\big)$$

und für alle $s$ aus diesem Intervall gilt:

$$\varphi^s \circ \varphi^t(p) = \varphi^{s+t}(p).$$

□

(b) Wegen der glatten Abhängigkeit der Lösung der Differentialgleichung $\dot{x} = \xi(x)$ auf einer offenen Menge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ (und einem glatten Vektorfeld $\xi$ auf $V$) ist nun $\Omega$ zunächst offen, dann ist $(p_0, t_0)$ so wähle man eine Karte $x\colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ um $q_0 := \varphi^{t_0}(p_0) \in M$. Wählt man um $\varepsilon > 0$ und eine offene Umgebung $W \subseteq V$ von $x_0 := x(q)$, so dass

$$\dot{x} = \xi(x) \text{ auf } V$$

für alle $x \in W$ Lösungen zum Anfangswert $x$ mindestens auf dem Intervall $(-\varepsilon, \varepsilon)$ hat, so zeigt die Konstruktion der maximalen Lösungskurven $\alpha_{\max}(q)$, dass mit $\widetilde{U} := x^{-1}(W) \subseteq U$ die offene Umgebungen $\varphi^{-t_0}(\widetilde{U}) \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ noch ganz in $\Omega$ liegt, denn

$$\varphi^{t_0+s}(p) \overset{(a)}{=} \varphi^s(\underbrace{\varphi^{t_0}(p)}_{\in U \text{ für } p \in \varphi^{-t_0}(\widetilde{U})})$$

Schließlich ist nach Konstruktion $I(p) = I_{\max}(p)$, also zusammenhängend mit $0 \in I(p)$.

(c) Da sich $\varphi$ in lokale Koordinaten durch die Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung $\dot{x} = \xi(x)$ beschreibt, $t \mapsto \varphi^t(x)$, $W \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to V$ $\big($vgl. (3.15)$\big)$, ist $\varphi\colon \Omega \to M$ eine glatte Abbildung.

(d) Ist nun $\psi\colon \widetilde{\Omega} \to M$ ein weiteres dynamische System mit $\widetilde{\Omega} \supseteq \Omega$ und $\psi|_\Omega = \varphi$, so hat $\psi$ das gleiche zugehörige Vektorfeld $X$ wie $\varphi$, denn für $X_p$ braucht man $\varphi$ nur auf einer Umgebung $U \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ von $(p, 0) \in \Omega$ zu kennen und dort stimmen $\varphi$ und $\psi$ überein. Ist nun $p \in M$ und $\widetilde{I}(p)$ das Definitionsintervall von $t \mapsto \psi(t, p)$, so ist auch diese Kurve Integralkurve von $X$ $\big($siehe (3.8)$\big)$ zum Anfangswert $p$, also ist $\widetilde{I}(p) \subseteq I(p)$. Das gilt für alle $p \in M$ und damit $\widetilde{\Omega} \subseteq \Omega$, also $\widetilde{\Omega} = \Omega$. Also ist $\varphi$ auch maximal.

**(3.16) Satz.** *Sei $M$ eine glatte Mannigfaltigkeit. Dann gibt es eine bijektive Zuordnung zwischen allen maximalen dynamisches Systems und allen glatten Vektorfeldern auf $M$, die wie folgt gegeben ist:*

$$\begin{array}{rcl}
\{\textit{maximales dynamisches System}\} & \overset{1:1}{\longleftrightarrow} & \mathfrak{X}(M) \\
\varphi & \overset{\textit{Differentiation}}{\longmapsto} & X_\varphi \textit{ mit } (X_\varphi)_p = \left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \varphi^t(p) \\
\varphi_x^t(p) = \alpha_{\max}(p)(t) \textit{ mit } \varphi_x & \overset{\textit{Integration}}{\longleftarrow\!\shortmid} & X
\end{array}$$

***Beweis.***

(i) $\varphi_{X_\varphi} = \varphi$, da mit (3.8) für festes $p \in M$ die Kurven $t \mapsto \varphi^t(p)$ Integralkurven von $\dot{q} = X_\varphi(q)$ sind und maximal müssen sie auch sein, da $\varphi$ maximal ist (sonst wäre $\psi := \varphi_{X_\varphi}$ eine Erweiterung von $\varphi$).

(ii) $X_{\varphi_X} = X$, da $\varphi_X$ aus den (maximalen) Lösungskurven von $\dot{p} = X_p$ bestehen, insbesondere

$$X_{\varphi_X}(p) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \varphi_X^t(p) = X_{\varphi_X^0(p)} = X_p \quad \forall p \in M.$$

□

**(3.17) Kommentar.** „Differentiation ist einfach, Integration ist schwer.“ Während der Übergang von $\varphi$ zu $X$ in der Regel eine einfache Rechnung ist, ist der Übergang von $X$ zu $\varphi$ häufig sehr schwer, ja in gewisser Weise gar nicht explizit möglich, sondern nur von theoretischer Natur. In der Theorie der *Dynamischen Systeme* befasst man sich daher nur mit *qualitativen Fragen*, z.B.:

(i) Für welche Punkte $p \in M$ ist $I(p) = \mathbb{R}$?

(ii) Gibt es *periodische Bahnen*, d.h. gibt es ein $p \in M$ mit $I(p) = \mathbb{R}$ und $T > 0$, so dass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt: $\varphi^{t+T}(p) = \varphi^t(p)$?

(iii) Welche *Gleichgewichtslagen* (das ist ein $p \in M$ mit $I(p) = \mathbb{R}$ und $\varphi^t(p) = p \, \forall t \in \mathbb{R}$) sind stabil, d.h. für jede Umgebung $U \subseteq M$ von $p$, gibt es eine Umgebung $V \subseteq U$ von $p$ mit $t_+(p) = \infty$, für alle $q \in V$ und $\varphi^t(q) \in U \, \forall t \geq 0$

**(3.18) Beispiel.**

(a) Sei $M = \mathbb{R}^2$ und $\xi \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ gegeben durch $\xi(x,y) = (-y,x)$. Das zugehörige maximales dynamisches System $\varphi$ ist dann global und ist gegeben durch $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$,

$$\varphi(x,y;t) = \big(x \cdot \cos(t) - y \cdot \sin(t), x \cdot \sin(t) + y \cdot \cos(t)\big)$$

(b) Nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz bewegen sich $N$ punktförmige Teilchen ($N \in \mathbb{N}$) mit Massen $m_1, \dots, m_N > 0$ auf den Bahnen $x_j\colon I \to \mathbb{R}^3$ ($j = 1, \dots, N$) die der Differentialgleichung

$$m_j \ddot{x}_j = -\sum_{i \neq j} m_i m_j \frac{x_i - x_j}{\|x_i - x_j\|^3} \qquad (j = 1, \dots, N)$$

genügen. Die zugehörige Mannigfaltigkeit ist also hier $M = (\mathbb{R}^{3N} \setminus \Delta) \times \mathbb{R}^{3N}$ mit

$$\Delta := \big\{(x_1, \dots, x_N) \in (\mathbb{R}^3)^N \ : \ x_i = x_j \text{ für ein Paar } (i,j) \text{ mit } i \neq j\big\}$$

und das „Gravitations-Vektorfeld" wäre

$$X(x,y) = \Big(y_1, \dots, y_N, \dots, \underbrace{-\sum_{i \neq j} m_i \frac{x_i - x_j}{\|x_i - x_j\|}}_{j\text{-te Stelle}}, \dots\Big)$$

(mit $\dot{x}_i = y_i$). Schon das dynamische System des 3-Körper-Problems ist nicht bekannt. Man weiß nicht einmal, für welche Anfangslagen $p = (x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)$ $p \in M$ kein „Zusammenstoß" $t_+(p) < \infty$ stattfindet.

**(3.19) Vorbereitung.** Sei $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\xi\colon V \to \mathbb{R}^n$ ein glattes Vektorfeld. Ist $x_0 \in V$ und $r, M > 0$, dass $\overline{B_r(x_0)} \subseteq V$ und $\|\xi(x)\| \leq M$, für alle $x \in \overline{B_r(x_0)}$, so zeigt der Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf, dass die maximale Lösung $\alpha\colon (t_-, t_+) \to V$ von $\dot{x} = \xi(x)$ mit $\alpha(0) = x_0$ mindestens auf den Intervall $(-\delta, \delta)$ mit $\delta := \frac{r}{2M}$, existiert, also: $t_r \geq \frac{r}{2M}$.

**(3.20) Satz.** *Sei $M$ eine glatte Mannigfaltigkeit und $\varphi$ ein maximales dynamisches System auf $M$. Sei weiter $p \in M$ mit $t_+(p) < \infty$ und $K \subseteq M$ ein beliebiges Kompaktum. Dann existiert ein $\tau \in (0, t_+)$, so dass für alle $t \in (\tau, t_+)$ gilt:*

$$\varphi^t(p) \notin K.$$

***Beweis.*** Angenommen es gäbe ein Kompaktum $K \subseteq M$, wo das nicht der Fall ist. Dann gibt es eine Folge $(t_n)$ in $I = \big(t_-(p), t_+(p)\big)$ mit

$$(t_n) \nearrow t_+ := t_+(p)$$

und

$$q_n := \varphi^{t_n}(p) \in K.$$

Nach Übergang zu einer Teilfolge von $(t_n)$, die wir wieder mit $(t_n)$ bezeichnen, können wir annehmen, dass $(q_n)$ gegen einen Punkt $q \in K$ konvergiert.

Nun wählen wir eine Karte $x\colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ um $q$, setzen $x_0 = x(q)$ und $x_n := x(q_n)$ für $n \geq n_0$ (mit $n_0$ groß genug). Ist $X|_U = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ mit $\xi^i \in \mathcal{E}(V)$, so wählen wir $r > 0$ und $M > 0$, so dass $\overline{B_r(x_0)} \subseteq V$ und $\|\xi(x)\| \leq M$ ist, für $x \in \overline{B_r(x_0)}$ $\big($und $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)\colon V \to \mathbb{R}^n\big)$. Sei $n_1 \in \mathbb{N}$ so groß, dass einerseits $x_n \in B_{r/2}(x_0)$ für $n \geq n_1$ $\big($das geht, weil $(x_n) \to x_0\big)$ und andererseits, dass

$$t_+ - t_n < \delta := \frac{r}{4M}$$

Ist nun $n_2 \geq n_1$ beliebig und $q_2 := \varphi^{t_{n_2}}(p)$, so müsste die Lösungskurve $t \mapsto \varphi^t(q_2)$ mindestens für $0 < t < \delta$ existieren, denn für $x_2 := x(q_2)$ ist $x_2 \in B_{r/2}(x_0)$ und damit

$$\overline{B_{r/2}(x_2)} \subseteq \overline{B_r(x_0)} \subseteq V$$

Da $\|\xi(x)\| \leq M$ für $x \in \overline{B_{r/2}}$ ist, lebt nach (3.19) die Kurve $t \mapsto \varphi^t(q_2)$ mindestens auf $(0, \delta)$ mit

$$\delta := \frac{r/2}{2M} = \frac{r}{4M}. \quad (\Longrightarrow t_+(q_2) \geq \delta)$$

Andererseits lebt sie aber nur bis

$$t_+(q_2) = t_+ - t_{n_2} < \delta,$$

und das ist ein Widerspruch. □

**(3.21) Korollar.** *Ist $M$ ein kompakte glatte Mannigfaltigkeiten, so ist daher jedes Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ **vollständig**, d.h.: das zugehörige dynamische System ist global, also $I(p) = \mathbb{R}$, für alle $p \in M$.*

***Beweis.*** Nach (3.20) verlässt $t \mapsto \varphi^t(p)$ das Kompaktum $K = M$ sicher nie, also ist $t_+(p) = +\infty$. Ähnlich sieht man (z.B. durch Übergang von $X$ zu $-X$), dass auch $t_-(p) = -\infty$ sein muss, für alle $p \in M$. □

**(3.22) Definition.** Sei $L$ ein reeller Vektorraum. Eine bilineare Abbildung $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]\colon L \times L \to L$ heißt eine **Lie-Klammer auf L**, wenn gilt:

(i) $[a, b] = -[b, a]$, $\forall a, b \in L$ (Schiefsymmetrie)

(ii) $\big[a, [b, c]\big] + \big[b, [c, a]\big] + \big[c, [a, b]\big] = 0, \quad \forall a, b, c \in L$ (Jacobi-Identität)

Das Paar $\big(L, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]\big)$ heißt dann eine (reelle) **Lie-Algebra**.

**(3.23) Beispiel.**

(a) $[\,\cdot\,,\,\cdot\,] = 0$ ist stets eine Lie-Klammer auf einen reellen Vektorraum. Man nennt $L$ dann **abelsche**.

(b) Auf $L = \mathbb{R}^3$ setzt man für $x, y \in L$:

$$[x, y] := x \times y = (x^2y^3 - x^3y^2, x^3y^1 - x^1y^3, x^1y^2 - x^2y^1)$$

Dann ist $\big(L, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]\big) = (\mathbb{R}^3, \times)$ eine Lie-Algebra (Übung).

(c) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $L = \mathrm{Mat}_n\,\mathbb{R}$. Setzt man

$$[A, B] = AB - BA, \quad \forall A, B \in L,$$

so erhält man eine Lie-Klammer auf $L$ (Übung).

(d) Sei $A$ eine $\mathbb{R}$-Algebra. Setzt man für $a, b \in A$

$$[a, b] = ab - ba,$$

so wird dadurch eine Lie-Klammer auf $A$ definiert.

(e) Sei $V$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $A = \mathrm{End}(V)$. Dann ist also $L = \mathrm{End}(V)$ mit

$$[\alpha, \beta] = \alpha \circ \beta - \beta \circ \alpha$$

eine Lie-Algebra.

**(3.24) Kommentar.**

(a) Ist $\big(L, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]\big)$ eine Lie-Algebra, so heißt ein Unterraum $L' \subseteq L$ eine **Lie-Unteralgebra von L**, wenn für alle $a, b \in L'$ auch $[a, b] \in L'$ ist. $L'$ wird dann mit $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]|_{L' \times L'}$ selbst zu einer Lie-Algebra.

(b) Ist z.B. $L = \mathrm{Mat}_n \mathbb{R}$ mit $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ wie unter (3.20, b), so betrachte

$$L' := \{A \in L \,:\, A^t + A = 0\}$$

die schiefsymmetrischen Matrizen. Dann ist $L' \subseteq L$ eine Lie-Unteralgebra (Übung)

**(3.25) Bemerkung.** Sei $A$ eine $\mathbb{R}$-Algebra und

$$\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(A) := \{\varphi \in \mathrm{End}(A) \,:\, \varphi(ab) = \varphi(a)b + a\varphi(b),\ \forall a, b \in A\}$$

Dann ist $\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(A) \subseteq \mathrm{End}(A)$ eine Lie-Unteralgebra. (Sie heißt die Lie-Unteralgebra der **Derivationen auf A**.)

***Beweis.*** Für $\varphi, \psi \in \mathrm{Der}(A)$ und allen $a, b \in A$ gilt:

$$\begin{aligned}
[\varphi, \psi](a, b) &= \varphi \circ \psi(ab) - \psi \circ \varphi(ab) = \varphi\big(\psi(a)b + a\psi(b)\big) - \psi\big(\varphi(a)b + a\varphi(b)\big) \\
&= \varphi \circ \psi(a) \cdot b + \psi(a)\varphi(b) + \varphi(a)\psi(b) + a \cdot \varphi \circ \psi(b) \\
&- \psi \circ \varphi(a) \cdot b - \varphi(a)\psi(b) - \psi(a)\varphi(b) - a \cdot \psi \circ \varphi(b) \\
&= [\varphi, \psi](a) \cdot b + a \cdot [\varphi, \psi](b),
\end{aligned}$$

also auch $[\varphi, \psi] \in \mathrm{Der}(A)$. $\square$

**(3.26) Definition.** Sei $n \in \mathbb{N}$ und $r > 0$. Dann sei $B(r) = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, \|x\| < r\}$. Wir nennen eine glatte Funktion $\varrho\colon \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ eine **Abschneidefunktion**, wenn gilt:

(i) $\varrho|_{\overline{B(1)}} = 1$,

(ii) $\varrho|_{\mathbb{R}^n \setminus B(2)} = 0$.

**(3.27) Kommentar.** Es gibt Abschneidefunktionen. Man setze etwa $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) := e^{-1/t}$ für $t > 0$ und $f(t) = 0$ für $t \leq 0$, und zunächst dann $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(t) = \frac{f(t)}{f(t) + f(1 - t)}$$

Setzte dann $\varrho\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\varrho(x) := g\big(2 - \|x\|\big)$, so ist $\varrho$ eine Abschneidefunktion.

**(3.28) Lemma.** *Sei $M$ eine glatte Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und $s \in \mathcal{E}_p(M)$. Dann gibt es ein $f \in \mathcal{E}(M)$ mit $f_p = s$.*

***Beweis.*** Sei $x\colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ zunächst irgendeine Karte um $p$ und $x_0 = x(p) \in V$. Indem ich $x$ mit der Translation $t\colon V \to V' := V - x_0$, $x \mapsto x - x_0$, verknüpfe, erhalte ich eine Karte $x' = t \circ x\colon U \to V' \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $x'(p) = 0$ (Solche Karten heißen **zentriert**).

Als nächstes wählt man ein $\varepsilon > 0$, so dass $B(\varepsilon) \subseteq V'$ ist, setzt $U' := x'^{-1}\big(B(\varepsilon)\big)$ und erhält mit $x''\colon U'' \to B(\varepsilon) = V''$ eine zentrierte Karte, so dass $V'' = B(\varepsilon)$ ist.

Nun verknüpft man diese Karte noch mit der **Dilatation** $d\colon B(\varepsilon) \to B(3)$ $x \mapsto \frac{3}{\varepsilon}x$, und erhalte mit $x'''\colon U'' \to B(3)$, $x''' = d \circ x''$, schließlich eine zentrierte Karte um $p$ mit Wertebereich $B(3)$ (Das kann man also stets machen). Sei nun $s \in \mathcal{E}_p(M)$ und $s$ von einem $g \in \mathcal{E}(U)$, $U \in \mathfrak{U}(p)$ offen, repräsentiert, $s = g_p$. Nach eventueller Verkleinerung von $U$ (und Einschränkung von $g$) dürfen wir annehmen, dass es eine $\varphi\colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ auf $U$ gibt. Nach eventueller Verkleinerung darf man nun nach obiger Manipulation annehmen, dass $\varphi$ zentriert und $V = B(3) \subseteq \mathbb{R}^n$ ist.

Sei nun $\varrho\colon \mathbb{R}^n \to [0,1]$ eine Abschneidefunktion. Wir setzen dann $\widetilde{g}\colon U \to \mathbb{R}$,

$$\widetilde{g}(q) := \varrho\big(\varphi(q)\big) \cdot g(q) \quad \text{(also kurz: } \widetilde{g} = \varrho \circ \varphi \cdot g).$$

Auf $U_1 := \varphi^{-1}\big(B(1)\big) \in \mathfrak{A}(p)$ stimmt dann $\widetilde{g}$ mit $g$ überein, also ist $\widetilde{g}_p = s$. Auf $U \setminus U_2$ mit $U_2 := \varphi^{-1}\big(B(2)\big)$, gilt dagegen

$$\widetilde{g}|_{U \setminus U_2} = 0$$

und deshalb kann $\widetilde{g}$ mit $f\colon M \to \mathbb{R}$,

$$f(q) := \begin{cases} \widetilde{g}(q) & \text{für } q \in U, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

trivial in glatter Weise auf ganz $M$ fortgesetzt werden. Es folgt:

$$f_p = \widetilde{g}_p = s.$$

□

**(3.29) Kommentar.**

(a) Da $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E}_p(M) = \infty$ ist, ist insbesondere

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E}(M) = \infty,$$

denn $\mathcal{E}(M) \to \mathcal{E}_p(M)$, $f \mapsto f_p$ linear und nach (3.28) surjektiv. Ähnlich sieht man auch, dass

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{X} = \infty, \ \dim_{\mathbb{R}} \Omega(M) = \infty$$

ist (Übung).

(b) Die glatten Vektorfelder $\mathfrak{X}(M)$ „operieren“ nun auf $\mathcal{E}(M)$ wie folgt: Betrachte

$$\nabla\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathcal{E}(M) \to \mathcal{E}(M), \quad (X, f) \mapsto Xf$$

mit

$$(Xf)(p) := X_p(f_p)$$

Wir nennen $Xf \in \mathcal{E}(M)$ die **Ableitung von f in Richtung X**. $Xf$ ist tatsächlich glatt, denn wird bzgl. einer Karte $x\colon U \to V$ $f|_U$ durch die glatte Funktion $f\colon V \to \mathbb{R}$ und $X|_U$ durch die glatten Funktionen $\xi^1, \ldots, \xi^n\colon V \to \mathbb{R}$ beschrieben, $X|_U = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, so wird $Xf|_U$ durch die glatte Funktion

$$\xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \in \mathcal{E}(V)$$

beschrieben.

(c) Wir können nun jedes glatte Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ als eine Derivation der $\mathbb{R}$- Algebra $\mathcal{E}(M)$ auf sich selbst auffassen:

**(3.30) Proposition.** *Sei $M$ eine glatte Mannigfaltigkeit und $\iota\colon \mathfrak{X}(M) \to \operatorname{Der}\big(\mathcal{E}(M), \mathcal{E}(M)\big)$ wie folgt gegeben:*

$$\iota(X)(f) = Xf.$$

*Dann ist $\iota$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum-Isomorphismus, sogar ein $\mathcal{E}(M)$-Modul-Isomorphismus.*

***Beweis.***

(a) Zunächst ist für $X \in \mathfrak{X}(M)$, $\iota(X)\colon \mathcal{E}(M) \to \mathcal{E}(M)$ tatsächlich eine Derivation, denn $\iota(X)$ ist linear, d.h.

$$X(f_1 + f_2) = Xf_1 + Xf_2$$
$$X(\lambda f) = \lambda Xf,$$

$f \in \mathcal{E}(M)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, unmittelbar aus der Definition und auch

$$X(fg) = Xf \cdot g + f \cdot Xg, \quad \forall f, g \in \mathcal{E}(M),$$

denn $X_p$ ist ja für jedes $p \in M$ eine Derivation, $X_p \in \operatorname{Der}\big(\mathcal{E}(M), \mathbb{R}\big)$.

Ebenso leicht sieht man, dass $\iota$ $\big($sogar $\mathcal{E}(M)$-$\big)$ linear ist,

$$\iota(X_1 + X_2) = \iota(X_1) + \iota(X_2), \text{ also } (X_1 + X_2)f = X_1 f + X_2 f, \quad \forall f.$$
$$\iota(fX) = f\iota(X), \text{ also } (fX)g = f(Xg), \quad \forall g.$$

(b) *Injektivität*. Ist $\iota(X) = 0$, so ist $Xf = 0$, $\forall f \in \mathcal{E}(M)$. Sei $p \in M$ beliebig und $s \in \mathcal{E}_p(M)$. Nach Lemma 3.28 gibt es $f \in \mathcal{E}(M)$ mit $f_p = s$. Es folgt:

$$X_p(s) = X_p(f_p) = (Xf)(p) = 0,$$

also $X_p = 0$, also $X = 0$.

(c) *Surjektivtät*. Sei $\delta\colon \mathcal{E}(M) \to \mathcal{E}(M)$ eine beliebige Derivation. Nach dem folgenden Lemma hängt dann für $f \in \mathcal{E}(M)$ und $p \in M$ die Zahl $\delta(f)(p) \in \mathbb{R}$ nur von $f_p \in \mathcal{E}_p(M)$ ab. Wir setzen dann $X\colon M \to TM$ fest durch

$$X_p(s) := \delta(f)(p), \quad \text{für } s \in \mathcal{E}_p(M),$$

wenn $s = f_p$ ist. Dann ist $X$ wohldefiniert, hängt glatt von $p$ ab, denn ein Vektorfeld $X\colon M \to TM$ ist genau dann glatt, wenn $Xf$ glatt ist, für alle $f \in \mathcal{E}(M)$ (Übung), und es gilt:

$$\iota(X)f(p) = Xf(p) = X_p(f_p) = \delta(f)(p), \quad \forall p \in M, \forall f \in \mathcal{E}(M),$$

also ist

$$\iota(X) = \delta.$$

□

**(3.31) Lemma.** *Sei $\delta\colon \mathcal{E}(M) \to \mathcal{E}(M)$ eine Derivation, $f \in \mathcal{E}(M)$ und $p \in M$. Dann hängt $\delta(f)(p) \in \mathbb{R}$ nur von $f_p \in \mathcal{E}_p(M)$ ab.*

***Beweis.***

(a) Sei $g \in \mathcal{E}(M)$ mit $g|_U = 0$ auf einer offenen Umgebung $U$ von $p$. *Behauptung:* $\delta(g)(p) = 0$. *Dazu:* Ähnlich wie in (3.28) kann man nach evtl. Verkleinerung von $U$ annehmen, dass es offene Umgebungen

$$p \in U_1 \subseteq U_2 \subseteq U$$

gibt und eine glatte Funktion $h\colon M \to \mathbb{R}$ mit $h|_{U_1} = 1$ und $h|_{M\setminus U_2} = 0$. Es ist dann $h \cdot g = 0$ auf ganz $M$. Weil $\delta$ Derivation ist, folgt:

$$0 = \delta(0) = \delta(hg) = (\delta h) \cdot g + h \cdot (\delta g)$$

also in $p$:

$$0 = (\delta h)(p) \cdot \underbrace{g(p)}_{=0} + \underbrace{h(p)}_{=1}(\delta g)(p).$$

(b) Ist nun $f_1, f_2 \in \mathcal{E}(M)$ mit $(f_1)_p = (f_2)_p$, so gilt für $g := f_2 - f_1 \in \mathcal{E}(M)$:

$$0_p = 0 = (f_2)_p - (f_1)_p = g_p$$

also ist $g = 0$ auf einer Umgebung $U \subseteq M$ von $p$. Es folgt:

$$0 = \delta(g)(p) = \delta(f_2)(p) - \delta(f_1)(p). \Longrightarrow \delta(f_1)(p) = \delta(f_2)(p).$$

□

**(3.32) Definition.** Sei $M$ eine glatte Mannigfaltigkeit und $\iota\colon \mathfrak{X}(M) \to \operatorname{Der}\big(\mathcal{E}(M)\big)$, $\iota X(f) = Xf$. Man setzt dann $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$,

$$[X, Y] := \iota^{-1}\big([\iota X, \iota Y]\big).$$

**(3.33) Kommentar.**

(a) Wegen (3.30) kann man den $\mathcal{E}(M)$-Modul $\mathfrak{X}(M)$ mit dem $\mathcal{E}(M)$-Modul $\operatorname{Der}_{\mathbb{R}}\big(\mathcal{E}(M)\big)$ (vermöge $\iota$) identifizieren. Nun ist aber $A := \mathcal{E}(M)$ eine $\mathbb{R}$-Algebra und daher trägt $\operatorname{Der}\big(\mathcal{E}(M)\big)$ -neben seiner $\mathcal{E}(M)$-Modul-Struktur- auch eine Lie-Algebra-Struktur nach (3.23). Deshalb trägt auch $\mathfrak{X}(M)$ in natürlicher Weise eine Lie-Algebra-Struktur gemäß (3.32).

(b) Ist $\dim M \geq 1$, so ist $\mathfrak{X}(M)$ $\big($außer ein $\mathcal{E}(M)$-Modul$\big)$ zusammen mit $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ eine unendlich dimensionale Lie-Algebra. Unterdrückt man den Isomorphismus $\iota$ (und das tut man nach einer Weile), so ist die Lie-Klammer auf $\mathfrak{X}(M)$ also gegeben durch

$$[X, Y] = X \cdot Y - Y \cdot X$$

Präziser bedeutet dies für jedes $p \in M$, $s \in \mathcal{E}_p(M)$ und einem $f \in \mathcal{E}(M)$ von $s$, $s = f_p$:

$$[X, Y]_p(s) = X_p\big((Yf)_p\big) - Y_p\big((Xf)_p\big).$$

denn

$$\begin{aligned}
[X, Y]_p(s) &= \Big(\iota^{-1}\big([\iota(X), \iota(Y)]\big)\Big)_p(f_p) \\
&= [\iota X, \iota Y](f)(p) \\
&= \big(\iota(X) \circ \iota(Y) - \iota(Y) \circ \iota(X)\big)(f)(p) \\
&= \big(X(Yf) - Y(Xf)\big)(p) \\
&= X_p\big((Yf)_p\big) - Y_p\big((Xf)_p\big).
\end{aligned}$$

(c) Man beachte, dass $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]\colon \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$ in keinem der beiden Argumente $\mathcal{E}(M)$-linear ist. Vielmehr gilt:

**(3.34) Bemerkung.** Sei $M$ glatte Mannigfaltigkeit, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ und $f, g \in \mathcal{E}(M)$. Dann gilt:

$$[fX, gY] = fg[X,Y] + f(Xg)\cdot Y - g(Yf)\cdot X$$

***Beweis.*** Es reicht zu zeigen, dass das Bild beider Seiten unter $\iota\colon \mathfrak{X}(M)\to \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}\big(\mathcal{E}(M)\big)$ übereinstimmt. (Übung) □

**(3.35) Bemerkung.** Sei $M$ glatte Mannigfaltigkeit, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ und sei $x\colon U\to V\subseteq\mathbb{R}^n$ eine Karte. Ist nun $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x^i}$

$$X|_U = \xi^i\partial_i,\ Y|_U = \eta^j\partial_j \quad \text{mit } \xi^i, \eta^j \in \mathcal{E}(V),$$

so gilt

$$[X,Y]\big|_U = \Big(\xi^i\frac{\partial\eta^k}{\partial x^i} - \eta^j\frac{\partial\xi^k}{\partial x^j}\Big)\partial_k.$$

***Beweis.*** Ist $f\in\mathcal{E}(U)$ (und die Darstellung von $f$ bzgl. $x$ sei wie üblich ebenfalls mit $f$ bezeichnet), so gilt mit (3.29, b) und (3.33, b):

$$\begin{aligned}
[X,Y]|_U(f) &= X|_U\Big(\eta^j\frac{\partial f}{\partial x^j}\Big) - Y|_U\Big(\xi^i\frac{\partial f}{\partial x^i}\Big)\\
&= \xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}\Big(\eta^j\frac{\partial f}{\partial x^j}\Big) - \eta^j\frac{\partial}{\partial x^j}\Big(\xi^i\frac{\partial f}{\partial x^i}\Big)\\
&= \xi^i\frac{\partial\eta^j}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j} + \xi^i\eta^j\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j} - \eta^j\frac{\partial\xi^i}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^i} - \eta^j\xi^i\frac{\partial^2 f}{\partial x^j\partial x^i}\\
&\overset{\text{H.A. Schwarz}}{=} \left(\xi^i\frac{\partial\eta^k}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^k} - \eta^j\frac{\partial\xi^k}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^k}\right)(f)\\
\Longrightarrow [X,Y]|_U &= \Big(\xi\frac{\partial\eta^k}{\partial x^i} - \eta^j\frac{\partial\xi^k}{\partial x^j}\Big)\partial_k
\end{aligned}$$

□

**(3.36) Definition.** Seien $M$ und $N$ glatte Mannigfaltigkeiten und $\Phi\colon M\to N$ eine glatte Abbildung. Man nennt zwei Vektorfelder $X\in\mathfrak{X}(M)$ und $Y\in\mathfrak{X}(N)$ **$\Phi$-bezogen aufeinander**, wenn für alle $p\in M$ gilt:

$$\mathrm{D}\Phi_p(X_p) = Y_{\Phi(p)},\ \text{kurz: } \mathrm{D}\Phi\circ X = Y\circ\Phi,$$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "X"'] & N \arrow[d, "Y"] \\ \mathrm{T}M \arrow[r, "\mathrm{D}\Phi"] & \mathrm{T}N \end{tikzcd}$$

wenn man $\mathrm{D}\Phi$ als eine Abbildung zwischen $\mathrm{T}M$ und $\mathrm{T}N$ auffasst, $\mathrm{D}\Phi(\xi) := \mathrm{D}\Phi_p(\xi)$, wenn $\xi\in\mathrm{T}M_p$ ist.

**(3.37) Bemerkung.** Ist $\Phi\colon M\to N$ eine glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten $M$ und $N$ und sind $X_1, X_2\in\mathfrak{X}(M)$ und $Y_1, Y_2\in\mathfrak{X}(N)$, so dass $X_1$ und $Y_1$ bzw. $X_2$ und $Y_2$ $\Phi$-bezogen sind, so sind auch $[X_1, X_2]\in\mathfrak{X}(M)$ und $[Y_1, Y_2]\in\mathfrak{X}(N)$ $\Phi$-bezogen.

***Beweis.*** Sei $p \in M$, $q := \Phi(p)$, $s \in \mathcal{E}_q(N)$ mit $s = g_q$ und $g \in \mathcal{E}(N)$. Dann ist:

$$\begin{aligned}
D\Phi_p\big([X_1, X_2]_p\big)(s) &= [X_1, X_2]_q\big((g \circ \Phi)_p\big) && \text{(Def. von } D\Phi_p\text{)} \\
&= (X_1)_p\Big(\big(X_2(g \circ \Phi)\big)_p\Big) - (X_2)_p\Big(\big(X_1(g \circ \Phi)\big)\Big) && \text{(Def. von } [\,\cdot\,,\,\cdot\,]\text{)} \\
&= (X_1)_p\Big(\big(D\Phi(X_2)(g)\big)_p\Big) - (X_2)_p\Big(\big(D\Phi(X_1)(g)\big)_p\Big) && \text{(Def. von } D\Phi\text{)} \\
&= (X_1)_p\Big(\big(\underbrace{(Y_2 \circ \Phi)(g)}_{=Y_2 g \circ \Phi}\big)_p\Big) - (X_2)_p\Big(\big(\underbrace{(Y_1 \circ \Phi)(g)}_{=Y_1 g \circ \Phi}\big)_p\Big) \\
&= D\Phi_p\big((X_1)_p\big)\big((Y_2 g)_q\big) - D\Phi\big((X_2)_p\big)\big((Y_1 g)_q\big) \\
&= (Y_1)_q\big((Y_2 g)_q\big) - (Y_2)_q\big((Y_1 g)_q\big) \\
&= [Y_1, Y_2]_q(g_q) = [Y_1, Y_2]_{\Phi(p)}(s).
\end{aligned}$$

□

**(3.38) Lemma.** *Sei $\Phi\colon M \to N$ glatt, $p \in M$ und $D\Phi_p\colon TM_p \to TN_{\Phi(p)}$ injektiv. Dann existieren offene Umgebungen $U \subseteq M$ von $p$ und $V \subseteq N$ von $q = \Phi(p)$, so dass $\Phi(U) \subseteq V$, $\Phi|_U\colon U \to V$ injektiv ist und $\Phi(U) \subseteq V$ eine Untermannigfaltigkeit der Codimension* $\dim N - \dim M$ *ist.*

***Beweis.*** Sei zunächst $n = \dim M$, $n + k := \dim N$ (also $k \geq 0$, da aus $D\Phi_p$ injektiv folgt: $\dim M \leq \dim N$). Seien $x = (x^1, \dots, x^n)\colon U \to U' \subseteq \mathbb{R}^n$ und $y = (y^1, \dots, y^{n+k})\colon V \to V' \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ Karten um $p$ bzw. $q$, so dass $\Phi(U) \subseteq V$ ist. Sei $\varphi\colon U' \to V'$ die Beschreibung von $\Phi$ bzgl. $x$ und $y$, $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^{n+k})$. Ist $x_0 = x(p) \in U'$, so folgt:

$$\operatorname{Jac}(\varphi)(x_0) = \left(\frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j}\right)_{\substack{1 \leq j \leq n+k \\ 1 \leq j \leq n}} (x_0)$$

hat den vollen Rang $n$. Es gibt also

$$1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_n \leq n + k,$$

so dass $\left(\frac{\partial \varphi^{i_\nu}}{\partial x^j}\right)_{1 \leq \nu, j \leq n}$ invertierbar ist. Nach evtl. Koordinaten-Vertauschung $\tau\colon \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^{n+k}$, $\varphi' = \tau \circ \varphi$, dürfen wir $i_\nu = n$ annehmen. Bezeichnet $\pi\colon \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^n$ die Projektion auf die ersten $n$ Koordinaten,

$$y = (w, z) \mapsto w, \quad w \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}^k,$$

so ist nach dem Umkehrsatz die Abbildung $\pi \circ \varphi\colon U' \to \pi(V') \subseteq \mathbb{R}^n$ lokal um $x_0$ bzw. $w_0 := \pi \circ \varphi(x_0) = y(q)$ umkehrbar. Nach Verkleinerung von $U$ und $V$ dürfen wir die Existenz eines glatten $\psi\colon \pi(V') \to U'$ annehmen mit

$$\psi \circ \pi \circ \varphi = \mathbb{1}_{U'}, \ \pi \circ \varphi \circ \psi = \mathbb{1}_{\pi(V')}$$

Insbesondere ist nun $\varphi$ injektiv und damit auch $\Phi|_U = y^{-1} \circ \varphi \circ x$.

Es ist $\Phi(U) \subseteq V$ auch eine Untermannigfaltigkeit der Codimension $k$, denn auf $V$ setzen wir nun $F\colon V \to \mathbb{R}^k$, $F = G \circ y$, mit $G\colon V' \to \mathbb{R}^k$,

$$G(w, z) = \Big(z^1 - \varphi^{n+1}\big(\psi(w)\big), \dots, z^k - \varphi^{n+k}\big(\psi(w)\big)\Big).$$

Wegen $\pi \circ \varphi \circ \psi(w) = w$, also

$$\varphi^j\big(\psi(w)\big) = w^j, \quad \text{für } j = 1, \dots, n,$$

ist:

$$\begin{aligned} G(w,z) = 0 &\iff z^i = \varphi^{n+i} \circ \psi(w) \quad (i = 1, \dots, k) \\ &\iff (w,z) = \varphi \circ \psi(w) \\ &\iff (w,z) = \varphi(x) \text{ für ein } x \in U' \\ &\iff (w,z) \in \operatorname{Im}(\varphi), \end{aligned}$$

also: $F(q) = 0 \iff q \in \operatorname{Im}(\Phi|_U)$, und wegen

$$\operatorname{Jac}(G)(w_0, z_0) = \left( \ * \ \middle| \ \mathbb{1}_k \ \right)$$

$\big($mit $(w_0, z_0) = y(q)\big)$ ist auch $\operatorname{Rg}(DF_q) = k$. $\Phi(U) \subseteq V$ ist also eine (abgeschlossene) Untermannigfaltigkeit der Codimension $k$. □

**(3.39) Erinnerung.** Ist $M \subseteq N$ eine (nicht notwendig abgeschlossene) Untermannigfaltigkeit der Codimension $k$, so ist die Inklusion $i\colon M \hookrightarrow N$ (mit der induzierten Mannigfaltigkeit-Struktur) eine **Einbettung**, d.h.:

(a) $i$ injektiv

(b) $i$ immersiv

(c) $i\colon M \to i(M)$ ist ein Homöomorphismus

Umgekehrt gilt nun:

**(3.40) Satz.** *Sei $\Phi\colon M \to N$ eine Einbettung (also injektiv, immersiv und Homöomorphismus auf sein Bild). Dann ist $\Phi(M) \subseteq N$ eine (nicht notwendig abgeschlossene) Untermannigfaltigkeit der Codimension* $\dim N - \dim M$.

***Beweis.*** Sei $q \in \Phi(M)$ und $\Phi(p) = q$. Nach dem Lemma gibt es offene Umgebungen $U \subseteq M$ von $p$ von $V \subseteq N$ von $q$, so das $\Phi(U) \subseteq V$ und $\Phi(U) \subseteq V$ eine Untermannigfaltigkeit der Codimension $k$. Andererseits ist $\Phi\colon M \to \Phi(M)$ ein Homöomorphismus, also $\Phi$ offen und damit $\Phi(U)$ offen in $\Phi(M)$. Deshalb gibt es ein offenes $V' \subseteq N$ mit

$$\Phi(M) \cap V' = \Phi(U).$$

Verkleinert man die obigen $U \subseteq M$ bzw. $V \subseteq N$ gegebenenfalls so, dass $V \subseteq V'$ ist $\big($Übergang zu $V \cap V'$ und $U' = \Phi^{-1}(V \cap V')\big)$, so zeigt dies, dass

$$\Phi(M) \cap V = F^{-1}(0)$$

mit einem glatten $F\colon V \to R^k$ und $DF_q\colon TN_q \to \mathbb{R}^k$ ($k = \dim N - \dim M$) von vollem Rang, d.i.: $\Phi(M) \subseteq N$ ist Untermannigfaltigkeit der Codimension $k$. □

**(3.41) Kommentar.**

(a) Sind $M$ und $N$ glatte Mannigfaltigkeiten und $\Phi\colon M \to N$ nur injektiv, so ist $\Phi$ i.a. nicht immersiv (geschweige denn eine Einbettung). Z.B. ist mit $M = \mathbb{R}$, $N = \mathbb{R}^2$ und $\Phi\colon M \to N$,

$$\Phi(t) = (t^2, t^3)$$

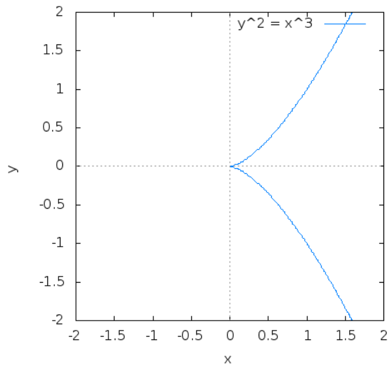
injektiv, aber nicht immersiv (bei $t_0 = 0$), denn

$$\dot{\Phi}(0) = (2t, 3t^2)|_{t=0} = (0,0)$$

also $D\Phi_0 \colon TM_0 \to TN_{(0,0)}$ nicht injektiv. Das Bild $C = \Phi(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^2$ ist

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y^2 = x^3\}$$

und heißt die **Neillsche Parabel** (Übung).




(b) Ist $\Phi \colon M \to N$ immersiv, so braucht $\Phi$ nicht (global) injektiv zu sein (geschweige denn eine Einbettung). Betrachte z.B. wieder $M = \mathbb{R}$ und $N = \mathbb{R}^2$ und dieses Mal das **Cartesische Blatt**

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y^2 = x^2(x+1)\}$$

Es ist dann $\Phi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$,

$$\Phi(t) = (t^2 - 1, t^3 - t)$$

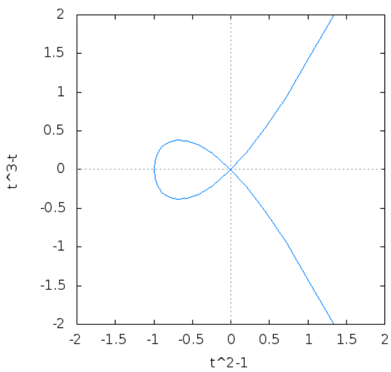
immersiv, denn

$$\dot{\Phi}(t) = (2t, 3t^2 - 1) \neq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

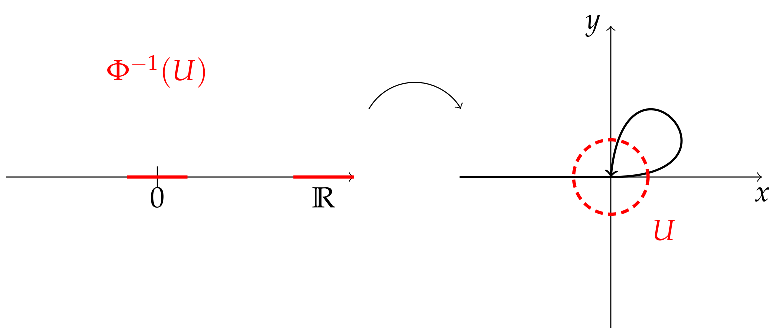
aber nicht injektiv, denn

$$\Phi(1) = (0,0) = \Phi(-1)$$

$\big($und $\Phi(\mathbb{R}) = C$, Übung$\big)$

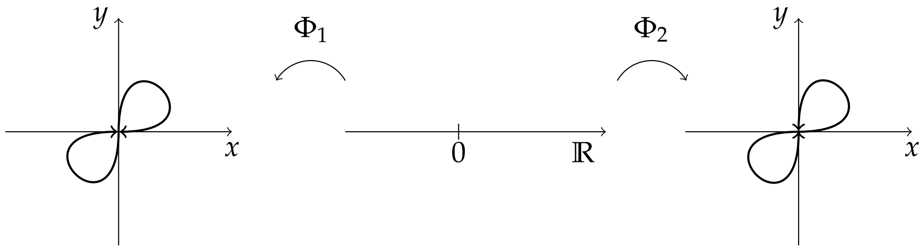



(c) Eine injektive Immersion $\Phi$ muss i.a. auch keine Einbettung sein. Die von der Teilraumtopologie auf $\Phi(M)$ induzierte Topologie auf $M$ induzierte Topologie auf $M$ $\big($via des bijektiven $\Phi \colon M \to \Phi(M)\big)$ ist dann echt gröber, denn $\phi$ ist ja stetig. Ist z.B. wieder $M = \mathbb{R}$ und $N = \mathbb{R}^2$ und $\Phi \colon M \to N$ (ohne explizite Vorschrift) durch folgende Skizze gegeben:




injektiv, immersiv, aber keine Einbettung! Ist nämlich $\tau$ die von $\Phi(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^2$ induzierte Topologie auf $\mathbb{R}$, so ist die Menge $(-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}$ (für irgendein $\varepsilon > 0$) nicht offen $\big($d.h. $\Phi(-\varepsilon, \varepsilon)$ ist in $\Phi(\mathbb{R})$ nicht offen und damit $\Phi \colon \mathbb{R} \to \Phi(\mathbb{R})$ kein Homöomorphismus$\big)$, weil jede offene Umgebung $U \in \tau$ von o ein **Endstück** $(\alpha, \infty)$ mit $\alpha > 0$ enthalten muss.

(d) Teilmengen $C$ einer Mannigfaltigkeit $N$ können also die Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit $M$ via einer injektiven Immersion $\Phi\colon M \to N$ mit $C = \Phi(M)$ tragen, obwohl sie keine Untermannigfaltigkeit, und damit „sehr wild“ aussehen. Ihre Topologie ist dann nicht mehr die Teilraumtopologie, sondern feiner (Übung). Eine gegebene Teilmenge kann auch mit verschiedenen Topologie Mannigfaltigkeiten-Strukturen tragen, wie das folgende der Figur „Acht“ $C \subseteq \mathbb{R}^2$ zeigt:




Die Abbildung $\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist dabei nicht stetig (in 0), weil das von $(-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}$ vom Typ $(-\infty, -\alpha) \cup \{0\} \cup (\alpha, \infty)$ mit einem $\alpha > 0$ ist und damit nicht offen.

**(3.42) Definition.** Zwei injektive Immersionen $\Phi_1\colon M_1 \to N$ und $\Phi_2\colon M_2 \to N$ heißen **äquivalent**, wenn $\Phi_1(M_1) = \Phi_2(M_2)$ und die Abbildung $\psi\colon M_1 \to M_2$ mit $\Phi_2 \circ \psi = \Phi_1$ ein Diffeomorphismus ist $\big($sei $C := \Phi(M_1) = \Phi(M_2) \subseteq N\big)$.

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[d, "\psi"', "\cong"] \arrow[dr, "\Phi_1"] & \\ M_2 \arrow[r, "\Phi_2"'] & C \end{tikzcd}$$

**(3.43) Lemma.** *Sei $\Phi\colon M \to N$ eine injektive Immersion. Sei weiter $\Psi\colon P \to N$ glatt mit $\Psi(P) \subseteq \Phi(M)$ und $\psi\colon P \to M$ gegeben durch $\Phi \circ \psi = \Psi$. Dann gilt: Ist $\psi$ stetig, so ist $\psi$ bereits glatt.*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\Psi"] \arrow[dr, dashed, "\psi"'] & N \\ & M \arrow[u, "\Phi"'] \end{tikzcd}$$

***Beweis.*** Sei $p \in P$, $q := \psi(p) \in M$, $r := \Phi(q) \in N$. Wir wählen Karten $x$ um $p$, $y$ um $q$ und $z$ um $r$ der Mannigfaltigkeiten $P, M$ und $N$, $x\colon U \to U'$, $y\colon V \to V'$, $z\colon W \to W'$. Es reicht zu zeigen, dass

$$\psi|_{\psi^{-1}(V)}\colon \psi^{-1}(V) \to M$$

glatt um $p$ ist, denn $\psi^{-1}(V) \subseteq P$ ist offen, da $\psi$ stetig ist.

Da $\Phi(V) \subseteq W$ eine Untermannigfaltigkeit nach Lemma (3.38) ist (für $V$ und $W$ klein genug), ist $\Phi|_V\colon V \to \Phi(V) \subseteq W$ ein Diffeomorphismus und man kann als Karte um $q$ die Komposition $\pi \circ z \circ \Phi|_V$ verwenden, wo $\pi\colon \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^n$ ($n = \dim M$, $n + k = \dim N$) eine geeignete Koordinaten-Projektion ist. Bzgl. dieser Karte um $q$ und der Karte $x$ um $p$ wird dann $\psi$ beschrieben durch

$$(\pi \circ z \circ \Phi|_V) \circ \psi \circ x^{-1} = \pi \circ (z \circ \underbrace{\Phi|_V \circ \psi}_{\Psi|_{\psi^{-1}(V)}}) \circ x^{-1} = \pi \circ \underbrace{(z \circ \Psi|_{\psi^{-1}(V)} \circ x^{-1})}_{\text{glatt, weil } \Psi \text{ glatt ist}}$$

und damit glatt. $\square$

**(3.44) Satz.** *Sei $N$ glatt Mannigfaltigkeit, $C \subseteq N$ eine Teilmenge und $\tau$ eine Topologie auf $C$. Dann kann es bis auf Äquivalenz höchstens eine Mannigfaltigkeit-Struktur auf $C$ geben, die von einer injektiven Immersion $\Phi\colon M \to C \subseteq N$ kommt.*

***Beweis.*** Seien also $\Phi_1\colon M_1 \to C \subseteq N$ und $\Phi_2\colon M_2 \to C \subseteq N$ injektive Immersionen mit $\Phi_1(M_1) = C = \Phi_2(M_2)$, so dass $\Phi_1$ und $\Phi_2$ Homöomorphismen sind, falls man $C$ mit $\tau$ topologisiert. Ist dann $\psi\colon M_1 \to M_2$ durch $\Phi_2 \circ \psi = \Phi_1$ gegeben, so ist sowohl $\psi = \Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$ stetig als auch $\psi^{-1} = \Phi_1^{-1} \circ \Phi_2$ und damit nach Lemma (3.43) glatt. Also ist $\psi$ Diffeomorphismus. □

**(3.45) Motivation.**

(a) Sei $M$ eine glatte Mannigfaltigkeit und $X \in \mathfrak{X}(M)$ ohne Nullstellen, $X_p \neq 0$, $\forall p \in M$. Wir betrachten dann das **Linienfeld** $L = (L_p)_{p \in M}$ mit

$$L_p = \langle X_p \rangle = \mathbb{R} \cdot X_p \subseteq \mathrm{T}M_p.$$

Ist dann $p$ fixiert und $\varphi = \alpha(p)\colon I = I(p) \to M$ die maximale Integralkurve von $X$ zum Anfangswert $p$, also

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(t) &= X_{\varphi(t)}, \ \forall t \in I \\ \varphi(0) &= 0 \end{aligned}$$

so ist also $\varphi\colon I \to M$ eine injektive Immersion $\big($denn $\dot{\varphi}(t) \neq 0$, $\forall t \in I\big)$ mit

$$\mathrm{D}\varphi_t(\mathrm{T}I_t) = L_{\varphi(t)},$$

denn $\mathrm{T}I_t$ wird von $\frac{\partial}{\partial t}\big|_t$ und $L_{\varphi(t)}$ von $X_{\varphi(t)}$ erzeugt und

$$\mathrm{D}\varphi_t\left(\frac{\partial}{\partial t}\bigg|_t\right) = \dot{\varphi}(t) = X_{\varphi(t)}$$

Beachte auch, dass $\varphi$ i.a. keine Einbettung zu sein braucht.
$\big($**Beispiel:** $M = \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ und $X(p) = (1, \alpha)$ mit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, wenn man $\mathrm{T}M_p$ kanonisch mit $\mathbb{R}^2$ identifizieren (Übung)$\big)$

(b) Wir wollen nun auch „höherdimensionale Felder“ $D = (D_p)_{p \in M}$ mit $D_p \subseteq \mathrm{T}M_p$ einem Unterraum der Dimension $k$ mit $1 \leq k \leq n = \dim M$, vorgeben und fragen, ob es auch dann „Integralmannigfaltigkeiten“ gibt, die überall tangential an $D$ sind.

**(3.46) Definition.**

(a) Sei $M$ eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension $n$ und $1 \leq k \leq n$. Eine **Distribution vom Rang k auf M** ist eine Familie $D = (D_p)_{p \in M}$ von Unterräumen $D_p \subseteq \mathrm{T}M_p$ mit $\dim D_p = k$, für alle $p \in M$.

(b) Eine Distribution $D = (D_p)$ vom Rang $k$ heißt **glatt**, wenn es zu jedem $p_0 \in M$ eine offene Umgebung $U \subseteq M$ von $p_0$ gibt und glatte Vektorfelder $X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{X}(U)$, die in jedem Punkt $p \in U$ eine Basis von $D_p$ bilden,

$$D_p = \langle (X_1)_p, \ldots, (X_k)_p \rangle$$

(c) Eine glatte Distribution $D = (D_p)_{p \in M}$ vom Rang $k$ auf einer glatten Mannigfaltigkeit $M$ heißt **integrabel**, wenn es zu jedem $p_0 \in M$ eine glatte Mannigfaltigkeit $N$ der Dimension $k$, ein $q_0 \in N$ und eine injektive Immersion $\varphi\colon N \to M$ mit $\varphi(q_0) = p_0$ gibt, so dass für alle $q \in N$ gilt:

$$\mathrm{D}\varphi_q(\mathrm{T}N) = D_{\varphi(p)}.$$

**(3.47) Kommentar.**

(a) Ist $D = (D_p)$ eine glatte Distribution auf $M$, so nennen wir eine injektive Immersion $\varphi\colon N \to M$ mit $D\varphi_q(\mathrm{T}N_q) = D_{\varphi(q)}$ eine **Integral-Mannigfaltigkeit für D**.

(b) Für das Differential einer glatten Abbildung $\Phi\colon M \to N$ (in einem Punkt $p \in M$) notieren wir auch kurz: $\Phi_* := \mathrm{D}\Phi_p$. Eine injektive Immersion $\varphi\colon N \to M$ ist also etwa integral für $D$, genau wenn

$$\varphi_*(\mathrm{T}N) = D|_{\varphi(N)}$$

ist.

(c) Ist $\mathrm{Rg}(D) = 1$, so haben wir schon gesehen $\big($vgl. (3.45)$\big)$, dass $D$ integrabel ist. Für glatte Distributionen von höheren Rang gibt es ein Hindernis:

**(3.48) Proposition.** *Sei $M$ eine glatte Mannigfaltigkeit und $D$ eine glatte und integrable Distribution auf $M$. Sind dann $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, so dass $X_p, Y_p \in D_p$ ist, für alle $p \in M$, so gilt auch:*

$$[X, Y]_p \in D_p, \ \forall p \in M.$$

**(3.49) Kommentar.**

(a) Ist $D$ eine Distribution auf $M$, so notieren wir die glatten Vektorfelder mit Werten in $D$ mit

$$\Gamma(D) := \{X \in \mathfrak{X}(M) \ : \ X_p \in D_p, \ \forall p \in M\}$$

Dann ist $\Gamma(D) \subseteq \mathfrak{X}(M)$ ein $\mathcal{E}(M)$-Untermodul, insbesondere ein $\mathbb{R}$-Unterraum, von $\mathfrak{X}(M)$. Eine notwendige Bedingung für die Integrabilität von $D$ ist dann nach (3.48), dass $\Gamma(D)$ eine Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{X}(M)$ ist,

$$[\Gamma(D), \Gamma(D)] \subseteq \Gamma(D).$$

(b) Beachte, dass auch $\Gamma(D)$ stets ein unendlich-dimensionaler Unterraum von $\mathfrak{X}(M)$ ist (Übung).

(c) Ist $\mathrm{rg}(D) = 1$, so ist die Bedingung, dass $\Gamma(D) \subseteq \mathfrak{X}(M)$ eine Lie-Unteralgebra ist, offenbar ist stets erfüllt, denn lokal kann man $D$ mit nur einen Vektorfeld $Z \in \mathfrak{X}(U)$ erzeugen, $D_p = \langle Z_p \rangle$, $\forall p \in U$, so dass jedes Vektorfeld $X \in \Gamma(D|_U) \in \mathfrak{X}(U)$ von der Form $X = fZ$ mit $f \in \mathcal{E}(U)$ ist. Für $Y = gZ$, $g \in \mathcal{E}(U)$, ist dann aber

$$\begin{aligned} [X, Y]\big|_U = [fZ, gZ] &= f \cdot g \underbrace{[Z, Z]}_{=0} + (f \cdot Zg) \cdot Z - (g \cdot Zf) \cdot Z \\ &= (f \cdot Zg - g \cdot Zf) Z \in \Gamma(D|_U). \end{aligned}$$

Für Distribution von höherem Rang ist diese Bedingung i.a. nicht erfüllt $\big($Beispiel: $M = \mathbb{R}^3$, $D = \langle X, Y \rangle$, $X = \frac{\partial}{\partial x}$, $Y = \frac{\partial}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial z}$ (Übung)$\big)$

***Beweis von*** (3.48). Seien also $X, Y \in \Gamma(D)$ und $p_0 \in M$ beliebig. Sei weiter $\varphi\colon N \to M$ eine Integralmannigfaltigkeit für $D$ durch $p_0$ und $q_0 \in N$ mit $\varphi(q_0) = p_0$. Da $\varphi$ immersiv ist, können wir Vektorfelder $\widetilde{X}, \widetilde{Y}$ auf $N$ wie folgt definieren:

$$\widetilde{X}_q := (\mathrm{D}\varphi_q)^{-1}(X_{\varphi(q)})$$

und analog für $Y$, denn $\mathrm{D}\varphi_q\colon \mathrm{T}N_q \to D_{\varphi(q)} \subseteq \mathrm{T}M_{\varphi(q)}$ ist ein Isomorphismus.

(a) **Behauptung:** $\widetilde{X}$ und $\widetilde{Y}$ sind glatt. Dazu: Sei $x\colon V \to V' \subseteq \mathbb{R}^k$ eine Karte von $N$ um $q_0$ und $y = (y^1, \dots, y^n)\colon U \to U' \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte um $p_0$ von $M$. Notieren wir dann bzgl. dieser Karten mit $\tau$, $\tau = y \circ \varphi \circ x^{-1}$, so ist mit einer geeigneten Projektion $\pi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ die Abbildung $\pi \circ y = y'\colon U \supseteq \varphi(V) \to \pi(U') \subseteq \mathbb{R}^k$ eine Karte für $\varphi(V) \subseteq U$, weil $\psi = \pi \circ \tau$ um $q_0$ ein Diffeomorphismus ist $\big($siehe (3.38)$\big)$. Insbesondere ist

$$\mathrm{D}y'_p\colon D_p = D_{\varphi(q)}(\mathrm{T}N_q) \to T\big(\pi(U')\big)_{y'(p)} \cong \mathbb{R}^k$$

ein Isomorphismus. Mit $X|_U \in \mathfrak{X}(U)$ ist nun $X|_{\varphi(V)}$ glatt $\big($da $\varphi(V) \subseteq U$ Untermannigfaltigkeit ist$\big)$, $X|_{\varphi(V)} \in \mathfrak{X}\big(\varphi(V)\big)$ und ist $X|_{\varphi(V)}$ bzgl. $y'$ durch glatte Funktionen $\eta^1, \dots, \eta^k \in \mathcal{E}(U'')$ gegeben, $U'' := \pi(U')$,

$$X|_{\varphi(V)} = \eta^i \frac{\partial}{\partial y'^i},$$

so ist wegen der Kommutativität des folgenden Diagramms $\widetilde{X}|_V\colon V \to \mathrm{T}V$ durch die Funktionen $\xi^1, \dots, \xi^k\colon V' \to \mathbb{R}$,

$$\widetilde{X}|_V = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

mit $\xi := (\xi^1, \dots, \xi^k)$ durch

$$\xi(x) = \mathrm{D}\psi(x)^{-1}\Big(\eta\big(\psi(x)\big)\Big) \qquad \big(\text{mit } \eta = (\eta^1, \dots, \eta^k)\big)$$

gegeben ist

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "x"'] & \varphi(V) \subseteq U \arrow[d, "y'"] \\ \mathbb{R}^k \supseteq V' \arrow[r, "\psi"] & U'' \subseteq \mathbb{R}^k \end{tikzcd}$$

denn:

$$\xi(x) = \mathrm{D}x_q(\widetilde{X}_q) = \mathrm{D}x_q\big(\mathrm{D}\varphi_q^{-1}(X_{\varphi(q)})\big) = \mathrm{D}x_q \circ \mathrm{D}\varphi_q \circ \mathrm{D}y'^{-1}_{\varphi(p)}\Big(\eta\ \underbrace{\big(y' \circ \varphi(q)\big)}_{=\psi\circ x(q) = \psi(x)}\Big)$$

$$\overset{\text{K.R.}}{=} \mathrm{D}\psi(x)^{-1}\Big(\eta\big(\psi(x)\big)\Big)$$

nach der Kettenregel. Mit $\eta$ (und $\psi$) ist deshalb auch $\xi$ glatt (und damit $\widetilde{X}$).

(b) Nach Definition sind nun $\widetilde{X}$ und $X$ bzw. $\widetilde{Y}$ und $Y$ $\varphi$-bezogen aufeinander,

$$\mathrm{D}\varphi \circ \widetilde{X} = X \circ \varphi, \quad \mathrm{D}\varphi \circ \widetilde{Y} = Y \circ \varphi$$

und daher nach (3.37) auch ihre Lie-Klammern. Es folgt:

$$[X, Y]_{p_0} = [X, Y]_{\varphi(q_0)} = \big([X, Y] \circ \varphi\big)(q_0) \overset{(3.37)}{=} \mathrm{D}\varphi_{q_0}\big([\widetilde{X}, \widetilde{Y}]_{q_0}\big) \in \mathrm{Im}(\mathrm{D}\varphi_{q_0}) = D_{\varphi(q_0)} = D_{p_0}$$

also tatsächlich $[X, Y] \in \Gamma(D)$.

□

**(3.50) Definition.** Wir nennen eine glatte Distribution $D$ auf einer glatten Mannigfaltigkeit **involutiv**, wenn gilt:

$$[\Gamma(D), \Gamma(D)] \subseteq \Gamma(D).$$

**(3.51) Kommentar.** Integrable Distributionen sind also involutiv. Aber gibt es weitere Hindernisse als die Involutivität gegen die Integrabilität?

**(3.52) Theorem (Frobenius).** *Eine glatte Distribution D auf einer glatten Mannigfaltigkeit ist genau dann integrabel, wenn sie involutiv ist.*

**(3.53) Proposition.** *Sei $M^n$ eine glatte Mannigfaltigkeit, $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $p \in M$ mit $X_p \neq 0$. Dann gibt es mit $W := \{x \in \mathbb{R}^n,\ |x^i| < 1\ (i = 1, \dots, n)\}$, eine zentriert Karte $\varphi\colon U \to W \subseteq \mathbb{R}^n$ um $p$, $\varphi(p) = 0$, so dass gilt:*

$$X = \frac{\partial}{\partial x^1}$$

***Beweis.*** Da das Problem lokal ist, dürfen wir gleich $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $p = 0$ und $X = \xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)\colon U \to \mathbb{R}^n$ annehmen. (Nehme halt irgendeine zentriert Karte $y$ um $p$, so dass $X|_U = \xi^i \frac{\partial}{\partial y^i}$ ist.) Gesucht ist nun ein Diffeomorphismus $\tau\colon W \to U'$ mit $\tau(0) = 0$ auf eine offene Umgebung $U' \subseteq U$ von 0, so dass

$$\tau_*\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right) = \xi,$$

also

$$D\tau_*(e_1) = \xi\big(\tau(x)\big), \qquad \forall x \in W.$$

Dazu können wir zunächst eine lineare Koordinaten-Transformation wählen, so dass nach dieser

$$\xi(0) = e_1 = (1, 0, \dots, 0),$$

also ohne Einschränkung:

$$\xi(0) = \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_{x=0}.$$

Sei nun $\psi = (\psi^t)$ der lokale Fluss zu dem Vektorfeld $\xi$ auf $U$, also

$$\frac{d\psi^t}{dt}(x) = \xi\big(\psi^t(x)\big), \quad \psi^0(x) = x$$

Es gibt nun ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $|t| < \varepsilon$ und $x \in U$ mit $|x^i| < \varepsilon$ ($i = 1, \dots, n$) definiert ist:

$$\Phi\colon W_\varepsilon \to U, \quad W_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, |x^i| < \varepsilon\},$$
$$\Phi(x^1, x^2, \dots, x^n) := \psi^{x_1}(0, x^2, \dots, x^n)$$

Dann gilt $\Phi(0) = \psi^0(0) = 0$ und mit $(x^1, x') := x$:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x^1}(x) = \left.\frac{d}{dt}\psi^t(0, x')\right|_{t=x1} = \xi\big(\psi^t(0, x')\big)\big|_{t=x'} = \xi\big(\Phi(x)\big),$$

also $\Phi_*(e_1) = \xi$. Andererseits ist $\Phi(0, x') = \psi^0(0, x') = (0, x')$, also

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x^i}(0) = e_i \quad \text{für } i = 2, \dots, n$$

also $D\Phi(0) = \mathbb{1}_n$ und damit invertierbar. Nach dem Umkehrsatz gibt es daher ein $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, so dass $\Phi|_{W_{\varepsilon'}} : W'_\varepsilon \to \Phi(W_{\varepsilon'}) =: U'$ ein Diffeomorphismus auf eine offene Umgebung $U' \subseteq U$ von 0 ist. Schaltet man noch die Dilatation $l : x \mapsto \frac{1}{\varepsilon'} x$ davor, $\tau := \Phi|_{W_{\varepsilon'}} \circ l$, so erhält man den gesuchten Diffeomorphismus. $\square$

**(3.54) Kommentar.**

(a) Ist $D$ eine glatte Distribution vom Rang $k$ und $p_0 \in M$, so wollen wir eine Karte $\psi : U \to W \subseteq \mathbb{R}^n$ um $p_0$ ein **Frobenius-Box um $\mathbf{p_0}$**, wenn für alle $p \in U$ der Unterraum $D_p \subseteq TM_p$ gerade von $\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^k}|_p$ aufgespannt wird,

$$D_p = \left\langle \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \dots, \left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_p \right\rangle \subseteq TM_p, \quad \forall p \in U.$$

(b) Hat jeder Punkt $p_0 \in M$ eine solche Frobenius-Box, so ist $D$ offenbar integrabel, denn mit $N = W^k := \{x \in \mathbb{R}^k \,:\, |x^i| < 1 \ (i = 1, \dots, k)\}$ ist dann für jedes $c \in W^{n-k}$ offenbar

$$\varphi^c : W^k \to U \subseteq M, \quad x \mapsto \psi^{-1}(x, c)$$

eine integrable Mannigfaltigkeit, insbesondere geht $\varphi^0$ durch $p_0 = \psi^{-1}(0)$. Theorem (3.52) folgt also aus folgendem Satz:

**(3.55) Satz.** *$D$ involutiv, $p_0 \in M$, dann existiert eine Frobenius-Box um $p_0$.*

***Beweis.*** Induktion über $k = \mathrm{rg}(D)$.
$k = 1$ Proposition (3.53).
$k - 1 \mapsto k$: Sei $p \in M$ und $U \subseteq M$ Umgebungen von $p$ mit $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(U)$, so dass

$$D_q = \big\langle (X_1)_q, \dots, (X_k)_q \big\rangle, \quad \forall q \in U.$$

Nach (3.53) kann man nun eine zentriert Karte (nach evtl. Verkleinerung von $U$) $y : U \to \mathbb{R}^n$ ($n = \dim M$) wählen, so dass $X_1 = \frac{\partial}{\partial y^1}$ ist. Ist

$$X_i = \eta_i^j \frac{\partial}{\partial y^j} \quad (i = 2, \dots, k),$$

so dürfen wir nach Übergang von $X_i$ zu $X_i - \eta_i^1 \frac{\partial}{\partial y^1}$ annehmen, dass $\eta_i^1 = 0$, für $i = 2, \dots, k$. Betrachte nun die **Scheibe**

$$S := \{y \in W \,:\, y^1 = 0\} \subseteq W$$

und setze $Y_i := X_i|_S$ für $i = 2, \dots, k$. Da $X_i$ keine $\frac{\partial}{\partial y^1}$-Komponente hat, ist $Y_i$ ein Vektorfeld auf $S$.

$$Y_i = \eta_i^j(0, y') \frac{\partial}{\partial y'^j} \quad (i = 2, \dots, k),$$

wo nun die Summation nun von $j = 2, \dots, n$ läuft, $\big(y' = (y^2, \dots, y^n)$ ist Koordinatensystem für $S\big)$. Wiederum weil $X_i$ keine $\frac{\partial}{\partial y^1}$-Komponente hat, hat auch $[X_i, X_j]$ keine $\frac{\partial}{\partial y^1}$-Komponente für $2 \leq i, j \leq k$. Wegen der Involutivität gibt es daher $c_{ij}^l \in \mathcal{E}(W)$ $(2 \leq i, j, l \leq k)$ mit

$$[X_i, X_j] = c_{ij}^l X_l$$

Ist $\iota : S \to W$ die Inklusion, so sind $Y_i$ und $X_i$ $\iota$-bezogen, $\iota_*(Y_i) = X_i \circ \iota$, also auch $[Y_i, Y_j]$ und $[X_i, X_j]$ und daher ist

$$D' = \langle Y_2, \dots, Y_k \rangle$$

auf $S$ eine involutive Distribution vom Rang $k-1$,

$$\iota_*\big([Y_i, Y_j]\big) = [X_i, X_j] \circ \iota = c_{ij}^l \circ \iota (X_l \circ \iota) = c_{ij}^l \circ \iota \cdot \iota_*(Y_l),$$

also

$$[Y_i, Y_j] = c_{ij}^l \circ \iota \cdot Y_l$$

(da $\iota_*$ injektiv ist). Nach Induktionsvoraussetzung gibt es deshalb eine Koordinatentransformation $w \mapsto y'(w)$, $W' \to S \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ (mit $W' := W^{n-1}$), so dass

$$\langle Y_2, \dots, Y_k \rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial w^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial w^k} \right\rangle, \quad \forall w \in W'$$

ist. Sei nun $\pi \colon W \to W'$, $(y^1, y') = y \mapsto y'$, die Projektion auf die letzten $n-1$ Koordinaten und $y \mapsto x(y)$ der Koordinaten-Wechsel

$$\begin{aligned} x^1(y) &= y^1 \\ x^i(y) &= w^i(y') \end{aligned}$$

und $x \mapsto y(x)$ seine Umkehrung, denn $y \mapsto x(y)$ ist umkehrbar, da

$$\frac{\partial x}{\partial y}(0) = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \frac{\partial w}{\partial y'}(0) & \\ 0 & & & \end{array} \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R}) \right)$$

(Die Würfel $W$ und $W'$ müssen jeweils evtl. verkleinert werden.) Dann gilt für $X_1, \dots, X_k$ in den neuen Koordinaten

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial y^1} = \underbrace{\frac{\partial x^j}{\partial y^1}}_{=\delta_1^j} \cdot \frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^1} \quad \text{und} \quad X_i = \eta_i^j \frac{\partial}{\partial y^j}$$

$$= \underbrace{\eta_i^j \cdot y(x)}_{=0 \text{ für } j=1} \underbrace{\frac{\partial x^l}{\partial y^j} \cdot \frac{\partial}{\partial x^l}}_{=0 \text{ für } l=1 \text{ und } j \neq 1} \in \left\langle \frac{\partial}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right\rangle .$$

also

$$X_i = \xi_i^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

mit

$$\xi_i^1(x) = 0 \quad \text{für } i = 2, \dots, k$$

und

$$\xi_i^j(0, x') = 0 \quad \text{für } i = 2, \dots, k \quad \text{und } j = k+1, \dots, n \tag{3.2}$$

da entlang $S$ die Felder $X_2, \dots, X_k$ gerade von $\frac{\partial}{\partial w^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial w^k}$ aufgespannt sind.
**Behauptung:** $\xi_i^j(x^1, x') = 0$ für $i = 2, \dots, k$ und $j = k+1, \dots, n$ sogar für *alle* $x^1 \in (-1, 1)$!

*Dazu:* Wegen der Involutivität von $D$ gibt es nämlich $d_i^l \in \mathcal{E}(W)$ $(i = 2, \dots, k,\ l = 1, \dots, k)$ mit

$$[X_1, X_i] = d_i^l X_l$$

und deshalb gilt für alle $j = k+1, \dots, n,\ i = 2, \dots, k$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x^1}(\underbrace{\xi_i^j}_{=X_i(x^j)}) &= X_1\big(X_i(x^j)\big) - X_i \circ \underbrace{X_1(x^j)}_{=0} \\ &= [X_1, X_i](x^j) = d_i^l X_l(x^j) = \sum_{l=2}^{k} d_i^l X_l(x^j) \\ &= \sum_{l=2}^{k} d_i^l(x)\xi_l^j\end{aligned} \tag{3.3}$$

da

$$X_1(x^j) = \frac{\partial x^j}{\partial x^1} = 0$$

ist. Nun fixiere $x' \in W'$ und erkenne, dass (3.3) für festes $j = \{k+1, \dots, n\}$ ein System *linearer* gewöhnlicher Differentialgleichungen auf $I \times \mathbb{R}^{k-1}$ $\big(I = (-1,1)\big)$ ist:

$$\dot{\xi} = A(t)\xi, \quad (\xi = (\xi_2^j, \dots, \xi_k^j))$$

$\big($mit $A(t) = \big(d_i^l(t,x')\big)_{2 \le i,l \le k}$ und deshalb auf *ganz* $I$ eine eindeutig bestimmte Lösung hat zu gegebenen Anfangswert $\xi(0) = \xi_0$ (Übung)$\big)$ Aber $\xi(0) = 0$ wegen (3.2) und damit ist $\xi(t) = 0$, für alle $t \in I$, da $\xi = 0$ offensichtlich eine Lösung ist. Es ist damit

$$\xi_i^j(x^1, x') = 0, \quad \forall x^1 \in I,\ \forall x' \in W',\ \forall i = 2, \dots, k,\ \forall j = k+1, \dots, n$$

und damit (3.55) $\big($und also (3.52)$\big)$ bewiesen. □

**(3.56) Kommentar.** Bisher haben wir, ähnlich wie beim lokalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf, nur die Existenz von lokalen Integralmannigfaltigkeiten bei involutiven Distributionen bewiesen. Nun wollen wir auch noch $\big($vgl. (3.11)$\big)$ die Existenz einer maximalen Integralmannigfaltigkeit und deren Eindeutigkeit.

**(3.57) Definition.** Sei $M$ eine glatte Mannigfaltigkeit und $D$ eine involutive Distribution auf $M$. Wir nennen eine Integralmannigfaltigkeit $\varphi\colon N \to M$ **maximal**, wenn $N$ zusammenhängend ist und folgendes gilt: Ist $\widetilde{\varphi}\colon \widetilde{N} \to M$ eine weitere Integralmannigfaltigkeit, $\widetilde{N}$ zusammenhängend und ist $\widetilde{\varphi}(\widetilde{N}) \supseteq \varphi(N)$, so ist bereits

$$\widetilde{\varphi}(\widetilde{N}) = \varphi(N).$$

**(3.58) Lemma.** *Sei $D$ eine involutive Distribution vom Rang $k$ auf einer glatten Mannigfaltigkeit $M$ und $x\colon U \to W \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Frobenius-Box für $D$. Seit weiter $\varphi\colon N \to U \subseteq M$ eine Integralmannigfaltigkeit für $D$ und $N$ zusammenhängend. Dann gibt es genau ein $c \in W^{n-k}$, so dass $\varphi(N)$ in der Scheibe*

$$N^c := \{p \in U \ : \ x^j(p) = c^j,\ j = k+1, \dots, n\}$$

*liegt.*

***Beweis.*** Für jedes $q \in N$ liegt $\mathrm{D}\varphi_q(\mathrm{T}N_q) = D_{\varphi(q)}$ im Aufspann von $\frac{\partial}{\partial x^1}|_{\varphi(q)}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^k}|_{\varphi(q)}$, also im Kern von $\mathrm{d}x^j|_{\varphi(q)} \in \mathrm{T}M^*_{\varphi(q)}$ $(j = k+1, \dots, n)$. Es ist also

$$\mathrm{d}(x^j \circ \varphi)_q = \mathrm{d}x^j|_{\varphi(q)} \circ \mathrm{D}\varphi|_q = 0$$

und damit ,weil $N$ zusammenhängend ist, ist $x^j \circ \varphi$ konstant (Übung), sagen wir $c^j \in I$ $(j = k+1, \dots, n)$. Es folgt: $x^j\big(\varphi(N)\big) = c^j$, also: $\varphi(N) \subseteq N^c$. □

**(3.59) Satz.** *Sei $M$ eine glatte Mannigfaltigkeit, $D$ eine involutive Distribution auf $M$ und $p \in M$. Dann existiert eine* maximale *Integralmannigfaltigkeit $\varphi\colon N \to M$ durch $p$ und für jede andere Integralmannigfaltigkeit $\psi\colon \widetilde{N} \to M$ durch $p$ mit zusammenhängende $\widetilde{N}$, gilt:*

$$\psi(\widetilde{N}) \subseteq \varphi(N).$$

***Beweis.*** Wir definieren die Teilmenge

$$C := \left\{ p \in M \ : \begin{array}{l} \exists \text{ (stückweise) glattes } \gamma\colon [0,1] \to M \text{ mit } \gamma(0) = p_0 \text{ und } \gamma(1) = \\ p \text{ und } \dot\gamma(t) \in D_{\gamma(t)},\ \forall t \in [0,1] \end{array} \right\}$$

und wollen nun $C$ mit einer Topologie versehen und Mannigfaltigkeit-Struktur versehen, die die Inklusion $i\colon C \hookrightarrow M$ zu einer Integralmannigfaltigkeit von $D$ macht.

(a) Dazu überdecken wir gemäß (3.55) mit Frobenius-Boxen $x_\alpha\colon U_\alpha \to W \subseteq \mathbb{R}^n$ und dürfen wegen der abzählbaren Topologie von $M$ annehmen, dass wir davon nur abzählbar viele brauchen, $\alpha \in \mathbb{N}$ $\big($vgl. Beweis von (1.56)$\big)$. Für jedes $p \in C$ wählen wir nun, ein für allemal fest, ein $\alpha(p) \in \mathbb{N}$ mit $p \in U_{\alpha(p)}$, auf der $p$ liegt, $S_p$:

$$S_p := \{q \in U_{\alpha(p)} \ : \ x^j_\alpha(q) = x^j_\alpha(p),\ j = k+1, \dots, n\}$$

$\big($wo $k = \mathrm{rg}(D)$ ist$\big)$. Da jede glatte Kurve in $S_p$ integral ist (die ganze Scheibe $S_p$ ist ja integral) und $S_p$ (weg-)zusammenhängend ist (denn $S_p \cong W^k \subseteq \mathbb{R}^k$), ist mit $p \in C$ auch $S_p$ in $C$, $S_p \subseteq C$. Es ist also

$$C = \bigcup_{p \in C} S_p$$

Wir betrachten nun jede Scheibe $S_p$ vermöge $x_{\alpha(p)}|_{S_p}\colon S_p \to W^k \subseteq \mathbb{R}^n$ als bijektiv zum (offenen) Einheitswürfel $W^k$ und versehen $S_p$ mit der Topologie $\tau_p$, die $x_{\alpha(p)}|_{S_p}$ zu einem Homöomorphismus macht (d.i. die Relativtopologie von $S$ in M). Dann setzen wir

$$\mathfrak{B} := \bigcup_{p \in C} \tau_p \subseteq \mathfrak{P}(C)$$

und behaupten, dass $\mathfrak{B}$ eine Basis der von ihr erzeugten Topologie $\tau$ auf $C$ ist.

Ist nämlich $V_p \subseteq S_p$ von $V_{p'} \subseteq S_{p'}$ offen ($p, p' \in C$), so muss $V_p \cap V_{p'}$ Vereinigung von Elementen aus $\mathfrak{B}$ sein. Ist $q \in V_p \cap V_{p'}$, so gibt es wegen der Offenheit von $U_{\alpha(p')}$ zunächst einen offenen $k$-Ball $B \subseteq V_p$ um $q$ (via $x_{\alpha(p)}|_{S_p}$), so dass $B \subseteq U_{\alpha(p')}$ ist. Weil aber $q \in B$ ist, $B$ integral (und zusammenhängend) ist damit nach (3.58) auch $B \subseteq S_{p'}$ und damit, nach evtl. Verkleinerung, auch in $V_{p'}$. Jedes $q \in V_p \cap V_{p'}$ liegt also in einem $B \in \mathfrak{B}$ und damit ist $V_p \cap V_{p'}$ Vereinigung von Elementen aus $\mathfrak{B}$. Insbesondere: Die von $\tau$ auf jedem $S_p$ induzierte Topologie ist damit $\tau_p$ (und nicht feiner).

(b) Diese Topologie ist hausdorffsch, denn sind $p, q \in C$ mit $p \neq q$, so wähle man zunächst offene Umgebungen $U_p \in \mathfrak{A}(p)$, $U_q \in \mathfrak{A}(q)$ in $M$, die disjunkt sind, $U_p \cap U_q = \emptyset$. Dann schneide man diese mit den zugehörigen Scheiben,

$$V_p := U_p \cap S_p,\ V_q := U_q \cap S_q.$$

Dann sind $V_p, V_q \subseteq C$ offene Umgebungen von $p$ bzw. $q$ und disjunkt.

$C$ ist mit $\tau$ auch lokal euklidisch ist (von der Dimension $k$), denn zu $p \in C$ ist offenbar $S_p \subseteq C$ eine offene Umgebung eine offene Umgebung, die via $x_{\alpha(p)}|_{S_p}$ homöomorph zu $W^k \subseteq \mathbb{R}^k$ ist.

**Behauptung:** $(C, \tau)$ hat abzählbare Topologie.
⌜In jeder Box $U_\alpha$ können sehr viele Scheiben $N_\alpha^C \subseteq U_\alpha$ zu $C$ gehören. Es ist gewissermaßen das Hauptproblem etwa auszuschließen, dass nicht alle dazu gehören können und damit etwa $(= M$ unmöglich wird). ⌟

Da jedes $S_p \subseteq U_{\alpha(p)}$ eine abzählbare Basis hat und es nur abzählbar viele Boxen $U_\alpha$ gibt, reicht es zu zeigen, dass aus jeder Box $U_\alpha$ nur abzählbar viele Scheiben $N_\alpha^C$ zu $C$ gehören können.

Sei also $U_\alpha$ fest und $p \in U_\alpha \cap C$. Dann gibt es also eine Integralkurve $\gamma\colon [0,1] \to M$ von $p_0$ nach $p$. Wegen der Kompaktheit von $[0,1]$ gibt es dann $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{N}$ und $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_r = 1$, so dass $\gamma|_{[t_{i-1},t_i]} \subseteq U_{\alpha_i}$ ist. Da $[t_{i-1}, t_i]$ zusammenhängend ist, muss $\gamma\big([t_{i-1}, t_i]\big)$ in nur einer Scheibe von $U_{\alpha_i}$ enthalten sein. Da es nur abzählbar viele Folgen $U_{\alpha_0} \subseteq U_{\alpha_1} \subseteq \cdots \subseteq U_{\alpha_r} = U_\alpha$ gibt, reicht es zu zeigen, dass es für jede solche Folge nur abzählbar viele Scheiben in $U_\alpha$ gibt, die man beim Durchgang durch $U_{\alpha_i}$ $(i = 0, \ldots, r)$ erreichen kann. Dazu reicht es, dass beim Übergang von $U_\alpha$ zu $U_\beta$ (mit $\alpha = \alpha_{i-1}$, $\beta = \alpha_i$) jede Scheibe $S \subseteq U_\alpha$ an nur abzählbar viele Scheiben von $U_\beta$ ankoppeln kann. Aber $S \cap U_\beta$ ist selbst eine Mannigfaltigkeit und daher von abzählbarer Topologie. Sie hat damit nur abzählbar viele (Weg-)Zusammenhangskomponente (Übung). Jede Komponente von $S \cap U_\beta$ ist also zusammenhängend und integral in $U_\beta$ und muss deshalb nach (3.58) in nur einer Scheibe von $U_\beta$ liegen. Damit koppelt $S$ an nur abzählbar viele Scheiben von $U_\beta$ an und damit ist $C$ von abzählbarer Topologie und somit eine $k$-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit, die nach Definition auch (weg-)zusammenhängend ist.

(c) Als glatten Atlas für $C$ wählt man nun die Karten $x_{\alpha(p)}|_{S_p}\colon S_p \to W^k \subseteq \mathbb{R}^k$. (deren Übergange glatt sind, weil sie Einschränkungen von den Übergängen von $x_\alpha\colon U_\alpha \to W$ sind.) Die Inklusion $i\colon C \to M$ ist nun offenbar eine injektive Immersion $\big($weil $W^k \to W^n$, $x \mapsto (x, 0)$ immersiv ist$\big)$. Schließlich ist wegen

$$\mathrm{T}C_p = \mathrm{T}(S_p)_p = D_p,$$

also auch $\mathrm{D}i_p(\mathrm{T}C_p) = D_p$, $i$ auch integrale Mannigfaltigkeit.

(d) Ist $\varphi\colon N \to M$ irgendeine andere Integrale Mannigfaltigkeit durch $p_0$ mit zusammenhängenden $N$, so sei $p = \varphi(q) \in \varphi(N)$ beliebig und $\varphi(q_0) = p_0$. Dann gibt es einen (stückweise) glatten Weg $\beta\colon [0,1] \to N$ von $q_0$ nach $q$ $\big($denn $N$ ist auch wegzusammenhängend und wenn es einen stetigen Weg von $q_0$ nach $q$ gibt, so auch einen stückweise glatten (Übung). $\big)$ Die Kurve $\gamma := \varphi \circ \beta$ ist dann stückweise glatt und auch integral, weil

$$\dot\gamma(t) = \mathrm{D}\varphi_{\beta(t)}\big(\dot\beta(t)\big) \in \operatorname{im}(\mathrm{D}\varphi_{\beta(t)}) = D_{\gamma(t)}$$

ist und damit liegt $p$ auch in $C$. Das zeigt, dass $i\colon C \to M$ *maximale* Integralmannigfaltigkeit ist und das Bild jeder anderen zusammenhängenden Integralmannigfaltigkeit in $C$ enthalten ist.

□

**(3.60) Kommentar.** Was jetzt noch fehlt, ist die Eindeutigkeit (bis auf Isomorphie), denn: ist eben $i\colon C \hookrightarrow M$ auch $\varphi\colon N \to M$ eine maximale Integral-Mannigfaltigkeit durch einen Punkt $p_0 \in M$, so ist zwar $\varphi(N) = C$ nach (3.59), weil zunächst $\varphi(N) \subseteq C$ ist, aber wegen der Maximalität von $\varphi$ dann gleich $C$ sein muss. Es könnte aber sein, dass $C$ vermöge $\varphi$ mit einer anderen Topologie versehen ist als vermöge $i\colon C \hookrightarrow M$, so dass die Mannigfaltigkeit-Strukturen auf $C$ vermöge $i$ und $\varphi$ verschieden sind. Dass das nicht passiert besagt nun:

**(3.61) Satz.** *Sei $M$ eine glatte Mannigfaltigkeit, $D = (D_p)_{p \in M}$ eine involutive Distribution auf $M$ und $p_0 \in M$. Dann gibt es eine (bis auf Isomorphie) eindeutig bestimmte maximale Integral-Mannigfaltigkeit durch $p_0$.*

***Beweis.*** Sei $i\colon C \hookrightarrow M$ die maximale Integral-Mannigfaltigkeit durch $p_0$ nach (3.59) und $\varphi\colon N \to M$ eine beliebige andere. Wir wissen schon $\big($vgl. (3.58)$\big)$, dass $\varphi(N) = C$ ist, also gibt es ein eindeutig bestimmtes $\psi\colon N \to C$ mit $i \circ \psi = \varphi$ (nämlich $\psi = i^{-1} \circ \varphi$, wenn $i$ als Bijektion von $C$ auf $C \subseteq M$ betrachten).

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, dashed, "\psi"'] & M \\ & C \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

(a) **Behauptung:** $\psi$ ist stetig.

Sei $p \in N$ beliebig, $q := \psi(p) \in C$ und sei $V \subseteq C$ eine offene Umgebung. Zu zeigen: $\psi^{-1}(V)$ ist Umgebung von $p$ ($\Longrightarrow \psi$ ist stetig in $p$).

Sei dazu $x\colon U \to U' \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Frobenius-Box um $q$ und $S \subseteq U$ die Scheibe in $U$, die $q$ enthält. Dann sei o.E. $V \subseteq S$. Da $\varphi$ stetig ist, ist $\varphi^{-1}(U) \subseteq N$ offen. Sei $W \subseteq \varphi^{-1}(U)$ die Wegkomponente, die $p$ enthält. Dann ist auch $W$ offen (da $N$ lokal wegzusammenhängend ist). Da nun $\varphi|_W\colon W \to U \subseteq M$ Integral-Mannigfaltigkeit ist mit $q \in \operatorname{im}(\varphi|_W)$, gilt nach (3.58), dass $\varphi(W) \subseteq S$ sein muss. Aber

$$\varphi|_W\colon W \to S$$

ist stetig und damit $(\varphi|_W)^{-1}(V) \subseteq W$ offen. Also ist

$$\psi^{-1}(V) \cap W = (\varphi|_W)^{-1}(V)$$

eine Umgebung von $p$.

(b) **Behauptung:** $\psi$ ist sogar Diffeomorphismus.

*Dazu:* Nach (3.43) ist $\psi$ nicht nur stetig, sondern sogar glatt. Es ist aber auch

$$\mathrm{D}\psi_p = \mathrm{D}i_q^{-1} \circ \mathrm{D}\varphi_p$$

(wo man $\mathrm{D}i_q$ als Isomorphismus von $\mathrm{T}C_q$ nach $D_p \subseteq \mathrm{T}M_q$ betrachtet) ein Isomorphismus, für alle $p \in N$. Nach dem Umkehrsatz ist damit $\psi$ ein lokaler Diffeomorphismus. Aber $\psi$ ist bijektiv und damit ein (globaler) Diffeomorphismus.

Also sind $\varphi$ und $i$ äquivalent und damit die maximale Integral-Mannigfaltigkeit $i\colon C \hookrightarrow M$ eindeutig bestimmt.

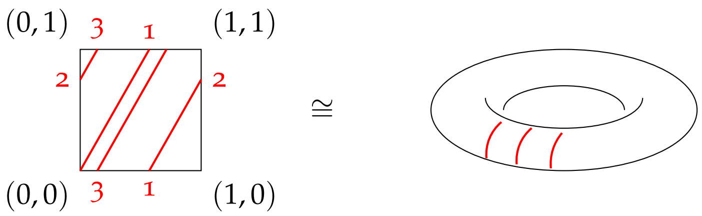
□

**(3.62) Beispiel.** Sei $M = \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Identifiziere nun zunächst $T(\mathbb{T})_p$ kanonisch mit $\mathbb{R}^2$ vermöge

$$\mathrm{D}\pi_p\colon \mathbb{R}^2 \cong \mathrm{T}(\mathbb{R}^2)_{\tilde{p}} \to T(\mathbb{T}^2)_p$$

(unabhängig von der Wahl des Urbildes $\tilde{p} \in \mathbb{R}^2$ unter der kanonischen Projektion $\pi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$) und betrachte dann $X_\alpha \in \mathfrak{X}(\mathbb{T}^2)$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,

$$X_\alpha(p) = (1, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \cong \mathrm{T}(\mathbb{T}^2)_p.$$




und $D = (D_p)$,

$$D_p = \mathbb{R}X_\alpha(p) \subseteq \mathrm{T}(\mathbb{T}^2)_p$$

Dann $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2$,

$$\varphi(t) = \big[(t, \alpha t)\big]$$

die maximale Integral-Mannigfaltigkeit durch $p_0 = \big[(0,0)\big]$ und $C = \varphi(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{T}^2$ trägt nicht die Relativtopologie von $\mathbb{T}^2$ (wenn man $C$ die Mannigfaltigkeit-Struktur von $\mathbb{R}$ gibt). $C$ liegt nämlich dicht und die von der Teilraumtopologie von $C$ induzierte Topologie auf $\mathbb{R}$ ist nicht mal lokal wegzusammenhängend.

# Index

# Literaturverzeichnis

[Wa] *F. Warner*: *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer-Verlag.

[SZ] *R. Stöcker ; H. Zieschang*: *Algebraische Topologie*, Teubner-Verlag.