Universität Tübingen

Prof. Dr. Frank Loose

Wintersemster 2014/2015

Analysis 1

Matthias Eule, Christina Wolf
Vorlesungsmitschrift
Kontakt:
matthias.eule@student.uni-tuebingen.de

Zuletzt geändert: 13. April 2015

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Etwas Aussagenlogik

1.1 Mathematische Aussagen

mathematische **Aussage** = Aussage, die eindeutig wahr (w) oder falsch (f) ist
Verbindung mathematischer Aussagen durch **Junktoren**, die durch ihre **Wahrheitstafeln** definiert werden.

1.2 Einstellige Junktoren

(i) Die **Negation** (non-Junktor, in Zeichen: $\neg$)

A	$\neg A$
w	f
f	w

A: mathematische Aussage

(ii) Die anderen (weniger wichtigen) sind:

A	$*_1 A$	$*_2 A$	$*_3 A$
w	w	w	f
f	w	f	f

$*_1$ - Verum, $*_2$ - Affirmation, $*_3$ - Falsum

1.3 Zweistellige Junktoren

Wir schreiben $J(A, B)$ oder AJB, wenn wir den Junktor J auf die Aussagen A und B anwenden.

(i) Die **Konjugation** (Und-Junktor, in Zeichen: $\wedge$)

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

"A und B" ist also genau dann wahr, wenn A und B wahr sind.

Beachte. *Ist in Übereinstimmung mit der Umgangssprache.*

(ii) Die **Disjunktion** (Oder-Junktor, in Zeichen: $\vee$)

A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

"A oder B" ist also genau dann wahr, wenn mindestens eine der Aussagen A oder B wahr ist.

Beachte. *Nicht unbedingt im Einklang mit der Umgangssprache.*

(*iii*) Die **Implikation** (Wenn-Dann-Junktor, in Zeichen: $\rightarrow$)

A	B	$A \rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

"Aus A folgt B" oder "A impliziert B"

Beachte. *Abweichung von der Umgangssprache. "A folgt B" ist z.B. stets richtig, wenn A falsch ist.*

Beispiel 1.3.1. "Wenn Fortuna Düsseldorf in der Saison 13/14 deutscher Meister ist, ist 5 eine gerade Zahl" Ist eine wahre mathematische Aussage.

(*iv*) Die **Äquivalenz** (in Zeichen: $\leftrightarrow$)

A	B	$A \leftrightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

"A äquivalent zu B" oder "A genau dann wenn B" oder "A wenn, und nur wenn B".

1.4 Aussagenlogische Formel

Aussagenlogische Formel = Aneinanderreihung von Aussagen vermöge von Junktoren.

Tautologie: Aussagenlogische Formel, die *stets* den Wahrheitswert *wahr* (w) annimmt, egal welche Wahrheitswerte die Eingangsaussagen haben.

Beispiel 1.4.1. $\neg(\neg A) \leftrightarrow A$ (*beachte:* Klammersetzung)

Beachte. *Auch die doppelte Verneinung kann umgangssprachlich etwas anderes bedeuten, zum Beispiel: "Da ist nirgends nichts gewesen außer hier" (zum Mössinger Generalstreik am 31.03.1933)*

Beweis. Zu 1.4

A	B	$\neg(\neg A)$	$\neg(\neg A) \leftrightarrow A$
w	f	w	w
f	w	f	w

$\square$

1.5 $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$

Behauptung: Auch $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ gilt.

Beachte. *Einführung von $\leftrightarrow$ wäre gar nicht nötig gewesen. Wir hätten ihn auch durch $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ beschreiben können*

Beachte. *Selbst den Implikationsjunktor"$\rightarrow$" hätte man nur mit "$\neg$" und "$\vee$" beschreiben können, denn $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$ (ohne Beweis). Außerdem gilt (ohne Beweis): $(A \wedge B) \leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$*

Beweis. Zu 1.5

A	B	$A \leftrightarrow B$	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow A$	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$	$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$
w	w	w	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	w
f	w	f	w	f	f	w
f	f	w	w	w	w	w

□

1.6 Satz: Beweisprinzip Kontraposition

Satz 1.6.1. *Die folgende aussagenlogische Formel ist eine Tautologie:*

$$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$$

Beweis. Durch Wahrheitstafeln:

A	B	$A \rightarrow B$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg B \rightarrow \neg B$	$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow A)$
w	w	w	f	f	w	w
w	f	f	f	w	f	w
f	w	w	w	f	w	w
f	f	w	w	w	w	w

□

Kapitel 2

Mengen und Abbildungen

2.1 Axiomatische Mengenlehre

Die axiomatische Mengenlehre stellt ein Axiomsystem auf, welches u.a. folgendes gewährleistet:

- Existenz von Mengen, z.B. leere Menge $\emptyset$
- Existenz von unendlichen Mengen, z.B. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ (die natürlichen Zahlen)
- erlaubt aus gegebenen Mengen neue konstruieren zu können.

Für uns genügt ein naiver Zugang:

Menge = Zusammenfassung von wohlbestimmten Objekten zu einem Ganzen

Diese heißen Elemente der Menge und wir notieren:

$$x \in M \quad \text{M ist eine Menge}$$

Angabe von Mengen geschieht häufig so:

- $M = \{1, 2, 3\}$ (vollständige Angabe der Elemente von M falls M endlich)
- $M = \{1, 2, 3, ...\}$ („drei Pünktchen", wenn klar ist wie es weitergeht, (M unendlich))
- sei M eine Menge. Dann heißt eine weitere Menge N Teilmenge von M, wenn gilt:
  $$x \in N \quad \Rightarrow \quad x \in M \quad (\Rightarrow\text{: umgangssprachliche Implikation})$$
  Notation: $N \subseteq M$, wenn N Teilmenge von M. Sei ε eine Eigenschaft, die die Elemente von M entweder haben oder nicht haben (Notation: $x \in M$ hat die Eigenschaft $\varepsilon \Leftrightarrow: \varepsilon(x)$)
  Die Axiomatische Mengenlehre muss gewährleisten, dass bei Vorgabe von ε
  $$N = \{x \in M | \varepsilon(x)\}$$
  wieder eine Menge (und damit Teilmenge von M) ist.

Beispiel 2.1.1. $M = \mathbb{N}$, ε = gerade sein

$$N = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ ist gerade}\} = \{2, 4, 6, ...\}$$

2.2 Russellsche Antinomie

Beachte, dass ich Eigenschaften nur von Elementen einer gegebenen Menge betrachte, nicht aber aller Mengen. Denn das würde zu Widersprüchen führen, was folgendes Beispiel von B. Russell zeigt (“Russellsche Antinomie“):
Sei ε die Eigenschaft: $x \notin x$. Dann kann:

$$N := \{x | x \notin x\}$$

keine Menge sein, denn

1. Fall: $N \notin N \stackrel{Def.}{\Rightarrow} N \in N$

2. Fall: $N \in N \stackrel{Def.}{\Rightarrow} N \notin N$

Dies führt in zu einem Widerspruch.

Notation zu Teilmengen: Sei M eine Menge. Dann muss das Axiomensystem liefern, dass die **Potenzmenge** von M

$$\mathfrak{P}(M) := \{N \subseteq M\} = \{N | N \subseteq M\}$$

deren Elemente alle Teilmengen von M sind, wieder eine Menge ist. Beachte also:

$$N \subseteq M \leftrightarrow N \in \mathfrak{P}(M)$$

Insbesondere hat $\mathfrak{P}$ die folgenden Elemente:

- $\emptyset$
- M und $\emptyset \neq M$, falls $M \neq 0$ ist.

Beachte. $\mathfrak{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ *ist nicht leer.*

2.3 Operationen auf Teilmengen

Wir betrachten folgende Operationen für Teilmengen einer gegebenen Menge M. Seien $N_1, N_2 \subseteq M$.

(i) Dann heißt

$$N_1 \cup N_2 := \{x \in M | x \in N_1 \vee x \in N_2\}$$

Vereinigung von N_1 und N_2.

(ii) Dann heißt

$$N_1 \cap N_2 := \{x \in M | x \in N_1 \wedge x \in N_2\}$$

der **Durchschnitt** von N_1 und N_2.

(iii) Dann heißt

$$N_1 \setminus N_2 := \{x \in M | x \in N_1 \wedge x \notin N_2\}$$

Differenzmenge von N_1 und N_2. Insbesondere notieren wir mit $CN := M \setminus N$ für $N \subseteq M$ die **Komplementmenge**.

Es gibt nun eine Reihe von Rechenregeln, die wir immer wieder brauchen, aber nicht alle so genau bewiesen werden wie z.B. die folgende:

$$N_1 \cup (N_2 \cap N_3) = (N_1 \cup N_2) \cap (N_1 \cup N_3) \quad (*)$$

Um das zu beweisen, zeigt man

(i) $N_1 \cup (N_2 \cap N_3) \subseteq (N_1 \cup N_2) \cap (N_1 \cup N_3)$

(ii) $N_1 \cup (N_2 \cap N_3) \supseteq (N_1 \cup N_2) \cap (N_1 \cup N_3)$

Beweis.
Zu (i): Sei $x \in N_1 \cup (N_2 \cap N_3)$, also $x \in N_1$ oder $x \in N_2 \cap N_3$

1. Fall: $x \in N_1 \;\Rightarrow\; x \in N_1 \cup N_2$ und $x \in N_1 \cup N_3$
$\Rightarrow x \in (N_1 \cup N_2) \cap (N_1 \cup N_3)$

2. Fall: $x \in N_2 \cap N_3 \;\Rightarrow\; x \in N_2$ und $x \in N_3$
$\Rightarrow x \in N_1 \cup N_2$ und $x \in N_1 \cup N_3 \Rightarrow x \in (N_1 \cup N_2) \cap (N_1 \cup N - 3)$

$\Rightarrow$ (i)
Zu (ii): Sei $x \in (N_1 \cup N_2) \cap (N_1 \cup N_2) \Rightarrow x \in (N_1 \cup N_2)$ und $x \in (N_1 \cup N_3)$

1. Fall: $x \in N_1 \Rightarrow x \in N_1 \cup (N_2 \cap N_3)$

2. Fall: $x \in N_2$ und $x \in N_3 \Rightarrow x \in N_2 \cap N_3 \Rightarrow x \in N_1 \cup (N_2 \cap N_3)$

$\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ $(*)$.

□

2.4 Relationen

Seien M_1 und M_2 Mengen. Dann betrachten wir die geordneten Paare

$$(x_1, x_2) \text{ mit } x_1 \in M_1, x_2 \in M_2$$

Beachte.
(i) (x_1, x_2) *ist i.A. etwas anderes als* (x_2, x_1)
(ii) (x_1, x_2) *ist auch etwas anderes als die Menge* $\{x_1, x_2\}$. *Bei einer Mengenangabe kommt es nicht auf die Reihenfolge an, und Elemente dürfen mehrfach erwähnt werden.*

$$\{x_1, x_2\} = \{x_2, x_1\} = \{x_1, x_2, x_2\}$$

Die axiomatische Mengenlehre, die wir verwenden, muss so reichhaltig sein, dass

$$M_1 \times M_2 = \{(x_1, x_2) | x_1 \in M_1, x_2 \in M_2\}$$

wieder eine Menge ist. Wir nennen sie das **kartesische Produkt** von M_1 und M_2.

Eine **Relation** zwischen M_1 und M_2 ist eine Teilmenge $R \subseteq M_1 \times M_2$. Notation: $(x_1, x_2) \in R$ schreibe $x_1 R x_2$.

Definition 2.4.1. Sei M eine Menge. Eine Relation $A \subseteq M \times M$ heißt **Äquivalenzrelation** auf M, wenn folgendes gilt (wir notieren dabei $A =\sim$):
(a) Für alle $x \in M$ gilt: $x \sim x$ (Reflexivität)
(b) Für alle $x, y \in M$ gilt: $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ (Symmetrie)
(c) Für alle $x, y, z \in M$ gilt: $x \sim y,\, y \sim z \Rightarrow x \sim z$ (Transitivität)

Häufig werden Aussagen über Elemente einer Menge getroffen, über die quantifiziert werden muss. Die mit Abstand wichtigsten Quantoren sind dabei:

- für alle $x \in M$, Notation: $\forall x \in M$ (Allquantor)
- es existiert ein $x \in M$, Notation: $\exists x \in M$ (Existenzquantor)

Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M. Dann heißt

$$[x] := \{y \in M | y \sim x\} \subseteq M$$

Äquivalenzklasse von $x \in M$

$$\Rightarrow [x] \in \mathfrak{P}(M)$$

Beachte. $[x] \neq \emptyset$, *da* $x \in [x]$ *(aufgrund der Reflexivität)*

Bemerkung 2.4.2. *Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge M und $x, y, z \in M$. Dann gilt: Entweder ist $[x] = [y]$ oder $[x] \cap [y] = \emptyset$*

Beweis. Sei $[x] \cap [y] \neq \emptyset$. Z.z.: $[x] = [y]$. Zeige also: $[x] \subseteq [y]$
Sei $z \in [x] \cap [y]$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow z \in [x], \text{ also } z \sim x \\ &\Rightarrow z \in [y], \text{ also } z \sim y \end{aligned}$$

$\overset{\text{Symmetrie}}{\Rightarrow} x \sim z,\ z \sim y \overset{\text{Transitivität}}{\Rightarrow} x \sim y$
Sei $w \in [x]$ beliebig, also $w \sim x \overset{\text{Transitivität}}{\Rightarrow} w \sim y \Rightarrow w \in [y] \Rightarrow [x] \subseteq [y]$
Aus Symmetriegründen (Vertauschen der Rollen von x und y) $\Rightarrow [y] \subseteq [x] \Rightarrow [x] = [y]$

□

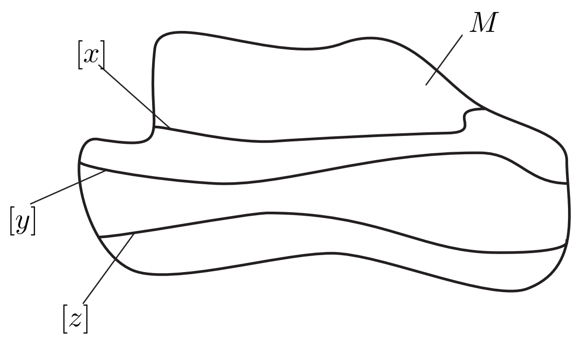


Abbildung 2.1) Menge M mit Äquivalenzklassen

Seien $(B_i)_{i \in I}$ die paarweise verschiedenen Äquivalenzklassen von $\sim$ in M, d.h.

(i)

$$B_i \cap B_j = \emptyset \text{ für } i \neq j$$

(ii)

$$\bigcup_{i \in I} B_i = M$$

Hier bedeutet $x \in \bigcup_{i \in I} B_i :\Leftrightarrow \exists j \in I : x \in B_j$
Man erhält eine Partition der Menge M.

Definition 2.4.3. Sei M eine Menge. Eine Familie von nichtleeren Teilmengen B_i von M, $P = (B_i)_{i \in I}$, heißt **Partition** von M, wenn gilt:
(a) $\forall i, j \in I$, $i \neq j$: $B_i \cap B_j = \emptyset$
(b) $\bigcup_{i \in I} B_i = M$
Schreibweis: Disjunkte Vereinigung: $\dot{\bigcup}_{i \in I} B_i = M$ bedeutet (a) und (b).

Also: Äquivalenzrelation auf $M \rightsquigarrow$ Partition auf M.
Frage: Kommt jede Partition auf M so zustande und wenn ja, ist die Äquivalenzrelation, die zu P führt auch eindeutig?

Satz 2.4.4. *Sei M eine Menge und $P = (B_i)_{i\in I}$ eine Partition auf M. Dann gibt es genau eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf M, sodass B_i $(i \in I)$ gerade die Äquivalenzklassen von $\sim$ sind.*

Beweis.
(a) Eindeutigkeit von $\sim$:
Sucht man nach einer Äquivalenzrelation $\sim$ auf M, sodass $(B_i)_{i\in I}$ genau die Äquivalenzklassen von $\sim$ sind, so gibt es dafür nur einen Kandidaten

$$x \sim y :\Leftrightarrow \exists i \in I : x \in B_i, y \in B_i \quad (*)$$

Denn für $[x] \subseteq M$ muss es genau ein $i \in I$ geben mit: $[x] = B_i$
Es ist dann also:

$$y \sim x \Leftrightarrow y \in [x] = B_i$$

also $x, y \in B_i$.
Es gibt also höchstens eine solche Äquivalenzrelation

(b) Existenz von $\sim$:
Prüfe nun, ob durch $(*)$ wirklich eine Äquivalenzrelation auf M gegeben wird.
   (i) *Reflexivität:*
   Sei $x \in M$. Da $M = \dot{\bigcup}_{i\in I}$, existiert (genau) ein $i \in I$ mit $x \in B_i$. $\Rightarrow x \sim x$.
   (ii) *Symmetrie:*
   Seien $x, y \in M$ mit $x \sim y$.
   $\overset{Def.}{\Rightarrow}$ $\exists i \in I$: $x \in B_i \wedge y \in B_i$ (Da der $\wedge$-Junkor symmetrisch ist)
   $\Rightarrow$ $\exists i \in I$: $y \in B_i \wedge x \in B_i$
   $\overset{Def.}{\Rightarrow}$ $y \sim x$
   (iii) *Transitivität:*
   Seien $x, y, z \in M$ mit $x \sim y$, $y \sim z$
   $\Rightarrow$ $\exists i \in I$: $x \in B_i \wedge y \in B_i$
   $\Rightarrow$ $\exists j \in I$: $y \in B_j \wedge z \in B_j$
   Da $B_i \cap B_j = \emptyset$ für $i \neq j \Rightarrow i = j$
   Also: $\exists i \in I$: $x \in B_i \wedge z \in B_i \Rightarrow x \sim z$

□

Definition 2.4.5. Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge M. Dann fasst man die Äquivalenzklassen von M zu einer neuen Menge wie folgt zusammen:

$$Q := \{[x] \in \mathfrak{P}(M) | x \in M\} \subseteq \mathfrak{P}(M)$$

Q heißt **Quotientenmenge** von M nach der Äquivalenzrelation $\sim$ und wird auch so notiert:

$$Q := M/_{\sim}$$

Ist $B \in Q$ eine Äquivalenzklasse, so nennt man jedes Element $x \in B$ einen Repräsentanten von B, $B = [x]$

Im folgenden wird ein naiver Umgang mit der Addition und der Multiplikation der ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ benutzt.

Beispiel 2.4.6. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren für $x, y \in \mathbb{Z}$:

$$x \sim y \;:\Leftrightarrow\; n|(y - x) \quad (*)$$

Hier benutzen wir für $a, b \in \mathbb{Z}$:

$$a|b \;:\Leftrightarrow\; \exists m \in \mathbb{Z} : am = b$$

('a teilt b' oder 'b ist ein Vielfaches von a')

Behauptung : $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.

(i) *Reflexivität:*
$x \sim x$, denn $n|0 = x - x$, weil $n \cdot 0 = 0$

(ii) *Symmetrie:*
Sei $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $x \sim y$

$$\Rightarrow n|(y-x) \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Z}\ n \cdot r = z - x. \text{ Setze } s = -r.$$
$$\Rightarrow n \cdot s = n \cdot (-r) = -n \cdot r = -(y-x) = x - y$$
$$\Rightarrow n|(x-y)$$
$$\Rightarrow y \sim x$$

(iii) *Transitivität:*
Seien $x, y, z \in \mathbb{Z}$ mit $x \sim y$ und $y \sim z$.

$$\Rightarrow \exists\, r \in \mathbb{Z}\colon n \cdot r = y - x$$
$$\exists s \in \mathbb{Z}\colon n \cdot s = z - y. \text{ Setze } t := r + s \in \mathbb{Z}$$
$$\Rightarrow n \cdot t = n(r+s) = nr + ns = y - x + z - y = z - x$$
$$\Rightarrow n|(z-x)$$
$$\Rightarrow x \sim z$$

Die Äquivalenzklassen von $\sim$ sehen also so aus:

$$\begin{aligned}
\overline{0} &= \{..., -2n, -n, 0, n, 2n, ...\} \\
\overline{1} &= \{..., -2n+1, -n+1, 1, 1+n, 1+2n, ...\} \\
&\vdots \\
\overline{n-1} &= \{..., -2n+(n-1), -n+(n-1), n-1, (n-1)+n, (n-1)+2n, ...\}
\end{aligned}$$

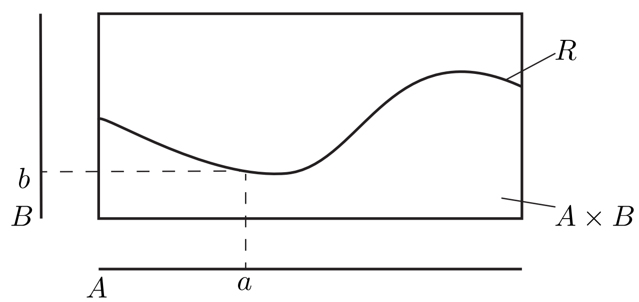
Die Quotientenmenge $Q = \mathbb{Z}_{/\sim}$ sieht also so aus:

$$Q = \{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{n-1}\}$$

2.5 Abbildungen

Einer der wichtigsten Begriffe in der Mathematik ist folgender:

Definition 2.5.1. Seien A und B Mengen. Dann nennen wir eine Relation R zwischen A und B, $R \subseteq A \times B$, eine **Abbildung** von A nach B, wenn es zu jedem Element $a \in A$ genau ein Element $b \in B$ gibt mit $(a, b) \in R$.



Wir fassen dann R als eine Zuordnung von A nach B auf und schreiben

$$f_R : A \longrightarrow B$$

indem wir jedem $a \in A$ genau das $b \in B$ zuordnen, sodass $(a, b) \in R$ ist. Wir schreiben dafür:

$$b = f(a)$$

$$f : a \longmapsto b$$

Ist $f : A \longrightarrow B$ eine Abbildung, so nennt man

$$G_f := \{(a, b) \in A \times B : b = f(a)\} \subseteq A \times B$$

den **Graphen** von f.
(Es hat traditionelle Gründe, f als Zuordnung aufzufassen. Beachte, dass bei uns G_f mit R übereinstimmt.)

Beispiel 2.5.2. (a) Sie A eine Menge. Dann heißt

$$f = id_x : A \to A, \quad f(a) = a$$

die **Identität** auf A

(b) Sei A eine Menge und $B \subseteq A$ eine Teilmenge. Dan nennt man

$$f = i_{B,A} : B \to A, \quad f(b) = b \quad (b \in B)$$

die **Inklusion** von B in A.

(c) Seien A und B Mengen. Dann heißen

$$f = p_{r_A} : A \times B \to A, \quad f((a, b)) = a$$

$$g = p_{r_B} : A \times B \to B, \quad f((a, b)) = b$$

die **Projektionen** auf A bzw. B.
Sind A, B und C Mengen und ist $f : A \times B \to C$ eine Abbildung, so kürzen wir wie folgt ab: $f((a, b)) =: f(a, b)$.

(d) Sei A eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf A, sowie $Q = A/_\sim$ die zugehörige Quotientenmenge. Dann heißt:

$$f = \pi : A \to Q, \quad f(a) = [a]$$

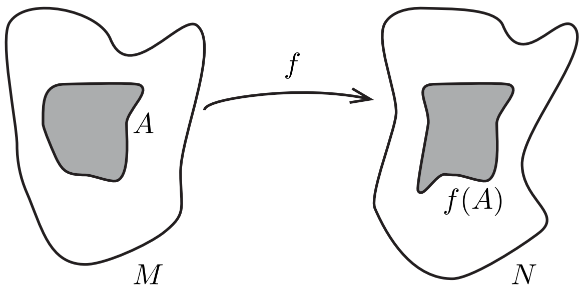
die kanonische Projektion von A nach Q

2.6 Eigenschaften von Abbildungen

Sei $f : M \to N$ eine Abbildung. Sei weiter $A \subseteq M$ eine Teilmenge. Dann heißt

$$f(A) := \{f(x) \in N : x \in A\} \subseteq N$$

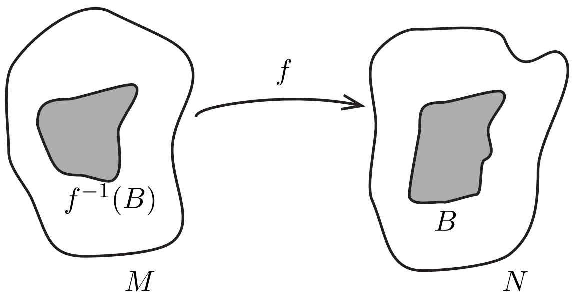
das **Bild** von A unter f



Sei ebenso $B \subseteq N$. Dann heißt

$$f^{-1}(B) := \{x \in M : f(x) \in B\}$$

das **Urbild** von B unter f



Bemerkung 2.6.1. *Sei $f : M \to N$ eine Abbildung und $B_1, B_2 \subseteq N$. Dann gilt:*
(a) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
(b) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

Beweis. Zu (a). Sei $x \in M$

Sei $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$

$\overset{\text{Def.} f^{-1}}{\Leftrightarrow} f(x) \in B_1 \cup B_2$

$\overset{\text{Def.}\cup}{\Leftrightarrow} f(x) \in B_1 \vee f(x) \in B_2$

$\overset{\text{Def.} f^{-1}}{\Leftrightarrow} x \in f^{-1}(B_1) \vee x \in f^{-1}(B_2)$

$\overset{\text{Def.}\cup}{\Leftrightarrow} x \in f^{-1}(B_1) \vee f^{-1}(B_2)$

Also:

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}B_2$$

(b) ähnlich $\square$

Achtung: Bildnehmen ist nicht ganz so optimal, denn:

Bemerkung 2.6.2. *Sei $f : M \to N$ eine Abbildung und $A_1, A_2 \subseteq M$ eine Teilmenge. Dann gilt:*
(a) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
(b) $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$

Beweis. Zu (a). Sei $y \in N$.
Dann ist: $y \in f(A_1 \cup A_2)$

$\overset{\text{Def. Bild}}{\Leftrightarrow}$ $\exists x \in A_1 \cup A_2 : f(x) = y$

$\overset{\text{Def.} \cup}{\Leftrightarrow}$ $\exists x \in M : x \in A_1 \vee x \in A_2$ und $f(x) = y$

$\overset{\text{Def. Bild}}{\Leftrightarrow}$ $y \in f(A_1) \vee y \in f(A_2)$

$\overset{\text{Def.} \cup}{\Leftrightarrow}$ $f(A_1) \cup f(A_2)$

Zu (b). Sei $y \in N$ und $y \in f(A_1 \cap A_2)$

$\overset{\text{Def. Bild}}{\Rightarrow}$ $\exists x \in A_1 \cap A_2 : f(x) = y$

$\Rightarrow$ $\exists x_1 \in A_1 : f(x_1) = y$ (nämlich $x_1 = x$) $\wedge$ $\exists x_2 \in A_2 : f(x_2) = y$ (nämlich $x_2 = x$)

$\Rightarrow$ $y \in f(A_1) \wedge y \in f(A_2)$

$\Rightarrow$ $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$

$\Rightarrow$ $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$

$\square$

Beachte. *Den zweiten Pfeil im Beweis kann man i.A. nicht umkehren, da man i.A. nur zwei Urbilder $x_1 \in A_1$ und $x_2 \in A_2$ von $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$ finden kann, die nicht notwendigerweise übereinstimmen müssen.*

Beachte. *Die Inklusion $\subseteq$ in Bemerkung 2.6.2 (b) kann wirklich echt sein, d.h. „$\subsetneq$“ soll heißen: „$\subseteq$“ aber nicht „$=$“.*

Beispiel 2.6.3. $M = \{1, 2\}$, $N = \{1\}$ Sei $f : M \to N$ die (einzige) Abbildung

$$f(1) = f(2) = 1$$

Sei weiter: $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2\}$

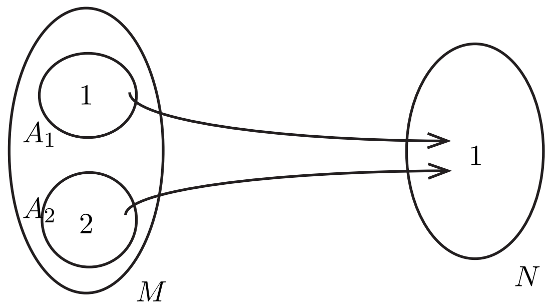
$$\begin{aligned} &\Rightarrow A_1 \cap A_2 = \emptyset \\ &\Rightarrow f(A_1 \cap A_2) = \emptyset \end{aligned}$$

Aber

$$\begin{aligned} f(A_1) &= N = f(A_2) \\ \Rightarrow f(A_1) \cap f(A_2) &= N \end{aligned}$$

Also:

$$f(A_1 \cap A_2) = \emptyset \subsetneq N = f(A_1) \cap f(A_2)$$



Definition 2.6.4. Sei $f : M \to N$ eine Abbildung. Dann heißt f
(a) **injektiv**, wenn gilt:

$$\forall x_1, x_2 \in M : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

(b) **surjektiv**, wenn gilt:

$$\forall y \in N\ \exists x \in M : f(x) = y \quad (\Leftrightarrow f(M) = N)$$

(c) **bijektiv**, wenn f injektiv und surjektiv

$$\forall y \in N\ \exists! x \in M : f(x) = y$$

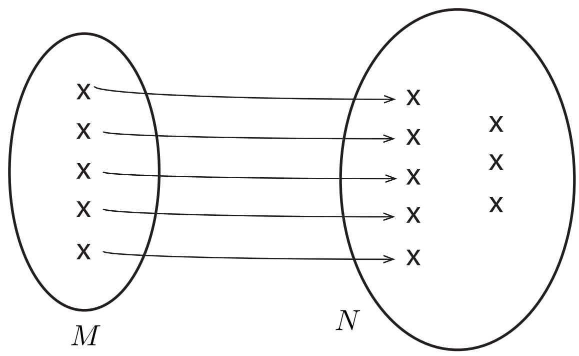


Abbildung 2.2) injektiv - alles was getroffen wird wird genau einmal getroffen

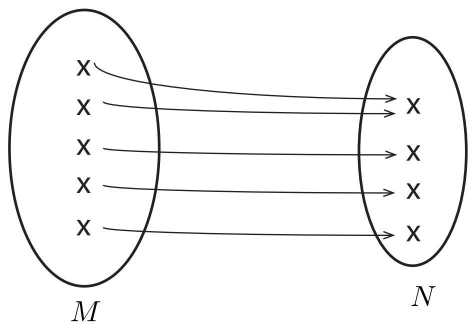


Abbildung 2.3) surjektiv - alles wird getroffen (auch doppelte Treffer möglich)

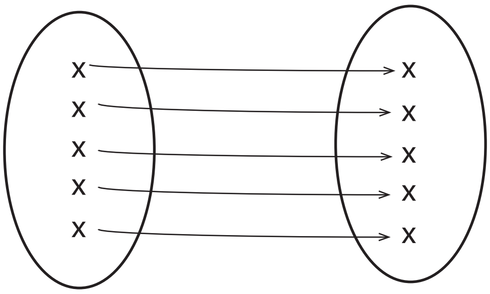


Abbildung 2.4) bijektiv - alles wird genau einmal getroffen

Beachte. *(a) beweist man oft durch Kontraposition:*

$$\forall x_1, x_2 \in M : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Beachte. *Ist $f : M \to N$ injektiv, und sind $A_1, A_2 \subseteq M$ Teilmengen, so gilt:*

$$f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$$

Weil man dann auch den zweiten Pfeil umkehren kann: $x_1 = x_2 =: x$

Sei nun $f : M \to N$ eine bijektive Abbildung. Dann definiert man die sog. **Umkehrabbildung** oder das **Inverse** von f durch

$$f^{-1} : N \to M$$
$$f^{-1} = x \quad :\Leftrightarrow \quad f(x) = y$$

Also $f^{-1}(y)$ ist das eindeutig bestimmte Urbild von y unter f.

Beachte.

$$f^{-1}(\{y\}) = \{f^{-1}(y)\}$$

Ist f nicht bijektiv, so kann $f^{-1}(\{y\})$ leer sein (weil $y \notin f(M)$) oder es kann mehrelementig sein (wenn f nicht injektiv ist).

2.7 Die Verkettung

Eine wichtige Operation zwischen Abbildungen ist die folgende:

Definition 2.7.1. Seien $f : A \to B$ und $g : C \to D$ Abbildungen und $B \subseteq C$ eine Teilmenge. Dann heißt

$$g \circ f : A \to D$$
$$g \circ f(a) := g(f(a))$$

Verkettung von g und f und wird gesprochen: „g nach f“ oder „g komponiert mit f“ oder „g verkettet mit f“ o.ä.

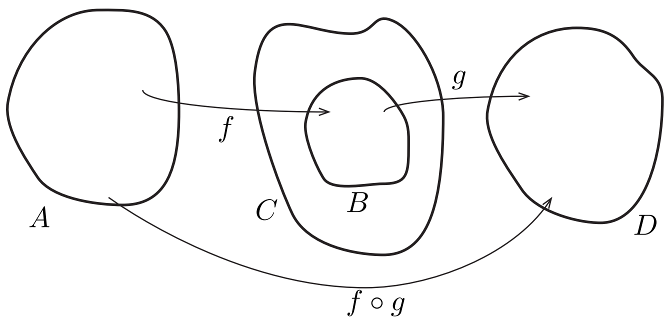


Abbildung 2.5) Komposition von Abbildungen

Warnung: ist $B \subseteq C$, so kann man i.A. $f \circ g$ gar nicht bilden und selbst wenn $D \subseteq A$ ist, ist $f \circ g : C \to B$ etwas anderes als $g \circ f$. Es macht also i.A. gar keinen Sinn nach $f \circ g = g \circ f$ zu fragen. Selbst wenn $A = B = C = D$ ist, gibt es keinen Grund für die Annahme

$$f \circ g = g \circ f : A \to A$$

Einfaches Gegenbeispiel: $A = \{1, 2\}$ und $f, g : A \to A$ mit $f(1) = f(2) = 1$ und $g(1) = g(2) = 2$ $\Rightarrow g \circ f(1) = 1$ und $f \circ g(1) = 1$ Beachte aber: sei $f : A \to B$ eine Abbildung

$$\Rightarrow \mathrm{id}_B \circ f = f \ , \quad f \circ \mathrm{id}_A = f$$

Satz 2.7.2. *Eine Abbildung $f : A \to B$ ist genau dann bijektiv, wenn es eine weitere Abbildung $g : B \to A$ gibt, so dass gilt:*

$$g \circ f = id_A \ , \quad f \circ g = id_B$$

Beweis.

„⇒“: Sei $f : A \to B$ bijektiv. Setze $g := f^{-1}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= f^{-1}(f(x)) = x = \mathrm{id}_A(x) \ , \forall x \in A \\ &\Rightarrow g \circ f = \mathrm{id}_A \\ f \circ g(y) &= f(f^{-1}(y)) = y = \mathrm{id}_B(y) \ , \forall y \in B \\ &\Rightarrow f \circ g = \mathrm{id}_B \end{aligned}$$

„⇒“: Sei $g : B \Rightarrow A$ also mit $g \circ f = \mathrm{id}_A$, $f \circ g = \mathrm{id}_B$.

- Zur Injektivität von f:
  Sei $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$, $x_1, x_2 \in A$.

$$\Rightarrow x_1 = \mathrm{id}_A(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = \mathrm{id}_A(x_2) = x_2$$

- Zur Surjektivität:
  Sei $y \in B$. Setze $x := g(y)$

$$\Rightarrow f(x) = f(g(y)) = \mathrm{id}_B(y) = y$$

□

2.8 Größenvergleiche von Mengen

Injektive und bijektive Abbildungen sind auch geeignet, Größenvergleiche zwischen Mengen anzustellen. Zum Beispiel gilt für zwei endliche Mengen A und B
(a)
$$|A| \leq |B| \Leftrightarrow \exists f : A \to B \quad \text{injektiv}$$
(b)
$$|A| = |B| \Leftrightarrow \exists f : A \to B \quad \text{bijektiv}$$
Wobei hier gilt: $|A| :=$ Anzahl der Elemte von A.
Zu (a):
$$\text{Sei } |A| = n,\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists f : \{1, 2, ..., n\} \to A = \{\underbrace{a_1}_{=f(1)}, ..., \underbrace{a_n}_{=f(n)}\} \text{ bijektiv}$$

Betrachte nun für $n \leq m$ die Inklusion
$$i : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., m\} \Rightarrow i \text{ ist injektiv (klar)}$$
Sei $g : \{1, ..., n\} \to B$ bijektiv. Setze $h : A \to B$, $h := g \circ i \circ f^{-1}$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "h"] & B \\
\{1, ..., n\} \arrow[u, "f", "\cong"'] \arrow[r, "i"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & \{1, ..., m\} \arrow[u, "g"', "\cong"]
\end{tikzcd}$$

Abbildung 2.6) Kommutatives Diagramm mit $h \circ f = g \circ i$

Da die Komposition von injektiven Abbildungen injektiv ist, ist auch h injektiv.

Die Rückrichtung „$\Leftarrow$“ aus (a) und (b): Übung

Definition 2.8.1. Seien A, B Mengen. Dann sagen wir,
(a) B ist **mächtiger** als A (eigentlich besser: „mächtiger oder gleichmächtig“) , in Zeichen:
$$A \lesssim B,$$
wenn eine injektive Abbildung $f : A \to B$ gibt.
(b) A ist **gleichmächtig** zu B, in Zeichen
$$A \simeq B,$$
wenn es eine bijektive Abbildung $f : A \to B$ gibt.

Beachte.

- $\eqsim$ *ist reflexiv,* $A \eqsim A$*, denn* $id_A : A \to A$ *ist bijektiv*
- $\eqsim$ *ist auch symmetrisch, denn ist* $A \eqsim B$*, so gibt es also ein bijektives* $f : A \to B$*. Dann ist aber* $f^{-1} : B \to A$ *auch bijektiv, also ist auch* $B \eqsim A$*.*

- $\approx$ *ist auch transitiv, denn*

$$\begin{aligned} &A \approx B \text{ vermöge bijektives } f : A \to B, \\ &B \approx C \text{ vermöge bijektives } g : B \to C, \\ \Rightarrow &g \circ f : A \to C \text{ ist bijektiv} \\ \Rightarrow &A \approx C \end{aligned}$$

Beachte. $\lesssim$ *ist auch reflexiv und transitiv, aber i.A. nicht symmetrisch.*

Frage: Ist $\lesssim$ vielleicht antisymmetrisch, d.h.

$$A \lesssim B,\ B \lesssim A \ \Rightarrow\ A \approx B \ ?$$

Die Antwort darauf liefert der berühmte Satz **Schröder-Bernstein**

Satz 2.8.2. *Ist B mächtiger als A und ist A mächtiger als B, so sind A und B gleichmächtig.*

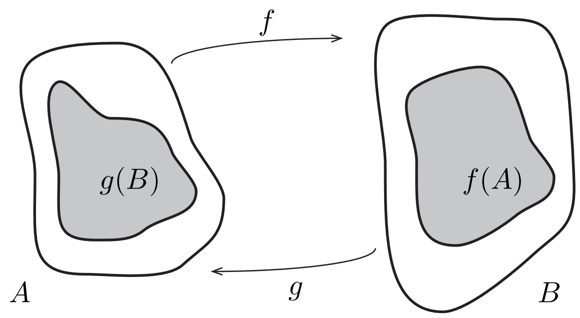


Abbildung 2.7) f, g i.A. nicht surjektiv

Frage: Wie soll ich daraus ein bijektives $h : A \to B$ konstruieren?

Beachte. *Ist $f : A \to B$ injektiv, so setze $C := f(A) \subseteq B$. Dann ist*

$$\overline{f} : A \to C\ , \quad \overline{f}(x) := f(x)$$

bijektiv, erlaubt also eine Umkehrabbildung

$$\overline{f}^{-1} : C \to A.$$

Man notiert dann (etwas nachlässig) $\overline{f}$ bzw $\overline{f}^{-1}$ meist doch wieder mit f bzw. f^{-1}.

Beweis. Wir zerlegen A in drei paarweise disjunkte Teilmengen A_+, A_- und A_∞, also $A = A_+ \dot\cup A_- \dot\cup A_\infty$, wie folgt:
Für jedes $x \in A$ prüfe, ob $x \in g(B)$ ist. Wenn ja, bilde $y = g^{-1}(x) = \overline{g}^{-1}(x)$ und prüfe dann, ob $y \in f(A)$ liegt. Wenn ja, bilde $f^{-1}(y) = \overline{f}^{-1}(y)$ und fahre so fort. Auf diese Weise erhalte folgende Folge von Elementen:

$$x, g^{-1}(x), f^{-1}(g^{-1}(x)), ...$$

Nun unterscheiden wir drei Fälle:

(i) Die Folge bricht nach einer ungeraden Anzahl von Schritten ab, d.h.: $x \notin g(B)$ bzw. $f^{-1}(...)$ liegt nicht in $g(B) \rightsquigarrow A_+$

(ii) Die Folge bricht nach einer geraden Anzahl von Schritten ab, d.h. $g^{-1}(...)$ ist nicht mehr in $f(A)$ $\rightsquigarrow A_-$

(iii) Die Folge briecht nicht ab: Ihre Mitglieder sind stets in $f(A)$ bzw. $g(B)$.

Und wir setzen nun

$$h : A \to B$$

$$h(x) := \begin{cases} f(x), & \text{für } x \in A_+ \\ g^{-1}(x) & \text{für } x \in A_- \\ f(x), \text{ (oder } g(x)) & \text{für } x \in A_\infty \end{cases}$$

Behauptung: h ist bijektiv. Dazu zerlege B ganz entsprechend

$$B = B_+ \dot{\cup} B_- \dot{\cup} B_\infty$$

entsprechend dem Verhalten von

$$y, f^{-1}(y), g^{-1}(f^{-1}(y), ... \quad (*)$$

Beobachte nun h bildet die Teilmenge A_+ bijektiv nach B_- ab, denn $x \in A_+ \Rightarrow y = f(x) \in B_-$
Die Folge $(*)$ von y sieht ja jetzt so aus:

$$y, f^{-1}(y) = x, g^{-1}(x), f^{-1}(g^{-1}(x)), ...$$

Jedes Element $y \in B$ wird auch so getroffen, denn $f^{-1}(y)$ ist offenbar ein Urbild: $y = f(x) = h(x)$.
Da $h|_{A_+} : A_+ \to B_-$ in der Vorschrift mit f übereinstimmt, folgt: $h|_{A_+}$ ist injektiv.

$$\Rightarrow h|_{A_+} : A_+ \to B_- \text{ ist bijektiv}$$

Ähnlich sieht man, dass $h(A_-) \subseteq B_+$ und dass $h|_{A_-} : A_- \to B_+$ auch bijektiv ist.
Schließlich gilt auch: $h(A_\infty) = B_\infty$ mit $h|_{A_\infty} : A_\infty \to B_\infty$ ebenso bijektiv ist.
$\Rightarrow h$ ist insgesamt also bijektiv

$$\Rightarrow A \approx B$$

□

Bemerkung 2.8.3. *Sei A eine unendliche Menge. Dann gilt:*

$$\mathbb{N} \lesssim A$$

Mit anderen Worten: $\mathbb{N}$ ist die „kleinste“ unendliche Menge.

Zum Beweis muss man also ein injektives $f : \mathbb{N} \to A$ angeben, also eine Folge in A,

$$a_i = f(i),$$

sodass die Mitglieder a_i $(i \in \mathbb{N})$ paarweise verschieden sind:

$$i \neq j \;\Rightarrow\; a_i \neq a_j$$

Solche gibt man oft rekurvisv an, d.h.:

(i) man bestimmt $a_i = f(i)$

(ii) nehme an, dass für $n \in \mathbb{N}$ $a_1, ...a_n \in \mathbb{N}$ schon bestimmt sind. Gebe dann

$$a_{n+1} = f(n+1)$$

aus $a_1, ..., a_n$ an.

Dem liegt das Beweisprinzip der **vollständigen Induktion** zugrunde, das man häufig benutzt, um Aussagen über natürliche Zahlen zu beweisen. Es besagt:
Ist ε eine Eigenschaft natürlicher Zahlen (wir schreiben $\varepsilon(n)$, wenn ε für $n \in \mathbb{N}$ gilt), so gilt. Ist:
(i) $\varepsilon(1)$, also 1 erfülle die Eigenschaft ε (Induktionsanfang)
(ii) $\varepsilon(n) \Rightarrow \varepsilon(n+1)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (Induktionsschritt)
so haben alle natürlichen Zahlen die Eigenschaft ε,

$$\{n \in \mathbb{N} : \varepsilon(n)\} = \mathbb{N}$$

Beweis. Zu Bemerkung 2.8.3: Rekursive Definition einer Folge $(a_i)_{i\in I}$ in A.
(i) Da A unendlich (∞) ist, ist insbesondere $A \neq \emptyset$. Wähle ein Element $a_1 \in A$.
(ii) Seien $a_1, ..., a_n \in A$ schon erklärt mit $a_i \neq a_j$ für $1 \leq i < j \leq n$. Da A ∞ ist, ist $A \backslash \{a_1, ..., a_n\} \neq \emptyset$ (sonst wäre A endlich). Es gibt deshalb $a_{n+1 \in A\backslash\{a_1,...,a_n\}}$

$\Rightarrow$ $a_{n+1} \neq a_i$ $(i = 1, ..., n)$

$\Rightarrow$ die Folge $(a_i)_{i\in I}$ hat daher paarweise verschiedene Mitglieder und deshalb ist

$$f : \mathbb{N} \to A, i \longmapsto a_i$$

injektiv und damit $\mathbb{N} \lesssim A$

$\square$

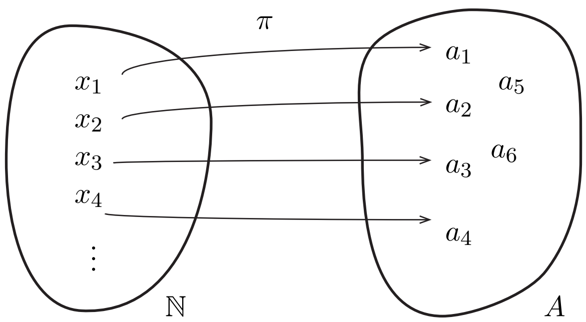
In dem Sinne ist also $\mathbb{N}$ „die kleinste unendliche Menge“.
Bis hierher ist nicht klar, ob es überhaupt (unendliche) Mengen A gibt mit

$$\mathbb{N} \lesssim A, \text{ aber } \mathbb{N} \not\approx$$

Definition 2.8.4. Eine Menge A heißt **abzählbar**, wenn sie endlich oder gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ ist, $A \approx \mathbb{N}$. Ist A unendlich und abzählbar, so heißt A **abzählbar unendlich**. Falls A unendlich und nicht abzählbar, nennt man A **überabzählbar unendlich**

Korollar 2.8.5. *(Aus dem Satz von Schröder-Bernstein.) Eine unendliche Menge A ist genau dann abzählbar, wenn es eine surjektive Abbildung $\pi : \mathbb{N} \to A$ gibt.*

Beweis. „$\Leftarrow$“: Da π surjektiv ist, gibt es zu jedem $a \in A$ ein $g(a) \in \mathbb{N}$ mit $\pi(g(a)) = a$ Man erhält



so eine Abbildung $g : A \to \mathbb{N}$ mit $\pi \circ g = \mathrm{id}_A$ $(*)$ (g heißt „*ein* rechtsinverses von π“). Da id_A injektiv ist wegen $(*)$ auch g injektiv. Also:

$$A \lesssim \mathbb{N}$$

Beachte. $\mathbb{N} \lesssim A$, *da A unendlich ist.* $\Rightarrow A \approx \mathbb{N}$

„$\Rightarrow$“ ist trivial, da bijektive Abbildungen insbesondere surjektiv sind.

$\square$

Es ist gar nicht einfach überabzählbare Mengen zu konstruieren. Z.B. gilt:

Bemerkung 2.8.6. *Sind $B_1, B_2 \subseteq M$ abzählbar, so ist auch $B_1 \cup B_2$ abzählbar*

Beweis. Es reicht ein surjektives $\pi : \mathbb{N} \to B_1 \cup B_2$ anzugeben. Sei

$$\begin{aligned} A_1 &:= \{n \in \mathbb{N} : n \text{ ist gerade } \} \subseteq \mathbb{N} \\ A_2 &:= \{n \in \mathbb{N} : n \text{ ist ungerade } \} \subseteq \mathbb{N} \\ \Rightarrow \mathbb{N} &= A_1 \dot{\cup} A_2 \end{aligned}$$

Da A_1 und A_2 unendlich sind, gilt:

$$\mathbb{N} \lesssim A_1, \quad \mathbb{N} \lesssim A_2$$

Ebenso, da $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{N}$ sind und die Inklusionen $i_1 : A_1 \to \mathbb{N}$, $i_2 : A_2 \to \mathbb{N}$ injektiv sind:

$$A_1 \lesssim \mathbb{N}, \quad A_2 \lesssim \mathbb{N}$$

Also ist nach Schröder-Bernstein:

$$A_1 \approx \mathbb{N}, \quad A_2 \approx \mathbb{N}$$

(Hier kann man bijektive Abbildungen

$$\begin{aligned} f_1 &: \mathbb{N} \to A_1 \\ f_2 &: \mathbb{N} \to A_2 \end{aligned}$$

auch direkt z.B. durch

$$\begin{aligned} f_1(n) &= 2n \\ f_2(n) &= 2n - 1 \end{aligned}$$

angeben)

Da $B_1 \approx \mathbb{N}$ und $B_2 \approx \mathbb{N}$, existieren bijektive Abbildungen

$$\begin{aligned} \pi_1 &: \mathbb{N} \to B_1 \\ \pi_2 &: \mathbb{N} \to B_2. \end{aligned}$$

Setze nun:

$$\begin{aligned} &\pi : \mathbb{N} \to B_1 \cup B_2 \\ &\pi(n) := \begin{cases} \pi_1 \circ f_1^{-1} & \text{falls } n \in A_1 \\ \pi_2 \circ f_2^{-1} & \text{falls } n \in A_2 \end{cases} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \pi$ ist surjektiv (sogar bijektiv, falls $B_1 \cup B_2 = \emptyset$).
$\Rightarrow B_1 \cup B_2$ ist abzählbar. $\square$

Bemerkung 2.8.7. *Abzählbare Vereinigungen von abzählbaren Mengen sind wieder abzählbar:*

$$\begin{aligned} M \supseteq B_n \ &\textit{abzählbar} \ , n \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \ &\textit{ist abzählbar} \end{aligned}$$

Beweis. Zerlege dazu die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ in abzählbar viele unendliche Teilmengen $A_n \subseteq \mathbb{N}$ $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{N} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

Das kann man z.B. so machen (nach G. Cantor):

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	4	7	11	16
2	3	5	8	12	17	23
3	6	9	13	18	24	
4	10	14	19	25		
5	15	20	26			
6	21	27				

Sei $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\sigma(k) =$ die Zeile in der $k \in \mathbb{N}$ steht. Z.B.: $\sigma(3) = 2$, $\sigma(4) = 1$
Sei nun A_n die Teilmenge von Elementen in $\mathbb{N}$, die in der n-ten Zeile dieses Tableaus stehen. Also:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{1, 2, 4, 7, 11, 16, ...\} \\ A_2 &= \{3, 5, 8, 12, 17, 23, ...\} \\ A_3 &= \{6, 9, 13, 18, 24\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Jedes A_n ist unendlich, also $A_n \approx \mathbb{N}$, sei $f_n : \mathbb{N} \to A_n$ eine Bijektion.
Da B_n abzählbar ist, gibt es eine Surjektion $\pi_n : \mathbb{N} \to B_n$. Setze nun:

$$\begin{aligned} &\pi : \mathbb{N} \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \\ &\pi(k) = \pi_k \circ f_{\sigma(k)}^{-1} \qquad\qquad \text{falls} k \in A_{\sigma(k)} \end{aligned}$$

Wo $A_{\sigma(k)}$ die Teilmenge ist, die k enthält, $k \in A_{\sigma(k)}$ (siehe Tableau auf Seite 23) $\Rightarrow$ π ist dann surjektiv
$\Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ ist abzählbar. □

Beachte auch, dass daraus folgt:
Sind A und B abzählbar, so ist auch $A \times B$ abzählbar, denn:

$$A \times B = \underbrace{\underbrace{\bigcup_{b\in B}}_{\text{abzählbar}} \underbrace{A \times \{b\}}_{\text{abzählbar}}}_{\Rightarrow \text{ abzählbar}}$$

Der folgende bekannte Satz liefert die Existenz überabzählbarer Mengen:

Satz 2.8.8 (Satz von Cantor)**.** *: Für alle Mengen A gilt, dass die Potenzmenge $\mathfrak{P}(A)$ von A echt* ***mächtiger*** *als A ist,*

$$A \lesssim \mathfrak{P}(A), \ \textit{aber}\ A \not\approx \mathfrak{P}(A)$$

Also gilt z.B.: $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ ist überabzählbar und

$$\mathbb{N} \lnsim \mathfrak{P}(\mathbb{N}) \lnsim \mathfrak{P}^2(\mathbb{N}) := \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathbb{N})) \lnsim \mathfrak{P}^3(\mathbb{N})$$

Beweis des Satzes von Cantor.

$$\begin{aligned} A &\lesssim \mathfrak{P}(A), \quad \text{denn} \\ f : &A \to \mathfrak{P}(A) \\ &f(x) = \{x\} \end{aligned}$$

ist injektiv
Wäre aber $A \approx \mathfrak{P}(A)$, gäbe es aber ein bijektives

$$\pi : A \to \mathfrak{P}(A).$$

Diese Abbildung kann aber nicht surjektiv sein. Ist nämlich $\pi : A \to \mathfrak{P}(A)$ eine beliebige Abbildung, so setze

$$B := \{x \in A : x \notin \pi(x)\}$$

Dann ist B nicht im Bild von π ($B \notin \pi(A)$), denn wäre $B = \pi(x_0)$ (für $x_0 \in A$), so wäre
(i) $x_0 \in B \;\Rightarrow\; x_0 \notin \pi(x_0) = B$
(ii) $x_0 \notin B \;\Rightarrow\; x_0 \in \pi(x_0) = B$,
was in beiden Fällen zu Widersprüchen führt. $\square$

Kapitel 3

Die reellen Zahlen

3.1 Algebraische Strukturen

Definition 3.1.1 (Verknüpfung)**.** Sei M eine Menge. Dann heißt eine Abbildung

$$\begin{aligned} * : M \times M &\longrightarrow M \\ *(a,b) &=: a * b \end{aligned}$$

eine **Verknüpfung** auf M

Definition 3.1.2 (Körper)**.** Ein Tripel $(K, +, \cdot)$ bestehend aus eine Menge K mit mindestens 2 Elementen und zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ auf K heißt ein **Körper**, wenn folgendes gilt:

Für die Verknüpfung "+" (Addition):

(a_1) $\forall x, y, z \in K$:

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

Assoziativgesetz der Addition.

(a_2) $\forall x, y \in K$:

$$x + y = y + x$$

Kommutativgesetz der Addition.

(a_3) Es existiert ein Element $0 \in K$, sodass gilt: $\forall y \in K$:

$$x + 0 = x$$

Existenz eines neutralen Elements der Addition (Nullelement).

(a_4) $\forall x \in K \exists y \in K$, sodass gilt:

$$x + y = 0$$

Existenz des Inversen der Addition (das Negative).

Für die Verknüpfung "$\cdot$" (Multiplikation):

(b_1) $\forall x, y, z \in K$:

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

Assoziativgesetz der Multiplikation.

(b_2) $\forall x, y \in K$:

$$x \cdot y = y \cdot x$$

Kommutativgesetz der Multiplikation.

(b_3) Es existiert ein Element $1 \in K$, sodass $\forall x \in K$:

$$x \cdot 1 = x$$

Existenz des neutralen Elements der Multiplikation (Einselement)

(b_4) $\forall x \in K^* := K \setminus \{0\}\ \exists y \in K^*$:

$$x \cdot y = 1$$

Existenz des Inversen der Multiplikation. Im folgenden wird das multiplikativ inverse Element mit x^{-1} bezeichnet:

$$x \cdot x^{-1} = 1$$

(c) $\forall x, y, z \in K$ gilt:

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$

Distributivgesetz

Bemerkung 3.1.3 (Eindeutigkeit von Nullelement, Einselement und der inversen Elementen)**.**

(i) *Das so genannte* ***Nullelement*** *ist eindeutig bestimmt.*
(ii) *Das so genannte* ***Einselement*** *ist eindeutig bestimmt.*
(iii) *Das* ***inverse Element der Addition*** *ist eindeutig bestimmt.*
(iv) *Das* ***inverse Element der Multiplikation*** *ist eindeutig bestimmt.*

Beweis. (i) Sei $0 \in K$ das bekannte Nullelement und $0' \in K$ ein weiteres. Dann gilt:

$$0' \overset{(*_1)}{=} 0' + 0 \overset{(a_2)}{=} 0 + 0' \overset{(*_2)}{=} 0$$

$(*_1)$ gilt, da 0 neutrales Element ist. $(*_2)$ gilt, da $0'$ neutrales Element ist.

(ii) Sei $1 \in K$ das bekannte Einselement und $1' \in K$ ein weiteres. Dann gilt:

$$1' \overset{(*_1)}{=} 1' \cdot 1 \overset{(b_2)}{=} 1 \cdot 1' = 1$$

$(*_1)$ gilt, da 1 neutrales Element der Multiplikation ist. $(*_2)$ gilt, da auch $1'$ neutrales Element der Multipliaktion ist.

(iii) Seien $x, y_1, y_2 \in K$ mit:

$$x + y_1 = x + y_2 = 0 \quad (*)$$

Dann folgt:

$$y_1 \overset{(a_3)}{=} y_1 + 0 \overset{(*)}{=} y_1 + (x + y_2) \overset{(a_1)}{=} (y_1 + x) + y_2 \overset{a_2}{=} (x + y_1) + (y_2) \overset{(*)}{=} 0 + y_2 \overset{a_2}{=} y_2 + 0 \overset{a_3}{=} y_2$$

(iv) Seien $x, y_1, y_2 \in K$ mit

$$x \cdot y_1 = x \cdot y_2 = 1 \quad (*)$$

Dann gilt:

$$y_1 \overset{b_3}{=} y_1 \cdot 1 \overset{(*)}{=} y_1 \cdot (x \cdot y_2) \overset{b_1}{=} (y_1 \cdot x) \cdot y_2 \overset{b_2}{=} (c \cdot y_1) \cdot y_2 \overset{(*)}{=} 1 \cdot y_2 \overset{b_2}{=} y_2 \cdot 1 \overset{b_3}{=} y_2$$

$\square$

Definition 3.1.4 (Division)**.** Führe nun die **Division** auf K wie folgt ein: $\forall x \in K, \forall y \in K^*$

$$\frac{x}{y} := x \cdot y^{-1}$$

Vereinbarung: Punktrechnung geht vor Strichrechnung und der Punkt fällt oft einfach weg. Z.B. ließt sich das Distributivgesetz dann so:

$$x(y+z) = xy + xz$$

Bemerkung 3.1.5. *Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und 0 das Nullelement von K. Dann gilt für alle $x \in K$:*

$$x \cdot 0 = 0$$

Beweis. $\forall x \in K$ ist:

$$x \cdot 0 \overset{(a_3)}{=} x(0+0) \overset{(c)}{=} x \cdot 0 + x \cdot 0 \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &\overset{(a_4)}{=} x \cdot 0 + (-x \cdot 0) \\ &\overset{(*)}{=} (x \cdot 0 + x \cdot 0) + (-x \cdot 0) \\ &\overset{a_3}{=} x \cdot 0 + (x \cdot 0 + (-x \cdot 0)) \\ &\overset{(a_4)}{=} x \cdot 0 + 0 = x \cdot 0 \end{aligned}$$

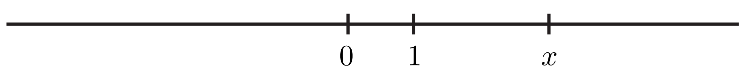
□

Beachte, dass deshalb die 0 und die 1 in einem Körper verschieden sein müssen, denn wäre $1 = 0$ so gälte $\forall x, y \in K$:

$$x \overset{(b_1)}{=} x \cdot 1 = x \cdot 0 = 0$$

$\Rightarrow$ Es gibt nur ein Element in K
Dies steht aber in Widerspruch zur Voraussetzung, dass K mindestens zwei Elemente haben muss.

Vorstellung der reellen Zahlen:
Reelle Zahlen stehen in 1:1-Beziehungen zu Punkten auf einer Geraden, auf der zwei Punkte 0 und



1 ausgezeichnet sind. Die reelle Zahl, die zum Punkt x gehört, soll dann den gerichteten Abstand zum Punkt 0 in der Einheit, die durch 1 gegeben ist, wiedergeben. Die 0 und die 1 sollen dann die Funktion des Null- und des Einselements in $\mathbb{R}$ als Körper einnehmen. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ soll also ein Körper sein.

Man definiert dann (wenn man $\mathbb{R} = \{\text{reelle Zahlen}\}$ hat)

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, ...\} \subseteq \mathbb{R}$$

$$\text{wobei } 2 := 1 + 1,\ 3 := 1 + 1 + 1, \text{ usw}$$

die **natürlichen Zahlen**

$$\mathbb{Z} := \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\} \subseteq \mathbb{R}$$

die **ganzen Zahlen**

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbb{R} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\} \subseteq \mathbb{R}$$

die **rationalen Zahlen**.

Damit erhalten wir:

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \overset{\text{später } \subsetneq}{\subseteq} \mathbb{R}$$

Beachte. $\mathbb{Q}$ *ist selbst ein Körper,* $\mathbb{Z}$ *und* $\mathbb{N}$ *nicht.*

Beispiel 3.1.6. Der Körper $\mathbb{F}_2$ mit zwei Elementen wird so definiert:

$$\mathbb{F}_2 = \{1, 2\}$$

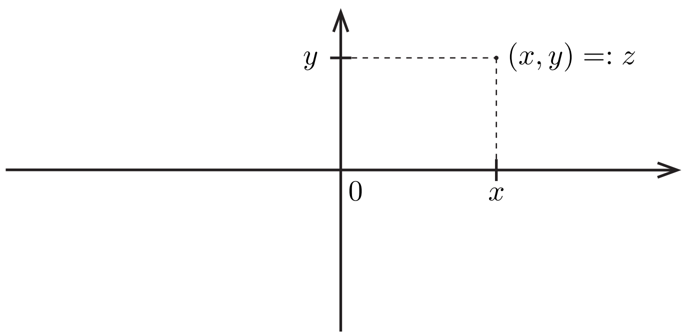
$\boxplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\boxdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Beachte. *Hier gilt:* $2 = 1 + 1 = 0$

Beispiel 3.1.7. Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ wird so definiert: (wir gehen davon aus die reellen Zahlen schon zu haben)

$$\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$



Definiere nun: mit $x := (x_1, x_2), y := (y_1, y_2), z := (z_1, z_2) \in \mathbb{C}$.

Für die Addition auf $\mathbb{C}$ gelte:

$$x + y = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

Für die Multiplikation auf $\mathbb{C}$ gelte:

$$x \cdot y = (x_1, x_2)(y_1, y_2) = (x_1 y_2 - x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

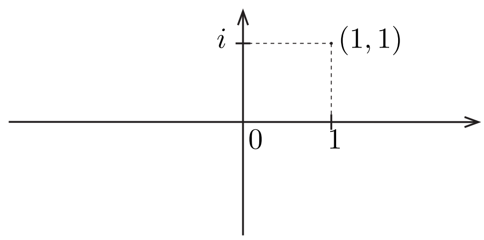
Beachte: $i := (0, 1)$

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -(1, 0) = -1_{\mathbb{C}}$$

Dadurch kann man Multiplikation zurückgewinnen:

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x + iy$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (x_1 + iy_2)(x_2 + iy_2) &\overset{(c)}{=} x_1 x_2 + x_1 i y_2 + i y_1 x_2 + i^2 y_1 y_2 \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2) \end{aligned}$$



3.2 Ordnungsstruktur auf $\mathbb{R}$

Bisher sind die algebraischen Strukturen “+“ und “$\cdot$ “ auf den reellen Zahlen eingeführt. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist ein Körper. Das reicht nicht, Analysis auf $\mathbb{R}$ zu betreiben. Wir brauchen noch eine **Ordnungsstruktur**, die folgendermaßen axiomatisiert wird:

Definition 3.2.1. Sei $(K, +, \cdot) =: K$ ein Körper. Dann heißt eine Teilmenge $P \subseteq K$ eine **Anordnung** auf K, wenn folgendes gilt:
(a) Für jedes $x \in K$ gibt es genau eine der folgenden Möglichkeiten:

$$x \in P, \; x = 0, \; -x \in P$$

D.h.: Wenn wir $-P$ folgendermaßen bezeichnen

$$-P = \{-x \in K : x \in P\}$$

so gilt:

$$K = P \dot{\cup} \{0\} \dot{\cup} (-P)$$

(b) $\forall x, y \in P$:

$$x + y \in P$$

(c) $\forall x, y, \in P$

$$x \cdot y \in P$$

Dann heißt (K, P) ein angeordneter Körper. Die Elemente von P heißen positiv, die von $(-P)$ heißen negativ.

Bezeichungen: Für $x, y \in K$ setze

$$\begin{aligned} x < y &:\Leftrightarrow y - x \in P \\ x \leq y &:\Leftrightarrow x < y \text{ oder } x = y \\ x > y &:\Leftrightarrow y < x \\ x \geq y &:\Leftrightarrow y \leq x \end{aligned}$$

Es folgt dann:

$$\begin{aligned} P &= \{x \in K : 0 < x\} \\ (-P) &= \{x \in K : x < 0\} \end{aligned}$$

Bemerkung 3.2.2. *Sei (K, P) ein angeordneter Körper. Dann gilt:*
(a) $\forall x, y, a \in K$

$$x < y \Rightarrow x + a < y + a$$

(b) $\forall x, y, a \in K$

$$x < y, a > 0 \Rightarrow ax < ay$$

(c) $\forall x, y, a \in K^* = K \setminus \{0\}$
$$x^2 = x \cdot x > 0 \quad \textit{Insbesondere: } 1 > 0$$

Beweis.
(a)

Beachte. $\forall x, y \in K$
$$-(x+y) = -x - y$$

denn:
$$(x+y) + (-x-y) = (x + (-x)) + (y + (-y)) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow -x - y = -(x+y)$$

Sei nun $x < y$
$$\begin{aligned} \Rightarrow (y+a) - (x+a) &= y + a - x - a = y - x + (a-a) = y - x > 0 \\ \Rightarrow x + a &< y + a \end{aligned}$$

(b)

Beachte.
$$-(a \cdot x) = a \cdot (-x)$$

denn:
$$\begin{aligned} ax + a(-x) &= a(x + (-x)) = a \cdot 0 = 0 \\ \Rightarrow a(-x) &= -ax \\ \Rightarrow a(y-x) &= a(y + (-x)) = ay + a(-x) \\ &= ay - ax \end{aligned}$$

Sei nun $x < y,\ a > 0$
$$\begin{aligned} \Rightarrow ay - ax &= \underbrace{a}_{>0} \underbrace{(y-x)}_{>0} > 0 \\ \Rightarrow ax &< ay \end{aligned}$$

(c)

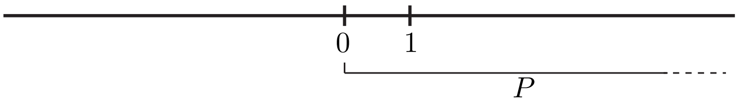
Beachte.
$$(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$$

denn:
$$\begin{aligned} (-x) \cdot (-y) - x \cdot y &= (-x) \cdot (-y) + (x) \cdot (-y) = \underbrace{(-x + x)}_{=0} \cdot (-y) = 0 \\ \Rightarrow (-x) \cdot (-y) &= x \cdot y \end{aligned}$$

Daraus folgt:
$$\begin{aligned} &\text{Falls } x > 0 \Rightarrow x^2 = x \cdot x > 0 \\ &\text{Falls } x < 0 \Rightarrow (-x) > 0 \\ &\qquad \Rightarrow x^2 = (-x) \cdot (-x) > 0 \end{aligned}$$

□

Vorstellung bei reellen Zahlen als Punkte auf einer Zahlengeraden L mit ausgezeichneten Punkten 0 und 1: Nehme für P alle Elemente, die auf der gleichen Seite von 0 liegen, wie die 1.
Axiomatisch: $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist ein angeordneter Körper.
Damit sind alle Strukturen auf $\mathbb{R}$ eingeführt. Es fehlen noch zwei weitere Axiome für $(+, \cdot, P)$.



Beispiel 3.2.3.

(a) $(\mathbb{R}, +, \cdot, P_{\mathbb{R}})$ ist angeordneter Körper. Setzt man für $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$:

$$P_{\mathbb{Q}} := P_{\mathbb{R}} \cap \mathbb{Q}$$

so ist auch $(\mathbb{Q}, +, \cdot, P_{\mathbb{Q}})$ ein angeordneter Körper.

(b) Auf $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ gibt es keine Anordnung, denn

$$1 = -1,$$

also kann man Punkt (a) der Definition 3.2.1 (Seite 29) nicht erfüllen.

(c) Auch die komplexen Zahlen $\mathbb{C} = (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ kann man nicht anordnen, denn:

Wäre $i > 0 \Rightarrow -1 = i^2 \overset{(*_1)}{>} 0$. Das steht aber im Widerspruch zu $1 > 0$, was auf $\mathbb{R}$ gilt.

$(*_1)$ gilt nach Vorlesung für angeordnete Körper

Wäre $i < 0 \Rightarrow (-i)^2 = -1 > 0$. Das steht aber im Widerspruch zu $1 > 0$, was auf $\mathbb{R}$ gilt.

Wir stoßen also in beiden Fällen auf einen Widerspruch und können also keine Anordnung von 0 und i feststellen. Damit ist aber schon ganz $\mathbb{C}$ nicht angeordnet.

Definition 3.2.4. Sei (K, P) ein angeordneter Körper. Für jedes $x \in K$ setzt man

$$|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

den sogenannten **(Absolut-) Betrag** von x.

Beachte. $\forall x \in K$

$$x \leq |x| \quad \textit{und} \quad |-x| = |x|$$

Beachte. *Direkt aus der Definition des Betrags folgt:*

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

Satz 3.2.5 (Dreiecksungleichung)**.** *Sei (K, P) ein angeordneter Körper. Dann gilt für alle $x, y \in K$:*

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Beweis.

(i) $\forall x, y \in K$

$$x + y \leq |x| + |y|$$

(ii) Ebenso ist:

$$-(x + y) = -x + (-y) \leq |-x| + |-y| = |x| + |y|$$

$$\Rightarrow |x + y| \leq |x| + |y|$$

□

3.3 Elementare Funktionen

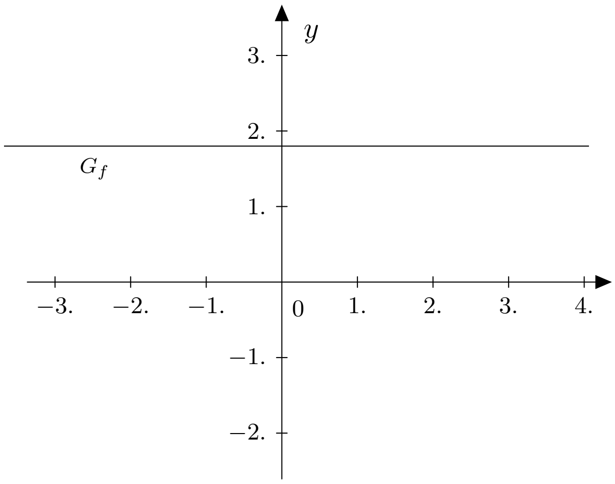
Sei $\mathbb{R}$ der Körper der reellen Zahlen. Wir führen folgende **reelle Funktionen**

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

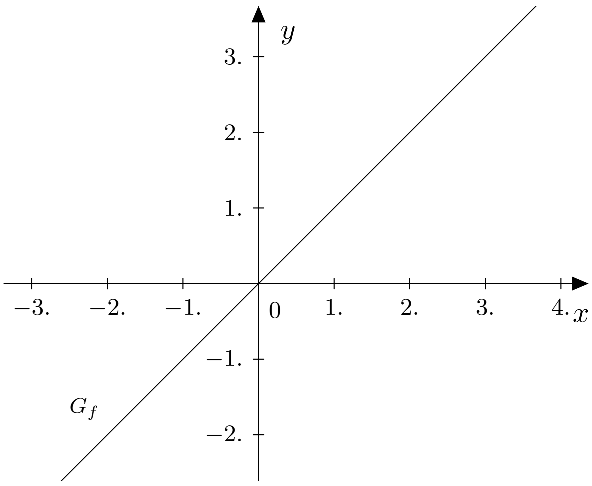
ein:
(a) Sei $c \in \mathbb{R}$. Dann heißt

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ f(x) &= c \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

die **konstante Funktion**. (Für $c = 0$ spricht man auch von der **Nullfunktion**.)
Ihr Graph $G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$ sieht so aus:



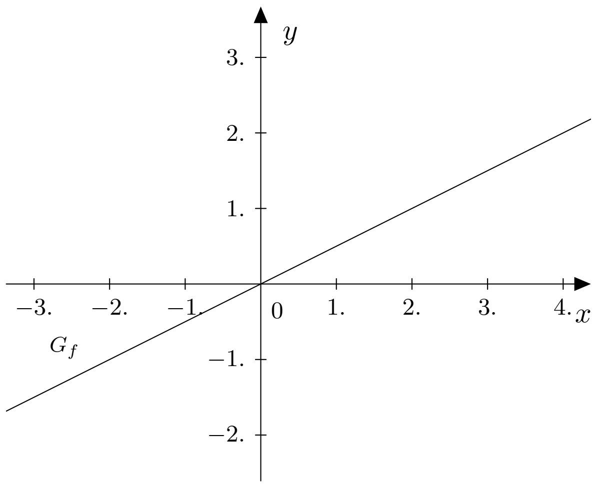
(b) $f = \mathrm{id} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$ heißt **Identität auf** $\mathbb{R}$



(c) Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann nennt man

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ f(x) &= ax \end{aligned}$$

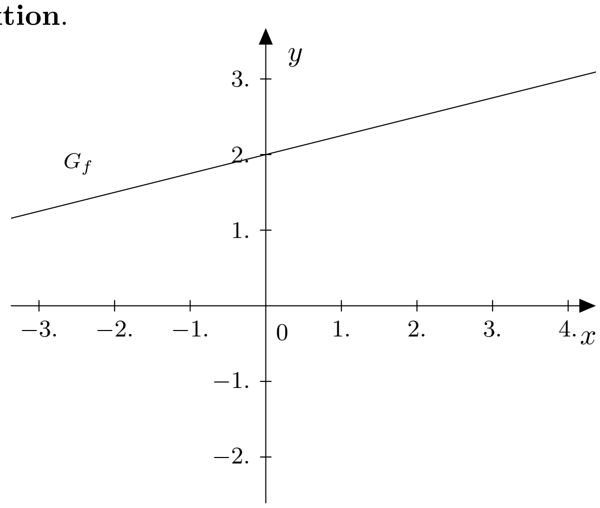
eine **lineare Funktion**.



(d) Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann heißt

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f(x) &= ax + b \end{aligned}$$

eine **affin-lineare Funktion**.

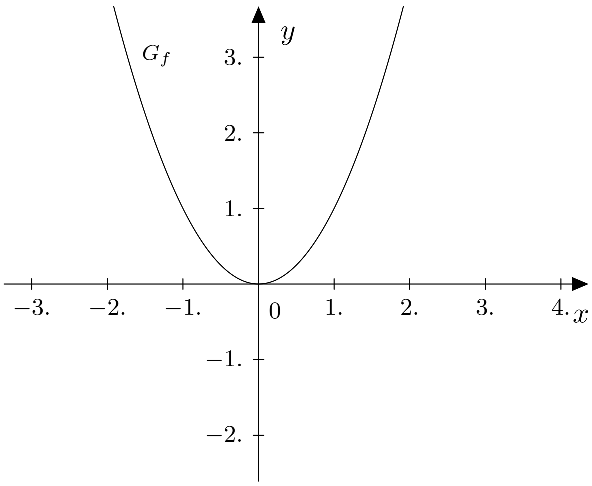


(e) Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann heißt

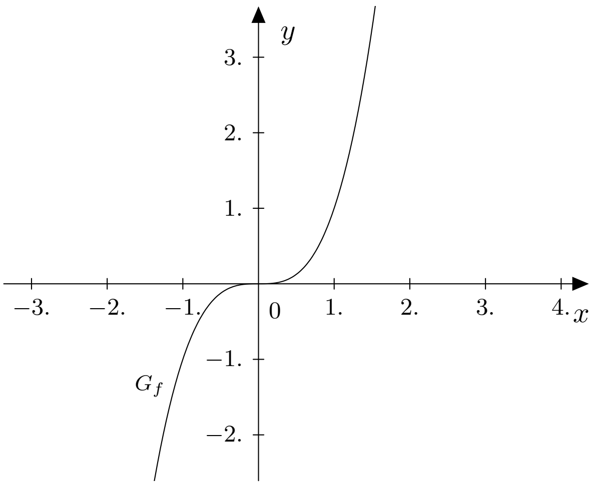
$$\begin{aligned} \mathrm{pot}_n = f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f(x) &= x^n := \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ mal}} \end{aligned}$$
$$(n = 0 : x^0 = 1 \ \forall x \in \mathbb{R}, \text{ auch } 0^0 = 1)$$

n-te Potenzfunktion.

Für n gerade, $n \neq 0$:



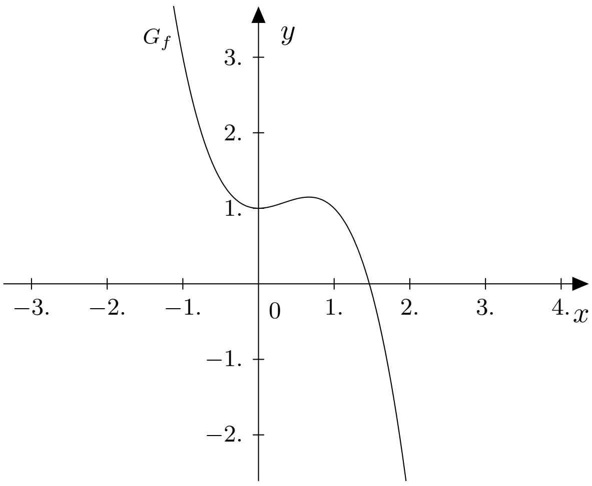
Für n ungerade, $n \neq 1$:



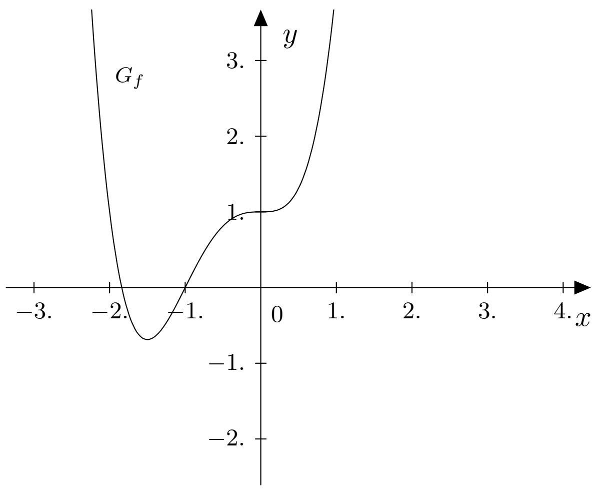
(f) Alle bisherigen Funktionen sind Spezialfälle der folgenden Funktionenfamilie:
Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_1, a_2, \ldots a_n \in \mathbb{R}$ mit $a_n \neq 0$. Dann nennt man

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

eine **Polynomfunktion** vom Grad n. Die Nullfunktion $f = 0$ zählt auch als Polynom(-funktion).
Für $a_n < 0$ und n ungerade:



Für $a_n > 0$ und n gerade:



Oft ist der **Definitionsbereich** D reeller Funktionen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ nur eine Teilmenge der reellen Zahlen, $D \subseteq \mathbb{R}$. Oft ist dabei D ein (offenes oder geschlossenes) Intervall, (oder eine endliche Vereinigung von Intervallen):

Definition 3.3.1. $I \subseteq \mathbb{R}$ heißt **offenes Intervall** wenn gilt:

$$
\begin{aligned}
i)\ I &= (a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \\
ii)\ I &= (a,\infty) := \{x \in \mathbb{R} : a < x\} \\
iii)\ I &= (-\infty,b) := \{x \in \mathbb{R} : x < b\} \\
iv)\ I &= (-\infty,\infty) := \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Beachte. *Auch die leere Menge* $\emptyset = (a,b)$ *für* $a \geq b$ *gilt als offenes Intervall.*

$I \subseteq \mathbb{R}$ heißt **abgeschlossenes Intervall**, wenn gilt:

$$
\begin{aligned}
i)\ I &= [a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \\
ii)\ I &= [a,\infty) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\} \\
iii)\ I &= (-\infty,b] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} \\
iv)\ I &= (-\infty,\infty) := \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Beachte. *Auch die leere Menge* $\emptyset = [a,b]$ *für* $a > b$ *und die einelementige Menge* $\{a\} = [a,a]$ *gelten als abgeschlossene Intervalle.*

Kapitel 4

Folgen reeller Zahlen

4.1 Das Induktionsprinzip

Um Aussagen über natürliche Zahlen A_n zu beweisen, kann man das Prinzip der **vollständige Induktion** benutzen.

- Induktionsanfang: Zeige, dass (A_1) richtig ist.
- Induktionsschritt: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $A(n) \Rightarrow A(n+1)$

Beispiel 4.1.1. *(a)*

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$$

(b) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

Schreibweise: Ist $n \in \mathbb{N}$ und sind $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, so kürzen wir ab:

(i)

$$\sum_{k=1}^{n} a_k := a_1 + a_2 + \ldots + a_n \qquad (n \geq 1)$$

und:

$$\sum_{k=1}^{0} = 0 \qquad \text{(wenn } n = 0, \text{ egal was in der Summe steht.)}$$

(ii)

$$\prod_{k=1}^{n} a_k := a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \qquad (n \geq 1)$$

und:

$$\prod_{k=1}^{0} := 1 \qquad \text{(wenn } n = 0, \text{ egal was in der Summe steht.)}$$

Beweis. *(a)* **I.A.** Mit $A(1)$

$$\sum_{k=1}^{1} (2k-1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1^2$$

I.S. $A(n) \to A(n+1)$

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) + (2(n+1)-1) \overset{I.V.}{=} n^2 + (2(n+1)-1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

(*b*) *Übung*

□

Definition 4.1.2. (*a*) Für alle $n \in \mathbb{N}$ setze:

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = \prod_{k=1}^{n} k$$

und spreche **„n-Fakultät“**

(*b*) Für alle $k \in \{0, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, setze:

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-k+1) \cdot (n-k+2) \cdot \ldots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}$$

gesprochen: „n über k“ und heißt **Binomialkoeffizient**

Bemerkung 4.1.3. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

und für alle $k \in \{0, \ldots, n\}$ bei $n \geq 2$

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

Beweis.

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0! \cdot (n)!} = \frac{1}{1 \cdot 1} = \frac{1}{1} = 1$$

und

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n! \cdot (0!)} = \frac{1}{1} = 1$$

außerdem:

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot \underbrace{((n-1)-(k-1))!}_{=(n-k)!}} + \frac{(n-1)!}{k! \cdot (n-1-k)!} \\ &= \frac{(n-1)! \cdot k + (n-1)! \cdot (n-k)}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{(n-1)! \cdot (k+n-k)}{k! \cdot (n-k)!} \\ &= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}\end{aligned}$$

□

Satz 4.1.4 (Binomischer Lehrsatz)**.** *$\forall n \in \mathbb{N}_0$, $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Beweis. Vollständige Induktion über n:

I.A.: $n = 0$:

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} x^{0-k} y^k = \binom{0}{0} x^0 y^0 = 1 = (x+y)^0 \quad \checkmark$$

I.S.: $n \to n+1$:
Zeige:

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k$$

Also:

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)^n (x+y) \overset{I.V.}{=} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \right) (x+y) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^{n-k+1} y^{k-1+1} \\
&= x^{n+1} y^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} x^{n-k+1} y^{k-1+1} + x^0 y^{n+1} \\
&= x^{n+1} y^0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) x^{n+1-k} y^k + y^{n+1} x^0 \\
&= x^{n+1} y^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k + y^{n+1} x^0 \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k
\end{aligned}$$

□

Satz 4.1.5 (Bernoullis Ungleichung)**.** *Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$. Dann gilt $\forall n \in \mathbb{N}_0$*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

Beweis. Vollständige Induktion nach n
I.A.: $n = 0$

$$(1+x)^0 = 1 \geq 1 + 0 \cdot x = 1 \quad \checkmark$$

I.S.: $n \to n+1$

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n (1+x) \overset{I.V.}{\geq} (1+nx)(1+x) \\
&= 1 + nx + x + nx^2 \geq 1 + nx + x \\
&= 1 + (n+1)x
\end{aligned}$$

□

4.2 Reelle Zahlenfolgen

Erinnerung: eine reelle Zahlenfolge ist eine Abbildung:

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R},$$

die aber üblicherweise (wenn $a_n = f(n)$), mit

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

notiert wird.

Beispiel 4.2.1.

(a)	$a_n = n$
(b)	$b_n = \frac{1}{n}$
(c)	$c_n = n!$
(d)	$d_n = c^n$ (für $c \in \mathbb{R}$)
(e)	$e_n = n^n$
(f)	$f_n = (-1)^n$

Definition 4.2.2. Eine Folge reeller Zahlen (a_n) heißt **konvergent**, gegen eine reelle Zahl a, wenn folgendes gilt:
Für alle $\varepsilon \geq 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$|a_n - a| \geq \varepsilon$$

In Quantorenschreibweise:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} : \; |a_n - a| < \varepsilon \; \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N}$$

Notation:

$$(a_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$$
$$\lim_{n\to\infty} (a_n) = a$$

Wir nennen $a \in \mathbb{R}$ dann den **Grenzwert** von (a_n)

Wir vereinbaren für unseren angeordneten Körper der reellen Zahlen folgendes Axiom:

Archimedisches Axiom:
Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > x$ ($\forall x \in \mathbb{R} \; \exists n \in \mathbb{N}$: $n > x$)

Bezeichnung:

$$[x] := \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$$

Spreche: „Gaußklammer x“

Bemerkung 4.2.3. *Sei $a_n = \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist (a_n) eine Nullfolge. D.h.:*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n) = 0$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es für $x = \dfrac{1}{\varepsilon} \in \mathbb{R}$ nach Archimedes ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \dfrac{1}{\varepsilon}$.

$$\Rightarrow \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

Dann gilt für alles $n \geq n_0$:

$$-\varepsilon < 0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} (a_n) = 0$$

□

Beispiel 4.2.4. (*a*)

$$a_n = \frac{1}{n^3+n+1}$$

Beh.: $(a_n) \to 0$.
Bew.: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{n^3+n^2+1} \overset{(*)}{<} \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$(*)$ da $n^3+1 > 0$.

Für $n \geq n_0 := \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$

$$\Rightarrow (a_n) \to 0$$

(*b*)

$$a_n = \frac{n^2+1}{n^3-2}$$

Beh.:$(a_n) \to 0$
Bew.: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. $\forall n \geq 2$:

$$0 < \frac{n^2+1}{n^3-2} \overset{(*)}{\leq} \frac{n^2+n^2}{n^3-\frac{1}{2}n^3} = \frac{2n^2}{\frac{1}{2}n^3} = \frac{4}{n} < \varepsilon$$

$(*)$, da $1 < n^2$ und $\frac{1}{2}n^3 \geq \frac{1}{2}8 = 4 > 2$

für $n \geq n_0 = \max\left\{\left[\frac{4}{\varepsilon}\right] + 1, 2\right\}$

$$\Rightarrow (a_n) \to 0$$

(*c*)

$$a_n = (-1)^n$$

Beh.: (a_n) ist divergent, d.h. nicht konvergent.
Bew.:

i) Ist $a \neq \pm 1$, so setze $\varepsilon := \min\{|a-1|, |a+1|\} > 0$
$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$:

$$|a_n - a| \geq \varepsilon$$

$\Rightarrow a$ nicht Grenzwert.

ii) $a = 1$. Setze $\varepsilon = 2$
$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$

$$|a_{2n-1} - 1| = |(-1)^{2n-1} - 1| = |-2| = 2 \geq \varepsilon$$

iii) $a = -1$ ähnlich.

Satz 4.2.5. *Seien (a_n), (b_n) Folgen mit $(a_n) \to a$ und $(b_n) \to b$. Dann gilt:*

(*a*) *Dann konvergiert auch die sogenannte **Summenfolge** (c_n), d.h. $c_n := a_n + b_n$, und zwar gegen $a+b$, kurz:*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) + \lim_{n\to\infty}(b_n)$$

(*b*) *Dann konvergiert auch die **Produktfolge** (d_n), d.h.: $d_n := an_n \cdot b_n$, und zwar gegen $a \cdot b$, also*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) \cdot \lim_{n\to\infty}(b_n)$$

(c) *Sei nun weiter $b \neq 0$. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $b_n \neq 0$ $\forall n \geq n_0$ $(n \in \mathbb{N})$, und dann gilt, dass auch die **Quotientenfolge** $(e_n)_{n \geq n_0}$, d.h.: $e_n := \frac{a_n}{b_n}$, konvergiert, und zwar gegen $\frac{a}{b}$. Also:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty}(a_n)}{\lim_{n\to\infty}(b_n)}$$

Kommentar 4.2.6. Konvergiert eine Folge (a_n) gegen $a \in \mathbb{R}$, so konvergiert auch $(-a_n)$, und zwar gegen $-a$. Es folgt, dass auch die Differenzenfolge $(a_n - b_n)$ für konvergente Folgen (a_n) und (b_n) konvergiert, und zwar gegen:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) - \lim_{n\to\infty}(b_n)$$

denn:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) &= \lim_{n\to\infty}(a_n + (-b_n)) \overset{4.2.5}{=} \lim_{n\to\infty}(a_n) + \lim_{n\to\infty}(-b_n)\\ &= \lim_{n\to\infty}(a_n) + (-\lim_{n\to\infty}(b_n)) = \lim_{n\to\infty}(an) - \lim_{n\to\infty}(b_n)\end{aligned}$$

Beweis des Satzes 4.2.5. (a) Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $n_1 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_1$:

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Es gibt auch ein $n_2 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_2$:

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Sei $n_0 := \max\{n_1, n_2\} \Rightarrow \forall n \geq n_0$

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}\,, \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$\forall n \geq n_0$:

$$\begin{aligned}|(a_n + b_n) - (a + b)| &= |(a_n - a) + (b_n - b)|\\ &\overset{\Delta\text{-ungl.}}{\leq} |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

(b) Da $(b_n) \to b$, existiert ein $n_1 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_1$ gilt:

$$|b_n - b| < 1$$

$$\Rightarrow |b_n| = |b_n - b + b| \leq |b_n - b| + |b| < 1 + |b| \quad \forall n \geq n_1$$

Setze:

$$c := \max\{|b_1|, |b_2|, \dots, |b_{n_1-1}|, 1 + |b|\}$$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$

$$|b_n| \leq c$$

Sei nun $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}\Rightarrow |a_n \cdot b_n - a \cdot b| &= |a_n \cdot b_n - a \cdot b_n + a \cdot b_n - a \cdot b| \leq |(a_n - a)b_n| + |a(b_n - b)|\\ &= |a_n - a| \cdot |b_n| + |a| \cdot |b_n - b|\end{aligned}$$

Wähle jetzt $n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$:

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2c}\,, \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2|a|} \quad \text{für} |a| \neq 0$$

$\Rightarrow n \geq n_0$

$$|a_n b_n - ab| \leq \frac{\varepsilon}{2c} c + |a| \frac{\varepsilon}{2|a|} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Für $a = 0$ wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $\forall n \geq n_0$

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow (a_n \cdot b_n) \to a \cdot b$$

(c) Setze $\varepsilon := \dfrac{|b|}{2} > 0$. Dann $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0$:

$$|b| \leq \underbrace{|b - b_n|}_{<\varepsilon} + |b_n| < \frac{|b|}{2} + |b_n|$$

$$\Rightarrow |b_n| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2} > 0$$

Insbesondere gilt: $b_n \neq 0\ \forall n \geq n_0$.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt $\forall n \geq n_0$

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \left| \frac{b - b_n}{b_n b} \right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n| \cdot |b|} \overset{(*)}{\leq} \frac{|b_n - b|}{\frac{|b|}{2}|b|} = \frac{2}{|b|^2} |b_n - b|$$

$(*)$ gilt, da $|b_n| > \frac{|b|}{2}$.

Sei nun $n_1 \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \geq n_1$ gilt:

$$|b_n - b| < \frac{|b|^2 \varepsilon}{2}$$

Setze schließlich: $n_2 := \max\{n_0, n_1\}$. Dann gilt für alle $n \geq n_2$:

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| < \frac{2}{|b|^2} \cdot \frac{|b|^2 \cdot \varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Also konvergiert $\left(\dfrac{1}{b_n} \right) \to \dfrac{1}{b}$

Also gilt insgesamt:

$$\left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \left(a_n \cdot \frac{1}{b_n} \right) \xrightarrow{(b)} \lim_{n \to \infty} (a_n) \cdot \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{b_n} \right) = \frac{a}{b}$$

□

Kommentar 4.2.7. Eine Folge (a_n) heißt **beschränkt**, wenn es ein $c > 0$ $(c \in \mathbb{R})$ gibt, sodass gilt:

$$|a_n| \leq c$$

Beweisteil zu $b)$ zeigt:

$$(a_n) \text{ konvergent} \quad \Rightarrow \quad (a_n) \text{ beschränkt}$$

Beispiel 4.2.8. Sei $0 \leq r < s$, $r, s \in \mathbb{N}_0$ und $a_0, a_1, \dots, a_r$, $b_0, b_1, \dots, b_s$ in $\mathbb{R}$ mit $a_r \neq 0$ und $b_s \neq 0$. Dann hat das Polynom

$$b_s x^s + b_{s-1} x^{s-1} + \ldots + b_0$$

in $\mathbb{R}$ höchstens s Nullstellen (Euklids Algorithmus). Wähle deshalb $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$b_s n^s + \ldots + b_0 \neq 0 \quad \forall n \geq n_0$$

Betrachte nun die Folge $(x_n)_{n \geq n_0}$

$$x_n = \frac{a_r n^r + \ldots + a_1 n + a_0}{b_s n^s + \ldots + b_1 n + b_0}$$

Dann ist $(x_n) \longrightarrow 0$

Denn:

$$x_n = \frac{a_r \overbrace{n^{r-s}}^{\to 0} + \ldots + a_1 \overbrace{n^{1-s}}^{\to 0} + a_0 \overbrace{n^{-s}}^{\to 0}}{b_s + b_{s-1} \underbrace{n^{-1}}_{\to 0} + \ldots + b_0 \underbrace{n^{-s}}_{\to 0}}$$

$$\Rightarrow \frac{0}{b_s} = 0$$

Definition 4.2.9. Eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert (uneigentlich) gegen unendlich, und wir schreiben:

$$\lim_{n \to \infty} (a_n) = \infty \quad \text{oder} \quad (a_n) \to \infty\ ,$$

wenn folgendes gilt:

Für alle $c > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$a_n > c$$

Beispiel 4.2.10.

(a) $a_n = n$

$\Rightarrow (a_n) \to \infty$, denn: Sei $c > 0$ beliebig, dann folgt mit Archimedes:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : n_0 \geq c$$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0$:

$$n \geq n_0 > c$$

(b) $a_n = \dfrac{n^2 + 1}{n + 2}$

$\Rightarrow (a_n) \to \infty$, denn: Sei $c > 0$

$$\Rightarrow \frac{n^2+1}{n+2} \overset{(*)}{>} \frac{n^2}{n+n} = \frac{n^2}{2n} = \frac{1}{2} n > c$$

$(*)$ gilt für $n \geq 2$

Für $n \geq n_0 := \max\{2, [2c] + 1\}$

(c) Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $q > 1$. Dann gilt für

$$a_n = q^n$$

$(a_n) \to \infty$, denn: Sei $c > 0$ und $h := q - 1$

$$\Rightarrow q^n = (1+h)^n \overset{(*)}{\geq} 1 + n \cdot h > n \cdot h > c$$

$(*)$ gilt aufgrund der Bernoulli-Ungleichung

mit $n \geq n_0 := [\frac{c}{h}] + 1$

Bemerkung 4.2.11. *Sei (a_n) eine* ***Unendlichkeitsfolge*** *(d.h.: $(a_n) \to \infty$). Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $a_n \neq 0$. Die Folge $(b_n)_{n\geq n_0}$ mit $b_n = \frac{1}{a_n}$ ist dann eine Nullfolge.*

Beweis. Zu $c = 1$ wähle ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $a_n > 1$, also insbesondere $a_n \neq 0$ ist, für alle $n \geq n_0$. Sei $\varepsilon > 0$. Setze dann $c := \frac{1}{\varepsilon} > 0$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : a_n > c = \frac{1}{\varepsilon} \\
&\Rightarrow b_n = \frac{1}{a_n} < \varepsilon \\
&\Rightarrow (b_n) \to 0
\end{aligned}$$

□

Beispiel 4.2.12. Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$. Dann ist (q^n) eine Nullfolge. Sei oBdA („ohne Beschränkung der Allgemeinheit“) $0 < q < 1$. Setze $h := \frac{1}{q} > 1$

$$\begin{aligned}
&\overset{(c)}{\Rightarrow} (h^n) \to \infty \\
&\overset{4.2.11}{\Rightarrow} q^n = \frac{1}{h^n} \to 0
\end{aligned}$$

Kommentar 4.2.13. Für zwei Unendlichkeitsfolgen (a_n) und (b_n) sagt man, dass (a_n) schneller als (b_n) wächst, wenn auch die Quotientenfolge

$$\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq n_0} \qquad \text{(für ein } n_0 \in \mathbb{N}\text{)}$$

gegen ∞ konvergiert. (Mit $b_n \neq 0 \ \forall n \geq n_0$)

Beispiel 4.2.14.

(a) (n^2) wächst schneller als (n) ist klar.

(b) Seien p, q Polynome mit den Graden: $\text{grad}(p) = r$ und $\text{grad}(q) = s$ $(s, r \in \mathbb{N})$, und es sei $r > s$. Dann wächst die Folge $(p(n))_{n\in\mathbb{N}}$ schneller, als $(q(n))_{n\in\mathbb{N}}$.
Übung.

(c) Sei $q > 1$ und $k \in \mathbb{N}$. Dann wächst $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ schneller als $(n^k)_{n\in\mathbb{N}}$, denn:
Ist $h := q - 1 > 0$

$$\Rightarrow q^n = (1+h)^n \overset{4.1.4}{=} \sum_{j=0}^{n} \overbrace{\binom{n}{j} h^j}^{>0} \overset{(*)}{\geq} \binom{n}{k+1} h^{k+1}$$

$(*)$ gilt für $n \geq k+1$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{q^n}{n^k} &= \frac{1}{n^k}(1+h)^n \geq \frac{h^{k+1}}{n^k} \frac{\overbrace{(n-k)(n-k+1)\cdot \ldots \cdot n}^{k+1 \text{ Faktoren}}}{(k+1)!} \\
&= \frac{h^{k+1}}{(k+1)!} \frac{n^{k+1} + a_k n^k + \ldots + a_0}{n^k} \overset{(b)}{\to} \infty
\end{aligned}$$

Mit $a_0, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ unabhängig von n.

4.3 Vollständigkeit von $\mathbb{R}$

Problem: Auch $\mathbb{Q}$ ist ein archimedisch angeordneter Körper. Man braucht also (mindestens) ein weiteres Axiom, um die reellen Zahlen zu charakterisieren. Was fehlt ist, dass Lücken gestopft werden müssen.

Beispiel 4.3.1. Die Babylonische Zahlenfolge ist rekursiv so definiert:

$$a_0 = 1\ ,\ \ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$$

Also:

$$a_0 = 1,\ a_1 = \frac{3}{2},\ a_2 = \frac{17}{12}, \ldots$$

Beachte: $1 \leq a_n \leq 2$, denn: $n \to n+1$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{a_n}_{\leq 2} + \underbrace{\frac{2}{a_n}}_{\geq 1}\Big) \leq \frac{1}{2}(2+2) = 2$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{a_n}_{\geq 1} + \underbrace{\frac{2}{a_n}}_{\leq 2}\Big) \leq \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

Angenommen, (a_n) wäre konvergent gegen $c \in \mathbb{R}$. $\Rightarrow c \in [1,2]$, insbesondere $c \neq 0$. Mit den Grenzwertsätzen folgt dann:

$$\begin{aligned} c &= \lim_{n\to\infty}(a_{n+1}) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty}(a_n) + \frac{2}{\lim_{n\to\infty}(a_n)}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(c + \frac{2}{c}\right) \end{aligned}$$

$$c^2 = \frac{1}{2}(c^2+2) = \frac{1}{2}c^2 + 1 \ \Rightarrow\ \frac{1}{2}c^2 = 1 \ \Rightarrow\ c^2 = 2$$

Satz 4.3.2 (Satz des Euklid)**.** *Es gibt keine rationale Zahl c mit $c^2 = 2$*

Beweis. Angenommen doch: Sei oBdA $c > 0$ (sonst gehe zu $-c$ über) mit $c = \frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$. Nach Kürzen können wir annehmen, dass nicht m und n gerade sind.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 2 = c^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 = \frac{m^2}{n^2} \\ &\Rightarrow m^2 = 2n^2 \Rightarrow m^2 \text{ ist gerade } \Rightarrow m \text{ ist gerade} \\ &\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : m = 2k \\ &\Rightarrow 2n^2 = m^2 = (2k)^2 = 4k^2 \\ &\Rightarrow n^2 = 2k^2 \Rightarrow n^2 \text{ ist gerade } \Rightarrow n \text{ ist gerade } \quad \lightning \end{aligned}$$

Es ergibt sich also ein Widerspruch zu der Annahme, dass nicht m und n gerade sind. □

Idee: Es muss ein Axiom her, welches z.B. sicherstellt, dass die Babylonische Folge konvergiert.

Frage: Wie kann ich Konvergenz einer Folge ausdrücken, ohne den Grenzwert zu erwähnen?

Definition 4.3.3. Eine Folge reeller Zahlen heißt **Cauchy-Folge**, wenn folgendes gilt:
Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n, m \geq n_0$ gilt:

$$|a_n - a_m| < \varepsilon$$

Mit anderen Worten:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n, m \geq n_0 : |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Bemerkung 4.3.4. *Ist (a_n) konvergent, so ist (a_n) eine Cauchy-Folge.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ und $a := \lim_{n\to\infty}(a_n)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : \\
&\quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \\
&\Rightarrow \forall n, m \geq n_0 : \\
&\quad |a_n - a_m| = |a_n + a - a - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

□

Wir vereinbaren ab hier das folgende Axiom (welches in $\mathbb{Q}$ nicht gilt, da z.B. die Babylonische Folge eine Cauchy-Folge ist, aber dort nicht konvergiert):

Vollständigkeitsaxiom: Jede Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ ist konvergent.

Das Axiomensystem der reellen Zahlen ist damit abgeschlossen. $(\mathbb{R}, +, \cdot, P)$ ist also ein *archimedisch und vollständig angeordneter Körper.*
Es ist damit im wesentlichen eindeutig bestimmt, d.h.: Ist $(K, +, \cdot, P_K)$ ein beliebiger (anderer) archimedisch und vollständig angeordneter Körper, so gibt es einen (sogar eindeutig bestimmten) Isomorphismus

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

D.h.:

- f ist bijektiv
- $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$
- $f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$
- $x \in P_K \;\Leftrightarrow\; f(x) \in P_K$

4.4 Reihen

Definition 4.4.1.
(a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge (reeller Zahlen). Dann nennt man die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$x_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$$

eine unendliche Reihe

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(b) Konvergiert eine unendliche Reihe

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

gegen ein $s \in \mathbb{R}$, so schreiben wir

$$s = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) =: \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)$$

oft notiert man die unendliche Reihe

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

selbst mit

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)$$

auch wenn sie nicht konvergiert.

Beispiel 4.4.2.

$$a_n = \frac{1}{2^n}$$

also

$$(a_n) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\right)$$

Dann ist

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \dots\right)$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right) = 1 \qquad \text{(Grenzwert)}$$

folgt aus dem folgenden Satz.

Satz 4.4.3 (Geometrische Reihe)**.** *Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$. Dann konvergiert die folgende Geometrische Reihe, und zwar gegen $\frac{1}{1-q}$*

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

Beispiel 4.4.4.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \overset{(*_1)}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 \overset{(*_2)}{=} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 2 - 1 = 2$$

$(*_1)$ Erweitere hier den Index bis $k = 0$ und ziehe diesen nullten Summanden wieder ab $(\frac{1}{2})^0 = 1$
$(*_2)$ Nutze hier die Geometrische Reihe.

Beweis. Nach der Geometrischen Summenformel gilt für $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

Da $(q^{n+1}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ ist folgt mit den Grenzwertsätzen:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-q}$$

(da $q^{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$) □

Bemerkung 4.4.5. *Ist*

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

eine konvergente Folge, so muss

$$(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$$

eine Nullfolge sein.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Wenn $(\sum_{k=1}^n a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, so ist sie Cauchy-Folge.

$$\Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N}\ \forall n, m \geq n_1\ (n > m):$$

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{m} a_k\right| = |x_n - x_m| < \varepsilon$$

Insbesondere gilt für $n = m + 1$:

$$|a_n| = \left|\sum_{k=n}^{n} a_k\right| < \varepsilon$$

für $n \geq n_1 + 1 =: n_0$

$$\Rightarrow (a_n) \to 0$$

□

Achtung: Ist (a_n) eine Nullfolge, so konvergiert die Reihe

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

i.A. **nicht**.

Beispiel 4.4.6 (die harmonische Reihe)**.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

d.h.

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

konvergiert uneigentlich gegen ∞.

Beweis. Für jedes $j \in \mathbb{N}$ ist mit $a_k = \frac{1}{k}$

$$\sum_{k=2^{j-1}+1}^{2^j} a_k \geq 2^{j-1} a_{2^j} = 2^{j-1}\frac{1}{2^j} = \frac{1}{2}$$

Die Summe hat 2^{j-1} Summanden: $2^j - 2^{j-1} = 2^{j-1}(2-1) = 2^{j-1}$. Betrachte in der Ungleichung 2^{j-1}-mal den letzten Summanden, der ja der kleinste aller Summanden ist. Daher gilt die Ungleichung.

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{2^n} a_k = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{k=2^{j-1}+1}^{2^j} a_k\right)}_{\geq \frac{1}{2}} + 1 \geq n \cdot \frac{1}{2} + 1 = \frac{n}{2} + 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

Die Summenzerlegung funktioniert. Man muss nur für j die Werte $1, 2, 3, \ldots$ einsetzen um sich davon zu überzeugen. Die Summe erhöht sich immer um 2er-Potenzen.

□

Definition 4.4.7. Sei $r \in \mathbb{N}$ und $(a_n)_{n \geq -r}$ eine Folge mit **Ziffern** $a_n \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Die Ziffernfolge:

$$\pm a_{-r} a_{-r+1} \dots a_0, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots$$

heißt ein **Dezimalbruch** und bezeichnet die unendliche Reihe

$$\left(\pm \sum_{k=-r} a_k 10^{-k} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

Satz 4.4.8. *Jeder Dezimalbruch*

$$\pm a_{-r} a_{-r+1} \dots a_0, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots$$

konvergiert gegen (genau) eine reelle Zahl x.

$$x = \pm \sum_{k=-r}^{\infty} a_k 10^{-k}$$

Beweis. Wir zeigen, dass die Folge der **Partialsummen** $(x_n)_{n \geq -r}$

$$x_n = \pm \sum_{k=-r}^{\infty} a_k 10^{-k}$$

eine Cauchy-Folge ist, und damit (nach dem Vollständigkeitsaxiom) konvergiert.

Sei also $\varepsilon > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ und $n, m \geq n_0$, $(n, m \in \mathbb{N})$. Sei oBdA $n \geq m$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |x_n - x_m| = \sum_{k=m+1}^{n} a_k 10^{-k} \leq \sum_{k=m+1}^{n} 9 \cdot 10^{-k} = \frac{9}{10^{m+1}} \sum_{k=0}^{n-m-1} 10^{-k} \\ \leq \frac{9}{10^{m+1}} \sum_{k=0}^{\infty} 10^{-k} = \frac{9}{10^{m+1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{10^m} \leq \frac{1}{10^{n_0}} < \varepsilon \end{aligned}$$

□

Kommentar 4.4.9. Sei $n \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$ beliebig. Sei $r \in \mathbb{N}_0$ und $a_n \in \{0, 1, 2, \dots, b-1\}$. Man nennt dann

$$\begin{aligned} &(\pm a_{-r} a_{-r+1} \dots a_0, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots)_b \\ &= \left(\pm \sum_{k=-r}^{n} a_k b^{-k} \right)_{n \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

einen b**-adischen Bruch**. Wie im obigen Satz beweist man:

Jeder b-adische Bruch konvergiert gegen eine reelle Zahl:

$$x = \pm \sum_{k=-r}^{\infty} a_k b^{-k}$$

Kommentar 4.4.10. (a) Man beachte, dass der b-adische Bruch, der gegen eine reelle Zahl konvergiert, nicht eindeutig zu sein braucht. Z.B. hat für $b = 10$ die reelle Zahl 1 sicher die Dezimaldarstellung

$$1,0000000000\dots$$

Aber sie hat auch die Darstellung

$$0,9999999999\ldots$$

denn:

$$\sum_{k=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-k} = 9\left(\sum_{k=0}^{\infty} 10^{-k} - 1\right) \overset{(*)}{=} 9\left(\left(\frac{1}{1-\frac{1}{10}}\right) - 1\right) = 9\left(\frac{10}{9} - 1\right) = 1$$

$(*)$ nutze hier die geometrische Reihe.

(b) Lässt man jedoch überflüssige Nullen vor dem Komma weg und vermeidet „Neuner-Enden“ (bei $b = 10$, sonst „$(b-1)$er-Enden“). So zeigt die Inspektion des folgenden Beweises, dass die Darstellung als b-adischer Bruch eindeutig ist.

Satz 4.4.11. *Sei $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es einen b-adischen Bruch $\sum_{n=-r}^{\infty} a_n b^{-n}$, der gegen x konvergiert.*

Beweis. oBdA: $x > 0$. Da $b > 1$ ist, gilt

$$(b^s)_{s\in\mathbb{N}} \longrightarrow \infty \quad \text{und} \quad \left(b^{-s}\right)_{s\in\mathbb{N}} \longrightarrow 0$$

Es existieren deshalb

$$r := \min\{s \in \mathbb{Z} : b^{s+1} > x\}$$

(ist $r < 0$ so setze $a_0 = \ldots = a_{-r-1} := 0$)

Schritt 1: (Anfang): Unterteile jetzt $[b^r, b^{r+1})$ in $(b-1)$ gleich große Intervalle

$$[b^r, 2b^r)\dot{\cup}[2b^r, 3b^r)\dot{\cup}\ldots[(b-1)b^r, b^{r+1})$$

Nach Def. von r ist

$$b^r \leq x \leq b^{r+1}$$

Also existiert (genau) ein

$$a_{-r} \in \{1, \ldots, b-1\}$$

mit $x \in [a_{-r}b^r, (a_{-r}+1)b^r)$. Setze dann: $x_{-r} := a_{-r}b^r$. Dann ist also:

$$x_{-r} \leq x \leq x_{-r} + b^r$$

Schritt 2: Seien nun $a_{-r}, \ldots, a_n$ $(n \geq -r)$ schon bestimmt und

$$x_n \leq x \leq x_n + b^{-n} \quad \text{mit} \ \ x_n = \sum_{k=-r}^{n} a_k b^{-k}$$

Unterteile nun $[x_n, x_n + b^{-n})$ in b Teilintervalle (jetzt wird die Null zugelassen)

$$[x_n, x_n + b^{-(n+1)})\dot{\cup}[x_n + b^{-(n+1)}, x_n + 2b^{-(n+1)})\dot{\cup}\ldots\dot{\cup}[x_n + (b-1)b^{-(n+1)}, x_n + b^{-n})$$

und bestimme

$$a_{n+1} \in \{0, \ldots, b-1\}$$

dadurch, dass

$$x \in [x_n + a_{n+1}b^{-(n+1)}, x_n + (a_{n+1}+1)b^{-(n+1)})$$

Setze

$$x_{n+1} = \sum_{k=-r}^{n+1} a_k b^{-k} = x_n + a_{n+1}b^{-(n+1)}$$

Es konvergiert dann der b-adische Bruch $\sum_{k=-r}^{\infty} a_k b^{-k}$, also die Folge $(x_n)_{n\geq -r}$ gegen x, denn

$$|x_n - x| < b^{-n} < \varepsilon$$

bei $\varepsilon > 0$ und n groß genug. Also:

$$(x_n) \longrightarrow x$$

$\square$

4.5 $\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$

Erinnere:

(a) Eine Menge M ist abzählbar
$\Leftrightarrow M$ endlich oder $\exists\, f : \mathbb{N} \to M$ bijektiv
$\Leftrightarrow \exists\, f : \mathbb{N} \to M$ surjektiv

(b) Die Vereinigung zweier (oder endlich vieler, sogar abzählbar unendlich vieler) abzählbarer Mengen ist wieder abzählbar.

Satz 4.5.1 (G. Cantor)**.**
(a) $\mathbb{Q}$ *ist abzählbar*
(b) $\mathbb{R}$ *ist überabzählbar*

Beweis.
(a) Es reicht zu zeigen, dass $\mathbb{Q}_+ := \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}$ abzählbar ist. Wir suchen also eine Surjektion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_+$.

$\bullet$	1	2	3	4	5	$\cdots$
1	1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	
2	2/1	2/2	2/3	2/4	2/5	
3	3/1	3/2	3/3	3/4	3/5	
4	4/1	4/2	4/3	4/4	4/5	
5	5/1	5/2	5/3	5/4	5/5	
$\vdots$	$\vdots$					$\ddots$

Setze:

$$\begin{aligned}
f(1) &= \frac{1}{1} = 1\\
f(2) &= \frac{2}{1} = 2\\
f(3) &= \frac{1}{2}\\
f(4) &= \frac{1}{3}\\
f(5) &= \frac{2}{2} = 1\\
f(6) &= \frac{3}{1} = 3\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Also ist f surjektiv.

(b) Angenommen: $\mathbb{R}$ ist abzählbar. Dann ist auch das Intervall $[0, 1)$ abzählbar.
Sei also $f : \mathbb{N} \longrightarrow [0, 1)$ surjektiv.
Behauptung: Das geht nicht.
Sei $x_n = f(n)$ und

$$x_n = 0, a_n^1 a_n^2 a_n^4 a_n^5 \ldots$$

die Dezimaldarstellung von x_n (eindeutig, wenn man auf 9er-Enden verzichtet).
Setze nun

$$y := 0, b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 \ldots$$

mit

$$b_n := \begin{cases} 5 & \text{für } a_n^n \neq 5 \\ 7 & \text{für } a_n^n = 5 \end{cases}$$

Behauptung: $y \neq x_n \; \forall n \in \mathbb{N}$. Denn wäre $y = x_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so würde mit der Eindeutigkeit der Dezimaldarstellung folgen:

$$b_n = a_n^n$$

Dies steht aber im Widerspruch zur Konstruktion.

$\square$

Korollar 4.5.2.
(a) *Es gibt überabzählbar viele irrationale Zahlen*
(b) *In jedem Intervall* $(a, a+\varepsilon)$ $(a \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0)$ *liegen überabzählbar viele reelle Zahlen.*

Satz 4.5.3. *Zwischen je zwei reellen Zahlen liegt stets eine rationale Zahl.*

Beweis. Seien $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$

$$\Rightarrow \exists n > \frac{1}{y-x} \quad \text{Archimedes}$$

Also: $\frac{1}{n} < y - x$.
Sei nun $m := \min\{k \in \mathbb{N} : k > n \cdot x\}$. Dann gilt:

$$\frac{m-1}{n} \leq x < \frac{m}{n}$$

$$\Rightarrow y > x + \frac{1}{n} \geq \frac{m-1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{m}{n}$$

Also:

$$x < \frac{m}{n} < y$$

$\square$

Kommentar 4.5.4. Wiederholte Anwendung des Satzes zeigt: Zwischen je zwei reellen Zahlen liegen sogar unendlich viele rationale Zahlen.

4.6 Häufungspunkte

Erinnere: $(a_n) \longrightarrow a$, wenn in jeder ε-Umgebung $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ fast alle Folgenglieder liegen.

Definition 4.6.1. Sei (a_n) eine Folge. Dann heißt $a \in \mathbb{R}$ ein **Häufungspunkt** von (a_n), wenn gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es unendlich viele Folgenglieder a_n mit $|a_n - a| < \varepsilon$.

Kommentar 4.6.2.
(a) Es dürfen auch noch unendlich viele Folgenglieder außerhalb von $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ liegen.
(b) Eine Folge braucht gar keinen Häufungspunkt zu haben. (z.B. $(a_n) = (n)$).
Sie kann genau einen haben (z.B. wenn sie konvergiert).
Sie kann aber auch mehrere Häufungspunkte haben. Z.B. $(a_n) = ((-1)^n) = (-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots)$ hat die Häufungspunkte -1 und 1.

Definition 4.6.3. Sei (a_n) eine Folge und

$$n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < \ldots$$

Dann heißt

$$(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$$

eine **Teilfolge** von (a_n).

Bemerkung 4.6.4. *Sei (a_n) eine Folge. Dann ist $a \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt von (a_n), genau dann wenn es eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von (a_n) gibt, die gegen a konvergiert,*

$$(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \longrightarrow a$$

Beweis. "$\Leftarrow$" Sei $\varepsilon > 0$. Aufgrund der Konvergenz der Teilfolge gilt:

$$\exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall k \geq k_0 : |a_{n_k} - a| < \varepsilon$$

Also gibt es unendlich viele Folgenglieder

$$a_{n_{k_0}}, a_{n_{(k_0+1)}}, a_{n_{(k_0+2)}}, a_{n_{(k_0+3)}}, \ldots$$

die in das Intervall $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ fallen

"$\Rightarrow$" Übung

□

Satz 4.6.5 (Bolzano-Weierstraß)**.** *Jede beschränkte Folge hat einen Häufungspunkt.*

Beweis. Sei (x_n) eine beschränkte Folge

$$\Rightarrow \exists\, c > 0 : \ |x_n| \leq c$$

Definiere nun rekursiv Intervalle $[a_k, b_k] \subseteq [-c, c]$ $(k \in \mathbb{N})$ mit
(*i*) $[a_k, b_k]$ enthält unendlich viele Folgenglieder x_n,
(*ii*) $[a_{k+1}, b_{k+1}] \subseteq [a_k, b_k]$
(*iii*) $b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{1}{2}(b_k - a_k)$
$k = 1$: Setze $a_1 = -c$, $b_1 = c$
$k \to k+1$: Sei $M = \frac{1}{2}(a_k + b_k)$

$$\Rightarrow [a_k, b_k] = [a_k, M] \cup [M, b_k]$$

Falls $[a_k, M]$ unendlich viele Folgenglieder enthält, setze:

$$a_{k+1} := a_k \ , \quad b_{k+1} := M$$

sonst:

$$a_{k+1} := M \ , \quad b_{k+1} := b_k$$

$\Rightarrow (i), (ii), (iii)$ sind erfüllt.

Vollständigkeit von $\mathbb{R}$: Die Intervallschachtelung $([a_k, b_k])$ hat einen Kern, d.h.: es gibt ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x \in [a_k, b_k]$, $\forall k \in \mathbb{N}$, denn: (a_k) (oder auch (b_k)) ist eine Cauchy-Folge, dann ist $\varepsilon > 0$, $n \geq m$

$$\Rightarrow |a_n - a_m| \leq |b_m - a_m| \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

ist x dann der Grenzwert, so gilt

$$\lim_{k\to\infty}(a_k) = x$$

x ist tatsächlich ein Häufungspunkt, denn

$$a_k \leq x \leq b_k$$

Wählt man zu $\varepsilon > 0$ k so groß, dass $x - \varepsilon \leq a_k < x < b_k \leq x + \varepsilon$. Dann folgt, dass unendlich viele Folgenglieder von x_n liegen in (a_k, b_k), also in $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$.

$$\Rightarrow x \quad \text{ist ein Häufungspunkt}$$

□

Bemerkung 4.6.6. *(x_n) ist konvergent, genau dann wenn (x_n) beschränkt ist, und genau einen Häufungspunkt hat.*

Beweis. "$\Rightarrow$" Aus der Konvergenz von (x_n) folgt direkt, dass (x_n) beschränkt ist.
Nun gilt also $(x_n) \to a$ (da konvergent). Dann ist $a \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt. Angenommen $b \in \mathbb{R}$ wäre ein weiterer Häufungspunkt. OBdA: $b > a$. Wähle $\varepsilon := \frac{b-a}{2}$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \exists n_o \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |x_n - a| < \varepsilon \\
&\Rightarrow x_n < a + \varepsilon = b - \varepsilon \\
&\Rightarrow x_n \notin (b - \varepsilon, b + \varepsilon) \ \ \forall n \geq n_0 \\
&\Rightarrow b \text{ ist kein Häufungspunkt von } (x_n) \quad \lightning
\end{aligned}$$

Dies steht im Widerspruch zu der Annahme, dass b ein Häufungspunkt wäre, und somit ist a der einzige Häufungspunkt.

"$\Leftarrow$" Sei a ein Häufungspunkt von (x_n). **Beh.:** $(x_n) \to a$.

Annahme: $(x_n) \not\to a$.

$\Rightarrow$ Dann existiert ein $\varepsilon_0 > 0$ und eine Teilfolge (x_{n_k}) von (x_n), sodass

$$|x_{n_k} - a| \geq \varepsilon_0$$

Aber (x_{n_k}) ist immer noch beschränkt. Also folgt mit Bolzano-Weierstraß 4.6.5 (auf Seite 53), dass (x_{n_k}) einen Häufungspunkt hat. Nenne diesen Häufungspunkt $b \in \mathbb{R}$, dann gilt: $b \notin (a - \varepsilon_0, a + \varepsilon_0)$, da $(x_{n_k}) \notin [a - \varepsilon_0, a + \varepsilon_0]$.
Also folgt, dass b auch ein Häufungspunkt von (x_n) ist. $\lightning$
Dies steht aber im Widerspruch zu der Voraussetzung, dass es nur einen Häufungspunkt gibt.
Also ist (x_n) konvergent.

□

Definition 4.6.7. Eine Folge (x_n) heißt **monoton wachsend**, wenn gilt:

$$n \leq m \Rightarrow x_n \leq x_m$$

Beispiel 4.6.8. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine reelle Zahlenfolge mit $a_n \geq 0$. Dann ist

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k \right)_{n \in \mathbb{N}_0}$$

die unendliche Reihe monoton wachsend.

Satz 4.6.9. *Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend und beschränkt, so ist (x_n) konvergent.*

Beweis. Nach Bolzano-Weierstraß (4.6.5 auf Seite 53) hat (x_n) einen Häufungspunkt, sagen wir $a \in \mathbb{R}$.
Beh.: (x_n) hat nur einen Häufungspunkt.
Angenommen: b ist auch Häufungspunkt und es gilt: $b \neq a$. Sei oBdA: $a < b$. Da a Häufungspunkt ist, existiert eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit

$$(x_{n_k}) \to a$$

Außerdem existiert eine Teilfolge $(x_{m_l})_{l \in \mathbb{N}}$ mit

$$(x_{m_l}) \to b$$

Sei $\varepsilon := \frac{b-a}{2}$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow \exists k_0 \in \mathbb{N}\ \forall k \geq k_0 : x_{n_k} < a + \varepsilon \\ &\Rightarrow \exists l_0 \in \mathbb{N}\ \forall l \geq l_0 : x_{m_l} > b - \varepsilon = a + \varepsilon\end{aligned}$$

wähle nun $k \geq k_0$ so, dass $n_k \geq m_{l_0}$

$$x_{n_k} < a + \varepsilon = b - \varepsilon < x_{m_{l_0}} \quad \lightning$$

Hier entsteht ein Widerspruch, da die Folge monoton wachsend ist.
$\Rightarrow$ (x_n) hat genau einen Häufungspunkt.

Dann folgt mit Bemerkung 4.6.6 (Seite 54), dass (x_n) konvergent ist. □

Beispiel 4.6.10.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots$$

ist konvergent, denn

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \right)$$

ist offensichtlich monoton wachsend und ist auch nach oben beschränkt, denn:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq 3 \forall n \in \mathbb{N}$$

Beachte nämlich:

$$k! = 1 \cdot 2 \cdot \underbrace{3}_{\geq 2} \cdot \underbrace{4}_{\geq 2} \cdot \dots \cdot \underbrace{k}_{\geq 2} \geq 2^{k-1} \quad \forall k \geq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \leq 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} \\ &< 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

Definition 4.6.11. Die **Eulersche Zahl** $e \in \mathbb{R}$ wird definiert durch:

$$e := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad (\approx 2.718281828459045\dots)$$

Notation: Ist $a_n \geq 0$, so schreibt man häufig auch suggestiv

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_k < \infty$$

falls

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

nach oben beschränkt ist, und damit konvergent.

Beispiel 4.6.12 (Riemansche ζ-Funktion)**.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

Später wird die Riemansche Zeta-Funktion folgendermaßen definiert:

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (s > 1)$$

also:

$$\sum \frac{1}{n^2} = \zeta(2)$$

Zeige:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

ist beschränkt.

Kniff:

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

Beachte:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right)$$

ist "Teleskopsumme", denn

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 1 + \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right)}_{\leq 1} \leq 2$$

Kapitel 5

Funktionen

5.1 Stetigkeit

Definition 5.1.1. Sei $I \in \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$ und

$$f : I \setminus \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

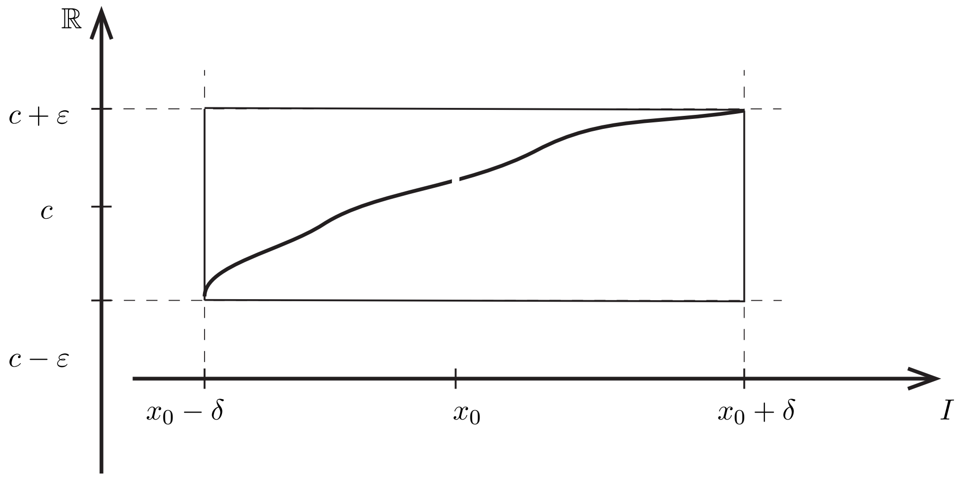
eine Funktion. Dann sagen wir, dass f für x gegen x_0 gegen eine reelle Zahl $c \in \mathbb{R}$ konvergiert und schreiben dafür:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = c \quad \text{oder} \quad f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} c\,,$$

wenn folgendes gilt:

Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, sodass für alle $x \in I \setminus \{x_0\}$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt:

$$|f(x) - c| < \varepsilon$$



Definition 5.1.2. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Interall und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion:
(a) Sei $x_0 \in I$. Dann heißt f **stetig in** x_0, wenn gilt

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Also der Limes $\lim_{x \to x_0} f(x)$ muss also existieren und gleich $f(x_0)$ sein.

(*b*) f heißt **stetig**, wenn f stetig ist, für alle $x \in I$

Beispiel 5.1.3.
(*a*) Sei $c \in \mathbb{R}$, und f die konstante Funktion mit

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ f(x) &= c \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Dann ist f stetig, denn zu $\varepsilon > 0$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$$

Wähle $\delta > 0$ beliebig, z.B. $\delta = 1$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = c = f(x)$$

$\Rightarrow$ f stetig in x_0 (und $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig.)

(*b*) Auch die Identität

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ f(x) &= x \end{aligned}$$

ist stetig.
Denn ist $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig und $\varepsilon > 0$, so gilt für $\delta := \varepsilon$ und alle $x \in \mathbb{R}$ mit $0 < |x - x_0| < \delta$

$$|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

(*c*) Sei f eine Funktion, gegeben durch:

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ f(x) &= \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq 0 \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

dann ist f nicht stetig in $x_0 = 0$, denn $\lim_{x \to x_0}$ existiert zwar, ist aber nicht gleich $f(0) = f(x_0) = 1$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \neq 1 = f(x_0)$$

(*d*) Die Vorzeichenfunktion

$$\begin{aligned} f = \operatorname{sgn} &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \operatorname{sgn}(x) = f(x) &= \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

ist nicht stetig in $x_0 = 0$, denn $\lim_{x \to x_0}$ existiert schon nicht. Ist nämlich $c \in \mathbb{R}$ mit $c \geq 0$, so gilt für alle $x < 0$

$$|\operatorname{sgn}(x) - c| = |-1 - c| \geq 1$$

und daher kann $\operatorname{sgn}(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} c$ nicht gelten.
Ähnlich sieht man: Auch $c \leq 0$ kommt nicht als Limes in Frage.

Bemerkung 5.1.4. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ und $a \in I$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*
i) Die Funktion f ist stetig in a
ii) Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in I mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$

Beweis.

i) $\Rightarrow$ *ii)* Es gilt: f ist stetig in a. Sei nun (x_n) eine konvergente Folge in I mit $\lim_{n\to\infty} = a$. Da f in a stetig ist gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists\, \delta > 0 \; \forall x \in I \setminus \{a\} : |x - a| < \delta : |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Aufgrund der Konvergenz von (x_n) gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \; (n \in \mathbb{N}) : |x_n - a| < \varepsilon$$

Setze nun $\varepsilon =: \delta$. Dann gilt für alle x_n mit $n \geq n_0$ und $x_n \in I \setminus \{a\}$:

$$|x_n - a| < \delta$$

Aufgrund der Stetigkeit von f gilt dann:

$$|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$$

Insgesamt folgt also:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$$

Damit ist die Hinrichtung bewiesen.

ii) $\Rightarrow$ *i)* (Kontraposition). Angenommen f ist nicht stetig. Dann existiert ein $\varepsilon_0 > 0$, sodass für alle $\delta > 0$ ein $x \in I$ existiert mit $|x - a| < \delta$, sodass $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon_0$ ist. Insbesondere soll dies für $\delta_0 := \frac{1}{n}$ gelten. Wähle x_n mit $|x_n - a| < \delta_0 = \frac{1}{n}$ (da $(x_n) \to a$ laut Voraussetzung.). Nun gilt aber

$$|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon_0$$

Also konvergiert $(f(x_n))$ nicht gegen $f(a)$.
Dies steht im Widerspruch zur Voraussetzung. Also muss f schon stetig sein. Damit ist die Äquivalenz gezeigt.

□

Satz 5.1.5. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, sei $x_0 \in I$ und seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ stetig in x_0. Dann gilt:*
(a) Die ***Summenfunktion***

$$f + g : I \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(f + g)(x) := f(x) + g(x)$$

ist auch stetig in x_0.

(b) Die ***Produktfunktion***

$$f \cdot g : I \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$$

ist auch stetig in x_0.

(c) *Sei $g(x_0) \neq 0$. Dann existiert ein $\delta > 0$, sodass $g(x) \neq 0$, für alle $x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta$. Die* ***Quotientenfunktion***

$$\frac{f}{g} : \{x \in I : |x - x_0| < \delta\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$$

ist auch stetig in x_0.

(d) *Seien nun $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle und $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ und $y_0 \in J$, $f(x_0) = y_0$. Seien weiter f stetig in x_0 und g stetig in y_0. Dann ist*

$$g \circ f : I \to \mathbb{R}$$

auch stetig in x_0.

Beweis.
(a) Sei (x_n) eine Folge in I mit $(x_n) \to x_0$.

$$\Rightarrow (f(x_n)) \to f(x_0) \quad \text{und } (g(x_n)) \to g(x_0)$$
$$\Rightarrow \underbrace{(f(x_n) + g(x_n))}_{=(f+g)(x_n)} \to \underbrace{f(x_0) + g(x_0)}_{(f+g)(x_0)} \quad \text{mit Satz 4.2.5}$$

$\Rightarrow f + g$ ist stetig in x_0.

(b) Gleicher Beweis. Ersetze "+" durch "·".

(c) Sei $\varepsilon_0 := \frac{1}{2}|g(x_0)| > 0$.

$$\Rightarrow \exists\, \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon_0$$
$$\Rightarrow |g(x)| > |g(x_0)| - \varepsilon_0 = \varepsilon_0$$

Insbesondere:

$$g(x) \neq 0\ \forall x \in I : |x - x_0| < \delta$$

Jetzt benutze wieder den Folgensatz (4.2.5):

$$(x_n) \to x_0 \ \Rightarrow\ (f(x_n)) \to f(x_0)\ ,\ \ (g(x_n)) \to g(x_0)$$
$$\Rightarrow \left(\frac{f}{g}(x_n)\right) \to \frac{f(x_0)}{g(x_0)} \quad n \geq n_0$$

wobei n_0 so groß gewählt ist, dass

$$x_n \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta),\ \forall n \geq n_0$$

(d) Übung

□

Beispiel 5.1.6.
(a) Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in I$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist auch

$$\lambda \cdot f : I \to \mathbb{R}$$
$$(\lambda \cdot f)(x) := \lambda \cdot f(x)$$

stetig in x_0, wegen (b) des Satzes (5.1.5). (Mit $g(x) = \lambda\ \forall x \in \mathbb{R}$, die Konstante Funktion)

(b) Deshalb ist auch für $f, g : I \to \mathbb{R}$ die **Differenzenfunktion**

$$f - g : I \to \mathbb{R}$$
$$(f-g)(x) := f(x) - g(x)$$

stetig in x_0, wenn f, g stetig in x_0 sind, denn

$$f - g = f + (-1)g$$

Achtung: $\bar{f}(I) := \{f : I \to \mathbb{R} \text{ Funktion}\} =: \mathrm{Abb}(I, \mathbb{R})$ ist mit "+" und "·" kein Körper (nur ein Ring), da man nicht durch Funktionen $g \neq 0$ dividieren kann, die Nullstellen haben.

(c) Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_0, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ sowie $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Polynomfunktion

$$p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$$

Dann ist p stetig.

(d) Seien p und q Polynomfunktionen, $q \neq 0$. Sei weiter

$$D := \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$$

(Dann ist D endliche Vereinigung von Intervallen, da q höchstens endlich viele Nullstellen hat (Division mit Rest)). Dann heißt

$$f : D \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

eine **rationale Funktion**. Sie sind also auch alle stetig. (Da, wo sie definiert sind!)

Lemma 5.1.7. *Sei (x_n) eine Folge mit $x_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ und $(x_n) \to a$. Dann ist $a \geq 0$.*

Beweis. Angenommen $a < 0$. Setze $\varepsilon := |a| > 0$

$$\Rightarrow \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : |x_{n_0} - a| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow x_{n_0} = x_{n_0} - a + a < |a| + a = -a + a = 0 \quad ↯$$

Hier kommt es zu einem Widerspruch, da $x_{n_0} < 0$ nach Voraussetzung falsch ist.

$$\Rightarrow a \geq 0$$

□

Satz 5.1.8 (Zwischenwertsatz)**.** *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig $(a < b)$ sowie $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit*

$$f(\xi) = 0$$

Beweis. Intervalle $I_n = [a_n, b_n]$ mit den Eigenschaften
- (i) $I_{n+1} \subseteq I_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$
- (ii) $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b - a)$
- (iii) $f(a_n) \leq 0$, $f(b_n) \geq 0$

durch Intervallschachtelung
$$n = 0: \quad a_0 = a, \ \ b_0 = b$$
$n \to n+1$: setze $M := \frac{1}{2}(a_n + b_n)$.
Falls $f(M) \geq 0$ ist, setze
$$a_{n+1} := a_n, \ b_{n+1} := M$$
Falls $f(M) < 0$ ist, setze
$$a_{n+1} := M, \ b_{n+1} := b_n$$
i), *ii)*, *iii)* sind nach Konstruktion erfüllt.

$\Rightarrow (I_n)$ ist eine Intervallschachtelung.

Vollständigkeit von $\mathbb{R}$
$\Rightarrow I_n$ hat einen Kern ξ, d.h.:
$$\xi \in \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$$
und es folgt:
$$0 < \xi - a_n \leq b_n - a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$
$$\Rightarrow (a_n) \to \xi$$
und
$$\Rightarrow (b_n) \to \xi$$
Da f stetig in ξ folgt: $(f(a_n)) \to f(\xi)$, $(f(b_n)) \to f(\xi)$.
Mit dem Lemma(5.1.7):
$$\begin{aligned} f(a_n) \leq 0 &\Rightarrow f(\xi) \leq 0 \\ f(b_n) \geq 0 &\Rightarrow f(\xi) \geq 0 \\ &\Rightarrow f(\xi) = 0 \end{aligned}$$

□

Beispiel 5.1.9. Betrachte
$$f : [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f(x) = x^2 - 2$$
Dann ist f sicher stetig und
$$f(1) = 1 - 2 = -1 < 0$$
$$f(2) = 4 - 2 = 2 > 0$$
Also gibt es ein $\xi \in (1,2)$ mit $f(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi^2 = 2$

Beachte. $f : [1,2] \cap \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ *hätte keine Nullstelle in* $[1,2] \cap \mathbb{Q}$*, d.h. über* $\mathbb{Q}$ *gilt der Zwischenwertsatz nicht (da* $\mathbb{Q}$ *nicht vollständig ist).*

Definition 5.1.10. $f : I \to \mathbb{R}$ **streng monoton wachsend** $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
$\Rightarrow f$ ist injektiv.

Satz 5.1.11. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend. Sei $\alpha := f(a)$ und $\beta := f(b)$. Es ist dann*

$$Bild(f) = f([a, b]) = \{f(x) \in \mathbb{R} : x \in [a, b]\} = [\alpha, \beta]$$

die Abbildung $g : [a, b] \to [\alpha, \beta]$ mit $g(x) := f(x)$, ist bijektiv und ihre Umkehrung, $g^{-1} : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ ist wieder stetig und monoton wachsend.

Beweis. Injektivität von f ist klar.
Beh.: $\mathrm{Bild}(f) = [\alpha, \beta]$

Aus der Monotonie folgt: Wenn $a \leq x \leq b$:

$$\Rightarrow \alpha = f(a) \leq f(x) \leq f(b) = \beta$$

$$\Rightarrow \mathrm{Bild}(f) \subseteq [\alpha, \beta]$$

Z.z.: $[\alpha, \beta] \subseteq \mathrm{Bild}(f)$.
Sei $\gamma \in (\alpha, \beta)$ beliebig. Betrachte

$$\begin{aligned} h &: [a, b] \to \mathbb{R} \\ h(x) &= f(x) - \gamma \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ h ist stetig (mit Satz 5.1.5).

$$\begin{aligned} h(a) &= f(a) - \gamma = \alpha - \gamma < 0 \\ h(b) &= f(b) - \gamma = \beta - \gamma > 0 \end{aligned}$$

Mit dem Zwischenwertsatz (5.1.8) folgt: $\exists\, \xi \in (a, b)$

$$\begin{aligned} & f(\xi) - \gamma = h(\xi) = 0 \\ \Rightarrow & f(\xi) = \gamma \\ \Rightarrow & \gamma \in \mathrm{Bild}(f) \\ \Rightarrow & \mathrm{Bild}(f) = [\alpha, \beta] \end{aligned}$$

Damit folgt, dass $g : [a, b] \to [\alpha, \beta]$ bijektiv ist.

Beh.: $g^{-1}[\alpha, \beta] \to [a, b]$ ist stetig (und monoton wachsend).
Sei also $y_0 \in [\alpha, \beta]$ und $(y_n) \to y_0$ und $x_n := g^{-1}(y_n)$

Beh.: $(x_n) \to g^{-1}(y_0) =: x_0$
Da $(x_n) \in [a, b]$ liegt, folgt, dass es einen Häufungspunkt $\tilde{x_0}$ gibt.
Mit dem Lemma 5.1.7 folgt: $\tilde{x_0} \in [a, b]$. Dann gilt mit der Stetigkeit von f:

$$f(\tilde{x_0}) = f\left(\lim_{n\to\infty}(x_n)\right) = \lim_{n\to\infty}(f(x_n)) = \lim_{n\to\infty}(y_n) = y_0$$

da f injektiv ist und $f(x_0) = y_0$ folgt:

$$x_0 = \tilde{x_0}$$

$\Rightarrow$ (x_n) hat genau einen Häufungspunkt. Da sie auch beschränkt ist, folgt:

$$(x_n) \to x_0$$

□

Beispiel 5.1.12. Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathrm{pot}_k : [0,\infty) &\longrightarrow [0,\infty) \\ \mathrm{pot}_k(x) &= x^k \end{aligned}$$

streng monoton wachsend, stetig und bijektiv, denn:
Sei $c \geq 0$ beliebig. Wähle dann $b > 1$ mit $b^k > c$ (funktioniert, da $\lim_{b\to\infty} b^k = \infty$). Weil $f : [0,b] \to [0,b^k]$ stetig, streng monoton wachsend folgt:

$$\exists\, \xi \in [0,b] : f(\xi) = c$$

Definition 5.1.13. Sei $k \in \mathbb{N}$. Die Umkehrung von $\mathrm{pot}_k : [0,\infty) \to [0,\infty)$

$$\sqrt[k]{\ } := \mathrm{pot}_k^{-1} : [0,\infty) \to [0,\infty)$$

heißt **k-te Wurzel**.

Kommentar 5.1.14. (*a*) Es ist also

$$\sqrt[k]{\ } : [0,\infty) \to [0,\infty)$$

monoton wachsend und auch stetig.

(*b*) Man beachte, dass wir nun bewiesen haben:
Zu $y \geq 0$ existiert genau ein $x \geq 0$ mit $x^k = y$, nämlich $x = \sqrt[k]{y}$.

5.2 Supremum und Infimum

Definition 5.2.1. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$. Es heißt $b \in \mathbb{R}$ **Supremum** von D, wenn folgendes gilt:
(*i*) $\forall x \in D$: $x \leq b$
(*ii*) Ist $c \in \mathbb{R}$ mit $x \leq c$, $\forall x \in D \Rightarrow b \leq c$

Kommentar 5.2.2. (*a*) Bedingung (*i*) bezeichnet man als **obere Schranke** für D. Sind (*i*) und (*ii*) erfüllt, so spricht man von einer **kleinsten oberen Schranke**.
(*b*) Ähnlich definiert man ein **Infimum** von D als **größte untere Schranke** von D.
(*c*) Im Falle, dass $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Supremum b besitzt, ist es eindeutig bestimmt (folgt sofort aus (*ii*)). Wir notieren es dann mit

$$b =: \sup(D)$$

Entsprechend:

$$a =: \inf(D)$$

(*d*) Ist D nach oben unbeschränkt (d.h.: $\forall c > 0\ \exists\, x \in D : x > c$), so vereinbaren wir:

$$\sup(D) := +\infty$$

Im Falle $D = \emptyset$ vereinbaren wir

$$\sup(D) := -\infty$$

Beispiel 5.2.3. Sei

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$$

und $b := \sqrt{2}$
Beh.: $\sup(D) = \sqrt{2} = b$.
Bew.: Dies gilt, denn:
(*i*) Für $x \in D$ und $x \geq 0$ ist $x^2 < 2 = b^2 \Rightarrow x = \sqrt{x^2} < \sqrt{b^2} = b$ (Monotonie von $\sqrt[2]{\ }$)
Also ist b obere Schranke für D.

(ii) Sei nun $c \in \mathbb{R}$ mit $c < \sqrt{2}$. Wähle $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon < \sqrt{2} - c$.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow c + \varepsilon < \sqrt{2} \\ &\Rightarrow (c+\varepsilon)^2 < (\sqrt{2})^2 = 2 \quad \text{(Monotonie von pot}_k\text{)} \\ &\Rightarrow c + \varepsilon \in D \end{aligned}$$

und damit ist c keine obere Schranke von D ($\Rightarrow ii)$)

$$\Rightarrow \sup(D) = \sqrt{2}$$

Satz 5.2.4. *Jede nach oben beschränkte nichtleere Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$ hat ein Supremum.*

Beweis. Da D nach oben beschränkt ist

$$\Rightarrow \exists\, d \in \mathbb{R} : \forall x \in D : x \leq d$$

Definiere nun durch Intervalhalbierung rekursiv eine Intervallschachtelung $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $I_n = [a_n, b_n]$, mit
(i) $x \leq b_n$ $\forall x \in D$
(ii) $\exists\, x \in D$: $x > a_n$
$n = 1$: Setze

$$b_1 := d.$$

Da $D \neq \emptyset$ ist, existiert ein $x_0 \in D$. Setze

$$a_1 := x_0 - 1$$

$n \to n+1$: Setze

$$M = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$$

1\. Fall: Ist nun $x \leq M$ $\forall x \in D$, so setze

$$a_{n+1} := a_n\,, \quad b_{n+1} := M$$

2\. Fall: Es existiert ein $x \in D$ mit $x > M$, so setze

$$a_{n+1} := M\,, \quad b_{n+1} := b_n$$

Offenbar ist $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung, also $I_{n+1} \subseteq I_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. Sei nun $b \in \mathbb{R}$ der Kern von $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$b \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$$

(Vollständigkeit von $\mathbb{R}$.)
Es folgt:

$$(a_n) \to b\,, \quad (b_n) \to b$$

Dann ist:

$$\begin{aligned} b_n - x \overset{i)}{\geq} 0 \Rightarrow b - x &\overset{5.1.7}{=} \lim_{n\to\infty}(b_n - x) \geq 0 \quad \forall x \in D \\ &\Rightarrow b \geq x \quad \forall x \in D \end{aligned}$$

Andererseits: Ist $c \in \mathbb{R}$ mit $c < b$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N} : c < a_n < b \quad \text{(da } (a_n) \to b\text{)} \\ &\overset{(ii)}{\Rightarrow} \exists\, x \in D : x > a_n > c \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ c ist keine obere Schranke

$$\Rightarrow b = \sup(D)$$

□

Kommentar 5.2.5. (*a*) Man beachte, dass der Satz die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ wesentlich benutzt. Z.B.: hat

$$D_{\mathbb{Q}} := \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$$

kein Supremum in $\mathbb{Q}$.
In vielen Büchern wird obiger Satz als Vollständigkeitsaxiom geführt. Er ist äquivalent zu unserem Vollständigkeitsaxiom zusammen mit dem Archimedischen Axiom.

(*b*) Mit diesem Satz und den vorherigen Vereinbarungen hat nun jede Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$ ihr Supremum in $[-\infty, +\infty] = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$$\sup(D) \in [-\infty, +\infty]$$

Entsprechend

$$\inf(D) \in [-\infty, +\infty]$$

Beachte auch:

$$\inf(D) = -\sup(-D)$$

für

$$-D = \{-x \in \mathbb{R} : x \in D\}$$

(*c*) Man beachte auch, dass das Supremum einer Menge $D \subseteq \mathbb{R}$ Element von D sein kann oder auch nicht. Im Beispiel

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$$

ist $\sqrt{2} = \sup(D) \notin D$, da $(\sqrt{2})^2 = 2$.
Andererseits gilt für

$$\bar{D} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 2\},$$

dass $\sup(\bar{D}) = \sqrt{2}$, und hier gilt:

$$\sup(\bar{D}) \in \bar{D}$$

Im Falle, dass $\sup(D) \in D$ ist, bezeichnet man $\sup(D) \in \mathbb{R}$ auch als **Maximum** von D und schreibt:

$$\max(D) = \sup(D), \quad \text{falls } \sup(D) \in D$$

$$\Rightarrow x \in D : x \leq \max(D)$$

Achtung: Nicht jede nach oben beschränkte Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$ hat ein Maximum!

Entsprechend:

$$\min(D) := \inf(D) \quad \text{falls } \inf(D) \in D$$

Satz 5.2.6 (Weierstraß)**.** *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert ein $\xi \in [a, b]$, sodass für alle $x \in [a, b]$ gilt:*

$$f(x) \leq f(\xi)$$

Beweis. Sei

$$c := \sup\{f(x) \in \mathbb{R} : x \in [a, b]\} \in (-\infty, +\infty]$$

$\Rightarrow \exists$ Folge (x_n) in $[a, b]$ mit

$$f(x_n) \to c \quad \text{für } n \to \infty$$

(Maximalfolge)
$\overset{4.6.5}{\Rightarrow}$ (x_n) hat einen Häufungspunkt $\xi \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \exists$ Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von (x_n) mit

$$(x_{n_k}) \to \xi$$

$$\overset{5.1.7}{\Rightarrow} \xi \in [a, b]$$

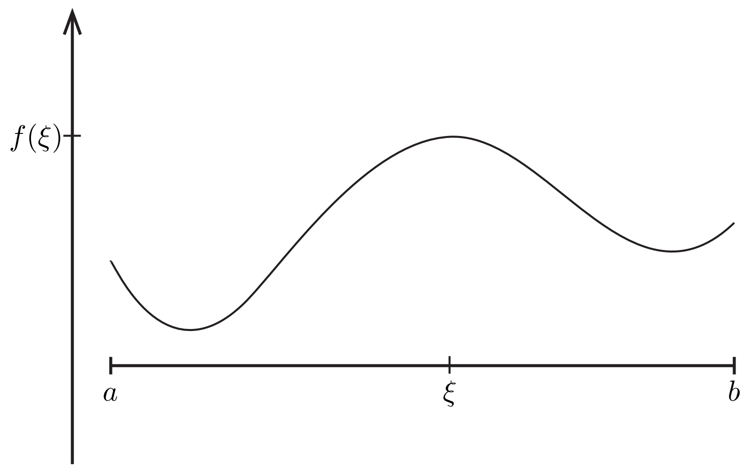
Mit der Stetigkeit folgt dann:

$$f(\xi) = f\left(\lim_{k\to\infty}(x_{n_k})\right) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = c$$

Da c obere Schranke von Bild(f) ist folgt $\forall x \in [a, b]$:

$$f(x) \leq c = f(\xi)$$

□



Kommentar 5.2.7.

(a) In diesem Fall hat also

$$\text{Bild}(f) = \{f(x) \in \mathbb{R} : x \in [a, b]\}$$

ein Maximum, denn

$$\sup(\text{Bild}(f)) = f(\xi) \in \text{Bild}(f)$$

Eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nimmt also ihr Supremum an. Natürlich auch ihr Infimum, denn

$$\inf(f) = -\sup(-f)$$

Hier bedeutet für $f : I \to \mathbb{R}$

$$\sup(f) := \sup(\text{Bild(f)})$$

(b) Beachte, dass es wichtig ist, dass $I = [a, b]$ **beschränkt** und abgeschlossen ist, denn z.B.

(i) $I = [0, \infty) \Rightarrow f : I \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ nimmt ihr Supremum $(+\infty)$ nicht an.

(ii) $I = (0, 1] \Rightarrow f : I \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ nimmt ihr Supremum $(+\infty)$ nicht an.
Auch $f : I \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x$ nimmt ihr Supremum $\sup(f) = 1$ nicht an.

(iii) Insbesondere ist also ein stetiges $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stets beschränkt.

5.3 Gleichmäßige Stetigkeit

Definition 5.3.1. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Dann heißt eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ **gleichmäßig stetig**, wenn folgendes gilt:
Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, sodass für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $|x_2 - x_1| < \delta$ gilt:

$$|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$$

Kommentar 5.3.2. Bei Stetigkeit von $f : I \to \mathbb{R}$ braucht man zu gegebenem $\varepsilon > 0$ und x nur ein $\delta > 0$ zu finden, welches von ε und x abhängen darf, $\delta = \delta(\varepsilon, x)$, sodass für alle $y \in I$ mit $|y - x| < \delta$ gilt:

$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon$$

Bei gleichmäßiger Stetigkeit muss man zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, welches nur von ε abhängen darf, $\delta = \delta(\varepsilon)$, suchen, sodass für alle $x, y \in I$ mit $|y - x| < \delta$ gilt:

$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon$$

Mit anderen Worten:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in I \forall y \in I : |y - x| < \delta : |f(y) - f(x)| < \varepsilon$$

Beispiel 5.3.3. (*a*) Betrachte $f = \mathrm{pot}_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig, denn ist $\varepsilon > 0$, so existiert zwar zu jedem $x_0 \in \mathbb{R}$ ein $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$, sodass für $|x - x_0| < \delta$ gilt, dass $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ ist, aber:
Man kann δ nicht unabhängig von x_0 wählen! (Übung.)

(*b*) Sei $R > 0$ fest und $f : [-R, +R] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Dann ist f gleichmäßig stetig, denn ist $\varepsilon > 0$, so ist

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |x_2^2 - x_1^2| = |x_1 + x_2| \cdot |x_2 - x_1| \leq (|x_1| + |x_2|) \cdot |x_2 - x_1| \leq 2R \cdot |x_2 - x_1| < \varepsilon$$

falls $|x_2 - x_1| < \delta := \frac{\varepsilon}{2R}$

(*c*) Natürlich ist eine gleichmäßig stetige Funktion immer stetig.

Satz 5.3.4. *Sei*

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$

stetig. Dann ist f auch gleichmäßig stetig.

Beweis. Angenommen nicht.

$$\Rightarrow \exists \varepsilon_0 > 0 \; \forall \delta > 0 \; \exists x, y \in [a, b] : |y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| \geq \varepsilon$$

Insbesondere für $\delta_n := \frac{1}{n}$ existieren also $x_n, y_n \in [a, b]$ mit $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ (also $\lim_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$) aber $|f(y) - f(x)| \geq \varepsilon_0$
$\overset{4.6.5}{\Rightarrow}$ (x_n) hat Häufungspunkt $\xi \in [a, b]$. Sei also (x_{n_k}) eine Teilfolge mit

$$\lim_{k\to\infty} (x_{n_k}) = \xi.$$

Dann gilt auch

$$\lim_{k\to\infty} (y_{n_k}) \to \xi,$$

denn

$$\lim_{k\to\infty} (y_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} \Big(\underbrace{(y_{n_k} - x_{n_k})}_{\to 0} + \underbrace{(x_{n_k})}_{\to \xi} \Big)$$

Aber dann ist wegen der Stetigkeit von f in ξ

$$\begin{aligned} 0 = f(\xi) - f(\xi) &= f\Big(\lim_{k\to\infty} (x_{n_k})\Big) - f\Big(\lim_{k\to\infty} (y_{n_k})\Big) \\ &= \lim_{k\to\infty} \Big(f(x_{n_k})\Big) - \lim_{k\to\infty} \Big(f(y_{n_k})\Big) \\ &= \lim_{k\to\infty} \Big(f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})\Big) \\ &\geq \varepsilon_0 \quad \lightning \end{aligned}$$

Dies steht aber im Widerspruch zu $\varepsilon_0 > 0$.

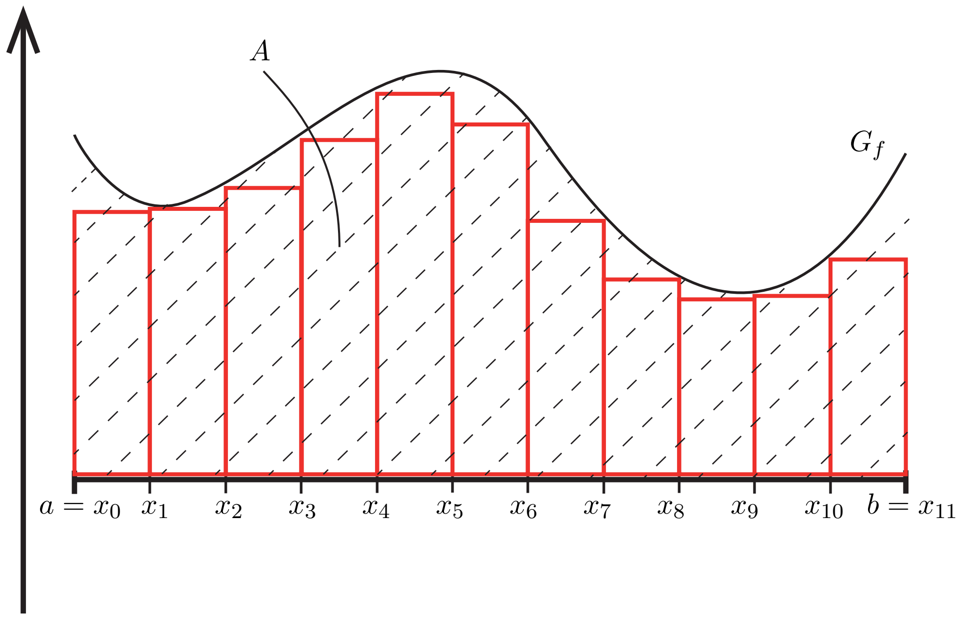
$\Rightarrow f$ ist gleichmäßig stetig! $\square$

Kapitel 6

Integrierbare Funktionen

6.1 Integrieren

Motivation: Es soll die Fläche A zwischen dem Graphen einer (positiven) Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und der x-Achse bestimmt werden.



Idee: Approximiere A durch Rechtecke mit immer kleineren horizontalen Seiten.

Definition 6.1.1. Eine **Zerlegung** von $[a, b]$ ist ein Tupel

$$Z = (x_0, \ldots, x_n) \quad (n \in \mathbb{N})$$

mit

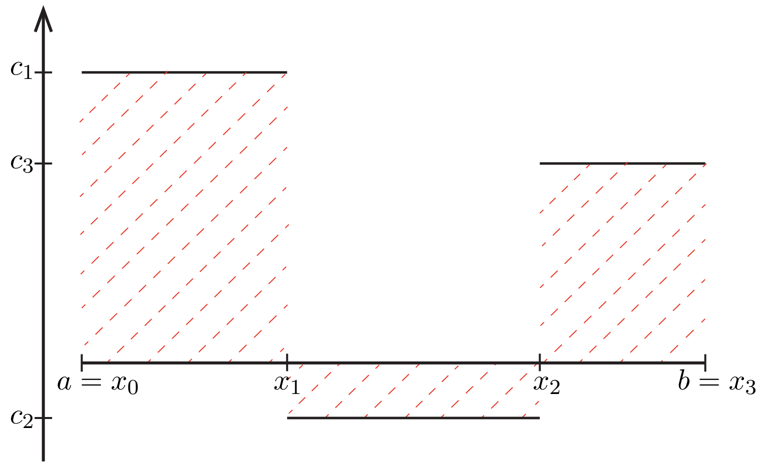
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

Es heißt dann

$$\delta := \max\{x_i - x_{i-1} \in \mathbb{R} : i = 1, \ldots, n\}$$

die **Feinheit** der Zerlegung.

Definition 6.1.2. Eine Funktion
$$\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$$
heißt **Treppenfunktion**, wenn es eine (geeignete) Zerlegung $Z = (x_0, \dots, x_n)$ von $[a,b]$ gibt und reelle Zahlen $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, sodass gilt:
$$\varphi(x) = c_i \quad \text{für } x_{i-1} < x < x_i \quad i = 1, \dots, n$$



Definition 6.1.3. Sei $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion. Sei $Z = (x_0, \dots, x_n)$ eine Zerlegung und $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ derart, dass $\varphi(x) = c_i$ ist, für $x_{i-1} < x < x_i$ $(i = 1, \dots, n)$.
Wir definieren das **Integral** von φ durch
$$\int_a^b \varphi(x)dx = \sum_{i=1}^n \underbrace{c_i}_{=\varphi(x)} \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{=\Delta x}$$

Kommentar 6.1.4.
(*a*) Strengenommen müsste man noch zeigen, dass die Definition nicht von der Auswahl (Z, c) $(c = c_1, \dots, c_n)$ abhängt, d.h. ist (Z', c') eine andere Wahl, so muss man zeigen:
$$\sum_{i=1}^n c_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{j=1}^m c'_j(x'_j - x'_{j-1})$$
(Übung)
(*b*) Beachte, dass dort wo $\varphi(x) = c_i < 0$ ist $(x_{i-1} < x < x_i)$ der Flächeninhalt $c_i(x_i - x_{i-1})$ negativ gezählt wird.

Bemerkung 6.1.5. *Ist $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ Treppenfunktion, $\xi \in (a,b)$. Dann gilt:*
$$\varphi|_{[a,\xi]} \quad \textit{und} \quad \varphi|_{[\xi,b]}$$
sind auch Treppenfunktionen und es gilt:
$$\int_a^b \varphi(x)dx = \int_a^\xi \varphi(x)dx = \int_\xi^b \varphi(x)dx$$

Beweis. (Übung) Einfach die Definition des Integrals der Treppenfunktion anwenden und die Summe auseinander ziehen. □

Satz 6.1.6. *Seien $a < b \in \mathbb{R}$, $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ Treppenfunktionen und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*
(*a*) *$\varphi + \psi$ ist Treppenfunktion und es gilt:*

$$\int_a^b (\varphi + \psi)(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx + \int_a^b \psi(x)dx$$

(*b*) *$\lambda \cdot \varphi$ ist Treppenfunktion und es gilt:*

$$\int_a^b (\lambda \cdot \varphi)(x)dx = \lambda \int_a^b \varphi(x)dx$$

(*c*) *Ist $\varphi \leq \psi$ (d.h.: $\varphi(x) \leq \psi(x)\ \forall\, x \in [a, b]$), so ist auch*

$$\int_a^b \varphi(x)dx \leq \int_a^b \psi(x)dx$$

Beweis.
(*a*) Sei Z_1 eine Zerlegung für die Treppenfunktion φ und Z_2 eine Zerlegung für die Treppenfunktion ψ. Dann gibt es eine gemeinsame Verfeinerung Z von Z_1 und Z_2, d.h.: Die Punkte von Z_1 und Z_2 sind auch Punkte von Z. Sei also $Z = (x_0, \dots, x_n)$ und $c = (c_1, \dots . c_n)$ und $d = (d_1, \dots, d_n)$, sodass $\varphi|_{(x_{i-1}, x_i)} = c_i$, also

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \sum_{i=1}^n c_i(x_i - x_{i-1})$$

und $\psi|_{(x_{i-1}, x_i)} = d_i$, also

$$\int_a^b \psi(x)dx = \sum_{i=1}^n d_i(x_i - x_{i-1}).$$

Jetzt ist klar, dass auch $\varphi + \psi$ Treppenfunktion ist, denn

$$(\varphi + \psi)|_{(x_{i-1}, x_i)} = c_i + d_i$$

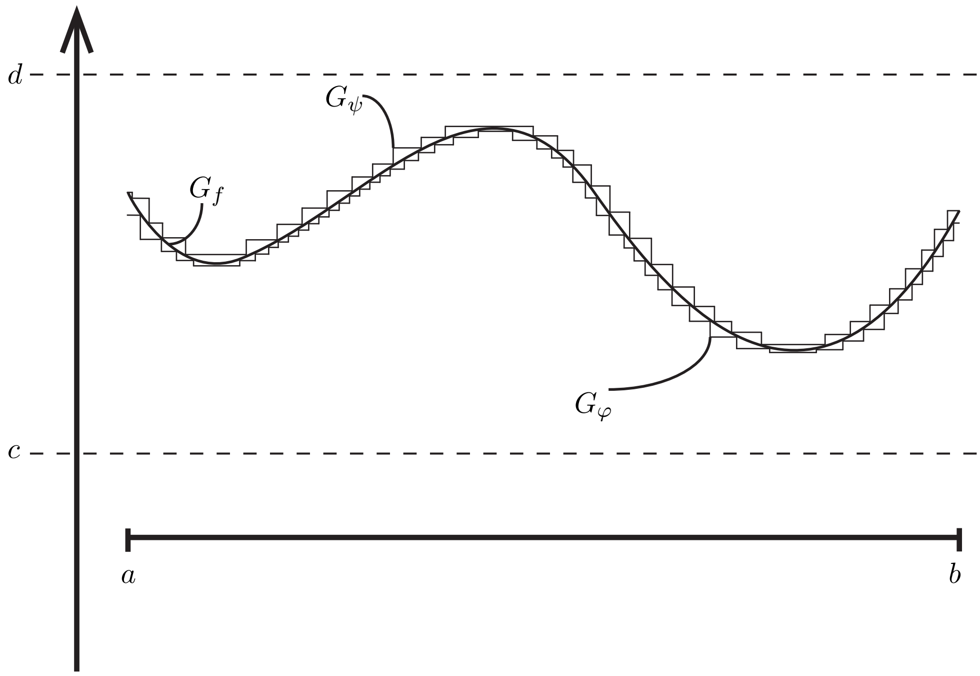
also

$$\begin{aligned}\int_a^b (\varphi + \psi)(x)dx &= \sum_{i=1}^n (c_i + d_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n c_i(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^n d_i(x_i - x_{i-1}) \\ &= \int_a^b \varphi(x)dx + \int_a^b \psi(x)dx\end{aligned}$$

(*b*) ähnlich
(*c*) (Übung) (Ansatz: Integral als Summe schreiben. Dann sind die Funktionswerte immer durch $\geq$ abschätzbar.) □

Definition 6.1.7. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt.
(*a*) Das **Unterintegral** von f von a bis b ist definiert als:

$$\int_{a\,*}^b f(x)dx := \sup\left\{\int_a^b \varphi(x)dx : \varphi \text{ ist Treppenfunktion und } \varphi \leq f\right\}$$



(b) Das **Oberintegral** von f von a bis b ist definiert als:

$$\int_a^{b\,*} f(x)dx := \inf\left\{\int_a^b \psi(x)dx : \psi \text{ ist Treppenfunktion und } \psi \geq f\right\}$$

Notation:

$$\mathcal{F}([a,b]) = \mathcal{F}[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : \text{ Funktion}\} = \text{Abb}([a,b],\mathbb{R})$$
$$\mathcal{T}([a,b]) = \mathcal{T}[a,b] = \{\varphi : [a,b] \to \mathbb{R} : \text{ ist Treppenfunktion}\}$$
$$\mathcal{C}([a,b]) = \mathcal{C}[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : \ f \text{ ist stetig}\}$$

Beachte. *$\mathcal{F}[a,b]$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\mathcal{T}[a,b]$ und $\mathcal{C}[a,b]$ sind Untervektorräume. Für das Integral von Treppenfunktionen*

$$\int : \mathcal{T}[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\varphi \longmapsto \int \varphi = \int_a^b \varphi(x)dx$$

gilt laut Satz 6.1.6, dass

$$\int : \mathcal{T}[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

linear ist (und positiv, d.h.: $\varphi \geq 0 \Rightarrow \int \varphi \geq 0$)

Kommentar 6.1.8.
(a) Da f nach unten beschränkt ist, gibt es also ein $c \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x) \geq c, \ \forall\, x \in [a,b]$$

Deshalb ist $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = c$ $(\forall x \in [a,b])$, in $\mathcal{T}[a,b]$ mit $\varphi \leq f$. Also ist

$$D = \left\{\int \psi : \psi \in \mathcal{T}[a,b],\ \psi \leq f\right\}$$

nicht-leer und $\int \varphi = c(b-a) \in D$.

$$\Rightarrow \int_* f(x)dx \geq c(b-a)$$

Da f auch nach oben beschränkt ist, existiert auch ein $d \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x) \leq d,\ \forall\ x \in [a,b]$$

Ist nun $\varphi \in \mathcal{T}[a,b]$, $\varphi(x) = d$ ($\forall x \in [a,b]$), so gilt für alle $\psi \in \mathcal{T}[a,b]$ mit

$$\psi \leq f,\ f \leq \varphi \Rightarrow \psi \leq \varphi$$

$$\int \psi \leq \int \varphi = d(b-a)$$

$$\Rightarrow \sup\left\{\int \psi : \psi \in \mathcal{T}[a,b],\ \psi \leq f\right\} \leq d(b-a)$$

Also ist

$$\int_{a\,*}^b f(x)dx$$

tatsächliche eine reelle Zahl. Und man hat die Abschätzung

$$c(b-a) \leq \int_* f \leq d(b-a)$$

Genauso sieht man:

$$c(b-a) \leq \int^* f \leq d(b-a)$$

(b) Es gibt also stets eine Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{T}$ mit $\varphi_n \leq f$ und

$$\left(\int \varphi_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \nearrow \int_* f,$$

wobei $(a_n) \nearrow a$ bedeuten möge, dass $(a_n) \to a$ und (a_n) monoton wachsend ist. Entsprechend gibt es eine Folge $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{T}$ mit $\psi_n \geq f$ und

$$\left(\int \psi_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \searrow \int^* f$$

(c) Es ist stets

$$\int_* f \leq \int^* f$$

denn sind (φ_n) und (ψ_n) Folgen mit

$$\varphi_n \leq f \leq \psi_n$$

sowie

$$\left(\int \varphi_n\right) \nearrow \int_* f, \quad \left(\int \psi_n\right) \searrow \int^* f$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int^* f - \int_* f &= \lim_{n\to\infty}\left(\int \psi_n\right) - \lim_{n\to\infty}\left(\int \varphi_n\right) \\
&\overset{4.2.5}{=} \lim_{n\to\infty}\left(\int \psi_n - \int \varphi_n\right) \\
&\overset{6.1.6}{=} \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(\int \underbrace{(\psi_n - \varphi_n)}_{\geq 0}\right)}_{\geq 0} \geq 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int^* f \geq \int_* f$$

Notation: Kürze hin und wieder ab:

$$\int_* f := \int_{a\,*}^{b} f(x)dx, \quad \int^* f := \int_{a}^{b\,*} f(x)dx$$

Definition 6.1.9. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann nennen wir f **Riemann-integrierbar**, wenn folgendes gilt:

$$\int_* f(x)dx = \int^* f(x)dx$$

Wir setzen dann

$$\int_a^b f(x)dx := \int_{a\,*}^{b} f(x)dx \quad \left(= \int_a^{b\,*} f(x)dx\right)$$

und

$$\mathcal{R}[a, b] := \{f \in \mathcal{F}[a, b] : f \text{ Riemann-integrierbar}\}$$

Beispiel 6.1.10.
(a) Jede Treppenfunktion ist (Riemann-)integrierbar,

$$\mathcal{T}[a, b] \subseteq \mathcal{R}[a, b]$$

denn: Sei $f \in \mathcal{T}$ und $\forall \varphi \in \mathcal{T}$ mit $\varphi \leq f$ ist

$$\int \varphi \leq \int f$$

(wobei $\int f$ hier das elementargeometrische Integral einer Treppenfunktion bedeutet.) Siehe Satz 6.1.6 Teil (c).

$$\Rightarrow \int_* f = \sup\left\{\int \varphi : \varphi \in \mathcal{T},\ \varphi \leq f\right\} = \int f$$

ebenso sieht man:

$$\int^* f = \int f$$

Also ist $f \in \mathcal{R}[a, b]$ und es gilt:

$$\int_{Riemann} f = \int_{el.\,geom.\,Int.} f$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}[a,b] \arrow[r, "\int_{el\ geom.\ Int.}"] \arrow[d, "\text{Inklusion}"'] & \mathbb{R} \\
\mathcal{R}[a,b] \arrow[ur, "\int_{Riemann}"'] &
\end{tikzcd}$$

(*b*) Nicht alle beschränkten Funktionen sind Riemann-integrierbar. Die **Dirichletsche Sprunkfunktion** ist definiert durch

$$\begin{aligned} f : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{falls } x \notin \mathbb{Q} \cap [0,1] \end{cases} \end{aligned}$$

Dann ist f nicht Riemann integrierbar, denn für jedes $\varphi \in \mathcal{T}[0,1]$ mit $\varphi \leq f$ gilt $\varphi \leq 0$, denn in jedem Intervall (x_{i-1}, x_i) liegen irrationale Zahlen, also muss $\varphi|_{(x_{i-1},x_i)} = c_i \leq 0$ sein

$$\Rightarrow \int \varphi = \sum c_i(x_i - x_{i-1}) \leq 0$$

Ebenso gibt es in (x_{i-1}, x_i) aber auch stets rationale Zahlen. Deshalb folgt für $\psi \in \mathcal{T}[0,1]$ mit $\psi \geq f$ stets $\psi \geq 1$

$$\Rightarrow \int_* f = \int 0 = 0 \quad \neq \quad \int^* f = \int 1 = 1$$

Satz 6.1.11. *Seien $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*
(*a*) *$f + g \in \mathcal{R}[a,b]$, und*

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

(*b*) *$\lambda \cdot f \in \mathcal{R}[a,b]$, und*

$$\int_a^b (\lambda \cdot f)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$$

(*c*) *Ist $f \leq g$, so ist auch*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Beweis. (*a*) Seien (φ_n) und (ψ_n) Folgen in $\mathcal{T}[a,b]$ mit $\varphi_n \leq f$, $\psi_n \leq g$ mit

$$\left(\int \varphi_n\right) \nearrow \int_* f\,, \quad \left(\int \psi_n\right) \nearrow \int_* g$$

$$\Rightarrow \int (\psi_n + \varphi_n) = \underbrace{\int \psi_n + \int \varphi_n}_{\to \int_* f + \int_* g}$$

da $\varphi_n \leq f$, $\psi_n \leq g$

$$\Rightarrow \varphi_n + \psi_n \leq f + g$$

$$\Rightarrow \int_* (f+g) \geq \int (\varphi_n + \psi_n)$$

$$\overset{5.1.7}{\Rightarrow} \int_* (f+g) \geq \int_* f + \int_* g = \int f + \int g$$

Beachte, dass f, g insbesondere beschränkt sind, damit auch $f+g$, und damit ist $\int_*(f+g)$ erklärt. Ganz ähnlich sieht man, dass

$$\int^* (f+g) \leq \int f + \int g$$

$$\Rightarrow \int^* (f+g) \leq \int f + \int g \leq \int_* (f+g) \leq \int^* (f+g)$$

$$\Rightarrow \int^* (f+g) = \int_* (f+g)$$

Also $(f+g) \in \mathcal{R}[a,b]$ und $\int (f+g) = \int f + \int g$

(b) Ähnlich

(c) Zeige: $0 \leq f \Rightarrow 0 \leq \int f$. Denn dann folgt mit (a) und (b):

$$\begin{aligned} f \leq g \;&\Rightarrow\; 0 \leq g - f \\ \Rightarrow 0 &\leq \int (g + (-1)f) = \int g + (-1) \int f = \int g - \int f \\ \Rightarrow &\int f \leq \int g \end{aligned}$$

Aber $0 \in \mathcal{T}[a,b]$, $0 \leq f$

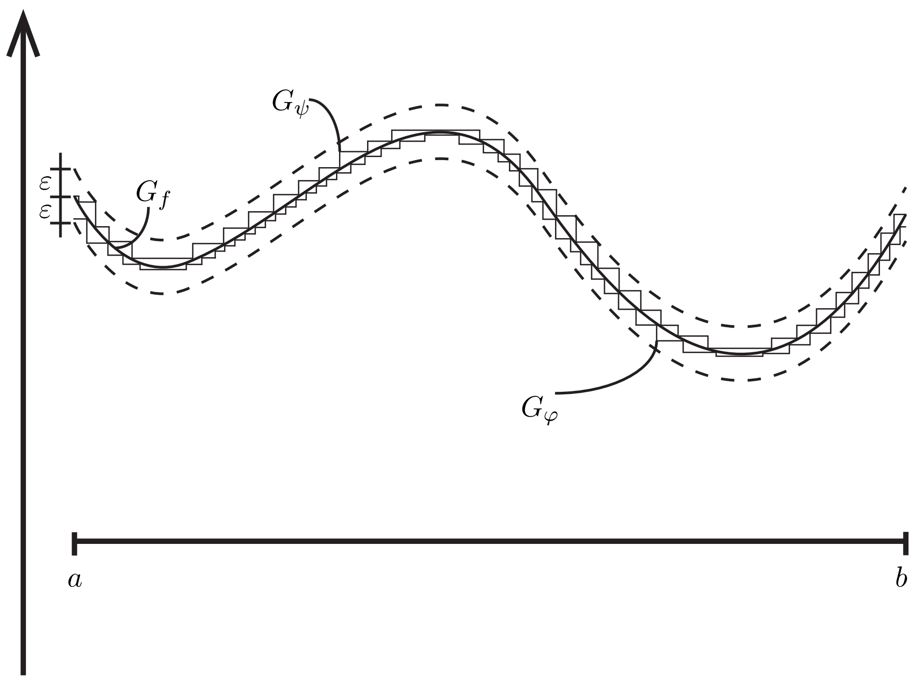
$$0 = \int 0 \leq \int_* f = \int f$$

□

Lemma 6.1.12. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig ($f \in \mathcal{C}[a,b]$). Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert dann eine Treppenfunktion $\varphi \in \mathcal{T}[a,b]$ mit $\varphi \leq f$und*

$$f(x) - \varphi(x) < \varepsilon$$

für alle $x \in [a,b]$.



Beweis. Weil $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ nach Satz 5.3.4 sogar gleichmäßig stetig ist, existiert ein $\delta > 0$, sodass gilt: Ist $x, x' \in [a,b]$ mit $|x' - x| < \delta$, so ist $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$.
Wähle nun eine Zerlegung $Z = (x_0, \ldots, x_n)$ mit Feinheit kleiner als δ, z.B.

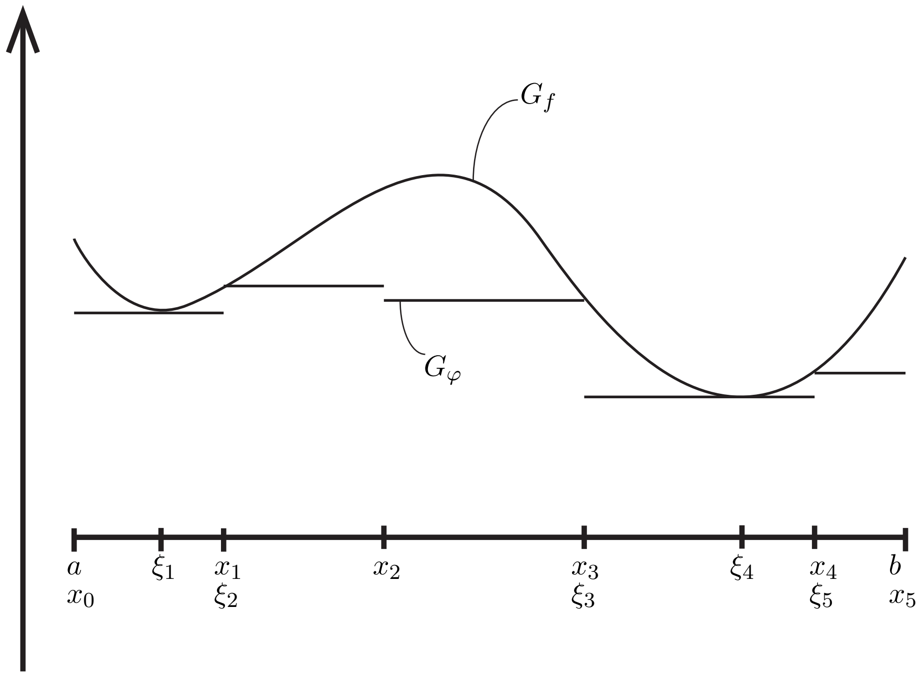
$$x_i := a + \frac{i}{n}(b-a) \quad (i = 0, \ldots, n)$$

mit $n > \dfrac{b-a}{\delta}$.
Setze dann

$$c_i := \min\{f(x) \in \mathbb{R} : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

und wähle nun $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ mit $f(\xi_i) = c_i$ (Satz von Weierstraß 5.2.6).
Setze $\varphi \in \mathcal{T}[a, b]$

$$\varphi(x) := c_i \quad \text{für} \quad x_{i-1} \leq x < x_i$$
$$(\varphi(b) := f(b)) \quad i = 1, \dots, n$$



Dann gilt $\varphi \leq f$ und für $x \in [a, b)$ beliebig

$$\Rightarrow \exists i \in \{1, \dots, n\} : x \in [x_{i-1}, x_i)$$
$$\Rightarrow f(x) - \varphi(x) = f(x) - c_i = f(x) - f(\xi_i) < \varepsilon$$

mit $|x - \xi_i| \leq x_i - x_{i-1} < \delta$. □

Satz 6.1.13. *Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so ist f integrierbar,*

$$\mathcal{C}[a, b] \subseteq \mathcal{R}[a, b]$$

Beweis. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt mit Weierstraß (5.2.6), dass f beschränkt ist. Sei $\varepsilon > 0$. Dann folgt mit Lemma 6.1.12, dass $\varphi, \psi \in \mathcal{T}[a, b]$ mit $\varphi \leq f \leq \psi$ mit

$$0 \leq |\psi(x) - \varphi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{b - a}$$

(Wende Lemma 6.1.12 für f und $-f$ mit $\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ an.)

$$\Rightarrow 0 \leq \int^* f - \int_* f \leq \int \psi - \int \varphi = \int (\psi - \varphi) \leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b - a} dx = \frac{\varepsilon}{b - a}(b - a) = \varepsilon$$

$\forall \varepsilon > 0$!!! (Wähle ε klein genug, dann folgt:)

$$\Rightarrow \int^* f - \int_* f = 0$$
$$\Rightarrow f \in \mathcal{R}[a, b]$$

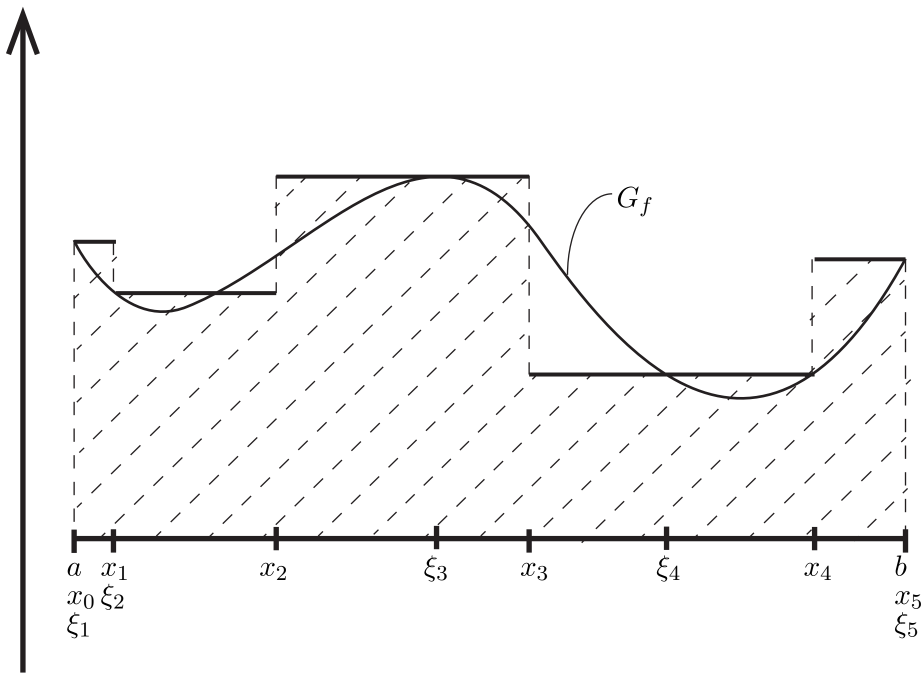
□

6.2 Riemannsche Summe

Definition 6.2.1. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Sei weiter $Z = (x_0, \ldots, x_n)$ eine Zerlegung von $[a,b]$ und $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ mit $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$. Dann heißt

$$S(f, Z, \xi) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

die **Riemannsche Summe** von f zur *Zerlegung* Z und der *Zwischenstellenwahl* ξ.



Lemma 6.2.2. *Ist $f \in \mathcal{R}[a,b]$, so ist $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$ und es gilt:*

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Beweis. Für $f \in \mathcal{F}[a,b]$ setzt man

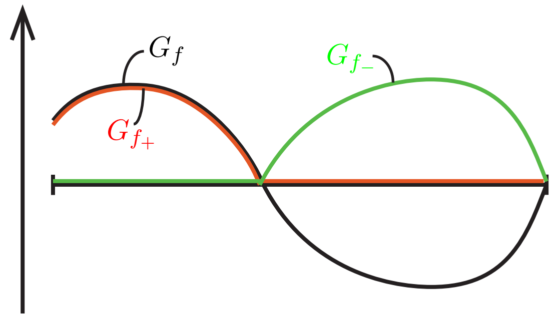
$$f_+(x) := \max\{f(x), 0\} \geq 0$$
$$f_-(x) := \max\{-f(x), 0\} \geq 0$$

Dann gilt:

$$f = f_+ - f_-$$
$$|f| = f_+ + f_-$$

Ist $f \in \mathcal{R}[a,b]$, dann gilt: $f_+, f_- \in \mathcal{R}[a,b]$ (Übung)

$$\Rightarrow |f| = f_+ + f_- \in \mathcal{R}[a,b]$$



und es gilt:

$$\int f = \int (f_+ - f_-) = \int f_+ - \underbrace{\int f_-}_{\geq 0} \leq \int f_+ + \int f_- = \int (f_+ + f_-) = \int |f|$$

$$-\int f = \int f_- - \underbrace{\int f_+}_{\geq 0} \leq \int (f_+ + f_-) = \int |f|$$

$$\Rightarrow \left|\int f\right| \leq \int |f|$$

$\square$

Satz 6.2.3. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Sei weiter $(Z^{(r)})_{r\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zerlegungen und $(\xi^{(r)})_{r\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zwischenstellen $\xi^{(r)}$ für $Z^{(r)}$. Sei schließlich $\delta_r > 0$ die Feinheit von $Z^{(r)}$ und $(\delta_r) \to 0$. Dann gilt:*

$$\lim_{r\to\infty} S(f, Z^{(r)}, \xi^{(r)}) = \int_a^b f(x)dx$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt mit Satz 5.3.4:

$$\exists\, \delta > 0\, \forall\, x, x' \in [a,b] \text{ mit } |x' - x| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x)| < \varepsilon \frac{1}{b-a}$$

Da $(\delta_r) \to 0$, $\exists\, r_0 \in \mathbb{N}\; \forall\, r \geq r_0 : \delta_r < \delta$
$\forall\, i = 1, \ldots, n_r$ gilt: Ist $x \in [x_{i-1}^{(r)}, x_i^{(r)}]$, so ist

$$|f(x) - f(\xi_i^{(r)})| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

$$\Rightarrow \left| \int_{x_{i-1}^{(r)}}^{x_i^{(r)}} \left(f(x) - f(\xi_i^{(r)})\right) dx \right| \overset{6.2.2}{\leq} \int_{x_{i-1}^{(r)}}^{x_i^{(r)}} |f(x) - f(\xi_i^{(r)})| dx$$

$$\leq \int_{x_{i-1}^{(r)}}^{x_i^{(r)}} \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \frac{\varepsilon}{b-a}\left(x_i^{(r)} - x_{i-1}^{(r)}\right)$$

$$\Rightarrow \left|\int_a^b f(x)dx - S_r\right| = \left| \sum_{i=1}^{n_r} \int_{x_{i-1}^{(r)}}^{x_i^{(r)}} f(x)dx - \sum_{i=1}^{n_r} \overbrace{f(\xi_i^{(r)})(x_i^{(r)} - x_{i-1}^{(r)})}^{=\int_{x_{i-1}^{(r)}}^{x_i^{(r)}} f(\xi_i^{(r)})dx} \right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n_r} \int_{x_{i-1}^{(r)}}^{x_i^{(r)}} |f(x) - f(\xi_i^{(r)})|\, dx \leq \sum_{i=1}^{n_r} \frac{\varepsilon}{b-a}(x_i^{(r)} - x_{i-1}^{(r)}) = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon$$

$\square$

Kommentar 6.2.4.
(*a*) Es ist also

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{r\to\infty} \sum_{i=1}^{n_r} f(\xi_i^{(r)})(x_i^{(r)} - x_{i-1}^{(r)}) \quad (*)$$

Wählt man die Zerlegung $Z^{(r)}$ *äquidistant* (mit Feinheit $\frac{b-a}{r}$)

$$\Delta x^{(r)} = x_i^{(r)} - x_{i-1}^{(r)} = \frac{b-a}{r} \quad (i = 1, \dots, n_r)$$

so schreibt sich (etwas schlampig) die rechte Seite von $(*)$ so: (beachte: $r \to \infty \Leftrightarrow \Delta x^{(r)} \to 0$)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum f(x)\Delta x = \int f(x)\, dx \quad \text{(Physiker)}$$

(*b*) Der Satz ist auch richtig für alle $f \in \mathcal{R}[a,b]$

Beispiel 6.2.5. (*a*) Sei $b > 0$, $a = 0$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, die Identität.
Wähle zur Berechnung von $\int_a^b x\,dx$ jetzt die sogenannte äquidistante Zerlegung

$$\begin{aligned} x_i^{(r)} &= i \cdot \frac{b}{r} \quad (i = 0, \dots, r) \text{ Feinheit } \frac{b}{r} \\ Z^{(r)} &= (x_0^{(r)}, \dots, x_r^{(r)}) \end{aligned}$$

mit Feinheit $\frac{b}{r} = \delta_r$ ($\Rightarrow (\delta_r) \to 0$). Wähle weiter

$$\xi_i^{(r)} = x_i^{(r)} = \frac{ib}{r} \quad (i = 1, \dots, r)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow S_r &:= \sum_{i=1}^{r} f(\xi_i^{(r)})(x_i^r - x_{i-1}^{(r)}) \\ &= \sum_{i=1}^{r} \frac{ib}{r} \cdot \frac{b}{r} = \frac{b^2}{r^2} \sum_{i=1}^{r} i = \frac{b^2}{r^2} \cdot \frac{1}{2} r(r+1) \\ &= \frac{b^2}{2} \cdot \underbrace{\frac{r^2+r}{r^2}}_{\to 1 \text{ für } r\to\infty} \xrightarrow[r\to\infty]{} \frac{b^2}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_0^b x\,dx = \frac{b^2}{2}$$

Für $0 < a < b$ folgt dann aus

$$\int_a^b = -\int_0^a + \int_0^b$$

$$\Rightarrow \int_a^b x\ dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

Vereinbarung: Für $a < b$:

$$\int_b^a := -\int_a^b$$

$$\left(\int_a^a := 0 \right)$$

$$\Rightarrow \int_a^b x\ dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}$$

(b) Für $b > 0$ ist

$$\int_0^b x^2\,dx = \frac{1}{3}b^3$$

Wähle $Z^{(r)}$ wieder äquidistant mit Feinheit $\delta_r = \frac{b}{r}$

$$S_r = \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{ib}{r}\right)^2 \cdot \frac{b}{r} = \frac{b^3}{r^3} \underbrace{\sum_{i=1}^{r} i^2}_{=\frac{1}{3}r(r+\frac{1}{2})(r+1)}$$

$$= \frac{b^3}{3} \underbrace{\frac{r(r+\frac{1}{2})(r+1)}{r^3}}_{\to 1 \text{ für } r\to\infty} \xrightarrow[r\to\infty]{} \frac{b^3}{3}$$

$$\Rightarrow \int_a^b x^2\,dx = \frac{1}{3}b^3$$

(c) Sei $n \in \mathbb{N}_0$, $a, b \in \mathbb{R}$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$
Beh.:

$$\int_a^b x^n\,dx = \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1})$$

Nur für $a = 1$, $b > 0$ (Die anderen Fälle: Übung)
Wähle nun nicht die äquidistante Zerlegung (**arithmetische Progression**), sondern die **geometrische Progression**

$$x_i^{(r)} := \left(\sqrt[r]{b}\right)^i \quad (i = 0, \ldots, r)$$

Dann folgt: (Übung)

$$S_r = \frac{b^{n+1} - 1}{1 + \underbrace{\sqrt[r]{b}}_{\to 1} + \ldots + \underbrace{\sqrt[r]{b^n}}_{\to 1}} \xrightarrow[r\to\infty]{} \frac{b^{n+1} - 1}{n+1}$$

Satz 6.2.6 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)**.** *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es ein $\xi \in [a,b]$, sodass gilt:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$$

Beweis. Sei $m := \min\{f(x) : x \in [a,b]\}$, $M := \max\{f(x) : x \in [a,b]\}$
Es ist also dann

$$m \le f(x) \le M \quad \forall\, x \in [a,b]$$

und damit

$$m(b-a) = \int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx = M(b-a)$$

Setze

$$\mu := \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx,$$

also $m \le \mu \le M$.
Ist nun $x_{\min}, x_{\max} \in [a,b]$ so, dass

$$f(x_{\min}) = m, \quad f(x_{\max}) = M \quad \text{(Weierstraß 5.2.6)}$$

$\overset{5.1.8}{\Rightarrow}$ Es existiert ein $\xi \in [a,b]$ mit $x_{\min} \le \xi \le x_{\max}$, sodass $f(\xi) = \mu$

$$\Rightarrow (b-a)f(\xi) = (b-a)\mu = \int_a^b f(x)\,dx$$

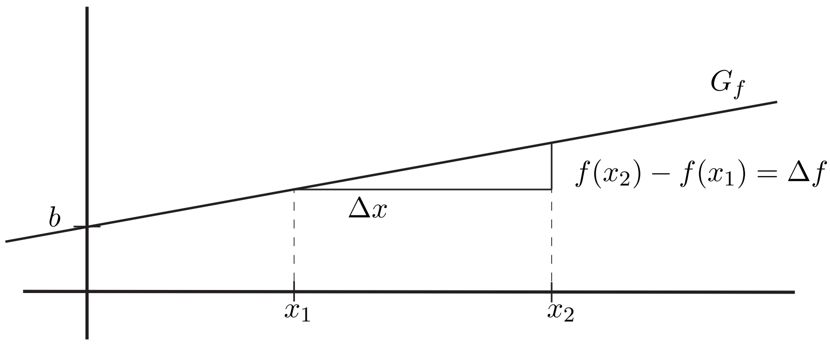
□

Kapitel 7

Differenzierbare Funktionen

7.1 Ableiten

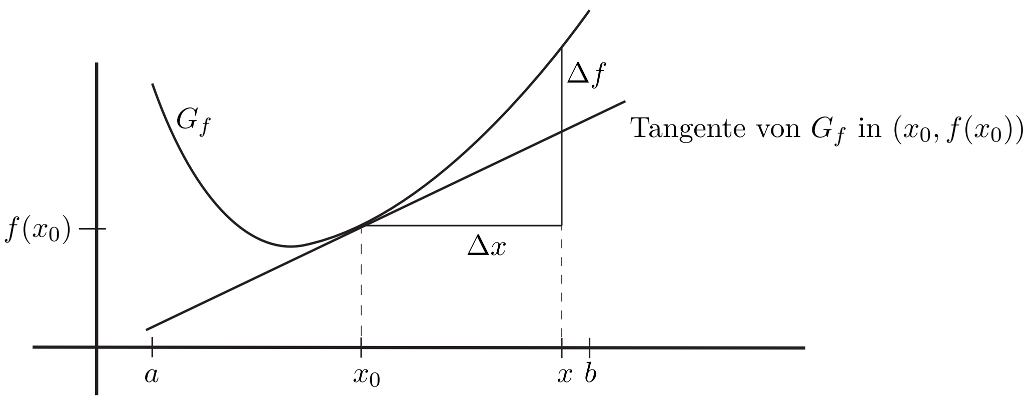
Motivation: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ affin-linear, also $f(x) = mx + b$ mit $m, b \in \mathbb{R}$, so ist $m \in \mathbb{R}$ die Steigung



von f (in jedem Punkt), denn für $x_1 < x_2$ beliebig:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(mx_2 + b) - (mx_1 + b)}{x_2 - x_1} = \frac{m(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = m$$

Ziel: Auch für nicht affin-lineare Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$ ($I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ Intervall) soll für jeden Punkt $x_0 \in I$ die **Steigung** von f definiert werden.



Idee: Nehme Steigung der affin-linearen Funktion, deren Graph die Tangente an G_f in $(x_0, f(x_0))$ ist.

Problem: Wie erklärt man die Tangenten(steigung)?

Ansatz: Nehme Grenzlage von **Sekantensteigungen:**

$$„\frac{\Delta f}{\Delta x} \underset{\Delta x \to 0}{\longrightarrow} \frac{df}{dx}“$$

Definition 7.1.1. (a) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in I$. Es heißt f **differenzierbar in** x_0, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert.

(b) Die Funktion f heißt **differenzierbar** (schlechthin), wenn f diffbar in x ist für alle $x \in I$.

Kommentar 7.1.2. (a) Falls $f : I \to \mathbb{R}$ diffbar in $x_0 \in I$ ist, bezeichnet man den Grenzwert mit $f'(x_0)$ oder $\frac{df}{dx}(x_0)$ oder auch $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0}$. Er heißt die **Ableitung** von f in x_0.

(b) Bezeichnet man $h := x - x_0$, so ist f in x_0 also genau dann diffbar, wenn der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \; \big(= f'(x_0)\big)$$

existiert.

(c) **Erinnere:** D.h.: Für alle Folgen (h_n) mit $x_0 + h_n \in I$, $h_n \neq 0$ und $(h_n) \to 0$ konvergiert auch die Folge

$$\left(\frac{1}{h_n}(f(x_0 + h_n) - f(x_0))\right)_{n \in \mathbb{N}}$$

und zwar alle gegen den gleichen Grenzwert (nämlich $f'(x_0)$).

(d) Der Ausdruck $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ heißt **Differenzenquotient**.

Beispiel 7.1.3. (a) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ affin-linear, also $f(x) = mx + b$, $(m, b \in \mathbb{R})$, so ist f differenzierbar und $f'(x) = m \; \forall \, x \in \mathbb{R}$.

Denn:

$$\frac{1}{h}(f(x_0 + h) - f(x_0)) = \frac{1}{h}(m(x_0 + h) + b - (mx_0 + b)) = \frac{1}{h} mh = m$$

Insbesondere

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{h}(f(x_0 + h) - f(x_0))\right) = m$$

Beachte. *Insbesondere gilt für konstante Funktionen*

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f(x) = c$$

mit $c \in \mathbb{R}$. (Es gilt also $m = 0$ aus Bsp. (a))

$$f'(x) = 0 \quad \forall x$$

(*b*) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f = \mathrm{pot}_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$. Dann gilt mit $x \in \mathbb{R}$ beliebig:

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)) &= \frac{1}{h}\left((x+h)^n - x^n\right) = \frac{1}{h}\left(\left(x^n + \binom{n}{1} x^{n-1}h + \ldots + h^n\right) - x^n\right)\\ &= \frac{1}{h}\left(nx^{n-1}h + h^2 p(h)\right) \quad \text{{\scriptsize $p(h)$ ist ein Polynom in h vom Grad $n-2$, wobei die Koeffizienten von x abhängen}}\\ &= nx^{n-1} + hp(h)\end{aligned}$$

Da $p(h) \to p(0)$ strebt für $h \to 0$ (denn p ist stetig in 0) gilt:

$$\frac{1}{h}\left(f(x+h) - f(x)\right) = nx^{n-1} + \underbrace{h}_{\to 0} \cdot \underbrace{p(h)}_{\to p(0)} \xrightarrow[n \to 0]{} nx^{n-1}$$

Also ist f diffbar und es gilt:

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1} \quad (n \geq 1)$$

Satz 7.1.4. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$ und $f : I \to \mathbb{R}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

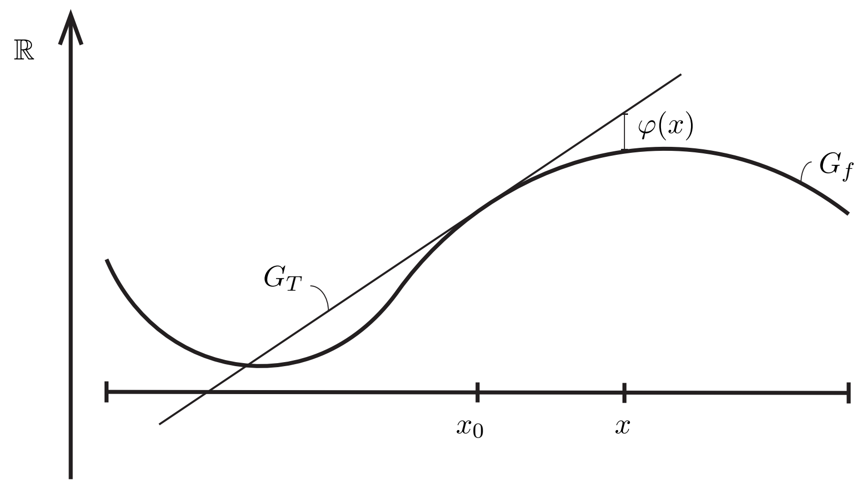
(*i*) *f ist diffbar in x_0*

(*ii*) *$\exists\, m \in \mathbb{R}$, $\exists \varphi : I \to \mathbb{R}$, mit*

$$f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + \varphi(x)$$

und

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{\varphi(x)}{x - x_0}\right) = 0$$



Beweis. „⇒“ Sei f diffbar in x_0 und $m := f'(x_0)$ und $\varphi : I \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) := f(x) - f(x_0) - m(x - x_0)$. Dann gilt:

$$\frac{\varphi(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - m \xrightarrow[x \to x_0]{} m - m = 0$$

„⇐“ Seien $m \in \mathbb{R}$ und $\varphi : I \to \mathbb{R}$ gegeben mit

$$f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + \varphi(x)$$

und

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{\varphi(x)}{x - x_0}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{m(x-x_0)+\varphi(x)}{x-x_0} = m + \frac{\varphi(x)}{x-x_0} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} m+0=m$$

$\Rightarrow f$ ist diffbar in x_0 (und es ist $f'(x) = m$)

□

Kommentar 7.1.5. (a) Diffbar in x_0 zu sein, bedeutet also, dass eine Funktion f durch eine affin-lineare Funktion T so gut approximierbar ist, dass der Fehler, $\varphi = f - T$ für $x \to x_0$ schneller gegen 0 geht als die Funktion $x \mapsto x - x_0$,

$$\frac{f(x)-T(x)}{x-x_0} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0$$

(b) Der Graph von T (der eindeutig bestimmt ist) wird als **Tangente** an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$ bezeichnet.

(c) Es ist also

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot h + \psi(h)$$

mit

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{\psi(h)}{h}\right) = 0$$

mit $\psi(h) = \varphi(x_0+h)$

Korollar 7.1.6. *Sei $f: I \to \mathbb{R}$ diffbar in $x_0 \in I$. Dann ist f auch stetig in x_0.*

Beweis. Es ist

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \varphi(x)$$

mit

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{\varphi(x)}{x-x_0}\right) = 0$$

Insbesondere gilt $\varphi(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0$, denn

$$\varphi(x) = \frac{\varphi(x)}{(x-x_0)}(x-x_0) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0\cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)(x-x_0)}_{\to 0} + \underbrace{\varphi(x)}_{\to 0} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} f(x_0)$$

$\Rightarrow f$ ist stetig in x_0 □

Kommentar 7.1.7. Bezeichnen wir mit

$$\mathcal{D}[a,b] := \{f : [a,b] \to \mathbb{R},\ \text{diffbar}\}$$

so gilt also:

$$\mathcal{D}[a,b] \subseteq \mathcal{C}[a,b] \subseteq \underbrace{\mathcal{R}[a,b]}_{\supseteq \mathcal{T}[a,b]} \subseteq \mathcal{F}[a,b]$$

Beispiel 7.1.8. (a) Sei $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$. $(\mathbb{R}_+ := (0,\infty))$

$$\Rightarrow \frac{1}{h}\left(f(x+h)-f(x)\right) = \frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{h}\left(\frac{x-(x+h)}{(x+h)x}\right)$$
$$= -\frac{1}{h}\frac{h}{(x+h)x} = -\frac{1}{(x+h)x} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{x^2}$$

$\Rightarrow f$ ist diffbar (in x) und es gilt

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

(*b*) Die Betragsfunktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f(x) &= |x| \end{aligned}$$

ist zwar stetig in $x_0 = 0$, aber nicht diffbar in x_0, denn:
Ist (h_n) Nullfolge mit $h_n > 0$ (z.B.: $h_n := \frac{1}{n}$), so gilt:

$$\frac{1}{h_n}\Big(\underbrace{f(h_n)}_{h_n} - \underbrace{f(0)}_{=0}\Big) = \frac{h_n}{h_n} = 1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

ist dagegen $h_n < 0$ und (h_n) Nullfolge (z.B.: $h_n := \frac{1}{n}$), so gilt:

$$\frac{1}{h_n}\Big(\underbrace{f(h_n)}_{-h_n} - \underbrace{f(0)}_{=0}\Big) = -\frac{h_n}{h_n} = -1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -1$$

Also ist f in $0 = x_0$ nicht diffbar.

Satz 7.1.9. *Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ diffbar in $x_0 \in I$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt*
(*a*) *Auch $f + g : I \to \mathbb{R}$ ist diffbar in x_0, und*

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

(*b*) *Auch $\lambda \cdot f : I \to \mathbb{R}$ ist diffbar in x_0, und es gilt*

$$(\lambda \cdot f)'(x_0) = \lambda \cdot f'(x_0)$$

Beweis. (*a*) Sei also $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge mit $h_n \neq 0$ und $x_0 + h_n \in I \ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \frac{1}{h_n}\left((f+g)(x_0+h_n) - (f+g)(x_0)\right) \\ &= \frac{1}{h_n}\left(f(x_0+h_n) + g(x_0+h_n) - (f(x_0)+g(x_0))\right) \\ &= \underbrace{\frac{1}{h_n}(f(x_0+h_n) - f(x_0))}_{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f'(x_0)} + \underbrace{\frac{1}{h_n}(f(x_0+h_n) - g(x_0))}_{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g'(x_0)} \\ &\underset{n\to\infty}{=\longrightarrow} f'(x_0) + g'(x_0) \end{aligned}$$

(*b*) Übung (einfacher)

□

Beispiel 7.1.10. Es sind damit alle Polynomfunktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$$

diffbar, und es gilt

$$f'(x) = a_n \cdot n \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 = \sum_{k=1}^{n} k \cdot a_k \cdot x^{k-1}$$

Also:

$$\mathrm{Pol}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

7.2 Motivation:

Seien $k, l \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt ja

$$x^{k+l} = x^k \cdot x^l$$

Will man diese Regel auch bei negativen Exponenten beibehalten, so ist man zu folgender Definition gezwungen: Wegen

$$x^k = x^{k+0} = x^k \cdot x^0 \quad (x \neq 0)$$

$$\Rightarrow x^0 = 1$$

und

$$1 = x^0 = x^{k+(-k)} = x^k \cdot x^{-k}$$

muss man setzen: (für $x \neq 0$ und $k \in \mathbb{N}_0$)

$$x^{-k} := \frac{1}{x^k}$$

Sei jetzt $x > 0$. Will man $x \mapsto x^r$ mit $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ definierten ($p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}$), so impliziert das Potenzgesetz ($x^{m+n} = x^m \cdot x^n$)

$$\left(x^{\frac{p}{q}}\right)^q = x^{\frac{p}{q}} \cdot \ldots \cdot x^{\frac{p}{q}} = x^{\frac{p}{q}+\ldots+\frac{p}{q}} = x^{q \cdot \frac{p}{q}} = x^p$$

$$\Rightarrow x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$$

Definition 7.2.1. Wir definieren für jedes $r \in \mathbb{Q}$ die r-te **Potenzfunktion**

$$\begin{aligned} \mathrm{pot}_r :& \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathrm{pot}_r(x) &= x^r \end{aligned}$$

durch:
Sei $r = \frac{p}{q}$ (mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$) die (eindeutig) gekürzte Darstellung von r. Setze dann

$$\mathrm{pot}_r = x^r := \sqrt[q]{x^p}$$

Kommentar 7.2.2. (a) Auch die Funktion

$$\begin{aligned} f = \mathrm{pot} :& \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^n \end{aligned}$$

für $n \in \mathbb{Z}$ ist diffbar (und damit stetig) und es gilt:

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

(b) Mann müsste jetzt vielleicht noch prüfen, ob die Definition von $x \mapsto x^r$ für $r \in \mathbb{Q}$ auch für ungekürzte Darstellungen $r = \frac{p}{q}$ das gleiche Resultat liefert.

(c) Tatsächlich kann man nun auch mit ähnlichen Argumenten wie in der Motivation sehen, dass das Potenzgesetz tatsächlich für alle $r, s \in \mathbb{Q}$ gilt:

$$x^{r+s} = x^r \cdot x^s$$

(und ebenso $(x^r)^s = x^{r \cdot s}$)

(d) Schließlich werden wir sehen, dass auch $f = \mathrm{pot}_r : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ für $r \in \mathbb{Q}$ diffbar ist und es gilt:

$$f'(x) = r \cdot x^{r-1}$$

(*e*) Wir werden später die Funktion

$$\begin{aligned} \mathrm{pot}_c : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^c \end{aligned}$$

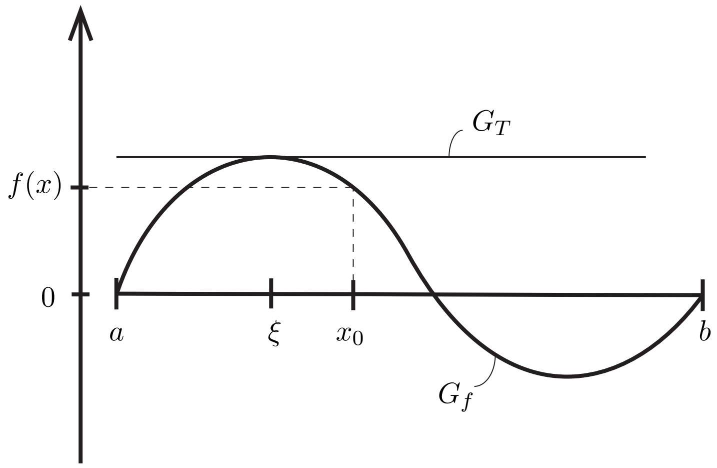
auch für beliebiges $c \in \mathbb{R}$ definieren und auch dann wird gelten, dass pot_c diffbar ist und es gilt:

$$x^{c+d} = x^c \cdot x^d$$

sowie

$$\mathrm{pot}_c' = \frac{d}{dx}(x^c) = c \cdot x^{c-1} \quad \forall x > 0$$

Satz 7.2.3 (Rolle)**.** *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ diffbar und $f(a) = f(b) = 0$. Dann gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$.*



Beweis. Falls $f(x) = 0 \ \forall x \in [a,b]$, so nehme $\xi \in (a,b) \Rightarrow f'(\xi) = 0$. Sei deshalb $x_0 \in (a,b)$ oBdA so, dass $f(x_0) > 0$ ist. (gehe sonst über von f zu $-f$). Da f insbesondere auch stetig ist, folgt mit Weierstraß (5.2.6), dass f sein Supremum annimmt.
$\Rightarrow \exists \xi \in [a,b]$:

$$f(\xi) \geq f(x) \ , \quad \forall x \in [a,b]$$

Da insbesondere

$$f(\xi) \geq f(x_0) > 0$$

ist, folgt:

$$\xi \in (a,b)$$

Sei nun (h_n) eine Nullfolge mit $h_n < 0$, $\xi + h_n \in [a,b]$. Dann gilt:

$$\underbrace{\frac{1}{h_n}}_{<0} \underbrace{(f(\xi + h_n) - f(\xi))}_{\leq 0} \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dann folgt (5.1.7):

$$f'(\xi) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{h_n} (f(\xi + h_n) - f(\xi)) \right) \geq 0$$

Ähnlich sei (h'_n) eine Nullfolge und $h'_n > 0$ und $\xi + h'_n \in [a,b]\ \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{h'_n}}_{>0} \underbrace{\left(f(\xi + h'_n) - f(\xi)\right)}_{\leq 0} \leq 0$$

Dann folgt (5.1.7):

$$f'(\xi) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{h'_n}\left(f(\xi + h'_n) - f(\xi)\right)\right) \leq 0$$

Also folgt insgesamt:

$$f'(\xi) = 0$$

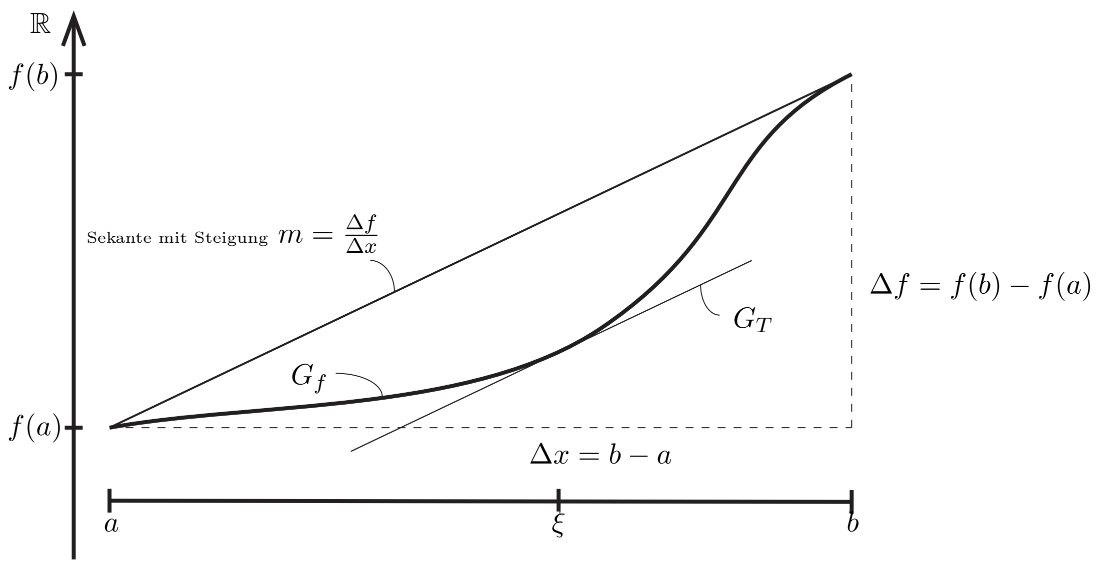
(Der Satz funktioniert auch für $f(a) = f(b) = c$) $\square$

Kommentar 7.2.4. Beachte, dass wir im Beweis folgendes gesehen haben: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ diffbar und $x_0 \in (a,b)$ ein lokales Extremum (Extremum im Intervall)

$$\Rightarrow f'(x_0) = 0$$

Korollar 7.2.5 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung). *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ diffbar. Dann gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Beweis. Sei

$$m := \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Betrachte die Hilfsfunktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - (m(x-a) + f(a))$ (h ist diffbar mit 7.1.9). Es gilt:

$$g(a) = f(a) - f(a) = 0$$
$$g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{\cancel{(b-a)}}\cancel{(b-a)} - f(a) = 0$$

Dann folgt mit dem Satz von Rolle (7.2.3): $\exists \xi \in (a,b)$:

$$0 = g'(\xi) = f'(\xi) - m$$

also

$$f'(\xi) = m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

□

Korollar 7.2.6. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ diffbar mit $f' = 0$. Dann ist f konstant. D.h. $\exists\, c \in \mathbb{R}$: $f(x) = c\ \forall x \in I$.*

Beweis. Seien $x_0, x \in I$ beliebig und ohne Einschränkung $x_0 < x$.

$$f(x) - f(x_0) \overset{7.2.5}{=} f'(\xi)(x - x_0)$$

$$(\text{aus } \tfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)} = f'(\xi))$$

für ein $\xi \in (x_0, x)$. Also ist

$$f(x) = f(x_0) = c \quad \forall x \in [a, b]$$

□

Korollar 7.2.7. *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ diffbar mit $f'(x) > 0\ \forall x \in I$. Dann ist f streng monoton wachsend.*
Rückrichtung gilt nicht!

Beweis. Seien $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$. Wende nun den Mittelwertsatz (7.2.5) auf $f|_{[x_1,x_2]}$ an:
$\Rightarrow \exists\, \xi \in (x_1, x_2)$:

$$f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{>0}\underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} > 0$$

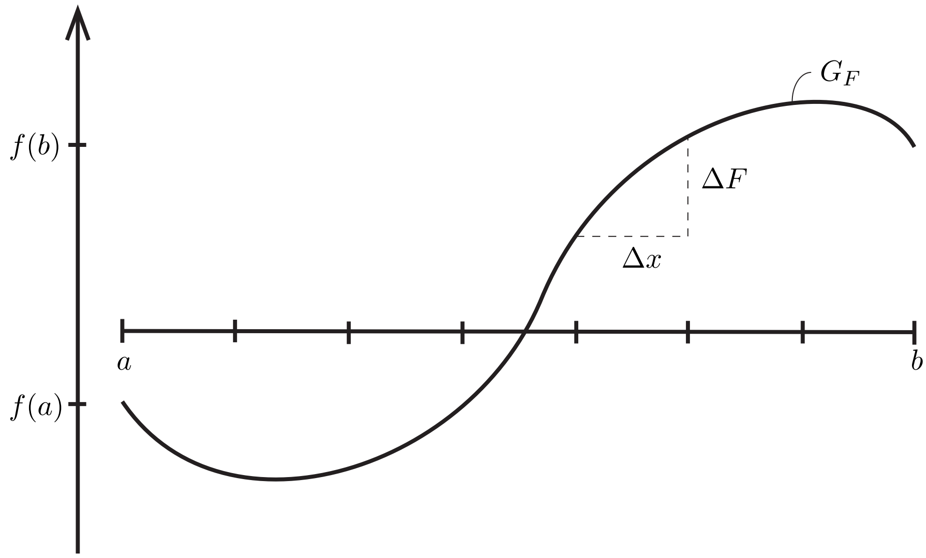
$$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Also folgt, dass f streng monoton wachsend ist. □

Kapitel 8

Der Hauptsatz

8.1 Motivation



$$„\, F(b) - F(a) = \sum \Delta F = \sum \frac{\Delta F}{\Delta x} \Delta x \underset{\Delta x \to 0}{\longrightarrow} \int F'(x) dx \,“$$

Definition 8.1.1. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann nennen wir $F : I \to \mathbb{R}$ eine **Stammfunktion** von f, wenn F differenzierbar ist und gilt:

$$F' = f$$

Bemerkung 8.1.2. *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ gegeben und $F : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f sowie $c \in \mathbb{R}$. Dann ist auch*

$$\begin{aligned} G :& I \longrightarrow \mathbb{R} \\ G(x) =& F(x) + c \end{aligned}$$

eine Stammfunktion von f.

Beweis. G ist offenbar auch diffbar und es gilt

$$G'(x) = F'(x) + 0 = f(x)$$

□

Satz 8.1.3. *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ gegeben und seien $F, G : I \to \mathbb{R}$ Stammfunktionen von f. Dann gibt es ein $c \in \mathbb{R}$, sodass für alle $x \in I$ gilt:*

$$G(x) = F(x) + c$$

Beweis. Betrachte $H := G - F : I \to \mathbb{R}$. Dann ist H diffbar und es gilt:

$$H' = G' - F' = f - f = 0$$

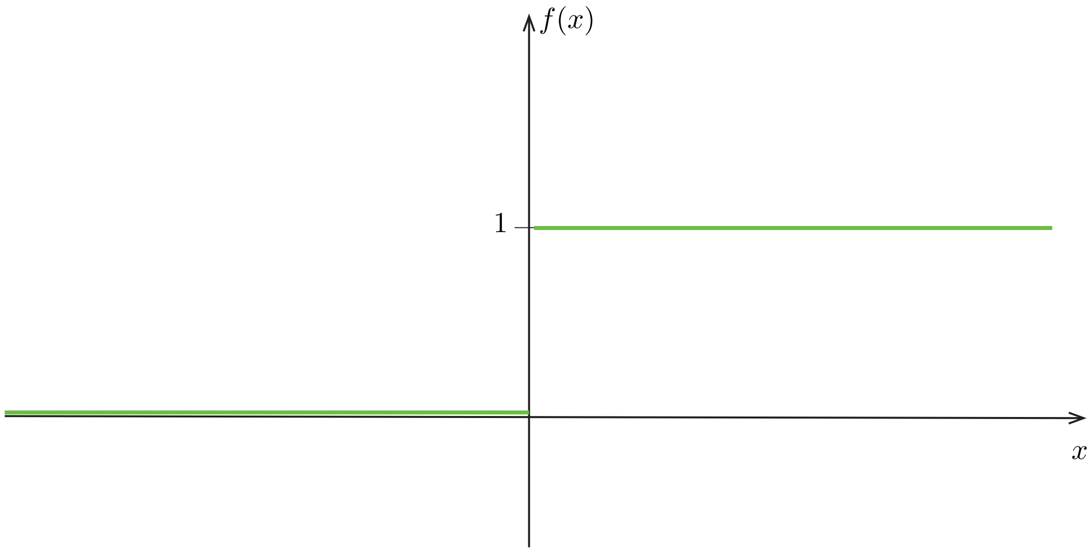
denn nach Voraussetzung sind sowohl G als auch F Stammfunktionen von f.
$\overset{7.2.6}{\Rightarrow} \exists c \in \mathbb{R}$: $H = c$.

$$\Rightarrow G = F + H = F + c$$

□

Kommentar 8.1.4. Nicht jede (integrierbare) Funktion hat eine Stammfunktion, denn betrachte z.B.

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$



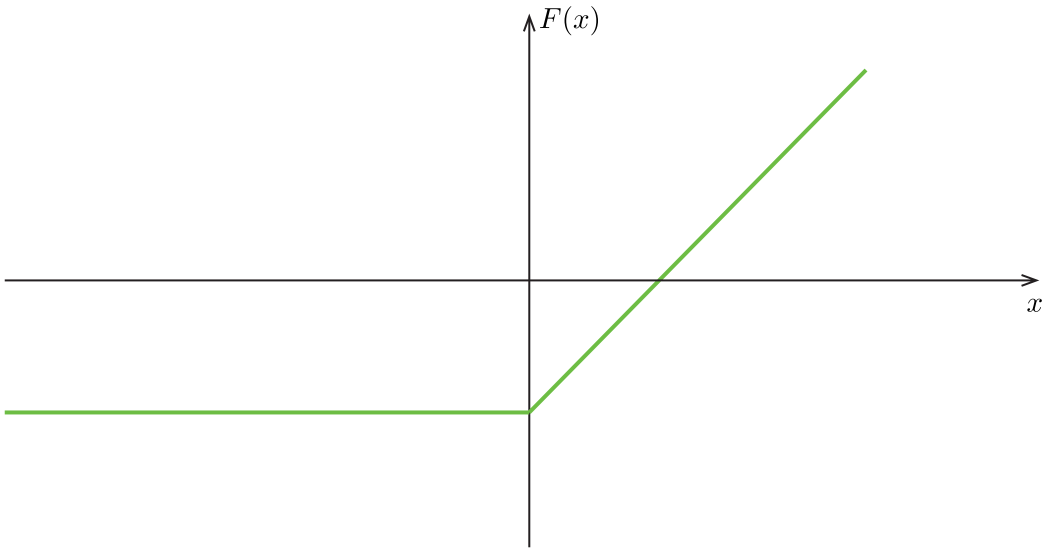
Dann hat $f|_{(-\infty,0]}$ die Stammfunktionen

$$F_c : (-\infty, 0] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$F_c(x) = c$$

Ähnlich sind die Stammfunktionen von $f|_{(0,\infty)}$ gegeben durch

$$G_d : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$G_c(x) = x + d$$

Wäre $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Stammfunktion von f, dann folgt:
$\exists c \in \mathbb{R} : F|_{(-\infty,0]} = c$, $F|_{(0,\infty)} = G_d$ mit $d = c$, denn F muss ja insbesondere stetig sein in $x_0 = 0$. Also erhält man zum Beispiel nachfolgenden Graphen. Dieses F ist in $x_0 = 0$ zwar stetig, aber nicht diffbar. Also hat f keine Stammfunktion.



Beispiel 8.1.5. Für $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 1$ haben die Monomfunktionen

$$f = \mathrm{pot}_n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f(x) = x^n$$

Stammfunktionen, denn z.B.

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

ist Stammfunktion, denn:

$$F'(x) = \frac{1}{\cancel{(n+1)}} \cancel{(n+1)} \cdot x^n = x^n$$

Frage: Hat auch $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ eine Stammfunktion?

Satz 8.1.6. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$ und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann wird durch*

$$F : I \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$$

eine Stammfunktion von f gegeben,

$$F' = f$$

Beachte. *Jedes stetige $f : I \to \mathbb{R}$ hat also eine Stammfunktion*

Beweis. Sei $x \in I$ beliebig. Da mit f auch $f|_{[x_0,x]}$, bzw. $f|_{[x,x_0]}$, stetig ist, ist $f|_{[x_0,x]}$, bzw $f|_{[x,x_0]}$, integrierbar (Satz 6.1.13) und damit ist $F(x)$ definiert. Sei weiter (h_n) eine Nullfolge mit $h_n > 0$, $(x + h_n) \in I$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\frac{1}{h_n}(F(x+h_n) - F(x)) = \frac{1}{h_n}\left(\int_{x_0}^{x+h_n} f(t)\, dt - \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt\right)$$

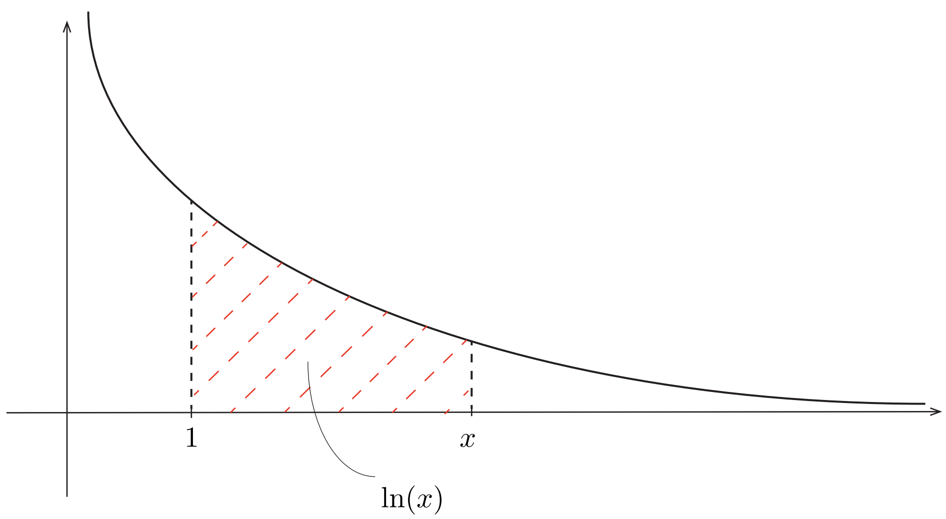
Wegen

$$\int_{x_0}^{x+h_n} = \int_{x_0}^{x} + \int_{x}^{x+h_n}$$

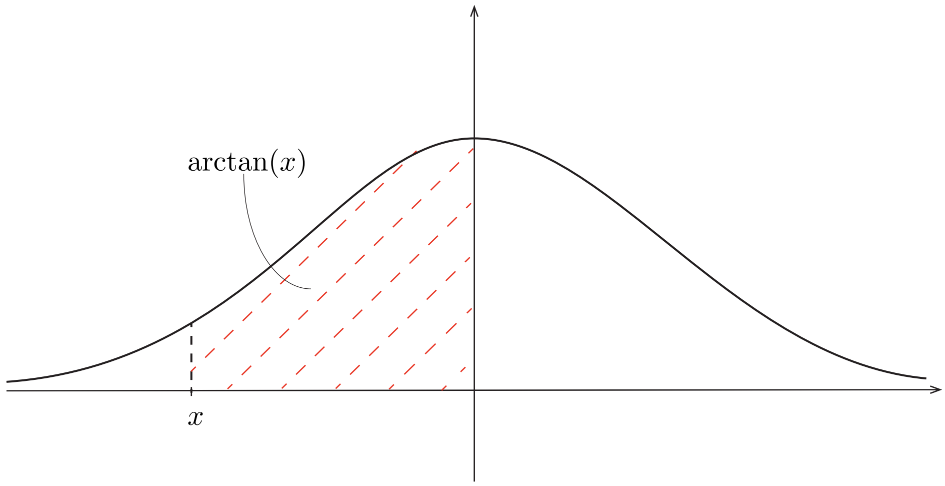
gilt
$$\frac{1}{h_n}\left(F(x+h_n)-F(x)\right)=\frac{1}{h_n}\int_x^{x+h_n} f(t)\ dt$$
Mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung (6.2.6) existiert ein $\xi_n \in [x, x+h_n]$ (bzw. $[x+h_n, x]$) mit
$$\int_x^{x+h_n} f(t)\ dt = f(\xi_n)\left((x+h_n)-x\right) = h_n f(\xi_n)$$
$$\Rightarrow \frac{1}{h_n}\left(F(x+h_n)-F(x)\right)=\frac{1}{h_n}\cdot h_n\cdot f(\xi_n)=f(\xi_n)$$
Für $n\to\infty$ folgt dann $(\xi_n)\to x$ und wegen der Stetigkeit von f in x folgt tatsächlich
$$\frac{1}{h_n}\left(F(x+h_n)-F(x)\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$$
Also ist F diffbar und es gilt
$$F' = f$$
□

Kommentar 8.1.7. Beachte, dass man nun, ähnlich wie bei dem Bilden von Umkehrfunktionen eine Möglichkeit gewonnen haben, aus bekannten Funktionen evtl. neue, vorher nicht bekannte Funktionen zu konstruieren. z.B.:

Definition 8.1.8. (a) Wir setzen
$$\begin{aligned}\ln : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R}\\ \ln(x) &= \int_1^x \frac{1}{t}\ dt\end{aligned}$$
und nennen dies den **natürlichen Logarithmus**.



(b) Wir setzen
$$\begin{aligned}\arctan : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\\ \arctan(x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\ dt\end{aligned}$$



Kommentar 8.1.9. (a) Nicht jede Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, die eine Stammfunktion hat, muss stetig sein. Anders gesagt: Die Ableitung einer diffbaren Funktion muss nicht stetig sein. (Bsp. $f(x) = |x|$). Wir setzen deshalb:

$$\mathcal{C}^1(I) \subseteq \mathcal{D}(I) \subseteq \mathcal{C}(I) \subseteq \mathcal{R}(I)$$

der Raum der stetig diffbaren Funktionen auf I.

(b) Beachte, dass also

$$\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$$

und

$$\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

stetig diffbar sind und es gilt

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}\,, \quad \arctan(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

Korollar 8.1.10 (Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung)**.** *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f. Dann gilt:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Beweis. Nach dem Satz 8.1.6 wissen wir, dass

$$\begin{aligned} F_0 :&[a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \\ F_0(x) =& \int_a^x f(t)\,dt \end{aligned}$$

eine Stammfunktion von f ist (Nach Satz 8.1.6 gilt: $F' = f$).
Nach dem Satz 8.1.3 gibt es ein $c \in \mathbb{R}$, sodass gilt:

$$F = F_0 + c$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow F(b) - F(a) &= F_0(b) + c - (F_0(a) + c) = F_0(b) - F_0(a) \\
&= \int_a^b f(t)\, dt - \underbrace{\int_a^a f(t)\, dt}_{=0} \\
&= \int_a^b f(x)\, dx
\end{aligned}$$

$\square$

Kapitel 9

Ausbau der Differential- und Integralrechnung

9.1 Regeln

Satz 9.1.1 (Kettenregel und Substitutionsregel)**.** (a) *Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle, $x_0 \in I$, $y_0 \in J$ sowie $f : I \to \mathbb{R}$ mit $f(I) \subseteq J$ und $g : J \to \mathbb{R}$. Es sei weiter $f(x_0) = y_0$, f diffbar in x_0 und g diffbar in y_0. Dann ist die Verkettung*

$$g \circ f : I \to \mathbb{R}$$

diffbar in x_0 und es gilt

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0)$$

(b) *Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ stetig diffbar und $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Dann gilt*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f \circ \varphi(t) \cdot \varphi'(t)\, dt$$

Beweis. (a) Da f diffbar in x_0 und g diffbar in y_0, existieren Funktionen $\varphi : I - x_0 \to \mathbb{R}$, $\psi : I - y_0 \to \mathbb{R}$ (wobei gilt: $I - x_0 := \{x - x_0 x \in I\}$), sodass gilt:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + \varphi(h)$$
$$g(y_0 + h) = g(y_0) + g'(y_0) \cdot k + \psi(k)$$

mit

$$\lim_{h\to 0} \frac{\varphi(h)}{h} = 0 = \lim_{k\to 0} \frac{\psi(k)}{k} \qquad (*)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow g \circ f(x_0 + h) &= g(f(x_0) + \underbrace{f'(x_0) \cdot h + \varphi(h)}_{=:k(h)}) \\
&= g(f(x_0)) + g'(f(x_0)) \cdot (f'(x_0) \cdot h + \varphi(h)) + \psi(f'(x_0) \cdot h + \varphi(h)) \\
&= g \circ f(x_0) + (g'(y_0) \cdot f'(x_0)) \cdot h + \xi(h)
\end{aligned}$$

Mit $y_0 = f(x_0)$ und $\xi(h) := g'(y_0) \cdot \varphi(h) + \psi(k(h))$ Zeige noch $\lim_{h\to 0} \frac{\xi(h)}{h} = 0$. Dies gilt aber schon, da

$$\frac{1}{h} \cdot g'(y_0) \cdot \varphi(h) = g'(y_0) \cdot \frac{\varphi(h)}{h} \overbrace{\underset{h\to 0}{\longrightarrow}}^{\text{mit } (*)} g'(y_0) \cdot 0 = 0$$

Zeige ebenso

$$\frac{\psi(k(h))}{h} = \begin{cases} \frac{\psi(k(h))}{k(h)} \cdot \frac{k(h)}{h} & \text{für } k(h) \neq 0 \\ 0 & \text{für } k(h) = 0 \qquad (*_1) \end{cases}$$

doch auch dies gilt schon, da

$$k(h) = f'(x_0) \cdot h + \varphi(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} f'(x_0) \cdot 0 + 0 = 0$$

Wegen $(*_1)$ ist deshalb

$$\frac{\psi(k(h))}{k(h)} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$$

Andererseits:

$$\frac{k(h)}{h} = f'(x_0) + \frac{\varphi(h)}{h} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} f'(x_0) + 0 = f'(x_0)$$

Insgesamt gilt also:

$$\frac{\psi(k(h))}{h} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0 \cdot f'(x_0) = 0$$

$\Rightarrow g \circ f$ ist diffbar in x_0 und

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(x_0) f'(x_0)$$

(b) Sei $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f $(F' = f)$.

$$\Rightarrow F \circ \varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$$

ist diffbar und es gilt:

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\dot{\varphi}(t) = f \circ \varphi(t) \cdot \dot{\varphi}(t)$$

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta f \circ \varphi(t) \cdot \dot{\varphi}(t)\, dt &= \int_\alpha^\beta \frac{d}{dx}(F \circ \varphi)(t)\, dt = F \circ \varphi(\beta) - F \circ \varphi(\alpha) \\ &= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\, dx \end{aligned}$$

$\square$

Kommentar 9.1.2. (a) Bezeichnet man $f : I \to J \subseteq \mathbb{R}$ einfach mit $y(x)$, wenn x die Variable von I und y die Variable von J ist und entsprechend $z(y)$ die Funktion g, so ließt sich die Kettenregel so:

$$„\ \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}\ “$$

(b) Ähnlich merkt man sich die Substitutionsregel so:

$$„\ \int y\, dx = \int y \frac{dx}{dt} dt\ “$$

(c) Oft ist $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ ein sogenannter **Diffeomorphismus**, d.h.: φ ist bijektiv und $\varphi^{-1}[a, b] \to [\alpha, \beta]$ ist auch stetig diffbar. Man spricht dann auch von einem Parameterwechsel.

Beispiel 9.1.3. (a) Wir benutzen, dass $\sqrt{} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ diffbar ist mit

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Betrachte nun $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$. Dann ist f diffbar und es gilt mit

$$g(x) = 1 + x^2\ , \quad h(y) = \sqrt{y}\ \Rightarrow\ f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x),$$

dass die Ableitung gegeben ist durch:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

(*b*) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x^2)$

$$\Rightarrow\ f'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = 2\frac{1}{x}$$

Beobachte auch die Funktion $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2\ln(x)$ hat die Ableitung $g'(x) = \frac{2}{x}$
Wegen

$$f(1) = \ln(1) = 0 = g(1)$$

folgt:

$$\ln(x^2) = 2\ln(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+$$

(*c*) **Beh.:**

$$\int_0^2 \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = \frac{1}{3}$$

Denn: Setze $t = x + 1$, also $x = \varphi(t) = t - 1$ mit $\varepsilon : [1, 3] \to [0, 2] \Rightarrow \dot{\varphi}(t) = 1$

$$\Rightarrow \int_0^2 \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = \int_1^3 \frac{\dot{\varphi}(t)}{t^2}\,dt = \int_1^2 \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{t}\Bigg|_1^3 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{1} = \frac{2}{3}$$

Wobei gilt: $F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a)$.

(*d*) **Beh.:**

$$\int_1^9 \frac{1}{x + \sqrt{x}}\,dx = 2\ln(2)$$

Denn: Setze $t = \sqrt{x}$, $\Rightarrow x = \varphi(t) = t^2$, $\dot{\varphi}(t) = 2t$, $\varphi(1) = 1$, $\varphi(3) = 9$.

$$\begin{aligned}\int_1^9 \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx = \int_1^3 \frac{\dot{\varphi}(t)}{t^2+t}\,dt = 2\int_1^3 \frac{1}{t+1}\,dt = 2\ln(t+1)\Bigg|_1^3 = 2\ln(4) - 2\ln(2)\\ = 2(\ln(2^2) - \ln(2)) = 2(2\ln(2) - \ln(2)) = 2\ln(2)\end{aligned}$$

Satz 9.1.4 (Produktregel und partielle Integration)**.** (*a*) *Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ diffbar in $x_0 \in I$. Dann ist auch $f \cdot g : I \to \mathbb{R}$ in x_0 diffbar und es gilt:*

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

(*b*) *Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig diffbar. Dann gilt:*

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x)\,dx = f \cdot g(x)\Bigg|_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x)\,dx$$

Beweis. (*a*) Seien φ und ψ wie im Beweis der Kettenregel mit

$$\lim_{h\to 0} \frac{\varphi(h)}{h} = 0 = \lim_{h\to 0} \frac{\psi(h)}{h}$$

und

$$\begin{aligned}f(x_0 + h) &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + \varphi(h)\\ g(x_0 + h) &= f(x_0) + g'(x_0) \cdot h + \psi(h)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow (g \cdot f)(x_0 + h) = f(x_0) \cdot g(x_0) + (f(x_0) \cdot g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)) \cdot h + \chi(h)$$

mit

$$\chi(h) = f'(x_0) \cdot g'(x_0) \cdot h^2 + f'(x_0) \cdot h \cdot \psi(h) + g'(x_0) \cdot h \cdot \varphi(h) + \varphi(h) \cdot \psi(h) + f(x_0) \cdot \psi(h) + g(x_0) \cdot \varphi(h)$$

Für $\frac{\chi(h)}{h}$ gilt aber:

$$\frac{\chi(h)}{h} = \underbrace{f'(x_0)\cdot g'(x_0)\cdot h}_{\to 0} + \underbrace{f'(x_0)\cdot \psi(h)}_{\to 0} + \underbrace{g'(x_0)\cdot \varphi(h)}_{\to 0} + \underbrace{\frac{\varphi(h)}{h}}_{\to 0} \cdot \psi(h) + f(x_0)\cdot \underbrace{\frac{\psi(h)}{h}}_{\to 0} + g(x_0)\cdot \underbrace{\frac{\varphi(h)}{h}}_{\to 0}$$

Also ist $g \cdot f$ diffbar in x_0 mit

$$(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\cdot g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

(*b*)

$$\begin{aligned} f(x)g(x)\Big|_a^b &\overset{8.1.10}{=} \int_a^b \frac{d}{dx}(f\cdot g)(x)\,dx = \int_a^b \big(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\big)\,dx \\ &= \int_a^b f'(x)g(x)\,dx + \int_a^b f(x)g'(x)\,dx \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,dx = f\cdot g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,dx$$

□

Beispiel 9.1.5. (*a*) $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot \ln(x)$
$\Rightarrow f'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$ mit $u(x) = x$, $v(x) = \ln(x)$. Also

$$f'(x) = 1\cdot \ln(x) + x\cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$$

(*b*) $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan(\ln(x))\ln(x)$

$$f'(x) = \frac{1}{1+\ln^2(x)}\frac{1}{x}\cdot \ln(x) + \arctan(\ln(x))\cdot \frac{1}{x} = \frac{\ln(x) + (1+\ln^2(x)\cdot \arctan(\ln(x)))}{x(1+\ln^2(x))}$$

(*c*) **Beh.:**

$$\int_1^2 x\cdot \ln(x)\,dx = 2\cdot \ln(2) - \frac{3}{4}$$

Denn: $u'(x) = x \Rightarrow u(x) = \frac{1}{2}x^2$, $v(x) = \ln(x)$, $\Rightarrow v'(x) = \frac{1}{x}$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_1^2 x\cdot \ln(x)\,dx &= \frac{1}{2}x^2\cdot \ln(x)\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2}x^{\cancel{2}}\cdot \frac{1}{\cancel{x}}\,dx \\ &= \frac{1}{2}x^2\cdot \ln(x)\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2}\,dx \\ &= \frac{1}{2}x^2\cdot \ln(x)\Big|_1^2 - \frac{1}{4}x^2\Big|_1^2 \\ &= \frac{1}{2}2^2\cdot \ln(2) - 0 - 1 + \frac{1}{4} \\ &= 2\cdot \ln(2) - \frac{3}{4} \end{aligned}$$

(*d*) **Beh.:**

$$F(x) = \int_0^x 1\cdot \arctan(t)\,dt = x\cdot \arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1-x^2)$$

Sei $1 = \dot{u}(t)$, $\Rightarrow u(t) = t$, $v(t) = \arctan(t)$, $\dot{v}(t) = \frac{1}{t^2+1}$.

$$\begin{aligned}F(x) &= \int_0^x 1 \cdot \arctan(t)\, dt = t \cdot \arctan(t)\Big|_0^x - \int_0^x t \cdot \frac{1}{t^2+1}\, dt \\ &= t \cdot \arctan(t)\Big|_0^x - \underbrace{\int_0^x \frac{t}{t^2+1}\, dt}_{\text{Substitution}}\end{aligned}$$

Setze $u = t^2 + 1$ $\varphi(t) = t = \sqrt{u-1}$, $\dot{\varphi}(t) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{u-1}}$,
$\varphi(1) = \sqrt{1-1} = 0$, $\varphi(x^2+1) = \sqrt{x^2+1-1} = x$.

$$\begin{aligned}&= t \cdot \arctan(t)\Big|_0^x - \int_1^{x^2+1} \frac{\cancel{\sqrt{u-1}}}{u} \frac{1}{2} \frac{1}{\cancel{\sqrt{u-1}}}\, du \\ &= t \cdot \arctan(t)\Big|_0^x - \frac{1}{2}\int_0^{x^2+1} \frac{1}{u}\, du \\ &= t \cdot \arctan(t)\Big|_0^x - \frac{1}{2}\ln(u)\Big|_1^{x^2+1} \\ &= x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\end{aligned}$$

Satz 9.1.6 (Quotientenregel)**.** *Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ diffbar in $x_0 \in I$ und $g(x) \neq 0$, $\forall x \in I$. Dann ist auch*

$$\frac{f}{g} : I \to \mathbb{R}$$

diffbar und es gilt:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Beweis. Sei zunächst $f = 1$. Erinnere, dass $h : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $h(y) = \frac{1}{y}$ diffbar ist mit $h'(y) = -\frac{1}{y^2}$. Beachte nun, dass

$$\frac{1}{g} = h \circ g$$

ist. Nach der Kettenregel (9.1.1) ist deshalb $\frac{1}{g} : I \to \mathbb{R}$ diffbar in x_0 mit

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{1}{g^2(x_0)} g'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

(Dies nennt man die **Reziprokenregel**)

Sei nun f beliebig, so beachte, dass

$$\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$$

gilt. Also ist $\frac{f}{g} : I \to \mathbb{R}$ diffbar in x_0 und es gilt (mit der Produktregel 9.1.4):

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= f'(x_0) \cdot \left(\frac{1}{g}\right)(x_0) + f(x_0) \cdot \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) \\ &= \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} - \frac{f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)} = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}\end{aligned}$$

□

Beispiel 9.1.7. (a) Sei $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln(x)}{\arctan(x)}$. Dann folgt: f ist diffbar mit

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot \arctan(x) - \ln(x) \cdot \frac{1}{x^2+1}}{\arctan^2(x)} = \frac{(1+x^2) \cdot \arctan(x) - x \cdot \ln(x)}{x \cdot (1+x^2) \cdot \arctan^2(x)}$$

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n}$. Dann ist f diffbar mit

$$f'(x) = -\frac{n \cdot x^{n-1}}{(x^n)^2} = -n \cdot x^{n-1-2n} = -n \cdot x^{-n-1}$$

Also ist mit $m = -n \in \mathbb{Z}$

$$\frac{d}{dx} x^m = m x^{m-1}$$

Also gilt:

$$\frac{d}{dx}(x^n) = n x^{n-1} \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Satz 9.1.8 (Ableitung der Umkehrfunktion)**.** *Seien I und J Intervalle in $\mathbb{R}$ und $f : I \to J$ sei bijektiv, monoton und diffbar in $x_0 \in I$. Dann ist auch die Umkehrfunktion $g = f^{-1} : J \to I$ diffbar in $y_0 := f(x_0)$ und es gilt:*

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Beweis. Zu zeigen:

$$\lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Sei daher (y_n) eine Folge mit $(y_n) \to y_0$, $y_n \neq y_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Setze $x_n := g(y_n)$, also $f(x_n) = y_n$.
Da g stetig in x_0 ist (5.1.11), folgt $(x_n) \to x_0 = g(y_0)$. Da g insbesondere injektiv ist, folgt $x_n \neq x_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow \frac{g(y_n) - g(y_0)}{y_n - y_0} = \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}} \underset{x_n \to x_0}{\longrightarrow} \frac{1}{f'(x_0)}$$

Folgt mit dem Satz über die Konvergenz von Quotientenfolgen (4.2.5). □

Kommentar 9.1.9. Mit der Leibnitz-Notation $y = f(x)$, $x = g(y)$ wird diese Regel zu

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

Beispiel 9.1.10. (a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und

$$g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$$
$$g(y) = \sqrt[n]{y}$$

Nach Definition ist $g = f^{-1}$ mit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^n$. Dann ist f bijektiv, monoton und diffbar und es gilt:

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1} \quad \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+$$

Deshalb ist g tatsächlich diffbar und es gilt:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{n \cdot (g(y))^{n-1}} = \frac{1}{n} \frac{1}{((y^{\frac{1}{2}}))^{n-1}} = \frac{1}{n} y^{-\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1}$$

Also mit $r = \frac{1}{n} \in \mathbb{Q}$ ist

$$\frac{d}{dx}(x^r) = r \cdot x^{r-1} \quad \forall x > 0$$

(b) Sei nun $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ beliebig, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ und

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ f(x) &= x^r = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p} \end{aligned}$$

Dann ist f nach der Kettenregel diffbar und es gilt:

$$f'(x) = \frac{1}{q}(x^p)^{\frac{1}{q}-1} \cdot p \cdot x^{p-1} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-p+p-1} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1} = r \cdot x^{r-1}$$

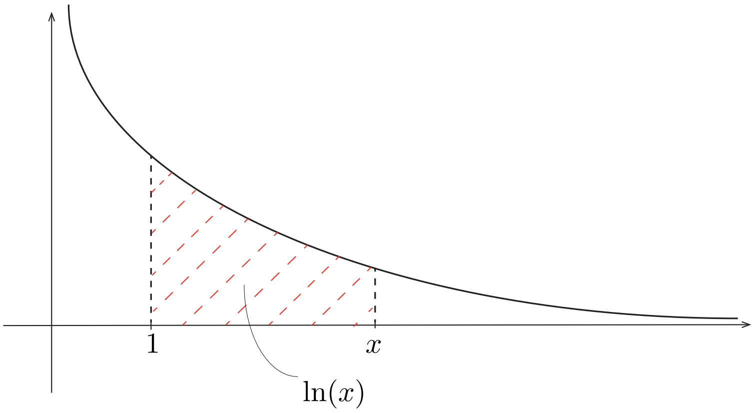
Kapitel 10

Logarithmus und Exponentialfunktion

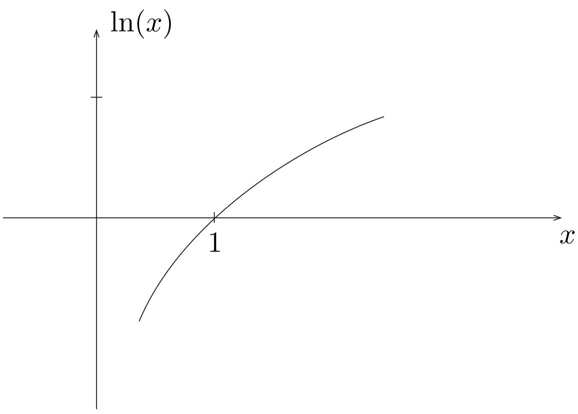
10.1 Definition

Erinnere:

$$\begin{aligned} \ln : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \ln(x) &= \int_1^x \frac{1}{t}\, dt \end{aligned}$$



Also ist $\ln(0) = 0$ und wegen $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$ ist ln streng monoton wachsend und $\ln'(1) = 1$. Also ist der Graph etwa so:



Frage:

$$\lim_{x\to\infty} \ln(x) = ? \qquad \lim_{x\to 0} \ln(x) = ?$$

Definition 10.1.1. Sei $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$.

(a)

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = c \quad :\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists M > 0 \; \forall \; x > M : |f(x) - c| < \varepsilon$$

(b)

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \infty \quad :\Leftrightarrow \quad \forall c > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in (a, \infty) : |x - a| < \delta : f(x) > c$$

(c)

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \quad :\Leftrightarrow \quad \forall c > 0 \; \exists M > 0 \; \forall x \geq M : f(x) > c$$

Ähnlich für $-\infty$

Lemma 10.1.2. *Ist $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ monoton wachsend, so ist entweder*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

oder

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = c$$

mit $c \in \mathbb{R}$.

Beweis. Sei (x_n) monoton wachsend mit $x_n \in (a, \infty)$ und $x_n \to \infty$. Dann gilt auch $(f(x_n))$ ist monoton wachsend (nach Voraussetzung).

1. Fall: $(f(x_n))$ ist nicht nach oben beschränkt.
Sei $c > 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$: $f(x_n) > c \; \forall n \geq n_0$. Also

$$\begin{aligned} f(x_n) &\geq f(x_{n_0}) > c \\ &\Rightarrow (f(x_n)) \to \infty \end{aligned}$$

Beh.:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

Denn: Sei $c > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $f(x_{n_0}) > c$. Setze $M := x_{n_0}$
$\Rightarrow \forall x > M$ gilt:

$$f(x) \overset{(*)}{>} f(x_{n_0}) > c$$

($(*)$ gilt wegen der Monotonie von f)

2. Fall: $(f(x_n))$ sei nach oben beschränkt.
$\Rightarrow (f(x_n))$ ist konvergent (mit 4.6.9).
Sei

$$c := \lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

Beh.:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = c$$

Denn:

(i) Sei $x \in (a, \infty)$ beliebig.

$$\Rightarrow \exists \; n_0 \in \mathbb{N} : x_{n_0} > x \Rightarrow f(x) \leq f(x_{n_0}) \leq c$$

$$\Rightarrow f(x) \leq c \quad \forall x \in (a, \infty)$$

(ii) Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$

$$c - \varepsilon \leq f(x_{n_0}) \leq c$$

Setze $M := x_{n_0} \Rightarrow \forall x > M$ ist

$$c \geq f(x) \geq f(x_{n_0}) \geq c - \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = c$$

□

Satz 10.1.3. $\ln : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ *ist streng monoton wachsend und bijektiv.*

Beweis. Wegen $\ln' > 0$ ist ln streng monoton wachsend und damit insbesondere injektiv. Bleibt noch zu zeigen, dass ln surjektiv ist.
Zeige dazu:

$$\lim_{x\to\infty} \ln(x) = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 0} = -\infty \quad (*)$$

Denn gilt dies, so ist ln tatsächlich surjektiv. Denn ist $y \in \mathbb{R}$ beliebig, wähle $a, b \in \mathbb{R}_+$ mit

$$\ln(a) < y < \ln(b)$$

$\overset{5.1.8}{\Rightarrow} \exists\, \xi \in (a, b)$:

$$\ln(\xi) = y$$

Beweisen wir also $(*)$. Wähle hierzu eine Zerlegung $Z = (1, 2, 3, \ldots, n)$ von $[1, n]$ und $\varphi : [1, n] \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi(t) = \frac{1}{k+1} \qquad \text{falls } t \in [k, k+1] \quad k = 1, 2, 3, \ldots, n-1$$

$\Rightarrow \varphi \in \mathcal{T}[1, n]$ und $\varphi(t) \leq \frac{1}{t}\ \forall t \in [1, n]$

$$\Rightarrow \ln(n) = \int_1^n \frac{dt}{t} \geq \int_1^n \varphi(t)\, dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \quad (4.4.6)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \ln(x) = +\infty$$

Behauptung: Es gilt:

$$\ln(x^{-1}) = -\ln(x)$$

Dies gilt aber, da

$$\frac{d}{dx} \ln(\frac{1}{x}) = \frac{1}{\frac{1}{x}} \cdot \frac{-1}{x^2} = -\frac{1}{x} = \frac{d}{dx}\,(-\ln(x))$$

und

$$\ln(x^{-1})\Big|_{x=1} = 0 = -\ln(x)\Big|_{x=1}$$

Also folgt:

$$\ln(x^{-1}) = -\ln(x)$$

Daraus ergibt sich:

$$\lim_{x\to 0} \ln(x) = \lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\lim_{x\to\infty} \ln(x) = -\infty$$

Daraus folgt dann:

$$\ln : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

ist bijektiv. □

Satz 10.1.4 (Funktionalgleichung ln). *Für alle* $x_1, x_2 \in (0, \infty)$ *gilt:*

$$\ln(x_1 \cdot x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2)$$

Beweis. Für festes $x_2 > 0$ betrachte die Funktionen

$$\begin{aligned} f, g :&(0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} \\ f(x) :&= \ln(x \cdot x_2) \\ g(x) :&= \ln(x) + \ln(x_2) \end{aligned}$$

Dann gilt für die Ableitungen:

$$f'(x) = \frac{1}{x \cdot x_2} \cdot x_2 = \frac{1}{x}$$

und

$$g'(x) = \frac{1}{x}$$

Da $f(1) = \ln(x_2) = g(1)$ ist, folgt:

$$f(x) = g(x) \quad \forall x > 0$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. □

Kommentar 10.1.5. Aus der Funktionalgleichung für den Logarithmus folgt nun leicht, dass

$$\ln(x^r) = r \cdot \ln(x)$$

Definition 10.1.6 (e-Funktion). Die Umkehrfunktion

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$$

von

$$\ln : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

heißt **Exponentialfunktion**.

Satz 10.1.7. *Die Funktion*

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$$

ist streng monoton wachsend, bijektiv und es gilt:

$$\exp'(x) = \exp(x)$$

Beweis. Die Bijektivität von exp ist klar, da sie als Umkehrfunktion definiert wurde. Da $\ln'(y) = \frac{1}{y} \neq 0$ für alle $y > 0$ gilt, ist exp auch diffbar und es gilt (mit Satz 9.1.8):

$$\exp'(x) = \frac{1}{\ln'(\exp(x))} = \frac{1}{\frac{1}{\exp(x)}} = \exp(x)$$

Da insbesondere

$$\exp'(x) = \exp(x) > 0 \ , \ \forall x \in \mathbb{R}$$

ist exp auch streng monoton wachsend. □

Satz 10.1.8 (Funktionalgleichung exp). *Für alle* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ *gilt:*

$$\exp(x_1 + x_2) = \exp(x_1) \cdot \exp(x_2)$$

Beweis. Für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ setze $y_1 := \exp(x_1)$, $y_2 := \exp(x_2)$.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \ln(y_1) = x_1\ , \quad \ln(y_2) = x_2 \\
&\Rightarrow x_1 + x_2 = \ln(y_1) + \ln(y_2) \overset{10.1.4}{=} \ln(y_1 \cdot y_2) \\
&\Rightarrow \exp(x_1 + x_2) = \exp(\ln(y_1 \cdot y_2)) = y_1 \cdot y_2 = \exp(x_1) \cdot \exp(x_2)
\end{aligned}$$

□

Korollar 10.1.9. *Setzt man*

$$e := \exp(1)$$

(also $e > 1$ die Zahl, sodass $\int_1^e \frac{1}{t}\, dt = 1$ ist (Vergleich Definition ln 8.1.8)) so gilt für alle $r \in \mathbb{Q}$:

$$\exp(r) = e^r$$

Beweis. Ist $r = \frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\left(\exp\left(\frac{p}{q}\right)\right)^q \overset{10.1.8}{=} \exp\left(\underbrace{\frac{p}{q} + \ldots + \frac{p}{q}}_{q-\text{mal}}\right) = \exp(p) \overset{10.1.8}{=} (\exp(1))^p$$

$$\Rightarrow \exp\left(\frac{p}{q}\right) = \sqrt[q]{e^p} = e^{\frac{p}{q}} = e^r \quad \forall r \in \mathbb{Q}$$

□

Kommentar 10.1.10. (*a*) Wir schreiben deshalb ab sofort auch für irrationale x, ($x \in \mathbb{R}$):

$$e^x := \exp(x)$$

auch wenn dies nichts mehr mit Potenzieren oder Wurzelziehen zu tun hat.

(*b*) Beachte aber folgendes: Ist $x = \lim_{n\to\infty}(r_n)$, $r_n \in \mathbb{Q}$ (gibt es immer, da $\mathbb{Q}$ dicht liegt.) so gilt wegen der Stetigkeit von exp:

$$e^x = \exp(x) = \exp\left(\lim_{n\to\infty} r_n\right) = \lim_{n\to\infty} \exp(r_n) = \lim_{n\to\infty} e^{r_n}$$

(*c*) An dieser Stelle ist noch nicht klar, dass

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

(folgt später)

Motivation: Damit ist der Ausdruck a^x für alle $x \in \mathbb{R}$ wenigstens für $a = e$ definiert. Um diesen Ausdruck auch für beliebiges $a > 0$ zu definieren, gehen wir von dem wünschenswerten Gesetz

$$\ln(a^x) = x \cdot \ln(a) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

aus, und definieren:

Definition 10.1.11. Sei $a > 0$ beliebig. Dann definiere die **Exponentialfunktion zu Basis** a

$$\begin{aligned}
\exp_a :&\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\
\exp_a(x) :&= \exp(\ln(a) \cdot x)
\end{aligned}$$

Satz 10.1.12. (a) *Für $a > 1$ ist $\exp_a$ streng monoton wachsend, bijektiv und diffbar, für $a = 1$ ist $\exp_a(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, für $0 < a < 1$ ist $\exp_a$ streng monoton fallend, bijektiv und diffbar. In allen Fällen gilt:*

$$\exp_a'(x) = \ln(a) \cdot \exp_a(x)$$

(b) *für alle $a > 0$ ist $\exp_a(1) = a$ und für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$\exp(x_1 + x_2) = \exp(x_1) \cdot \exp(x_2)$$

Beweis. (a) Offenbar ist $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ diffbar und für alle $a > 0$ ist

$$\exp_a'(x) = \exp(\ln(a) \cdot x) \cdot \ln(a) = \ln(a) \cdot \exp_a(x)$$

Es folgt die strenge Monotonie für $a \neq 1$ und die Konstanz für $a = 1$.
Wegen

$$\lim_{x\to\infty} \exp_a(x) = \lim_{x\to\infty} \exp(\ln(a) \cdot x) = \begin{cases} +\infty & \text{für } a > 0 \\ -\infty & \text{für } 0 < a < 1 \end{cases}$$

Ähnlich für $x \to -\infty$.
$\Rightarrow$ Bijektivität von $\exp_a$, ($a \neq 1$)

(b) Es ist

$$\exp_a(1) = \exp(\ln(a) \cdot 1) = a$$

und für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ist:

$$\begin{aligned}\exp_a(x_1 + x_2) &= \exp(\ln(a)(x_1 + x_2)) \\ &= \exp(\ln(a)x_1 + \ln(a)x_2) \\ &= \exp(\ln(a)x_1) \cdot \exp(\ln(a)x_2) \\ &= \exp_a(x_1) \cdot \exp(x_2)\end{aligned}$$

□

Kommentar 10.1.13. (a) Wie bei exp sieht man daher, dass auch bei beliebiger positiver Basis a gilt:

$$\exp_a(r) = a^r$$

mit $r \in \mathbb{Q}$

(b) Deshalb schreiben wir nun auch für alle $x \in \mathbb{R}$

$$a^x := \exp_a(x)$$

Da $\exp_a$ stetig ist, gilt auch wieder, dass $a^x = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}$ falls $r_n \in \mathbb{Q}$ mit $r_n \to x$

(c) Es wird nun auch für $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$

$$\ln(a^x) = \ln(\exp_a(x)) = \ln(\exp(\ln(a)x)) = \ln(a)x$$

(d) Wir haben nun auch, dass die Funktion

$$\begin{aligned}\mathrm{pot}_c : (0, \infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^c\end{aligned}$$

mit $c \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{pot}_c(x) = \exp_x(c) = \exp(\ln(x)c)$$

differenzierbar ist mit

$$\frac{d}{dx}(x^c) = \frac{d}{dx}(\exp(c \cdot \ln(x))) = \exp(c \cdot \ln(x)) \cdot c \cdot \frac{1}{x} = c \cdot x^c \cdot \frac{1}{x} = c \cdot x^{c-1}$$

Kommentar 10.1.14. (a) Beachte, dass

$$\exp_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

für $a \neq 1$, $a > 0$ bijektiv ist und

$$\exp_a'(x) = \ln(a) \cdot \exp_a(x) \neq 0$$

Daher existiert

$$\exp_a^{-1} : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

und ist differenzierbar. Diese nennen wir **Logarithmus zur Basis** a.

$$\log_a := \exp_a^{-1} : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

also:

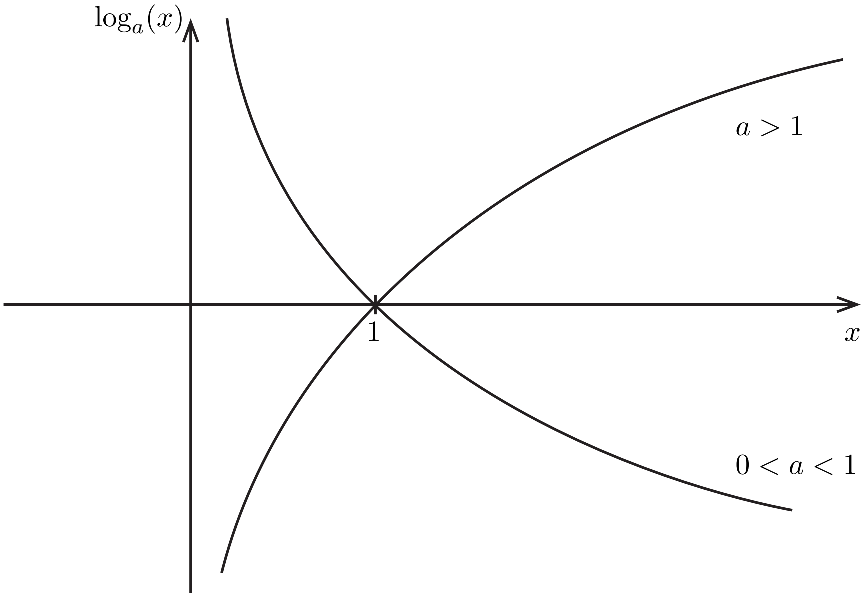
$$a^x = y \ \Leftrightarrow\ x = \log_a(y)$$

(b) Insbesondere ist also

$$\exp = \exp_e \ , \quad \ln = \log_e$$

und

$$\frac{d}{dx}(\log_a(x)) = \frac{1}{\exp_a'(\log_a(x))} = \frac{1}{\ln(a)\exp_a(\log_a(x))} = \frac{1}{\ln(a)x}$$



(c) Beobachte, dass auch

$$f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f(x) = \frac{1}{\ln(a)} \ln(x)$$

die Ableitung

$$f'(x) = \frac{1}{\ln(a)} \frac{1}{x}$$

hat. Es gilt zudem

$$\log_a(1) = 0 = f(1)$$
$$\Rightarrow \log_a = f(x)$$

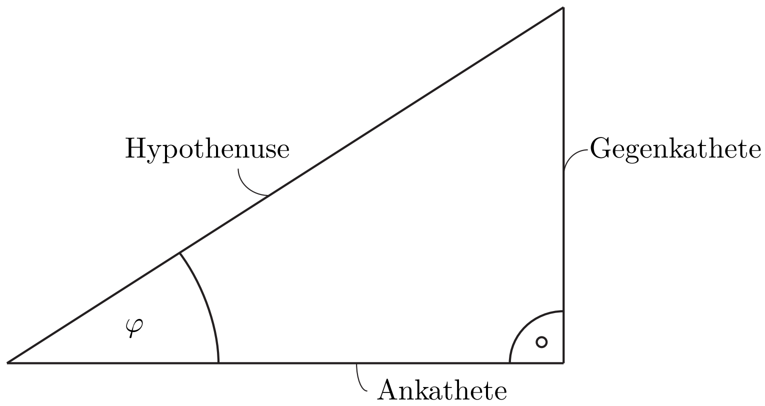
Also ist

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \quad \forall x > 0$$

Kapitel 11

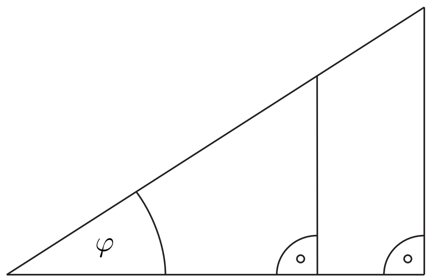
Trigonometrische Funktionen

11.1 Motivation

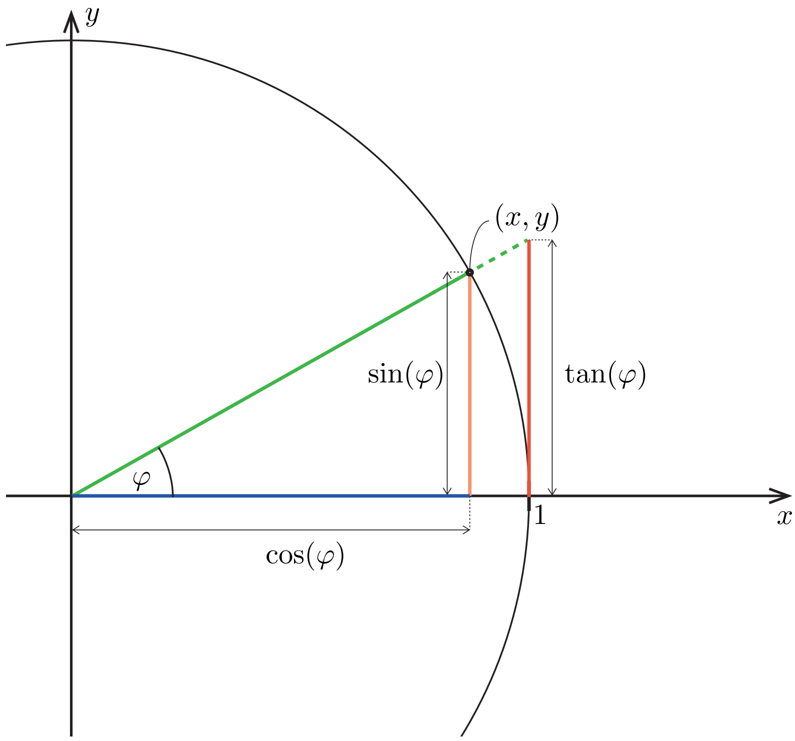


In einem rechtwinkligen Dreieck mit einem Winkel φ setzt man bekanntlich:

$$\cos(\varphi) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}}$$
$$\sin(\varphi) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}}$$
$$\cos(\varphi) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$



Nach den Strahlensätzen hängen diese Verhältnisse aber nur von den Schenkeln des Winkels ab. Deshalb betrachtet man häufig oBdA die Länge der Hypothenuse als 1 und erkennt damit die Größen $\cos(\varphi)$, $\sin(\varphi)$ und $\tan(\varphi)$ wie folgt am **Einheitskreis**.

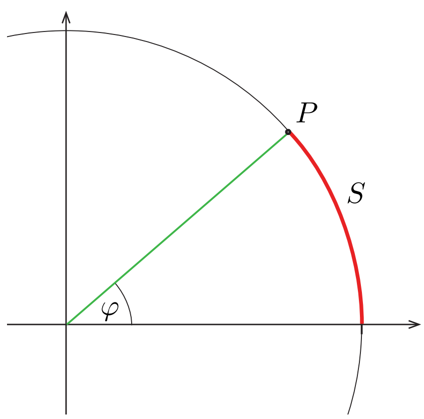


$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

Problem:

(a) Wir wollen cos, sin und tan als Funktionen (auf Intervallen reeller Zahlen), nicht nur für einzelne Winkel .
Frage: Wie musst man einen Winkel?

(b) **Idee:** Nehme als Maß für den Winkel φ die Länge des Bogens auf dem Einheitskreis zwischen $(1, 0)$ und P (die man bekommt, wenn man die Schenkel von φ mit S schneidet).



(c) *Neues Problem:* Wie misst (oder definiert) man die Länge von (krummlinigen) Kurven $C \subseteq \mathbb{R}^2$. Was soll überhaupt eine ebene Kurve $C \subseteq \mathbb{R}^2$ genau sein?

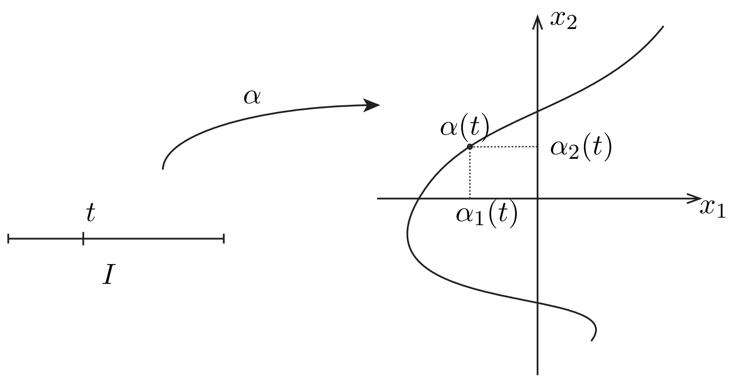
Definition 11.1.1. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine **stetig differenzierbare, ebene, parametrisierte Kurve** ist eine Abbildung

$$\alpha : I \to \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$$

sodass $\alpha_1, \alpha_2 : I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar sind.

$$C := \text{Bild}(\alpha) \subseteq \mathbb{R}^2$$

heißt dann die **Spur von** α.



Beispiel 11.1.2. (a) Benutze im folgenden die natürlichen Vektorraumstrukturen von $\mathbb{R}^2$, also

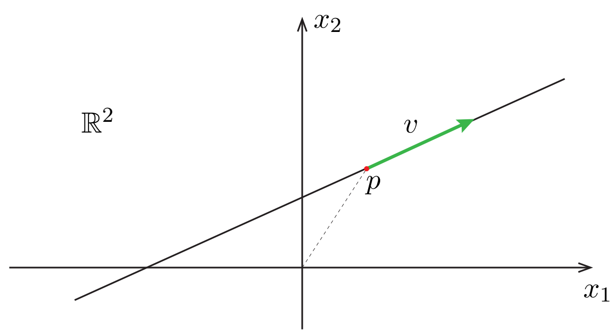
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$$
$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

Seien $p, v \in \mathbb{R}^2$, $v \neq 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dann wird durch

$$\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\alpha(t) = p + tv$$

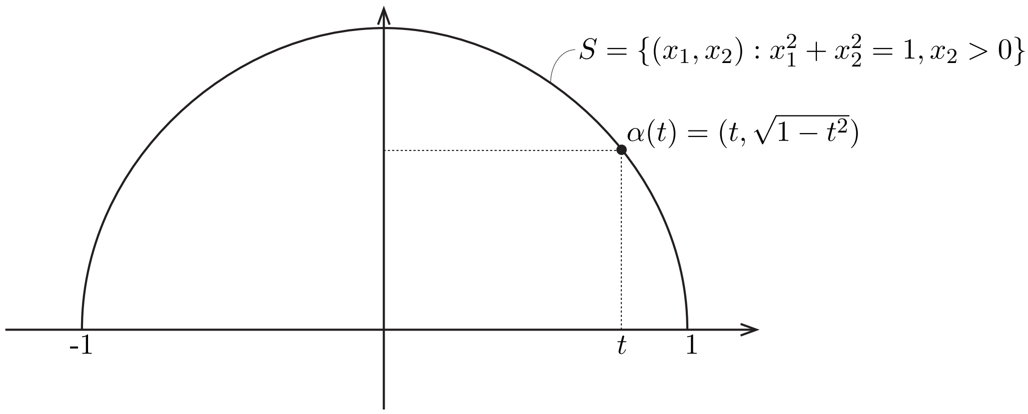
eine **Gerade** $L \subseteq \mathbb{R}^2$ parametrisiert.



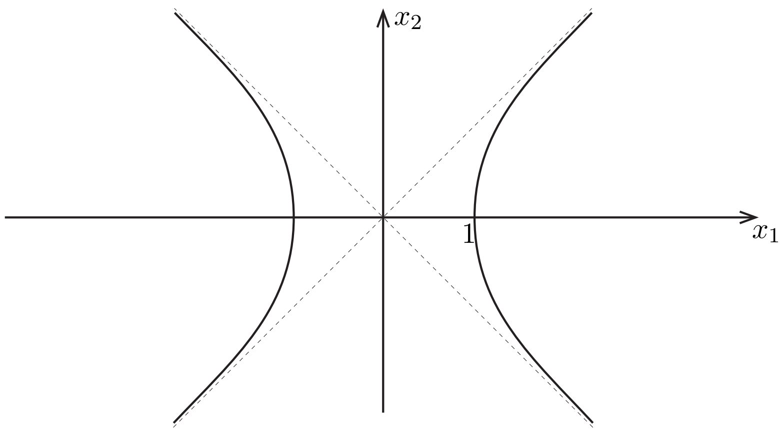
(*b*) Durch

$$\alpha : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\alpha(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$$

wird der obere Teil des Einheitskreises S parametrisiert.



(*c*) Einheitshyperbel:



$$H := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 - x_2^2 = 1\}$$

Durch

$$\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\alpha(t) = (\cosh(t), \sinh(t))$$

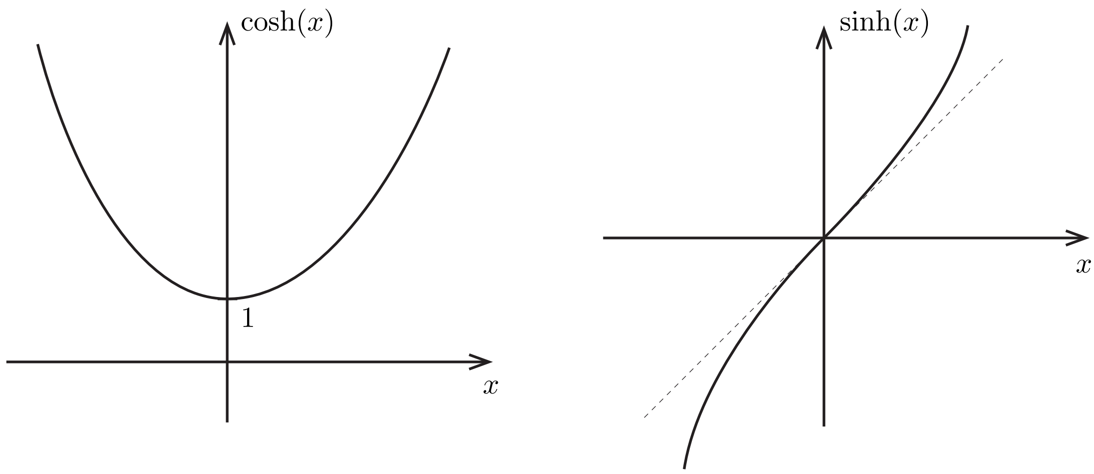
mit

$$\cosh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\cosh(t) := \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$$

und

$$\sinh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\sinh(t) := \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$$

wird der rechte Hyperbelast



$$C = \{(x_1, x_2) \in H : x_1 > 0\}$$

parametrisiert, denn:

$$\alpha_1(t)^2 - \alpha_2(t)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2x} + 2e^{x-x} + e^{-2x}\right) - \frac{1}{4}\left(e^{2x} - 2e^{x-x} + e^{-2x}\right) = 1$$

Bemerkung 11.1.3. *Eine stetig diffbare Parametrisierung der rechten Hälfte des Einheitskreises wird durch*

$$\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\alpha(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,,\frac{t}{\sqrt{q+t^2}}\right)$$

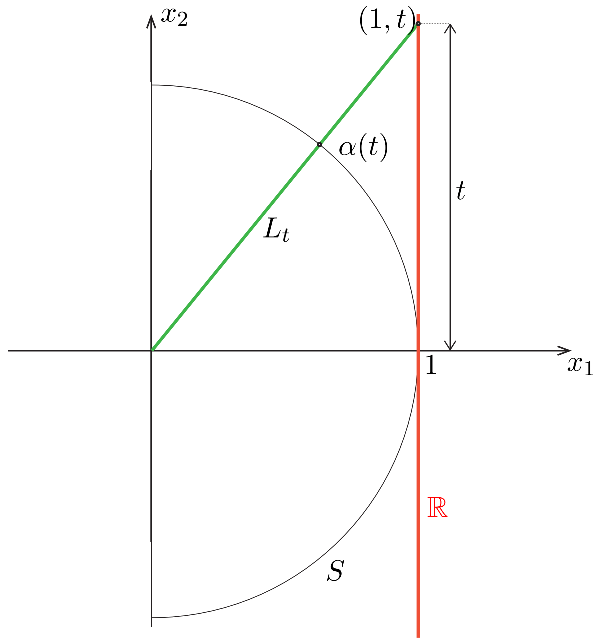
gegeben

Beweis. Betrachte für festes $t \in \mathbb{R}$ die Parametrisierung des Strahls $L_t \subseteq \mathbb{R}^2$ aus $(0,0)$ mit Steigung t

$$\lambda_t : [0, \infty] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\lambda_t(s) = s\begin{pmatrix}1\\t\end{pmatrix} = (s, st)$$

Der Schnittpunkt $p = \lambda_t(s_0)$ von L_t mit S wird gegeben durch $s_0 \geq 0$ mit

$$s_0^2 + (s_0 \cdot t)^2 = 1$$
$$\Leftrightarrow s_0^2 = \frac{1}{1+t^2}$$
$$\Leftrightarrow s_0 = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

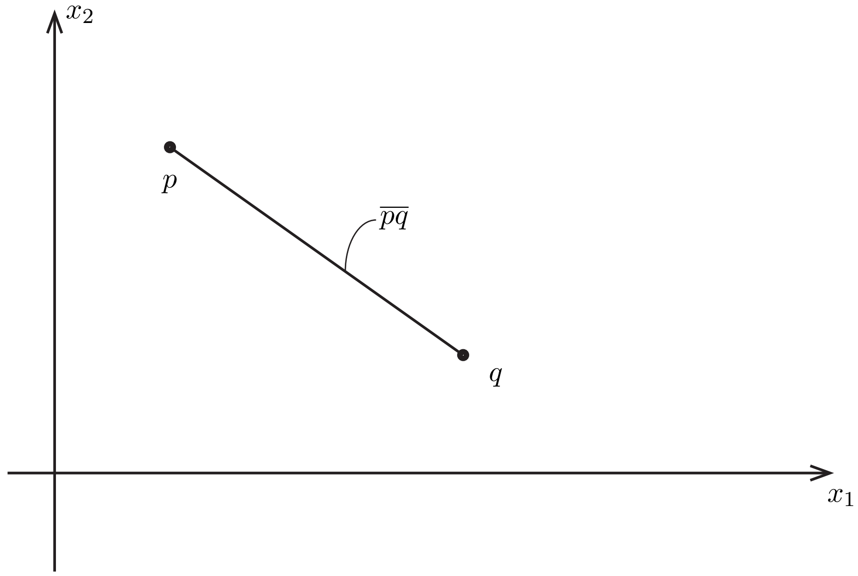


Setzt man daher

$$\begin{aligned}\alpha :&\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2\\ \alpha(t) &= \lambda_t(s_0(t))\\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\ ,\ \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)\end{aligned}$$

so erhält man eine Parametrisierung der rechten Hälfte des Einheitskreises S. □

Aber wir misst man nun die Länge einer Kurve $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2$. Elementar messbar sind zunächst nur geradlinige Strecken $\overline{pq}$.

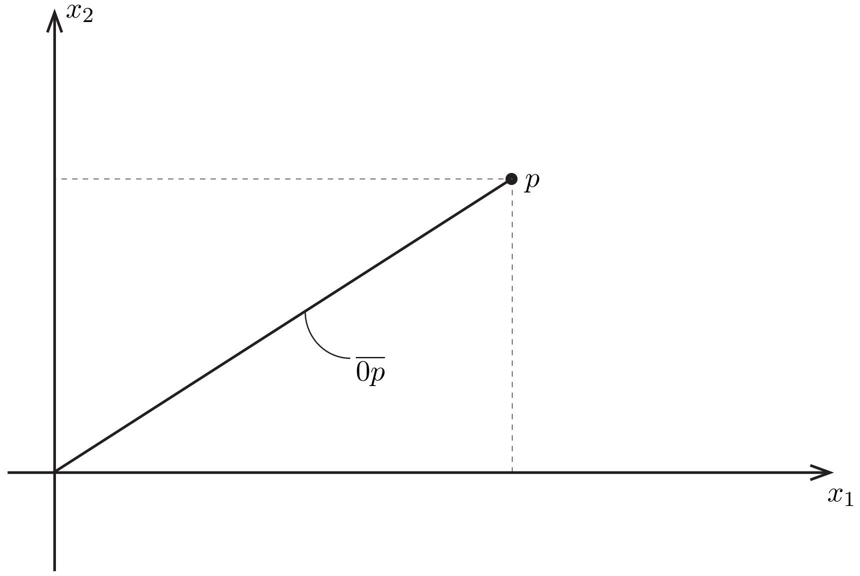


Definiere dazu:

Definition 11.1.4. (a) Wir nennen

$$\begin{aligned} \|.\| :&\mathbb{R}^2 \longrightarrow [0,\infty) \\ \|x\| &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \end{aligned}$$

die **(euklidische) Norm** auf $\mathbb{R}^2$.



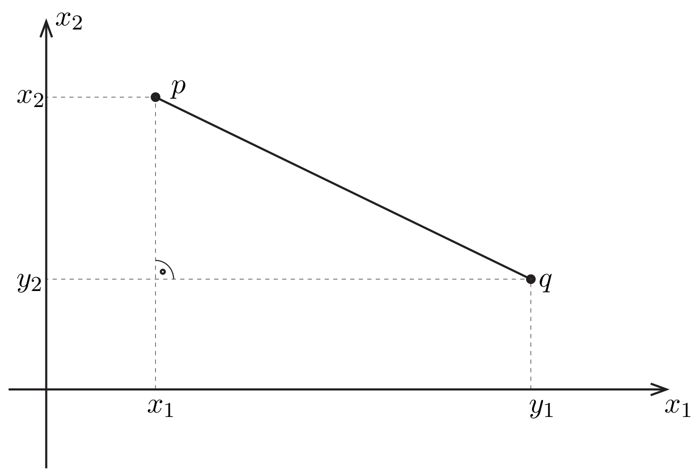
Idee: Setze nach Pythagoras:

$$L[0p] = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \|p\|$$

(b) Wir nennen weiterhin

$$\begin{aligned} d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow [0,\infty) \\ d(x,y) :=& \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^1} = \|y - x\| \end{aligned}$$

den **euklidischen Abstand** auf $\mathbb{R}^2$.

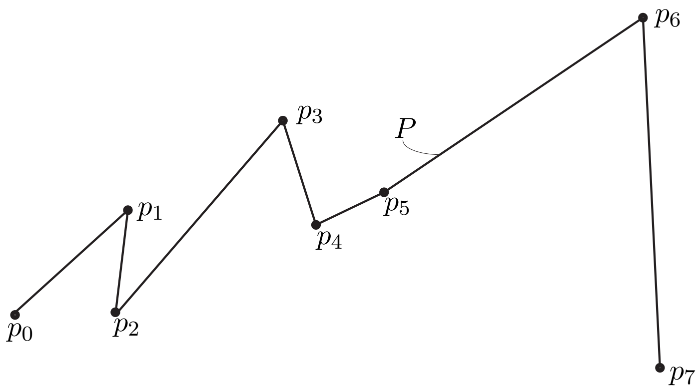


Für eine Stecke $\overline{pq}$ (also ein Element $(p,q) \in (\mathbb{R}^2)^2$) setzen wir die Länge $L[\overline{pq}]$ folgendermaßen:

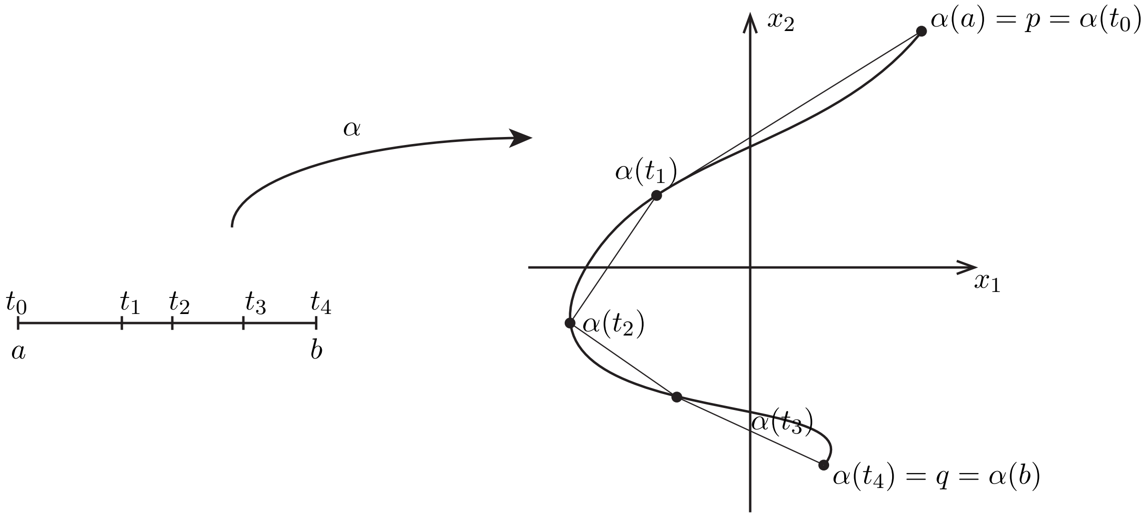
$$L[p,q] := \|q - p\| = d(p,q)$$

Unter einem **Polynomzug** verstehen wir stückweise Kurven $P = \overline{p_0 \dots p_1}$ und setzen für diesen

$$L[P] = \sum_{i=1}^{n} d(p_i, p_{i-1})$$



Idee: Um nun auch einen Längenbegriff für krummlinige Kurven zu bekommen, approximieren wir diese durch Polygonzüge folgendermaßen:



Betrachte Zerlegungen $Z = (t_0, \dots, t_n)$ von $[a, b]$ und approximiere die (zu definierende) Länge von α durch die Länge von

$$P_Z(\alpha) = \overline{\alpha(t_0) \dots \alpha(t_n)}$$

Man setzt deshalb:

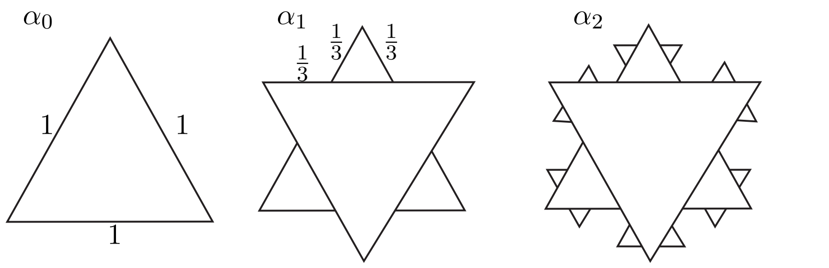
Definition 11.1.5. Sei $I = [a, b]$ und $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ eine stetige, parametrisierte Kurve (d.h.: $\alpha_1, \alpha_2 : I \to \mathbb{R}$ sind stetig). Dann heißt α **rektifizierbar** mit Länge $L \in [0, \infty)$ wenn gilt:
Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle Zerlegungen Z mit Feinheit kleiner als δ gilt:

$$\left| L[P_Z(\alpha)] \right| < \varepsilon$$

Kommentar 11.1.6. (*a*) Ist also α rektifizierbar mit Länge L und ist $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Zerlegungen mit Feinheit $\delta_n > 0$ und $(\delta_n) \to 0$, so gilt also

$$L = \lim_{n \to \infty} L[P_{Z_n}(\alpha)]$$

(*b*) Es gibt stetige Kurven, die nicht rektifizierbar sind, z.B. die sogenannte **Schneeflockenkurve**, die so entsteht:



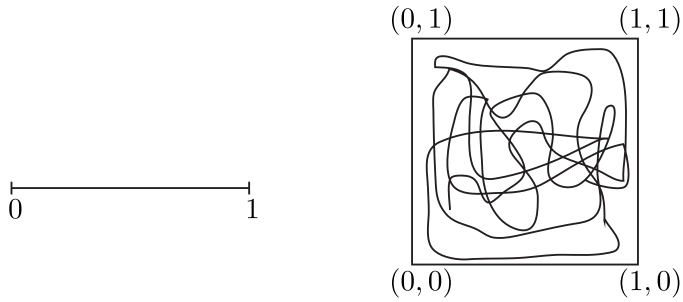
$L[\alpha_0] = 3$ $\quad$ $L[\alpha_1] = 4$ $\quad$ $L[\alpha_2] = \frac{4}{3} \cdot L[\alpha_1]$

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} (\alpha_n)$$

wegen gleichmäßiger Konvergenz (Analysis 2) würde bei Rektifizierbarkeit folgen

$$L = \lim_{n\to\infty} L[\alpha_n] = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot \underbrace{L[\alpha_0]}_{=3} = \infty \quad ↯$$

(*c*) Es gibt stetige Kurven (so genannte *Péano-Kurven*) $\alpha : [0,1] \to [0,1]^2$, sie surjektiv sind (nicht injektiv)



Definition 11.1.7. Die **euklidische Norm** $\|.\| : \mathbb{R}^2 \to [0,\infty)$ erfüllt folgende Eigenschaften

(*a*) Definitheit:

$$\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$$

(*b*) Multiplikativität

$$\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

(*c*) Dreiecksungleichung

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2$$

Lemma 11.1.8. *Sei $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ stetig diffbare Kurve. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, sodass für alle $t, s \in [a,b]$ mit $|t - s| < \delta$ gilt:*

$$\left\| \frac{\alpha(t) - \alpha(s)}{t - s} - \dot{\alpha}(t) \right\| < \varepsilon$$

Beweis. *Schritt 1:* Sei zunächst $f := \alpha_1$, $f : I \to \mathbb{R}$, $(I = [a, b])$. Sei $\varepsilon > 0$. Da $\dot{f} : I \to \mathbb{R}$ stetig und damit gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $\tau, t \in I$ mit $|\tau - t| < \delta$

$$|\dot{f}(\tau) - \dot{f}(t)| < \varepsilon$$

Sei nun $s, t \in I$ (oBdA $s < t$), mit $0 < |s - t| < \delta$. Dann gilt mit dem MWS der Integralrechnung (6.2.6): $\exists \xi \in (s, t)$ mit:

$$f(t) - f(s) = \dot{f}(\xi)(t - s)$$
$$\Rightarrow \left| \frac{f(t) - f(s)}{t - s} - \dot{f}(t) \right| = \left| \dot{f}(\xi) - \dot{f}(t) \right| < \varepsilon$$

Schritt 2: Sei $\varepsilon > 0$. Wähle nun $\delta > 0$ so klein, dass *Schritt 1* für $f = \alpha_1$ und $f = \alpha_2$ mit $\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ gilt. Für alle $s, t \in I$ (oBdA $s < t$) mit $0 < |s - t| < \delta$ gilt dann

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\alpha(t) - \alpha(s)}{t - s} - \dot{\alpha}(t) \right\|^2 &= \left(\frac{\alpha_1^2(t) - \alpha_1^2(s)}{t - s} - \dot{\alpha_1}(t) \right)^2 + \left(\frac{\alpha_2^2(t) - \alpha_2^2(t)}{t - s} - \dot{\alpha_2}(t) \right)^2 \\ &< \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \right)^2 = \varepsilon^2 \end{aligned}$$

□

Satz 11.1.9. *Ist $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ eine stetig diffbare Kurve, so ist α rektifizierbar mit Länge*

$$L = \int_a^b \|\dot{\alpha}(t)\| \ dt$$

wo $\dot{\alpha}(t) = (\dot{\alpha_1}(t), \dot{\alpha_2}(t))$ der Geschwindigkeitsvektor von α im Punkt $t \in [a, b]$ ist.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen zunächst $\delta_1 > 0$ so klein, dass für alle Zerlegungen Z von $[a, b]$ mit Feinheit kleiner als δ_1 mit

$$L := \int_a^b \|\dot{\alpha}(t)\| \ dt$$

gilt:

$$\left| \sum_{i=1}^n \|\dot{\alpha}(t_i)\| (t_i - t_{i-1}) - L \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (*_1)$$

Sei weiter $\delta_2 > 0$ so klein, dass

$$\left\| \frac{\alpha(t) - \alpha(s)}{t - s} - \dot{\alpha}(t) \right\| < \frac{\varepsilon}{2(b - a)}$$

gilt, falls $s, t \in I$ $(|s - t| < \delta_2)$ $(s \neq t)$. Dann gilt für alle Zerlegungen Z von $[a, b]$ mit Feinheit

$$\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$$

$$\begin{aligned} |L[P_Z(\alpha)] - L| &= \left| \sum_{i=1}^n \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\| - L \right| \\ \text{△-Ungl. Norm} \quad &\leq \left| \sum_{i=1}^n (\|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) - \dot{\alpha}(t_i)(t_i - t_{i-1})\| + \|\dot{\alpha}(t_i)(t_i - t_{i-1})\|) - L \right| \\ \text{Multipl. (Norm), △-Ungl. Betrag} \quad &\leq \left| \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} - \dot{\alpha}(t_i) \right\| (t_i - t_{i-1}) \right| + \left| \sum_{i=1}^n \|\dot{\alpha}(t_i)(t_i - t_{i-1}) - L\| \right| ???? \\ &< \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} - \dot{\alpha}(t_i) \right\| (t_i - t_{i-1}) \overset{(*_1)}{+} \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \frac{\varepsilon}{2(b - a)} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

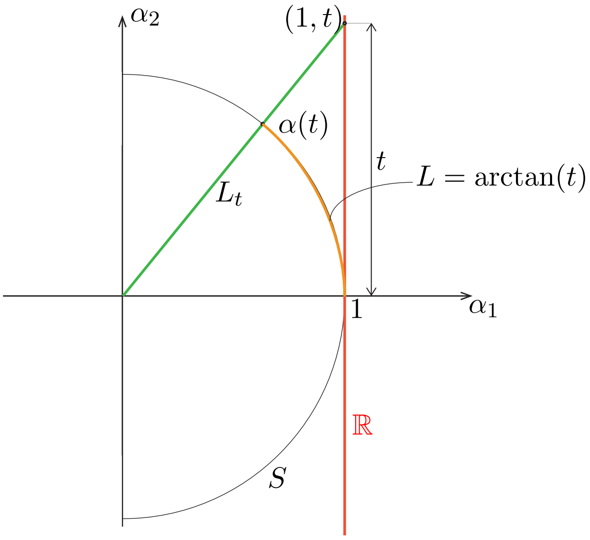
□

Satz 11.1.10. *Sei* $\alpha : R^2 \to \mathbb{R}$ *die Parametrisierung der rechten Hälfte des Einheitskreises,*

$$\alpha(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \right)$$

dann ist die Länge des Kreisbogens zwischen $(1,0)$ *und* $\alpha(t)$ *gerade der Betrag von*

$$\arctan(t) = \int_0^t \frac{1}{1+s^2}\, ds$$



Beweis. Es ist

$$\dot{\alpha_1}(t) = \frac{d}{dt}\left(\left(1+t^2\right)^{-\frac{1}{2}} \right) = -\frac{1}{2} \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} 2t = \frac{-t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

und

$$\dot{\alpha_2}(t) = \frac{d}{dt}\left(t \cdot \left(1+t^2\right)^{-\frac{1}{2}} \right) = \left(1+t^2\right)^{-\frac{1}{2}} + t \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} 2t = \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Zusammen gilt:

$$\|\dot{\alpha}(t)\|^2 = \dot{\alpha_1}^2(t) + \dot{\alpha_2}^2(t) = \frac{(-t)^2+1}{\left(1+t^2\right)^3} = \frac{1}{\left(1+t^2\right)^2}$$

$$\Rightarrow \|\dot{\alpha}(t)\| = \frac{1}{1+t^2}$$

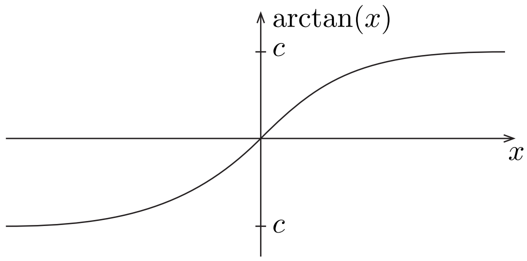
oBdA: $t > 0$

$$\Rightarrow L[\alpha|_{0,t}] = \int_0^t \|\dot{\alpha}(s)\|\, ds = \int_0^t \frac{ds}{1+s^2} = \arctan(t)$$

□

Satz 11.1.11. *Es ist* $\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *streng monoton wachsend, ungerade (d.h.* $\arctan(-x) = -\arctan(x)$*) und es gibt ein* $c \in \mathbb{R}$ *mit*

$$\lim_{x\to\infty} \arctan(x) = c$$



Beweis. Wegen $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} > 0$ ist arctan streng monoton steigend. Da $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2} = f(-t)$ (also f eine gerade Funktion ist), ist arctan ungerade, denn:

$$\arctan(-x) = \int_0^{-x} \frac{dt}{1+t^2} \overset{t=-s}{=} \int_0^{x} \frac{-ds}{1+(-s)^2} = -\int_0^{x} \frac{ds}{1+s^2} = -\arctan(x)$$

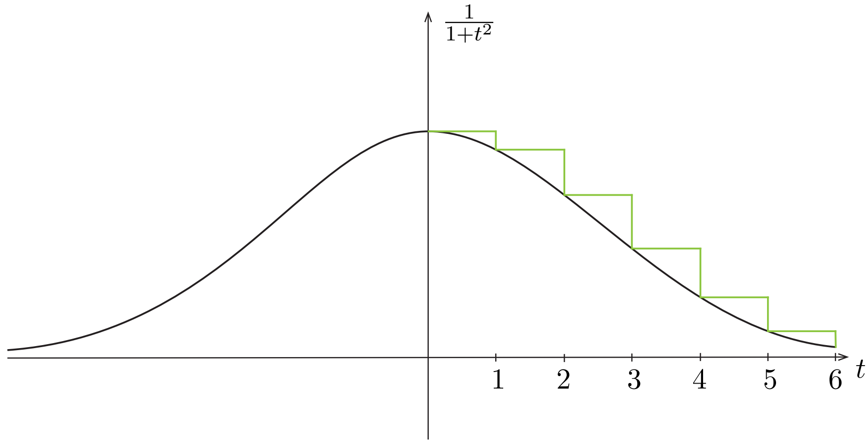
Nach dem Lemma 10.1.2 ist

$$\lim_{x\to\infty} (\arctan(x)) = \begin{cases} c & \text{mit } c \in \mathbb{R} \\ \infty & \end{cases}$$

je nachdem, ob die Folge $(\arctan(n))_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt ist oder nicht.

Es ist aber

$$\arctan(n) = \int_0^{n} \frac{dt}{1+t^2} \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+k^2} < 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < 1 + 2 = 3$$



Also existiert

$$c := \lim_{n\to\infty} \arctan(n)$$

(und ist kleiner gleich 3) und damit ist

$$c := \lim_{x\to\infty} \arctan(x)$$

□

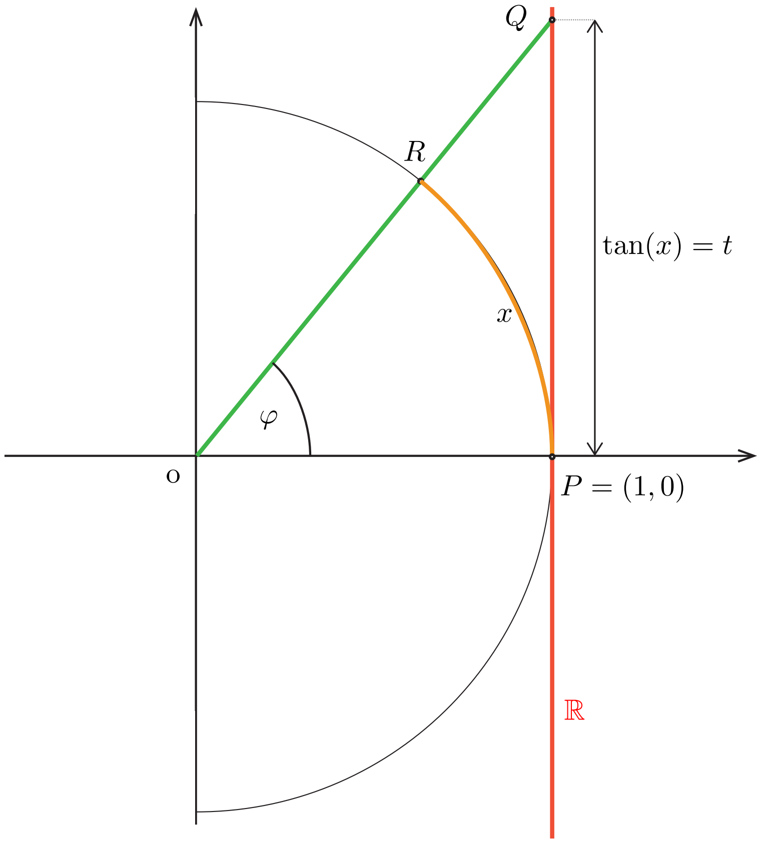
Kommentar 11.1.12. (a) Statt
$$\lim_{x\to\infty}\int_0^x f(t)\,dt$$
schreibt man auch kurz
$$\int_0^\infty f(t)\,dt$$
falls der Limes existiert.

(b) Wegen des Satzes über die Länge des Einheitskreisbogens (11.1.10) ist dieser Grenzwert $c \in \mathbb{R}$ für den Fall $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ offenbar gerade die Länge eines Viertels des Einheitskreises. Will man die Länge des ganzen Einheitskreises mit 2π bezeichnen, so sollte man also setzen:

Definition 11.1.13.
$$\pi := 2\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

Kommentar 11.1.14. Wegen des Satzes 11.1.11 über die Kurvendiskussion von arctan ist nun klar, dass
$$\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$$
bijektiv ist, sodass wir nun setzen können:

Definition 11.1.15. Die Umkehrfunktion von $\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ nennen wir Tangens:
$$\tan = \arctan^{-1} : \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$$

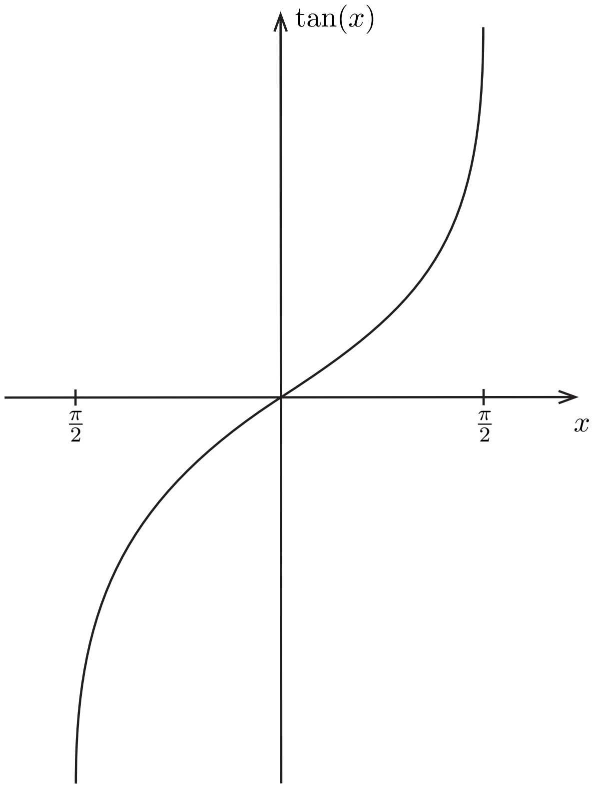


Ist φ der Winkel zwischen den Schenkeln $\overline{oP}$ und $\overline{oQ}$, $o = (0,0)$, $P = (1,0)$ und $Q = (1,t)$, so ist $x = \arctan(t)$ die Länge des Bogens (“Arcus“) zwischen P und
$$R = \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)$$

und damit $t = \tan(x)$ der Tangens des Winkels φ gemessen im Bogenmaß x.

Satz 11.1.16. *Es ist* $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ *bijektiv, streng monoton wachsend, diffbar und es gilt für alle* $x \in (-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$$



Beweis. tan ist als Umkehrfunktion von arctan natürlich bijektiv und auch streng monoton wachsend weil arctan es ist.

Da für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\arctan'(t) = \frac{1}{t^2} \neq 0$$

ist also auch tan diffbar und es gilt:

$$\tan'(x) = \frac{1}{\arctan'(\tan(x))} = \frac{1}{\frac{1}{1+\tan^2(x)}} = 1 + \tan^2(x)$$

$\square$

Definition 11.1.17. Wir definieren:

$$\cos, \sin : \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$$

wie folgt:

$$\cos(x) := \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(x)}}$$

und

$$\sin(x) := \frac{\tan(x)}{\sqrt{1+\tan^2(x)}}$$

Kommentar 11.1.18. (a) Ist x die Bogenlänge des Einheitskreises zwischen $P = (1,0)$ und $R(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)$, so wissen wir bereits, dass $Q(t) = (1,t)$ die Koordinaten $(1, \tan(x))$ hat, weil $x = \arctan(t)$ ist.
Es ist also nach Definition

$$R(x) = (\cos(x), \sin(x))$$

wie gewünscht.

(b) Es ist deshalb auch:

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1\ , \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$$

denn

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = \frac{1+\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)} = 1$$

(Trigonometrischer Pythagoras)

Satz 11.1.19. *Es sind* cos, sin *diffbar und es gilt für alle* $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$

$$\cos'(x) = -\sin(x)$$

$$\sin'(x) = \cos(x)$$

Beweis. Als Verkettung von diffbaren Funktionen sind cos und sin wieder diffbar und es gilt:

$$\begin{aligned}\cos'(x) &= \frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(x)}} = -\frac{1}{2}\left(1+\tan^2(x)\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2\tan(x)(1+\tan^2(x)) \\ &= -\frac{\tan(x)(1+\tan^2(x))}{(1+\tan^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\tan(x)}{(1+\tan^2(x))^{\frac{1}{2}}} = -\sin(x)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\sin'(x) &= \frac{d}{dx}\frac{\tan(x)}{(1+\tan(x))^{\frac{1}{2}}} = \tan'(x) \cdot (1+\tan^2(x))^{-\frac{1}{2}} + \tan(x)\left(-\frac{1}{2}\right)(1+\tan^2(x))^{-\frac{3}{2}} 2\tan(x) \cdot \tan'(x) \\ &= \frac{1+\tan^2(x)}{(1+\tan^2(x))^{\frac{1}{2}}} - \frac{\tan^2(x)(1+\tan^2(x))}{(1+\tan^2(x))^{\frac{3}{2}}} = \frac{(1+\tan^2(x)) - \tan^2(x)}{(1+\tan^2(x))^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{1}{(1+\tan^2(x))^{\frac{1}{2}}} = \cos(x)\end{aligned}$$

□

Korollar 11.1.20. *Die Funktion* $\sin : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to (-1,1)$ *ist streng monoton wachsend, ungerade und bijektiv.*

Beweis. Für alle $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ gilt:

$$\sin'(x) = \cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(x)}} > 0$$

Damit ist sin streng monoton wachsen.
Da arctan ungerade ist (11.1.11), ist auch tan ungerade und damit gilt für $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\sin(-x) = \frac{\tan(-x)}{\sqrt{1+\tan^2(-x)}} = \frac{-\tan(x)}{\sqrt{1+\tan^2(x)}} = -\sin(x)$$

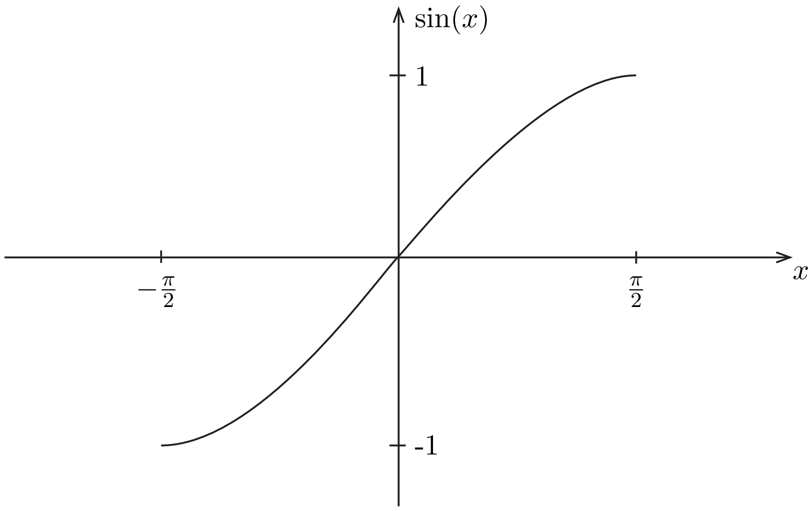
Da $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\tan(x)) \to \infty$ gilt **(WARUM?)**, folgt:

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} \sin(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin(-x) = -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin(x) = -1$$

da sin ungerade ist.
Daraus folgt, dass das Bild von sin $(-1,1)$ ist. Da sin auch streng monoton ist, ist somit

$$\sin : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to (-1,1)$$

bijektiv.

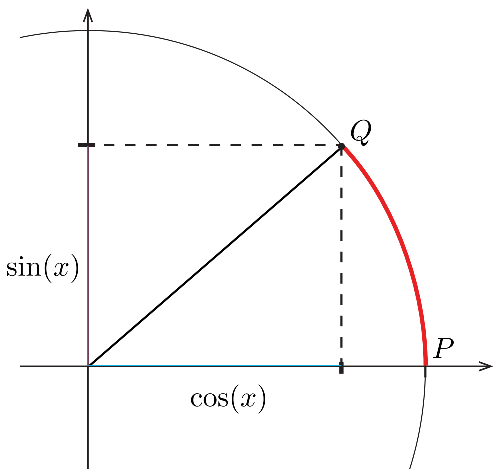


□

Definition 11.1.21. Die Umkehrfunktion von sin heißt arcsin (Arcussinus)

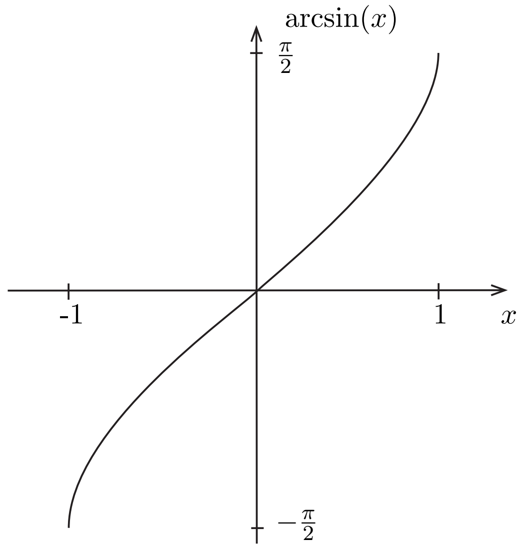
$$\sin^{-1} =: \arcsin : (-1,1) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Kommentar 11.1.22. (*a*) Ist $t = \sin(x)$, so ist also $x = \arcsin(t)$ die Länge des Bogens auf der Einheitskreislinie zwischen $P = (1,0)$ und $Q = (\cos(x), \sin(x)) = \left(\sqrt{1+t^2}, t\right)$



(b) Die Funktin arcsin ist streng monoton wachsend, ungerade, bijektiv (weil sin es ist) und diffbar, da für die Ableitung von sin gilt: $\sin'(x) cos(x) \neq 0 \; \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
Für $t \in (-1, 1)$ mit $x = \arcsin(t)$

$$\arcsin'(t) = \frac{1}{cos(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$



Lemma 11.1.23. *Für alle* $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ *gilt:*

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan(x)}$$

Beweis. Sei $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ und $t = \tan(x)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\arctan\left(\frac{1}{t}\right) &= \int_0^{\frac{1}{t}} \frac{1}{1+u^2}\, du = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_\varepsilon^{\frac{1}{t}} \frac{1}{1+u^2}\, du + \underbrace{\int_0^\varepsilon \frac{1}{1+u^2}\, du}_{\leq \int_0^\varepsilon 1\, du = \varepsilon \to 0} \right) \\
&\left(\text{substituiere mit } \varphi(v) = \frac{1}{v}\right) \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{t} \frac{1}{1+\frac{1}{v^2}} \cdot \frac{-1}{v^2}\, dv = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_t^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{1}{1+v^2}\, dv \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{1}{1+v^2}\, dv \right) - \int_0^t \frac{1}{1+v^2}\, dv \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{1+v^2}\, dv - \arctan(t) \\
&= \frac{\pi}{2} - x
\end{aligned}$$

Also:

$$\frac{1}{\tan(x)} = \tan\left(\arctan\left(\frac{1}{t}\right)\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

□

Satz 11.1.24. *Für alle $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ gilt:*

$$\cos(x) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

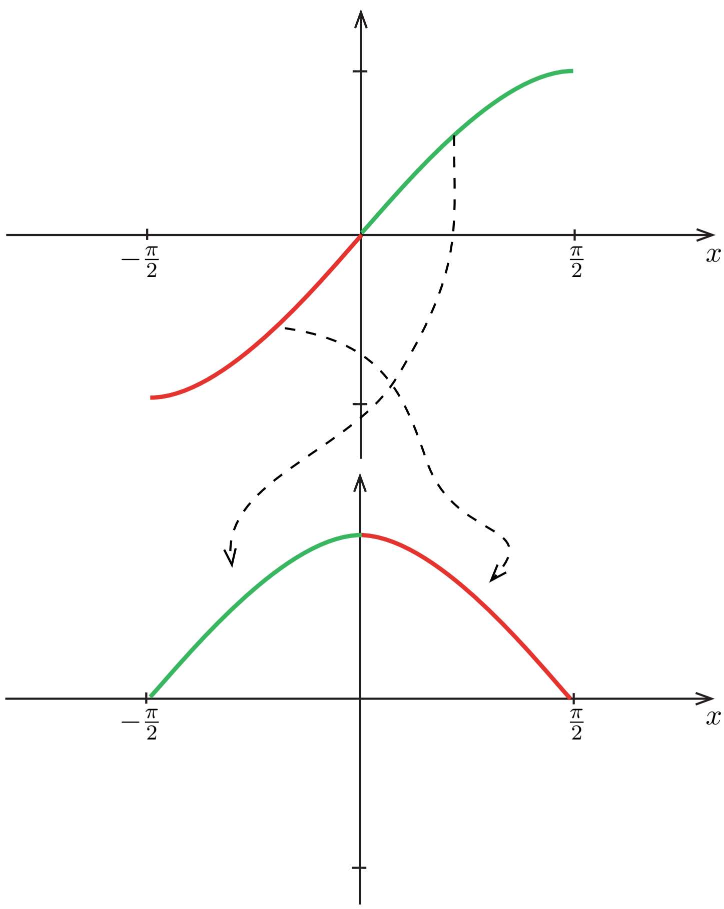
$$\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Beweis. Sei $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Dann gilt:

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2(x)}}} = \frac{\tan(x)}{\sqrt{\tan^2(x) + 1}} = \sin(x)$$

$$-\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sqrt{1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}}$$
$$= \frac{\frac{1}{\tan(x)}}{\sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2(x)}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(x)}} = \cos(x)$$

$\square$



Definition 11.1.25. Setze rekursiv für $k \in \mathbb{N}$ und $x \in \left((k-1)\frac{\pi}{2}, (k+1)\frac{\pi}{2}\right)$

$$\sin(x) := \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos(x) := -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$x \in \left(-(k+1)\frac{\pi}{2}, -(k-1)\frac{\pi}{2}\right)$

$$\sin(s) := -\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos(x) := \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Index