Mathematik für Physiker I
WiSe 06/07

nach Prof. Dr. Frank Loose
Katharina von Sturm, Vanessa Graber, Pascal Uter,
Konstantin Sering, Christoph Zimmermann, Matthias Körber

email: koerber.matthias@web.de

Version: 0.141

Inhaltsverzeichnis

1 Die reellen Zahlen

1.1 Definition: Körper

Ein Körper ist eine Menge mit mindestens zwei Elementen und zwei Verknüpfungen $+$ (Addition) und $*$ (Multiplikation), so dass gilt:

1.2 Axiome

a1) Für alle $x, y, z \in K$ gilt: $(x + y) + z = x + (y + z)$ (**Assoziativgesetz**)

a2) Für alle $x, y \in K$ gilt: $x + y = y + x$ (**Kommutativgesetz**)

a3) Es existiert ein Element $0 \in K$, so dass für alle $x \in K$ gilt:
$x + 0 = x$ (**Existenz der Null**)

a4) Zu jedem $x \in K$ existiert ein $(-x) \in K$, so dass gilt:
$x + (-x) = 0$ (**Existenz des Negativen**)

a) Das Nullelement des Körpers ist eindeutig bestimmt.
Beweis: Seien 0 und $0'$ Nullelemente, dann gilt:

$$0' = 0' + 0 = 0 + 0' = 0$$

$\Rightarrow$ Die zwei Nullelemente sind identisch, also ist Nullelement eindeutig.

b) Das Negative eines Elementes ist eindeutig bestimmt.
Sei $x \in K$ und seien $y_1, y_2 \in K$ Negative von x, also: $x + y_1 = 0 = x + y_2$.
Dann gilt:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_1 + 0 = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 \\ &= (x + y_1) + y_2 = 0 + y_2 = y_2 + 0 = y_2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Das Negative ist eindeutig bestimmt.

b1) Für alle $x, y, z \in K$ gilt: $(x * y) * z = x * (y * z)$ (**Assoziativgesetz**)

b2) Für alle $x, y \in K$ gilt: $x * y = y * x$ (**Kommutativgesetz**)

b3) Es existiert ein Element $1 \in K$, so dass für alle $x \in K$ gilt:
$x * 1 = x$ (**Existenz der Eins**)

b4) Für alle $x \in K \setminus \{0\}$ $(=: K^*)$ gibt es ein Element $x^{-1} \in K$,
so dass gilt: $x * x^{-1} = 1$ (**Existenz des Inversen**)

Ähnlich wie bei $(K, +)$ sieht man, dass das Einselement eines Körpers eindeutig bestimmt und für jedes $x \in K^*$ das Inverse von x ebenfalls eindeutig bestimmt ist. Das letzte Axiom verbindet Multiplikation und Addition:

c) Für alles $x, y, z \in K$ gilt: $x*(y+z) = (x*y)+(x*z)$ (**Distributivgesetz**)

1.3 Vereinbarung: „Punkt vor Strich“

„Punktrechnung“ geht vor „Strichrechnung“ und der Punkt der Multiplikation kann wegfallen: $xy := x * y$

1.4 Kommentar: Subtraktion und Division

Subtraktion und Division sieht man in einem Körper $(K, +, *)$ nicht als neue Verknüpfung an, sondern leitet sie vielmehr aus Addition und Multiplikation wie folgt her:

Für alle $x, y \in K$ setzt man nämlich $x - y := x + (-y)$ (**Differenz**)
und für alle $x \in K$ und $y \in K^*$ setzt man $\frac{x}{y} := xy^{-1}$ (**Quotient**)

1.5 Bemerkung: Nullelement

Sei $(K, +, *)$ ein Körper und 0 sein Nullelement,
dann gilt für alle $x \in K$: $x * 0 = 0$

Beweis:
Für alle $x \in K$ ist $x * 0 = x * (0 + 0) = x * 0 + x * 0$

$\Rightarrow 0 = x0 + (-x0) = (x0 + x0) + (-x0) = x0 + (x0 + (-x0)) = x0 + 0 = x0$

$\square$

1.6 Kommentar: Einselement $\neq$ Nullelement

Wegen (1.5) ist in einem Körper sein Einselement 1 stets von seinem Nullelement 0 verschieden: $1 \neq 0$. Wäre nämlich $1 = 0$,
so wäre für alle $x \in K$ nach (1.5) $x = x1 = x0 = 0$
$\Rightarrow K$ hätte damit nur ein Element.
$\lightning$ Widerspruch, da K nach Definition mindestens 2 Elemente hat.

1.7 Beispiel: Der Körper mit zwei Elementen

Sei K eine Menge mit zwei Elementen. Wir bezeichnen sie mit 0 und 1, $K = \{0, 1\}$. Wir definieren nun die Verknüpfungen $+$ und $*$ auf K durch folgende Verknüpfungstabellen:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

$*$	0	1
0	0	0
1	0	1

Es ist dann $\mathbb{F}_2 := (K, +, *)$ ein Körper (Übung). Er heißt der Körper mit zwei Elementen. (Er ist „im Wesentlichen“ der einzige Körper mit 2 Elementen.)

1.8 Die reellen Zahlen

Legt man auf einer Geraden L zwei Punkte 0 und 1 fest, so vereinbaren wir, dass jeder Punkt $x \in L$ einer reellen Zahl entspricht, die den (gerichteten) Abstand zum Punkt 0 im Maßstab der Strecke $\overrightarrow{01}$ misst. Wir wollen hier nicht definieren, „was die reellen Zahlen $\mathbb{R} = \{x : x \text{ ist reelle Zahl}\}$ sind“, sondern wir wollen vielmehr annehmen, dass es eine Menge ist, die mit zwei Verknüpfungen $+$ und $*$ ausgestattet ist, die die Axiome eines Körpers erfüllen (und für die der Punkt $0 \in \mathbb{R}$ das Nullelement und der Punkt $1 \in \mathbb{R}$ das Einselement des Körpers ist).

1.9 Bezeichungen: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$

Seien $(\mathbb{R}, +, *)$ die reellen Zahlen und $0, 1 \in \mathbb{R}$ ihr Null- bzw. Einselement. Wir bezeichnen nun weiter mit $2 := 1+1$, $3 := 2+1$ (rekursiv $n := (n-1)+1$), dann bezeichnet:

- $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\} \subseteq \mathbb{R}$ die natürlichen Zahlen,
- $\mathbb{Z} := \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} \subseteq \mathbb{R}$ die ganzen Zahlen,
- $\mathbb{Q} := \left\{\frac{p}{q} \in \mathbb{R} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\right\} \subseteq \mathbb{R}$ die rationalen Zahlen.

Man beachte, dass $\mathbb{Q}$ mit $+$ und $*$ auch alle Körperaxiome erfüllt und daher auch ein Körper ist ($\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ hingegen nicht).

1.10 Beispiel: $\mathbb{C}$ ist ein Körper

Sei $K = \mathbb{R}^2 = \{(x,y) \ : \ x,y \in \mathbb{R}\}$ versehen mit den Verknüpfungen $+$ und $*$. Es ist dann $\mathbb{C} = (\mathbb{R}^2, +, *)$ ein Körper (Übung).

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} ,$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1x_2 - y_1y_2 \\ x_1y_2 + y_1x_2 \end{pmatrix} .$$

Wir setzen dann:

$$i := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \ 1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{(die Eins in } \mathbb{C} \text{)}$$

und allgemein:

$$x := \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es ist dann dür alle $z = \binom{x}{y} \in \mathbb{C}$:

$$z = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = x + iy$$

Es heißt $x = \mathrm{Re}(z)$ der Realteil von z und $y = \mathrm{Im}(z)$ der Imaginärteil von z. Weiter ist:

$$i^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1$$

und man erhält die Multiplikationsregel aus $i^2 = -1$ mit dem Distributivgesetz zurück:

$$\begin{aligned} (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) &= (x_1x_2 + i^2y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2) \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2) \end{aligned}$$

1.11 Vorbemerkung: Ordnungsstruktur von $\mathbb{R}$

Die rein „algebraische“ Struktur eines Körpers auf $\mathbb{R}$ reicht noch nicht aus, um auf $\mathbb{R}$ „Analysis“ betreiben zu können. Eine weitere wichtige Eigenschaft von $\mathbb{R}$ ist ihre sog. **Ordnungsstruktur**.

1.12 Definition: Anordnung auf K

Sei $(K, +, *)$ ein Körper. Eine Teilmenge $P \subseteq K$ heißt eine **Anordnung auf** K, wenn folgendes gilt:

a) Für jedes $x \in K$ gilt genau eine der drei folgenden Möglichkeiten:
$x \in P$ oder $x = 0$ oder $-x \in P$, also $K = P \mathbin{\dot{\cup}} \{0\} \mathbin{\dot{\cup}} (-P)$

b) Für alle $x, y \in P$ gilt $x + y \in P$

c) Für alle $x, y \in P$ gilt $x * y \in P$

Das Paar (K, P) heißt dann ein angeordneter Körper.

1.13 Bezeichnung: $>, \geq, <, \leq$

Sei (K, P) ein angeordneter Körper. Man setzt dann für $x, y \in K$:

- $y > x :\Leftrightarrow y - x \in P$
- $y \geq x :\Leftrightarrow y > x$ oder $y = x$
- $y < x :\Leftrightarrow x > y$

Zum Beispiel ist dann $P = \{x \in K : x > 0\}$ und $-P = \{-x \in K : x \in P\} = \{x \in K : x < 0\}$. Elemente aus P heißen **positiv**, Element aus $-P$ heißen **negativ**.

1.14 Bemerkung: Angeordnete Körper

Sei (K, P) ein angeordneter Körper. Dann gilt:

a) Sind $x, y \in K$ mit $x < y$ und $a \in K$, so ist $x + a < y + a$.

b) Sind $x, y \in K$ mit $x < y$ und $a > 0$, so ist $ax < ay$.

c) Für alle $x \in K^*$ ist $x^2 := x * x > 0$, insbesondere ist $1 > 0$.

Beweis:

a) $(x + a) - (y + a) = (x - y) + (a - a) = x - y$

b) Sei $a > 0$ und $x < y \Rightarrow y - x > 0 \Rightarrow ay - ax = a(y - x) > 0$
$\Rightarrow ay = ay - ax + ax > 0 + ax = ax$

c) Ist $x > 0 \Rightarrow x^2 = x * x > 0$, ist $x < 0 \Rightarrow (-x) > 0$
$\Rightarrow x^2 = x * x = (-x) * (-x) > 0$. Insbesondere ist $1 = 1^2 > 0$.

1.15 Die reellen Zahlen als angeordneter Körper

Sei $(\mathbb{R}, +, *)$ die reellen Zahlen und $P = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, d.h. die reellen Zahlen, die auf der gleichen Seite von 0 liegen, wie $1 \in L$. Wir nehmen nun (ähnlich wie bei den Strukturen $+$ und $*$ ohne Beweis) axiomatisch an, dass P eine Anordnung von $\mathbb{R}$ ist. Es ist dann $(\mathbb{R}, +, *, P)$ ein angeordneter Körper.

1.16 Beispiele: (nicht-) angeordnete Körper

a) Betrachte den Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen und $P = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}$ $(= P \cap \mathbb{Q})$. Es ist dann $(\mathbb{Q}, P)$ ein angeordneter Körper.

b) Auf dem Körper $\mathbb{F}_2$ kann man keine Anordnung finden, denn in $\mathbb{F}_2$ gilt: $-1 = 1$ und (1.12a) kann daher nicht erfüllt werden.

c) Auch $\mathbb{C}$ kann nicht angeordnet werden, denn für $i \in \mathbb{C}$ gilt:
Ist $i > 0$, so ist $-1 = i * i > 0$ im $\lightning$ Widerspruch zu (1.14c), ist $i < 0$ so ist $-i > 0$ und $-1 = (-i) * (-i) > 0$ ($\lightning$ Widerspruch zu (1.14c)). Also kann (1.12a) wieder nicht erfüllt werden.

1.17 Definition: Der Absolutbetrag

Sei (K, P) ein angeordneter Körper (z.B. $\mathbb{R}$). Für jedes $x \in K$ definiert man:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

(Für $K = \mathbb{R}$ nennen wir $|x|$ **den Absolutbetrag von** x).

1.18 Satz: Dreiecksungleichung

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ (oder einem angeordneten Körper) gilt:

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Beweis: Wegen $x \leq |x|$ und $y \leq |y| \Rightarrow x + y \leq |x| + |y|$.
Ebenso: $-x \leq |x|, -y \leq |y| \Rightarrow -(x + y) = (-x) + (-y) \leq |x| + |y|$
also: $|x + y| \leq |x| + |y|$.

$\square$

2 Funktionen

2.1 Definitionen: Abbildungen

a) Seien A und B Mengen. Eine Abbildung von A nach B ist eine Zuordnung f, geschrieben $f : A \to B$, die jedem Element $a \in A$ genau ein Element $b \in B$ zuordnet. Schreibe $b = f(a)$ oder auch $a \mapsto b$.

b) Ist speziell $B = \mathbb{R}$, so spricht man von einer **Funktion auf** A.

2.2 Kommentar: Intervalle, Graphen

a) Üblicherweise ist A ein Intervall in $\mathbb{R}$. Es heißt:

$$\begin{aligned} (a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \text{ ein offenes Intervall und} \\ [a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\} \text{ ein abgeschlossenes Intervall.} \end{aligned}$$

Hier sind $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Man führt auch unendliche Intervalle ein:

$$\begin{aligned} (a,\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} : x > a\} \\ (-\infty,b) &:= \{x \in \mathbb{R} : x < b\} \end{aligned}$$

Entsprechend definiert man z.B. $[a,b)$, $(-\infty,b]$, usw.
Ein Intervall bezeichnet ab sofort immer eines dieser Beispiele.

b) Veranschaulicht werden Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ durch ihren Graphen,

$$G_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b], y = f(x)\} .$$

2.3 Beispiele: Funktionen

a) Sei $c \in \mathbb{R}$. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto c$, heißt **konstante Funktion**.

b) Die Funktion $\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ heißt **Identität** (auf $\mathbb{R}$).

c) Sei $a \in \mathbb{R}$. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto a \cdot x$ heißt **lineare Funktion**.

d) Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Funktion $\mathrm{pot}_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n := x \cdot x \cdot ... \cdot x$ (n-mal) heißt **Potenzfunktion**. Für $n = 0$ vereinbaren wir: $x^0 := 1$ (auch für $x = 0$).

e) Sei $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$. Die Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$ heißt **Polynomfunktion vom Grad** n.

2.4 Definition: injektiv, surjektiv, bijektiv

Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt

a) **injektiv**, wenn aus $a_1 \neq a_2$ auch $f(a_1) \neq f(a_2)$ folgt.

b) **surjektiv**, wenn es zu jedem $b \in B$ ein $a \in A$ mit $f(a) = b$ gibt.

c) **bijektiv**, wenn sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

2.5 Kommentar: Bild und Urbild

a) Ist $f(a) = b$, so nennt man b das Bild von a unter f oder auch a ein **Urbild von b unter f**. Man setzt:

$$\mathrm{Bild}(f) := \{b \in B : \text{ es existiert ein } a \in A \text{ mit } f(a) = b\}$$

das **Bild von f**.

b) Es ist also f surjektiv, wenn es zu jedem $b \in B$ **mindestens** ein $a \in A$ gibt mit $f(a) = b$; es ist f injektiv, wenn es zu jedem $b \in B$ **höchstens** ein $a \in A$ gibt mit $f(a) = b$. Also ist f bijektiv, wenn es zu jedem $b \in B$ **genau** ein Urbild gibt.

2.6 Beispiele

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ ist weder injektiv noch surjektiv, denn $f(-1) = f(1)$ und es gibt kein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = -1$.

b) Für $a \neq 0,\ b \in \mathbb{R}$ ist die **affin-lineare Funktion** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, bijektiv, denn für jedes $y \in \mathbb{R}$ gibt es genau eine Lösung $x \in \mathbb{R}$ für die Gleichung $ax + b = y$, nämlich $x = \frac{y-b}{a}$.

2.7 Definition: Verkettung

Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Abbildungen. Es ist dann ihre Verkettung (oder auch **Komposition**) $g \circ f : A \to C$ definiert durch $g \circ f(a) := g(f(a))$

2.8 Beispiel

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die lineare Funktion $f(x) = ax$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion $g(x) = x + b$. Es sind dann $g \circ f, f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g \circ f(x) = g(ax) = ax + b$, hingegen ist $f \circ g(x) = f(x + b) = a \cdot (x + b) = ax + ab$
$\Rightarrow$ Die Verkettung zweier Funktionen ist nicht kommutativ!

2.9 Definition: Umkehrabbildung

Sei $f : A \to B$ eine bijektive Abbildung. Man nennt dann $g : B \to A$ die jedem $b \in B$ sein eindeutig bestimmtes Urbild $a \in A$ unter f zuordnet, die **Umkehrabbildung** (oder das Inverse) von f und schreibt $g = f^{-1}$.
Es ist also:

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \ .$$

2.10 Warnung: Umkehrabbildung

Man kann also eine Abbildung $f : A \to B$ nur dann umkehren, wenn f bijektiv ist. Im Gegensatz dazu kann man für beliebige Abbildungen
$f : A \to B$ und Teilmengen $V \subseteq B$ das Urbild von V unter f definieren durch:

$$f^{-1}(V) = \{a \in A : f(a) \in V\}$$

Urbilder von Mengen sind immer möglich, Umkehrungen von Abbildungen jedoch nicht, denn $f^{-1}(\{y\})$ ist im Allgemeinen nicht einpunktig.

2.11 Bemerkung: Bijektivität/Umkehrabbildung

Es ist eine Abbildung $f : A \to B$ genau dann bijektiv, wenn es eine Abbildung $g : B \to A$ gibt, so dass gilt: $g \circ f = \mathrm{id}_A, \;\; f \circ g = \mathrm{id}_B$. Für eine Menge A bezeichnet $\mathrm{id}_A : A \to A$ die identische Abbildung $\mathrm{id}_A(a) = a$.
(Beweis: Übung)

2.12 Beispiel: Quadratwurzel

Sei $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. Betrache die Funktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^2$, dann ist f bijektiv (Beweis später). Ihre Umkehrung heißt **Quadratwurzel** und wird bezeichnet mit $\sqrt{\ } : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$.

2.13 Definition: Monotonie

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

a) Es heißt f **streng monoton wachsend**, wenn gilt:
Ist $x_1 < x_2$, so ist auch $f(x_1) < f(x_2)$.

b) Sie heißt **monoton wachsend**, wenn gilt:
Ist $x_1 \leq x_2$, so ist auch $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Entsprechend wird (streng) monoton fallend definiert.

2.14 Bemerkung: Monotonie

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine streng-monoton wachsende Funktion.

a) Ist $J := \mathrm{Bild}(f) \subseteq \mathbb{R}$ und $g : I \to J$, $g(x) := f(x)$, so ist g bijektiv.

b) Es ist dann $g^{-1} : J \to I$ auch streng monoton wachsend.

Beweis:

a) Nach Definition von J ist g jedenfalls surjektiv.
Ist $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 \neq x_2$, so sei o.B.d.A. $x_1 < x_2 \Rightarrow$ (strenge Monotonie von f) $f(x_1) < f(x_2)$, insbesondere $f(x_1) \neq f(x_2)$, also g auch injektiv.

b) Seien $y_1, y_2 \in J$ mit $y_1 < y_2$. Sei $x_1 = g^{-1}(y_1)$, $x_2 = g^{-1}(y_2)$.
Wäre $x_1 \geq x_2$ so wäre $y_1 = g(x_1) = f(x_1) \geq f(x_2) = g(x_2) = y_2$ ($\lightning$ Widerspruch) Also ist: $g^{-1}(y_1) = x_1 < x_2 = g^{-1}(y_2)$, also g^{-1} streng monoton wachsend.

$\square$

3 Grenzwerte

3.1 Induktionsprinzip

Wir vereinbaren, dass folgendes richtig ist: Um eine Aussage $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ zu beweisen, reicht es zu zeigen:

a) $A(1)$ ist richtig (Induktionsanfang).

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Ist $A(n)$ richtig, so auch $A(n+1)$.
(Induktionsschritt)

3.2 Beispiel: Induktion

a) Für alle natürlichen Zahlen gilt:

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$$

Beweis:

- $A(1) = 1 = 1^2$ ✓
- $A(n) = 1 + 3 + ... + (2n - 1) = n^2$

$$\begin{aligned} A(n+1) &= 1 + 3 + ... + (2n-1) + (2(n+1) - 1) \\ &= n^2 + 2(n+1) - 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 \quad \checkmark \end{aligned}$$

b) Für jedes $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$1 + x + x^2 + ... + x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

Beweis:

- $A(0): \; 1 = \sum_{k=0}^{0} x^k = x^0 = \frac{x^1-1}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} = 1$ ✓
- $A(n): \; \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$

$$
\begin{aligned}
A(n+1): \qquad & \sum_{k=0}^{n} x^k + x^{n+1} = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} + x^{n+1} \\
= \quad & \frac{x^{n+1}-1}{x-1} + \frac{x^{n+1}(x-1)}{x-1} = \frac{x^{n+1}-1+x^{n+1}(x-1)}{x-1} \\
= \quad & \frac{x^{n+1}-1+x^{(n+1)+1}-x^{n+1}}{x-1} = \frac{x^{(n+1)+1}-1}{x-1} \quad \checkmark
\end{aligned}
$$

3.3 Schreibweise: Summe, Produkt

Sind $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$ mit $n \in \mathbb{N}$, so schreiben wir:

- $a_1 + a_2 + ... + a_n =: \sum_{k=1}^{n} a_k$ und $\sum_{k=1}^{0} := 0$
- $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n =: \prod_{k=1}^{n} a_k$ und $\prod_{k=1}^{0} := 1$

3.4 Definition: Fakultät, Binomialkoeffizient

a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ setzt man:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n = \prod_{k=1}^{n} k \qquad \text{(gesprochen: Fakultät und } 0! := 1\text{)}$$

b) Für jedes $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$:

$$\binom{n}{k} := \frac{(n-k+1) \cdot ... \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad \text{(gesprochen: } n \text{ über } k\text{)}$$

3.5 Bemerkung: Binomialkoeffizient

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist:

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$$

Beweis:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\ (n-0)!} = \frac{n!}{0!\ n!} = 1 = \frac{n!}{n!\ 0!} = \frac{n!}{n!\ (n-n)!} = \binom{n}{n}$$

Und für alle $n \geq 2$ und $k \in \{1, ..., n-1\}$ gilt:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!} \\
&= \frac{(n-1)!\,k + (n-1)!\,(n-k)}{k!\,(n-k)!} \\
&= \frac{(n-1)!\,(k+n-k)}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}
\end{aligned}$$

$\square$

3.6 Satz: Binomischer Lehrsatz

Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Beweis:

- $n = 0: \quad (x+y)^0 = 1 = \binom{0}{0} x^0 y^0 \quad \checkmark$
- $n \to n+1:$

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)^n (x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k (x+y) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k + \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} x^{n-(j-1)} y^j \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} x^{n+1-k} y^k + y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] x^{n+1-k} y^k + y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k + y^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k \quad \checkmark
\end{aligned}$$

3.7 Satz: Bernoulli

Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

Beweis: Induktion nach n

- $n = 0:\ (1+x)^0 = 1 = 1 + 0x$ ✓
- $n \to n+1:$

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= (1+x)^n \underbrace{(1+x)}_{\geq 0} \geq (1+n\cdot x)(1+x) \\ &= 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x \checkmark \end{aligned}$$

3.8 Definition: Folge

Eine **Folge** reeller Zahlen ist eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
Statt f notiert man sie üblicherweise mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn $f(n) = a_n$ ist.

3.9 Beispiele: Folgen

a) $a_n = n$

b) $a_n = \frac{1}{n}$

c) $a_n = n!$

d) für $c \in \mathbb{R}$ setze $a_n = c^n$

e) $a_n = n^n$

f) $a_n = (-1)^n$

3.10 Definition: Konvergenz

Eine Folge reeller Zahlen (a_n) heißt **konvergent** gegen eine reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$, wenn gilt: Zu jedem $\epsilon > 0$ exisitiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$|a_n - a| < \epsilon.$$

Man schreibt $(a_n) \to a$ oder auch $\lim_{n\to\infty}(a_n) = a$

3.11 Archimedisches Axiom

Die folgende Eigenschaft der reellen Zahlen kann man nicht aus den Körper- und Anordnungsaxiomen der reellen Zahlen herleiten (denn es gibt angeordnete Körper, die diese Eigenschaften nicht haben). Wir nehmen sie deshalb in unser Axiomensystem für die reellen Zahlen auf:
Für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $n > x$ ist.

Bezeichnung:
Sei $x > 0$. Die kleinste natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n > x$ wird ab sofort mit $\ulcorner x \urcorner$ bezeichnet, die größte natürliche Zahl n mit $n \leq x$ wird mit $\llcorner x \lrcorner$
(oder auch $[x]$, gesprochen: Gaußklammer von x) bezeichnet, also:

$$\ulcorner x \urcorner := \min\{n \in \mathbb{N} : n > x\}$$
$$\llcorner x \lrcorner = \ulcorner x \urcorner - 1$$

3.12 Folgerung: $\left(\frac{1}{n}\right)$ ist eine Nullfolge

Sei $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist (a_n) eine Nullfolge, d.h. $\lim_{n\to\infty}(a_n) = 0$.

Beweis:
Sei $\epsilon > 0$. Wähle nun $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$ (z.B. $n_0 = \ulcorner \frac{1}{\epsilon} \urcorner$ aus Archimedes Axiom). Für alle $n \geq n_0$ gilt dann $n \geq n_0 > \frac{1}{\epsilon}$
$\Rightarrow 0 < \frac{1}{n} < \epsilon \;\forall\; n \geq n_0$, also:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = 0.$$

3.13 Bezeichnung: $\forall, \exists$

$\forall$ = für alle; $\exists$ = es existiert

3.14 Beispiele: von Folgen

a) $a_n = \frac{1}{n^3+n+1}$. Behauptung: $(a_n) \to 0$.
Denn sei $\epsilon > 0 \Rightarrow \frac{1}{n^3+n+1} < \frac{1}{n} < \epsilon$, wenn $n > \frac{1}{\epsilon}$ ist.
Wähle daher wieder $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$. Dann gilt für alle $n \geq n_0$:

$$0 < \frac{1}{n^3+n+1} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \epsilon$$

b) $a_n = \frac{n^2+1}{n^3-2}$ Behauptung: $(a_n) \to 0$. Denn sei $\epsilon > 0$:

$$\Rightarrow \frac{n^2+1}{n^3-2} \leq \frac{n^2+n^2}{n^3-\frac{1}{2}n^3} = \frac{2n^2}{\frac{1}{2}n^3} = \frac{4}{n} < \epsilon$$

für alle $n \geq n_0$ mit $n_0 := \max\left\{\ulcorner\frac{4}{\epsilon}\urcorner, 2\right\}$

c) $a_n = (-1)^n$ ist divergent, d.h. (a_n) ist nicht konvergent, denn ist $a \neq \pm 1$ setze $\epsilon := \min\{|a-1|, |a+1|\} > 0$. $\forall\ n \in \mathbb{N}:\ |a_n - a| \geq \epsilon$, also ist a nicht Grenzwert. Ist $a = +1$, setze $\epsilon := 2 \Rightarrow\ \forall\ n \in \mathbb{N}:\ |a_{2n-1} - 1| = |-1-1| = 2 \geq \epsilon$, also ist 1 nicht Grenzwert von (a_n). (Ähnlich für -1). Also ist (a_n) divergent.

3.15 Satz: Summenfolge, Produktfolge

Seien (a_n) und (b_n) Folgen reeller Zahlen und $(a_n) \to a$ und $(b_n) \to b$.
Dann gilt:

a) Die Summenfolge (c_n), d. h.: $c_n := a_n + b_n$, konvergiert gegen $c = a + b$.
Kurz:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) + \lim_{n\to\infty}(b_n)$$

b) Die Produktfolge (d_n), d. h.: $d_n := a_n \cdot b_n$, konvergiert gegen $d = a \cdot b$.
Kurz:

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) \cdot \lim_{n\to\infty}(b_n)$$

c) Ist $b \neq 0$, so existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $b_n \neq 0$. Die Quotientenfolge $(e_n)_{n \geq n_0}$, d. h.: $e_n := \frac{a_n}{b_n}$ konvergiert dann gegen $e = \frac{a}{b}$.

3.16 Kommentar: Differenzenfolge

Konvergiert (a_n) gegen a, so konvergiert auch $(-a_n)$ gegen $-a$ (Übung). Deshalb gilt auch für die Differenzfolge $(a_n - b_n)$ zweier konvergenter Folgen (a_n) und (b_n):

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) &= \lim_{n\to\infty}(a_n + (-b_n)) \\
&= \lim_{n\to\infty}(a_n) + \lim_{n\to\infty}(-b_n) \\
&= \lim_{n\to\infty}(a_n) + (-\lim_{n\to\infty}(b_n)) \\
&= \lim_{n\to\infty}(a_n) - \lim_{n\to\infty}(b_n)
\end{aligned}$$

Beweis von 3.15

a) Sei $\epsilon > 0$, dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\forall\ n \geq n_0$ gilt:

$$
\begin{aligned}
& |a_n - a| < \tfrac{\epsilon}{2} \text{ und } |b_n - b| < \tfrac{\epsilon}{2} \\
& \Rightarrow |(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \\
\underbrace{\leq}_{Dreiecksungleichung} \quad & |a_n - a| + |b_n - b| < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} < \epsilon, \quad \forall\ n \geq n_0 \Rightarrow (a)
\end{aligned}
$$

b) Sei $n_1 \in \mathbb{N}$, so dass $\forall\, n \geq n_1$ gilt:

$$|b_n - b| < 1$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow |b_n| &= |b_n - b + b| \\
&\leq |b_n - b| + |b| < 1 + |b|
\end{aligned}
$$

Setze:

$$c := \max\{|b_1|, ..., |b_{n_1 - 1}|, 1 + |b|\} \Rightarrow |b_n| \leq c,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Weiter:

$$
\begin{aligned}
|a_n \cdot b_n - a \cdot b| &= |(a_n - a)b_n + (b_n - b)a| \\
&\leq |a_n - a|\ |b_n| + |a|\ |b_n - b|
\end{aligned}
$$

Sei $\epsilon > 0$. Wähle nun $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für all $n \geq n_0$ gilt:

$$
\begin{aligned}
& |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2c},\ |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2a} \qquad \text{(wenn a} \neq 0 \text{ ist)} \\
\Rightarrow \forall\, n \geq n_0 \quad : \quad & |a_n\ b_n - a\ b| < \frac{\epsilon}{2c}\ c + |a|\ \frac{\epsilon}{2|a|} = \epsilon
\end{aligned}
$$

(ist $a = 0$, so ist sogar $|a_n\ b_n| < \frac{\epsilon}{2}$), also $(a_n \cdot b_n) \to a \cdot b$.

c) Sei $\epsilon_0 := \frac{|b|}{2} \Rightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\forall\, n \geq n_0 : |b_n - b| < \epsilon_0$
$\forall\, n \geq n_0$ gilt nun:

$$|b| \leq |b - b_n| + |b_n| < \epsilon_0 + |b_n| \Rightarrow |b_n| > |b| - \epsilon_0 = \frac{|b|}{2}$$

also $b_n \neq 0, \forall n \geq n_0$. Sei nun $\epsilon > 0 \Rightarrow \forall n \geq n_0$ gilt:

$$\left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b}\right| = \frac{|b-b_n|}{|b_n|\ |b|} \underbrace{<}_{|b_n|>\frac{|b|}{2}} \frac{2}{|b|^2}|b_n-b|$$

Sei nun $n_1 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_1$ gilt:

$$|b_n - b| < \frac{\epsilon\ |b|^2}{2}$$

Setzt man dann $n_2 := \max\{n_0, n_1\}$ so ist für alle $n \geq n_2$:

$$\left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b}\right| < \frac{2}{|b|^2} \cdot \frac{\epsilon\ |b|^2}{2} = \epsilon\ ,$$

also $\left(\frac{1}{b_n}\right) \to \frac{1}{b}$ und damit wegen b) auch:

$$\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \left(a_n \frac{1}{b_n}\right) \to a\ \frac{1}{b} = \frac{a}{b}\ .$$

$\square$

3.17 Kommentar: Beschränktheit

Eine Folge (a_n) heißt **beschränkt**, wenn es ein $c > 0$ gibt, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $|a_n| \leq c$. Der Beweis (3.15) Teil (b) zeigt, dass eine konvergente Folge auch beschränkt ist.

3.18 Beispiel

Seien $r, s \in \mathbb{N}_0$ und $r < s$. Seien $a_0, ..., a_r \in \mathbb{R}$, und $b_0, ..., b_s \in \mathbb{R}$ mit $a_r \neq 0$, $b_s \neq 0$. Weil ein Polynom verschieden von Null stets nur endlich viele Nullstellen hat (Euklidischer Algorithmus), existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n > n_0$ definiert ist:

$$x_n = \frac{a_r \cdot n^r + ... + a_1 \cdot n + a_0}{b_s \cdot n^s + ... + b_1 \cdot n + b_0}$$

Behauptung: $(x_n)_{n \geq n_0} \to 0$.
Weil nun $(a_k \cdot n^{k-s}) \to 0$ für $0 \leq k \leq r < s$ und $(b_j \cdot n^{j-s}) \to 0$
für $j = 0, \ldots, s-1$, folgt mit (3.15): (x_n) ist konvergent mit:

$$\lim(x_n) = \lim\left(\frac{a_r \cdot n^{r-s} + \cdots + a_0 \cdot n^{-s}}{b_s + b_{s-1} \cdot n^{-1} + \cdots + b_0 \cdot n^{-s}}\right) = \left(\frac{0 + \cdots + 0}{b_s + 0 + \cdots + 0}\right) = 0$$

3.19 Definition: Unendlichkeitsfolgen

Eine Folge reeller Zahlen (a_n) heißt **Unendlichkeitsfolge** (oder konvergiert uneigentlich gegen ∞), wenn gilt: Zu jedem $c > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $a_n > c$. Schreibweise: $(a_n) \to \infty$ oder $\lim_{n\to\infty}(a_n) = \infty$

3.20 Beispiele

a) $a_n = n$, dann $(a_n) \to \infty$, denn: Sei $c > 0$:

$$\Rightarrow \text{(Archimedes)}\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : n_0 > c \Rightarrow \forall n \geq n_0 : n \geq n_0 > c$$

Damit folgt die Behauptung.

b) $a_n = \frac{n^2+1}{n+2} \Rightarrow (a_n) \to \infty$, denn: Sei $c > 0$:

$$\Rightarrow \frac{n^2+1}{n+2} > \frac{n^2}{n+2} \underbrace{\geq}_{n\geq 2} \frac{n^2}{2n} = \frac{n}{2} > c \qquad \forall\, n \geq n_0 := \max\{2, \ulcorner 2c \urcorner\}$$

c) Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $q > 1$ und $a_n = q^n$. Behauptung: $(a_n) \to \infty$
Denn: Setze $h := q - 1 > 0$

$$\Rightarrow q^n = (1+h)^n \underbrace{\geq}_{Bernoulli} 1 + n \cdot h > n \cdot h > c \qquad \forall n \geq n_0 = \ulcorner \frac{c}{h} \urcorner$$

3.21 Bemerkung: Unendlichkeitsfolgen

Sei (a_n) eine Unendlichkeitsfolge. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $a_n \neq 0$. Die Folge $(\frac{1}{a_n})_{n\geq n_0}$ ist dann eine Nullfolge.

Beweis:
Zu $c_0 = 1$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_n > c_0$, $\forall n \geq n_0$. Insbesondere ist $a_n \neq 0$, $\forall n \geq n_0$. Sei nun $\epsilon > 0$ beliebig. Setze $c := \frac{1}{\epsilon} > 0$
$\Rightarrow \exists\, n_1 \in \mathbb{N}$, so dass $\forall\, n \geq n_1 :\ a_n > c = \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow \left|\frac{1}{a_n}\right| < \epsilon$, also $\left(\frac{1}{a_n}\right) \to 0$.

3.22 Beispiel

Sei nun $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$. Dann ist $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.
Denn sei $0 < q < 1$ (ohne Einschränkung). Dann ist $\frac{1}{q} > 1$ und daher $\left(\left(\frac{1}{q}\right)^n\right)$ eine Unendlichkeitsfolge nach (3.20 c). Nach (3.21) ist deshalb (q^n) eine Nullfolge.

3.23 Kommentar

Für zwei Unendlichkeitsfolgen (a_n) und (b_n) sagt man, dass (a_n) schneller wächst als (b_n), wenn die Folge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq n_0}$ (für ein $n_0 \in \mathbb{N}$) auch noch eine Unendlichkeitsfolge ist.

a) Die Folge (n^2) wächst schneller als (n): klar!

b) Ist p ein normiertes Polynom vom Grad r

$$p(n) = 1n^r + a_{r-1}n^{r-1} + \cdots + a_0 \ ,$$

und q ein normiertes Polynom vom Grad s

$$q(n) = n^s + a_{s-1}n^{s-1} + \cdots + a_0 \ ,$$

so wächst $p(n)$ schneller als $q(n)$, wenn $r > s$.

c) Sei $q > 1$ und $k \in \mathbb{N}$. Dann wächst (q^n) schneller als $(n^k)_{n\in\mathbb{N}}$, d.h.: $\left(\frac{q^n}{n^k}\right) \to \infty$.

Beweis:

Setze $h := q - 1 > 0$. Nach dem binomischen Lehrsatz (3.6) ist:

$$q^n = (1+h)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} h^j \geq \binom{n}{k+1} \cdot h^{k+1}$$

wenn $n \geq k+1$ ist. Daher ist:

$$q^n \geq \frac{h^{k+1}}{(k+1)!}(n-k)(n-k+1)\dots n$$

und damit

$$\frac{q^n}{n^k} \geq \frac{h^{k+1}}{(k+1)!n^k}(n^{k+1} + a_k n^k + \cdots + a_0)$$

für gewisse $a_0, \dots a_k \in \mathbb{R}$ (nur abhängig von k).
Daher ist $\left(\frac{q^n}{n^k}\right)_{n\in\mathbb{N}} \to \infty$ (wegen 3.23 b).

4 Das Vollständigkeitsaxiom

4.1 Motivation

a) Alle bisherigen Axiome von $\mathbb{R}$ (Körper-, Anordnungs- und Archimedisches Axiom) werden auch von den rationalen Zahlen erfüllt.

b) Es gibt keine rationale Zahl $x > 0$, so dass $x^2 = 2$ ist, denn: Angenommen $x = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$. O.E.: Seien p und q teilerfremd, insbesondere nicht beide gerade (sonst kürze!). Es ist nun:

$$2 = x^2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = x^2 \cdot q^2 = 2 \cdot q^2 \ ,$$

also ist p^2 gerade und damit auch p gerade, also $p = 2m$ für ein $m \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow 2 \cdot q^2 = p^2 = (2 \cdot m)^2 = 4 \cdot m^2 \Rightarrow q^2 = 2 \cdot m^2 \ ,$$

also auch q^2 und damit q gerade ($\lightning$ Widerspruch).
Also hat $x^2 = 2$ keine Lösung in $\mathbb{Q}$.

4.2 Definition: Intervallschachtelung

a) Eine **Intervallschachtelung** (in $\mathbb{R}$) ist eine Folge von Intervallen $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}, I_n = [a_n, b_n], a_n < b_n$ mit den folgenden Eigenschaften:

- $I_{n+1} \subseteq I_n, \forall n \in \mathbb{N}$, also $a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n$
- $\lim_{n \to \infty} (b_n - a_n) = 0$

b) Es heißt $x \in \mathbb{R}$ **Kern einer Intervallschachtelung** (I_n) wenn gilt: $x \in I_n$, für alle $n \in \mathbb{N}$.

4.3 Bemerkung: Kern einer Intervallschachtelung

Jede Intervallschachtelung besitzt höchstens einen Kern.

Beweis:
Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und $x, y \in I_n, \forall n \in \mathbb{N}$. O.B.d.A.: $x \leq y$, also ist $a_n \leq x \leq y \leq b_n \Rightarrow 0 \leq y - x \leq b_n - a_n$. Sei für $\epsilon > 0$ nun $n \in \mathbb{N}$ mit $b_n - a_n < \epsilon$ (existiert wegen $\lim_{n \to \infty} (b_n - a_n) = 0$). Dann folgt:
$0 \leq y - x \leq b_n - a_n < \epsilon, \quad \forall \varepsilon > 0$. Das ist nur möglich, wenn

$$y - x = 0 \Rightarrow x = y.$$

$\square$

4.4 Das Vollständigkeitsaxiom

a) Wir vereinbaren nun für die reellen Zahlen folgendes Axiom:
Jede Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$ hat einen Kern.

b) Der Aufbau der reellen Zahlen ist damit abgeschlossen.

$\mathbb{R}$ ist also ein vollständig und archimedisch angeordneter Körper.
Man kann beweisen, dass $\mathbb{R}$ der einzige vollständige und archimedisch angeordnete Körper ist, d.h.: Ist $(K, +, \cdot, P)$ ein angeordneter Körper, der archimedisch und vollständig ist, so existiert eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{R} \mapsto K$ mit

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2), \quad f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$$

$$\text{und } x > 0 \Leftrightarrow f(x) \in P \quad \forall\, x, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

4.5 Definition: Cauchy-Folge

Eine Folge reeller Zahlen (a_n) heißt **Cauchy-Folge**, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n, m \geq n_0$ gilt:

$$|a_n - a_m| < \epsilon.$$

4.6 Bemerkung: kovergente Folgen

Jede konvergente Folge (in $\mathbb{R}$) ist eine Cauchy-Folge.

Beweis:
Sei $(a_n) \to a$ eine konvergente Folge und $\epsilon > 0 \Rightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq n_0 :$ $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow \forall\, n, m \geq n_0 :$

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= |(a_n - a) - (a_m - a)| \\ &\leq |a_n - a| + |a_m - a| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\ , \end{aligned}$$

also ist (a_n) eine Cauchy-Folge.

$\square$

4.7 Satz: Konvergenz einer Cauchy-Folge

Jede Cauchy-Folge reeller Zahlen konvergiert gegen eine reelle Zahl.

Beweis:
Sei (a_n) Cauchy-Folge. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ setze $\epsilon_k := \frac{1}{2^{k+1}}$
$\Rightarrow \exists\ n_k \in \mathbb{N}$, so dass $\forall\ n, m\ \geq n_k : |a_n - a_m| < \epsilon_k$ O.B.d.A.: $n_{k+1} \geq n_k$.
Setze nun: $I_k := [a_{n_k} - \frac{1}{2^k}, a_{n_k} + \frac{1}{2^k}]$ Es ist dann: Länge $(I_k) = 2 \cdot \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}} \to 0$
Weiter: $I_{k+1} \subseteq I_k$, denn: $|a_{n_{k+1}} - a_{n_k}| < \frac{1}{2^{k+1}}$, $\forall\ x \in I_{k+1}$ gilt nun:

$$x - a_{n_k}| \leq |x - a_{n_{k+1}}| + |a_{n_{k+1}} - a_{n_k}| < \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^k}\ ,$$

also $x \in I_k$. Nach dem Vollständigkeitsaxiom $\exists$ ein $a \in \mathbb{R}$ mit $a \in I_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Behauptung: $(a_n) \to a$

Sei dazu $\epsilon > 0$ beliebig. Wähle $k \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\frac{1}{2^k} < \epsilon$ ist. Setze nun $n_0 := n_{k+1}$ (von oben). $\forall n \geq n_0$ gilt:

$$|a_n - a_{n_{k+1}}| < \epsilon_{k+1} = \frac{1}{2^{k+2}} < \frac{1}{2^{k+1}}$$

Weil $a \in I_{k+1}$ ist, gilt auch $|a_{n_k} - a| < \frac{1}{2^{k+1}}$. Also insgesamt:

$$\begin{aligned} |a_n - a| &\leq |a_n - a_{n_{k+1}}| + |a_{n_{k+1}} - a| \\ &< \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} \\ &< \frac{1}{2^k} < \epsilon\ ,\ \forall n \geq n_0. \end{aligned}$$

Also $(a_n) \to a$.

□

4.8 Definition: unendliche Reihe

a) Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen. Die Folge der Partialsummen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, d.h.:

$$s_n = a_1 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

heißt **unendliche Reihe**.

b) Ist (a_n) eine reelle Zahlenfolge und konvergiert die Summe der Partialfolgen $(\sum_{k=1}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $s \in \mathbb{R}$, so schreibt man:

$$s = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k =: \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

(oft wird auch die unendliche Reihe $(\sum_{k=1}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ selbst - etwas ungenau - mit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bezeichnet, ohne dass sie notwendig konvergieren muss.)

4.9 Beispiel

Sei $a_n = \frac{1}{2^n}$, also $(a_n) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ...\right)$. Dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

4.10 Satz: Geometrische Reihe

Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$. Dann konvergiert **die geometrische Reihe** gegen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

Beweis:
Nach (3.2.b) ist $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, $\forall q \in \mathbb{R}$. Und nach (3.22) ist $\lim_{n\to\infty}(q^n) = 0$, wenn $|q| < 1$. Nach (3.15) ist deshalb

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad .$$

$\square$

Beweis von (4.9):

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \;\cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 1$$

$\square$

4.11 Bemerkung

Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, so muss (a_n) eine Nullfolge sein.

Beweis:
Sei $\epsilon > 0$. Weil $(\sum_{k=1}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und damit eine Cauchy-Folge ist, existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass für alle $n \geq m \geq n_0$ gilt:

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{m} a_k\right| < \epsilon$$

Insbesondere für $m = n - 1$ gilt für alle $n > n_0 : |a_n| = |\sum_{k=n}^{n} a_k| < \epsilon$, also $(a_n) \to 0$.

$\square$

4.12 Kommentar: harmonische Reihe

Ist (a_n) eine Nullfoge, so braucht allerdings $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ nicht zu konvergieren. Betrachte z.B. die folgende, so genannte **harmonische Reihe**: $a_n = \frac{1}{n}$, also $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Behauptung: $\left(\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ ist eine Unendlichkeitsfolge also:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

Beweis:
Für jedes $j \in \mathbb{N}$ ist:

$$\sum_{k=2^{j-1}+1}^{2^j} a_k \geq 2^{j-1} a_{2^j} = \frac{2^{j-1}}{2^j} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{2^n} a_k = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=2^{j-1}+1}^{2^j} a_k \right) + 1 \geq 1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{2} = \frac{n}{2} + 1$$

also:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty \ .$$

$\square$

4.13 Definition: Dezimalbruch

Sei $r \in \mathbb{N}_0$ und $(a_n)_{n \geq -r}$ mit Ziffern $a_n \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$.
Die Ziffernfolge

$$\pm\ a_{-r}\ a_{-r+1}\ ...\ a_{-1}\ a_0,\ a_1\ a_2\ ...$$

heißt **Dezimalbruch** und bezeichnet die unendliche Reihe
$(\pm \sum_{k=-r}^{\infty} a_k 10^{-k})_{n \in \mathbb{N}}$.

4.14 Satz

Jeder Dezimalbruch $\pm a_r ... a_0, a_1 ...$ stellt (genau) eine reelle Zahl x dar. Es ist nämlich $\left(\pm \sum_{k=-r}^{n} a_k \cdot 10^{-k}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge und konvergiert daher gegen eine reelle Zahl

$$x = \pm \sum_{k=-r}^{n} a_k \cdot 10^{-k}$$

Beweis:
Sei $\epsilon > 0, n_0 \in \mathbb{N}$ und $n \geq m \geq n_0$. Mit $x_n = \pm \sum_{k=-r}^{n} a_k 10^{-k}$ gilt dann:

$$|x_n - x_m| = \sum_{k=m+1}^{n} a_k 10^{-k} \leq \sum_{k=m+1}^{n} 9 \cdot \underbrace{10^{-k}}_{10^{-m-1} \cdot 10^{m+1-k}}$$

mit

$$j = -m - 1 + k \Rightarrow \cdots = \frac{9}{10^{m+1}} \cdot \sum_{j=0}^{n-m-1} 10^{-j} \leq \frac{9}{10^{m+1}} \sum_{j=0}^{\infty} 10^{-j}$$

$$= \frac{9}{10^{m+1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 10^{-m} \leq 10^{-n_0} \leq \epsilon$$

wenn man nun $n_0(\epsilon)$ groß genug wählt. Also ist (x_n) eine Cauchy-Folge.

$\square$

4.15 Kommentar: b-adisch

Sei $b \in \mathbb{N},\ b \geq 2$ beliebig. Sei weiter $r \in \mathbb{N}_0, a_n \in \{0, 1 ..., b-1\}$ für $n \geq -r$.
Man nennt dann:

$$\pm \sum_{k=-r}^{\infty} a_k b^{-k} = \pm \left(a_{-r} \ldots a_0, a_1\, a_2 \ldots\right)_b$$

einen b-adischen Bruch. (b=2: dyadisch; b=3 triadisch; b=10 dekadisch). Wie in (4.14) beweist man: Jeder b-adische Bruch konvergiert gegen eine reelle Zahl $x = \pm\sum_{k=-r}^{\infty} a_k b^{-k}$.

4.16 Satz

Sei $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es einen b-adischen Bruch $\sum_{n=-r}^{\infty} a_n b^{-n}$, der gegen x konvergiert.

Beweis:
Sei o.B.d.A. $x > 0$. Da $b > 1$ ist, gilt $(b^s)_{s\in\mathbb{N}} \to \infty$ und $(b^{-s})_{s\in\mathbb{N}} \to 0$.
Es existiert deshalb

$$r := \min\{s \in \mathbb{Z} : b^{s+1} > x\}$$

(ist $r < 0$, so setze $a_0 = \ldots = a_{r-1} = 0$).

Definiere (a_n) induktiv:

Schritt 1: Unterteile $[b^r, b^{r+1})$ in $b-1$ gleich große Teilabschnitte:

$$[b^r, 2b^r) \cup [2b^r, 3b^r) \cup \ldots \cup [(b-1)b^r, b^{r+1}) \ .$$

Nach Definition von r ist $b^r \leq x < b^{r+1}$, also existiert genau ein $a_{-r} \in \{1, \ldots, b-1\}$ mit $x \in [a_{-r}b^r, (a_{-r}+1)b^r)$. Setze dann $x_{-r} := a_r\, b^r$. Dann ist also $x_{-r} \leq x < x_{-r} + b^r$.

Schitt 2: Sei nun $a_{-r}, \ldots, a_n$ schon bestimmt und es gelte:

$$x_n \leq x < x_n + b^{-n},\ x_n = \sum_{k=-r}^{n} a_k b^{-k} \ .$$

Um die nächste Ziffer zu finden, unterteile $[x_n, x_n + b^{-n})$ in b-Teilintervalle:

$$\begin{aligned}[x_n, x_n + b^{-(n+1)}) \quad &\cup \quad [x_n + b^{-(n+1)}, x_n + 2b^{-(n+1)}) \cup \ldots \\ \ldots \quad &\cup \quad [x_n + (b-1)b^{-(n+1)}, x_n + b^{-n})\end{aligned}$$

und bestimme $a_{n+1} \in \{0, 1, ..., b-1\}$ dadurch, dass $x \in [x_n + a_{n+1}b^{-(n+1)}, x_n + (a_{n+1}+1)b^{-(n+1)})$ ist. Setze $x_{n+1} = \sum_{k=-r}^{n+1} a_k b^{-k} = x_n + a_{n+1}b^{-(n+1)}$. Dann gilt $x_{n+1} \leq x < x_{n+1} + b^{-n-1}$.
Es konvergiert dann der b-adische Bruch $\sum_{k=-r}^{\infty} a_k^{-k}$ gegen x, denn

$$|x_n - x| < b^{-n} < \epsilon ,$$

wenn n groß genug ist. Die Folge (x_n) konvergiert also gegen x.

□

4.17 Kommentar

a) Man beachte, dass der b-adische Bruch, der gegen $x \in \mathbb{R}$ konvergiert, nicht eindeutig zu sein braucht. Z.B. hat für $b = 10$ die reelle Zahl 1 sicher den Dezimalbruch $1,0000...$ aber auch $0,9999...$, denn:

$$0,9999... = \sum_{n=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-n} = 9 \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n - 1 \right) = 9 \left(\frac{1}{1-\frac{1}{10}} - 1 \right) = 1$$

b) Lässt man jedoch überflüssige Nullen vor dem Komma weg und vermeidet „Neuner-Enden“ (allgemein „$(b-1)$-Enden“) so zeigt eine Inspektion des Beweises von (4.16), dass die Darstellung als b-adischer Bruch eindeutig ist. (Übung)

4.18 Definition: abzählbar, überabzählbar unendlich

Eine Menge M mit unendlich vielen Elementen heißt **abzählbar unendlich**, wenn es eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to M$ gibt. M heißt überabzählbar unendlich, wenn sie nicht abzählbar unendlich ist.

4.19 Beispiel: $\mathbb{Z}$ ist abzählbar unendlich

$\mathbb{Z}$ ist abzählbar, denn $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ mit $f(1) = 0,\ f(2n) = n$,
$f(2n+1) = -n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ ist bijektiv. Wenn M abzählbar ist, kann man die Elemente als Wertefolge schreiben

$$(f(1), f(2), f(3), \ldots) = (0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \ldots) .$$

4.20 Kommentar

Die Vereinigung zweier abzählbarer Mengen ist offenbar wieder abzählbar (Übung).

4.21 Satz: Cantorsches Diagonalverfahren

a) $\mathbb{Q}$ ist abzählbar unendlich.

b) $\mathbb{R}$ ist überabzählbar unendlich.

Beweis:

a) Es reicht $\mathbb{Q}_+ := \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}$ abzuzählen mit

$$x = \frac{p}{q},\ p, q \in \mathbb{N}$$

(**Cantorsches Diagonalverfahren**)
Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_+,\ f(1) = \frac{1}{1},\ f(2) = \frac{1}{2},\ f(3) = \frac{2}{1},\ f(4) = \frac{3}{1}$, usw.
(wie in der Skizze angedeutet). Ist ein Bruch nicht gekürzt, so lasse ihn aus, also nicht etwa $f(5) = \frac{2}{2}$, sondern $f(5) = \frac{1}{3}$. $\Rightarrow f$ ist bijektiv.

$\boxed{\text{Zeichnung fehlt}}$

b) Wenn $\mathbb{R}$ abzählbar wäre, so auch $[0, 1) \subseteq \mathbb{R}$. Wegen (4.16) gibt es zu jedem $x \in [0, 1)$ einen Dezimalbruch $x = 0, a_1 a_2 a_3 a_4$ (eindeutig, wenn Neuner-Enden ausgeschlossen sind). Angenommen nun, dass $f :\to [0, 1),\ f(n) =: x_n$, bijektiv wäre. Wir wollen nun eine Zahl konstruieren, die nicht im Bild von f enthalten ist. Sei dazu $x_n = 0, a_1^{(n)}\ a_2^{(n)}\ a_3^{(n)} \cdots$. Setze nun:

$$c_n = \begin{cases} 5 & \text{falls } a_n^{(n)} \neq 5 \\ 7 & \text{falls } a_n^{(n)} = 5 \end{cases}$$

und $x := 0, c_1\ c_2\ c_3 \cdots \in [0, 1)$. Wäre nun $x = f(n) = x_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so wäre auch $c_k = a_k^{(n)}\ \forall\ k \in \mathbb{N}$, insbesondere $c_n = a_n^{(n)}$, was aufgrund der Definition von c_n ein Widerspruch ist. f ist also nicht surjektiv und damit $\mathbb{R}$ nicht abzählbar.

$\square$

4.22 Korollar: überabzählbar viele irrationale Zahlen

a) Es gibt überabzählbar viele irrationale Zahlen ($x \in \mathbb{R}$ heißt irrational, wenn $x \notin \mathbb{Q}$ ist).

b) Sogar in dem Intervall $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ (mit $a \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$), das noch so klein ist, liegen überabzählbar viele irrationale Zahlen.

4.23 Satz

Zwischen je zwei verschiedenen reellen Zahlen liegt stets eine rationale Zahl.

Beweis:
Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und $x < y \Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N} : n > \frac{1}{y-x} > 0$. Also $\frac{1}{n} < y - x$. Sei nun $m := \min\{k \in \mathbb{N} : k > nx\}$. Daraus folgt:

$$\frac{m-1}{n} \leq x < \frac{m}{n} \Rightarrow y > x + \frac{1}{n} \geq \frac{m-1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{m}{n}\ ,$$

also $x < \frac{m}{n} < y$.

$\square$

4.24 Kommentar

Wiederholte Anwendung von (4.23) liefert sogar, dass zwischen x und y unendlich viele rationale Zahlen liegen.

5 Der Satz von Bolzano und Weierstraß

5.1 Definition: Teilfolge

Sei (a_n) eine Zahlenfolge und $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ eine aufsteigende Folge natürlicher Zahlen. Es heißt dann $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = (a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots)$ eine **Teilfolge von** (a_n).

5.2 Beispiel

$a_n = (-1)^n$, also $(a_n) = (-1, +1, -1, +1, \ldots)$.
Sei $n_1 = 2, n_2 = 4, \ldots\ , n_k = 2k$

$$\Rightarrow a_{n_k} = a_{2k} = (-1)^{2k} = 1$$

d.h. $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = (1, 1, 1, 1, \ldots)$.

5.3 Definition

Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen. Es heißt nun $a \in \mathbb{R}$ ein **Häufungspunkt (H.P.) von** (a_n), wenn es eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gibt, die gegen a konvergiert.

5.4 Kommentar

a) Es ist (a_n) konvergent gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn in jedem ϵ-Intervall $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ fast alle Folgenglieder liegen, d.h. alle bis auf endlich viele.
Dagegen ist $a \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt, wenn in jedem ϵ-Intervall $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ unendlich viele Folgenglieder liegen. Insbesondere gilt also, wenn $(a_n) \to a$, dann ist a ein Häufungspunkt von (a_n).

b) Eine Folge (a_n) braucht keinen H.P. zu haben (z.B. $(a_n) = n$), oder sie kann einen H.P. haben (z.B. wenn (a_n) konvergiert), oder mehrere H.P. (z.B. $(a_n) = (-1)^n$).

5.5 Satz: Bolzano und Weierstraß

Ist (x_n) eine beschränkte Folge reeller Zahlen, so hat (x_n) einen Häufungspunkt.

Beweis:
Sei $c > 0$ so, dass $-c \leq x_n \leq c$ ist $\forall n \in \mathbb{N}$. Definiere induktiv Intervalle $I_k = [a_k, b_k] \subseteq [-c, c]$ mit folgenden Eigenschaften:

a) I_k enthält ∞ viele Folgenglieder von (x_n).

b) $I_{k+1} \subseteq I_k$

c) $b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{1}{2}(b_k - a_k)$

Für $k = 1$: Setze $a_1 = -c, b_1 = c$.

Für $k \to k+1$: Sei $M_k := \frac{1}{2}(a_k+b_k) \Rightarrow I_k = [a_k, b_k] = [a_k, M_k] \cup [M_k, b_k]$. Falls nun $[a_k, M_k]$ unendlich viele Folgeglieder enthält, setze $a_{k+1} := a_k, b_{k+1} := M_k$, sonst setzte $a_{k+1} := M_k, b_{k+1} := b_k$
$\Rightarrow$ die 3 Aussagen sind erfüllt.

Aus (c) folgt, dass die Länge des Intervalls gegen Null geht:

$$\lim_{k\to\infty}(b_k - a_k) = \lim_{k\to\infty}(2^{-k+1}2c) = 0$$

Aus der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ folgt: $\exists\, x \in \mathbb{R} : \ x \in [a_k, b_k]\ \forall k \in \mathbb{N}$. Behauptung: x ist ein Häufungspunkt: Sei dazu $n_1 < n_2 < n_3 \ldots$ so gewählt, dass $x_{n_k} \in I_k,\ \forall\ k \in \mathbb{N}$ (möglich wegen (a)). Sei nun $\epsilon > 0$ beliebig

$$\Rightarrow |x_{n_k} - x| \leq b_k - a_k = 2^{-k+1}2c\ .$$

Wähle daher $k_0 \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\forall k > k_0$ gilt: $\frac{4c}{2^k} < \epsilon$. Dann ist $\forall\ k > k_0 : |x_{n_k} - x| < \epsilon$, also $(x_{n_k}) \overset{k\to\infty}{\to} x$.

$\square$

5.6 Korollar

Sei (x_n) eine beschränkte Folge. Dann ist (x_n) genau dann konvergent, wenn (x_n) genau einen Häufungspunkt hat.

Beweis:
$\Rightarrow$: Sei $(x_n) \to x$, $\Rightarrow x$ ist H.P., sei $y \in \mathbb{R}, y \neq x$. o.B.d.A. $x < y$.
Setze $\epsilon\ := \frac{1}{2}(y - x) > 0$. $\Rightarrow \exists\ n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\ n \geq n_0 : x_n < x + \epsilon = y - \epsilon$, also sind nur endliche viele Folgenglieder in $(y - \epsilon, y + \epsilon)$. Daher gilt: y ist kein H.P. der Folge (x_n), x ist der einzige H.P. (Diese Implikation gilt auch ohne die Beschränktheit der Folge)

$\Leftarrow$: Sei x der einzige H.P. von (x_n). Angenommen es gäbe ein $\epsilon_0 > 0$ und eine Teilfolge (x_{n_k}) mit $|x_{n_k} - x| \geq \epsilon_0,\ \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow$ (5.5) $\exists$ einen H.P. y von

$(x_{n_k}) \Rightarrow y \notin (x - \epsilon_0, x + \epsilon)$, insbesondere $y \neq x$. Natürlich ist y auch H.P. von (x_n), $y \neq x$ (Widerspruch) $\Rightarrow$ In jeder ϵ-Umgebung von x liegen fast alle Folgenglieder, d.h.$(x_n) \to x$.

$\square$

5.7 Definition: monoton wachsend

Eine Folge (x_n) heißt **monoton wachsend**, wenn aus $n_1 \leq n_2$ folgt:
$x_{n_1} \leq x_{n_2}$.

5.8 Beispiel

Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, so ist die Folge der Patialsummen $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend.

5.9 Satz: beschränkt und monoton wachsend

Ist (a_n) beschränkt und monoton wachsend, so ist (a_n) konvergent.

Beweis:
Angenommen: (a_n) hat mindestens zwei Häufungspunkte $a, b, \in \mathbb{R}$
o.E.: $a < b$. Sei $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ Teilfolge mit $(a_{n_k}) \to a$ und $(a_{m_l})_{l\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge mit $(a_{m_l}) \to b$. Setze nun: $\epsilon := \frac{1}{2}(b-a)$. Es gibt dann $k_0, l_0 \in \mathbb{N}$, so dass gilt:

$$a_{n_k} < a + \epsilon\,, \forall\, k \geq k_0\ , \quad a_{m_l} > b - \epsilon\,, \forall\, l \geq l_0\ .$$

Wähle nun $k \geq k_0$ so groß, dass $n_k \geq m_{l_0}$. Es ist dann:

$$a_{n_k} < a + \epsilon = b - \epsilon < a_{m_{l_0}} \quad :$$

Widerspruch zur Monotonie. Also hat (a_n) nur einen Häufungspunkt
$\Rightarrow$ (5.6) (a_n) ist konvergent.

$\square$

5.10 Beispiel

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ ist konvergent. Denn $(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!})$ ist monoton wachsend. Sie ist auch beschränkt, denn:

$$k! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k \geq 2^{k-1} \ \Rightarrow \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}},\ \forall\, k \geq 1$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \le 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$
$$\le 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3 \ ,$$

$\forall n \in \mathbb{N}$. Also ist $(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!})$ konvergent. (Man schreibt, wenn $a_n \ge 0$, auch suggestiv:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \ ,$$

wenn $(\sum_{k=1}^{n} a_k)$ beschränkt damit auch konvergent ist.)

5.11 Definition: Euler'sche Zahl

$$e := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \cdots$$

heißt **Euler'sche Zahl**.

5.12 Beispiel

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$, denn : $\frac{1}{n^2} \le \frac{1}{n\cdot(n-1)}$, $\forall n \ge 2$ und $\frac{1}{n\cdot(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \le 1 + \sum_{k=2}^{n} (\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}) = 1 + (1 - \frac{1}{n}) < 2 \ .$$

Also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty \ .$$

6 Stetigkeit

6.1 Definition: Konvergenz

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$. Eine Funktion $f : I \backslash \{x_0\} \to \mathbb{R}$ konvergiert für $x \to x_0$ gegen $c \in \mathbb{R}$, wenn gilt: Für jedes $\epsilon > 0$ existiert $\delta > 0$, so dass für alle $x \in I$ mit $0 < |x - x_0| < \delta$ gilt: $|f(x) - c| < \epsilon$.

Bezeichung:

$$f(x) \overset{x \to x_0}{\to} c \text{ oder } \lim_{x \to x_0} f(x) = c$$

6.2 Definition: Stetigkeit

a) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $x_0 \in I$. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt stetig in x_0, wenn f für $x \to x_0$ gegen $f(x_0)$ konvergiert.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

b) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Es heißt $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, wenn f in jedem Punkt $x \in I$ stetig ist.

6.3 Beispiel: Stetigkeit

a) Die konstante Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$, ist stetig, denn: Zu $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$ gilt sogar für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$|f(x) - f(x_0)| = |c - c| = 0 < \epsilon.$$

b) Die Identität $f = \mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ ist stetig, denn: Zu $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$ wähle $\delta := \epsilon$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$:.

$$|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \delta = \epsilon.$$

c) Betrachte: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ für } x \neq 0 \\ 1 \text{ für } x = 0 \end{cases} .$$

f ist nicht stetig in $x_0 = 0$, denn $\lim_{x \to 0} f(x)$ existiert zwar, aber $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 \neq 1 = f(0)$.

d) Die Funktion Signum (=Vorzeichen)

$$f = \operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}.$$

ist nicht stetig in $x_0 = 0$, denn $\lim_{x\to 0} f(x)$ existiert gar nicht:
Ist nämlich $c \in \mathbb{R}$ mit $c \geq 0$, so gilt für alle $x < 0$:

$$|\operatorname{sgn}(x) - c| = |-1 - c| \geq 1.$$

Für alle $c \leq 0$ gilt für $x > 0$:

$$|\operatorname{sgn}(x) - c| = |1 - c| \geq 1.$$

Für jedes $c \in \mathbb{R}$ gilt also: Zu $\epsilon = 1$ gibt es kein $\delta > 0$, so dass aus $0 < |x| < \delta$ bereits folgt:

$$|\operatorname{sgn}(x) - c| < \epsilon.$$

6.4 Satz: $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$

Es ist eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ genau dann stetig in $x_0 \in I$, wenn für jede Folge (x_n) in I mit $(x_n) \to x_0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

Beweis:
$\Rightarrow$: Sei (x_n) in I mit $(x_n) \to x_0$. Sei $\epsilon > 0$. Es existiert dann ein $\delta > 0$, so dass $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ ist, wenn $|x - x_0| < \delta$ ist. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ jetzt so groß, dass $\forall\ n \geq n_0$ gilt : $|x_n - x_0| < \delta$. Dann gilt für $n \geq n_0$:

$$|f(x_n) - f(x_0)| < \epsilon, \text{ also } (f(x_n)) \to f(x_0).$$

$\Leftarrow$: Angenommen: Es gibt ein $\epsilon_0 > 0$, so dass für alle $\delta > 0$ ein $x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta$ existiert, so dass $|f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon_0$ ist. Insbesondere für $\delta_n := \frac{1}{n}$ wähle x_n mit $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$, also $(x_n) \to x_0$, aber $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \epsilon_0$.
Also konvergiert $(f(x_n))$ nicht gegen $f(x_0)$. Widerspruch!

$\square$

6.5 Satz: Summen, Produkte und Quotienten

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$ und seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ stetig in x_0. Dann gilt:

a) Die Summenfunktion $f + g : I \to \mathbb{R}$,

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

ist stetig in x_0.

Beweis:

Sei (x_n) eine Folge in I mit $(x_n) \to x_0 \Rightarrow (f(x_n)) \to f(x_0)$ und $(g(x_n)) \to g(x_0)$ (Satz 6.4) $\overset{3.15}{\Rightarrow} ((f+g)(x_n)) \to f(x_0) + g(x_0) \overset{6.4}{\Rightarrow} f + g$ stetig in x_0.

b) Die Produktfunktion $f \cdot g : I \to \mathbb{R}$,

$$(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$$

ist stetig in x_0.

Beweis:

Ähnlich wie in (a).

c) Ist $g(x_0) \neq 0$, so existiert ein $\delta > 0$, so dass $g(x) \neq 0$ ist, für alle $x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta$. Dann ist die Quotientenfunktion: $\frac{f}{g} : \{x \in I : g(x) \neq 0\} \to I$,

$$\frac{f}{g}(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$$

stetig in x_0.

Beweis:

Zu $\epsilon_0 := \frac{1}{2}|g(x_0)| > 0$ existiert $\delta > 0$ mit $|g(x) - g(x_0)| < \epsilon$,
also $|g(x)| > |g(x_0)| - \epsilon_0 = \epsilon_0 > 0,\ \forall x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta$. Sei nun (x_n) in I mit $(x_n) \to x_0$. Dann gilt: $(f(x_n)) \to f(x_0)$ und $(g(x_n)) \to g(x_0)$.
Nach (3.15) ist dann $g(x_n) \neq 0,\ \forall n \geq n_0$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und
$\left(\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\right) \to \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$. Es folgt: $\frac{f}{g}$ ist stetig in x_0.

$\square$

6.6 Beispiele

a) Sind $f, g : I \to \mathbb{R}$ stetig in x_0, so auch ihre Differenz $(f-g) : I \to \mathbb{R}$,

$$(f-g)(x) := f(x) - g(x)$$

(vgl. 3.16).

b) Ist $f : I \to \mathbb{R}$ stetig in x_0 und $\lambda \in \mathbb{R}$, so ist auch $\lambda \cdot f : I \to \mathbb{R}$ stetig in x_0, $(\lambda \cdot f)(x) := \lambda \cdot f(x)$. Setzt man nämlich $g : I \to \mathbb{R}$, $g(x) = \lambda$, $\forall\, x \in I$, so ist $\lambda \cdot f = g \cdot f$.

c) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ mit $a_n \neq 0$. Die Kombination von den Beispielen (6.3), (6.4a) und (6.6) liefert, dass die Polynomfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = a_0 + a_1 x^1 + \ldots + a_n x^n$$

stetig ist.

d) Jede rationale Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, wo $p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Polynomfunktionen sind, $q \neq 0$ und $D = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$, ist stetig.

6.7 Lemma

Sei (x_n) eine konvergente Folge, $x = \lim_{n\to\infty}(x_n)$ und $x_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Dann ist auch $x \geq 0$.

Beweis:
Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Wähle $n \in \mathbb{N}$ so groß, dass $|x_n - x| < \epsilon$ ist, insbesondere ist $x - x_n > -\epsilon \Rightarrow x > x_n - \epsilon > -\epsilon$. Also ist $x > -\epsilon$, $\forall \epsilon > 0 \Rightarrow x \geq 0$.

$\square$

6.8 Satz: Zwischenwertsatz

Sei $I = [a, b]$ und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Ist dann $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$,
so existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = 0$.

Beweis:
Definiere induktiv Intervalle $I_n = [a_n, b_n] \subseteq [a, b] = I$ mit

i) $I_{n+1} \subseteq I_n$

ii) $b_n - a_n = \frac{1}{2^{n-1}}(b - a)$

iii) $f(a_n) \leq 0,\ f(b_n) \geq 0$

- $n = 1 : I_1 = I$
- $n \to n+1 :$ Setze $M = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$. Ist $f(M) \geq 0$, so setze $a_{n+1} := a_n$, $b_{n+1} := M$. Ist $f(M) < 0$, so setze $a_{n+1} := M$ und $b_{n+1} = b_n \Rightarrow$ i), ii) und iii).

Aus der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ folgt nun, dass die Intervallschachtelung einen Kern hat $\Rightarrow \exists\, \xi \in I : \xi \in I_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Ist $\epsilon > 0$, so gilt:

$$|\xi - a_n| < \frac{1}{2^{n-1}}(b-a) < \epsilon,$$

$$|\xi - b_n| < \frac{1}{2^{n-1}}(b-a) < \epsilon,$$

für n groß genug (d.h. dies gilt ab einem $n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geq n_0$). Also $(a_n) \to \xi$ und $(b_n) \to \xi$. Stetigkeit von f in ξ: $(f(a_n)) \to f(\xi)$ und $(f(b_n)) \to f(\xi) \overset{6.7}{\Rightarrow}$ $f(\xi) \leq 0$ und $f(\xi) \geq 0 \Rightarrow f(\xi) = 0$.

$\square$

6.9 Beispiel

Betrachte $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2$. Es gilt: $f(1) = -1$ und $f(2) = 2$. Wegen der Stetigkeit gibt es also ein $\xi \in (1,2)$ mit $0 = f(\xi) = \xi^2 - 2 \Rightarrow \xi^2 = 2$. Beachte: $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $x \mapsto x^2 - 2$ hat keine Nullstelle.

6.10 Satz

Sei $f[a,b] :\to \mathbb{R}$ stetig und streng monton wachsend. Sei $\alpha := f(a)$ und $\beta := f(b)$. Es ist dann:

$$\text{Bild}(f) = \{f(x) \in \mathbb{R} : x \in [a,b]\} = [\alpha, \beta]\ .$$

Die Abbildung $g : [a,b] \to [\alpha,\beta]$, $g(x) = f(x)$, ist bijektiv und ihre Umkehrung $g^{-1} : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ wieder stetig.

Beweis:
Wir wissen bereits, dass f injektiv ist (2.13). Es ist klar, dass Bild$(f) \subseteq [\alpha,\beta]$, denn aus $a \leq x \leq b$ folgt mit der Monotonie $\alpha = f(a) \leq f(x) \leq f(b) = \beta$. Sei daher $\gamma = [a,b]$ beliebig. Setze dann $h : [a,b] \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) - \gamma$. Es ist dann h stetig,

$h(a) = f(a) - \gamma = \alpha - \gamma \leq 0$ und $h(b) = f(b) - \gamma = \beta - \gamma \geq 0$. Wegen (6.8) gibt es dann ein $\xi \in [a, b]$ mit $h(\xi) = 0 = f(\xi) - \gamma$, also $f(\xi) = \gamma$. Es ist also $g : [a, b] \to [\alpha, \beta]$, $g(x) = f(x)$, bijektiv. Sei $y_0 \in [\alpha, \beta]$ und (y_n) eine Folge in $[\alpha, \beta]$ mit $(y_n) \to y_0$.

Zu zeigen: $(g^{-1}(y_n)) \to g^{-1}(y_0)$.
Setze $x_0 := g^{-1}(y_0), x_n := g^{-1}(y_n)$. Weil (x_n) eine Folge in $[a, b]$ ist, hat (x_n) einen Häufungspunkt (und dieser ist in $[a, b]$ wegen (6.7)). Sei $\xi \in [a, b]$ ein H.P. von (x_n). Es gibt dann eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $(x_{n_k}) \to \xi$. Wegen der Stetigkeit von
f folgt: $(f(x_{n_k})) \to f(\xi)$. Aber $(f(x_{n_k})) = (g(x_{n_k})) = (y_{n_k})$, und $(y_{n_k}) \to y_0$. Also ist

$$f(\xi) = \lim f(x_{n_k}) = \lim y_{n_k} = y_0 \Rightarrow \text{ (Injektivität von } f) \ \xi = x_0$$

Es folgt:(x_n) hat nur einen H.P., nämlich $x_0 \overset{(5.6)}{\Rightarrow} (x_n) \to x_0$. Also ist g^{-1} stetig in y_0.

□

6.11 Beispiel: $\operatorname{pot}_k(x) = x^k$

Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann ist $\operatorname{pot}_k : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $\operatorname{pot}_k(x) = x^k$ streng monoton wachsend und bijektiv, denn: Sei $c \geq 0$ beliebig. Wähle dann $a > 1$ mit $a^k \geq c$. Weil $f : [0, a] \to [0, a^k]$, $f(x) = x^k$, stetig und streng monoton wachsend ist, existiert nach (6.10) ein $\xi \in [0, a]$ mit $\xi^k = \operatorname{pot}_k(\xi) = f(\xi) = c$, also ist pot_k bijektiv.

6.12 Definition: k-te Wurzel

Sei $k \in \mathbb{N}$. Die Umkehrung von $\operatorname{pot}_k : [0, \infty) \to [0, \infty)$:

$$\sqrt[k]{} : [0, \infty) \to [0, \infty), \quad \sqrt[k]{} = \operatorname{pot}_k^{-1}$$

heißt die ***k*-te Wurzel**.

6.13 Kommentar

a) Nach Bemerkung (2.13) ist also $\sqrt[k]{} : [0, \infty) \to [0, \infty)$ streng monoton wachsend und nach (6.10) auch stetig.

b) Man beachte, dass wir nun bewiesen haben: Zu jedem $y \geq 0$ gibt es genau ein $x \geq 0$ mit $x^k = y$, nämlich $x = \sqrt[k]{y}$.

6.14 Definition: Supremum

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $D \neq \varnothing$, eine beliebige (nicht leere) Teilmenge. Es heißt $b \in \mathbb{R}$ **Supremum von** D, wenn gilt:

i) $x \leq b$ für alle $x \in D$.

ii) Ist $c \in \mathbb{R}$, so dass $x \leq c$ ist, für alle $x \in D$, so ist $b \leq c$.

6.15 Kommentar: Supremum, Infimum

a) Bedingung (i) bezeichnet man so: b ist obere Schranke von D. Bedingung (i) und (ii) heißt also: b ist kleinste obere Schranke von D.

b) Entsprechend definiert man das **Infimum von** D als größte untere Schranke von D.

c) Im Falle, dass $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Supremum $b \in \mathbb{R}$ besitzt, schreibt man $b = \sup(D)$ (denn es ist dann auch eindeutig (folgt sofort aus (ii))).

d) Schreibt man $-D = \{-x \in \mathbb{R} : x \in D\}$, so ist also $\inf(D) = -\sup(-D)$. Ist $D \subseteq \mathbb{R}$ nach oben unbeschränkt (also $\forall c > 0 \; \exists \, x \in D : x > c$), so vereinbaren wir:

$$\sup(D) = +\infty.$$

Ist $D = \varnothing$ so vereinbaren wir:

$$\sup(D) = -\infty.$$

Entsprechend für D nach unten unbeschränkt:

$$\inf(D) = -\infty, \quad \inf(\varnothing) = +\infty.$$

6.16 Beispiel: Supremum

Sei $D := \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$ und $b := \sqrt{2}$. Behauptung: $\sup(D) = b$. Denn: Für $x \in D$ und $x \geq 0$ ist $x^2 < 2 = b^2 \Rightarrow$ (Monotonie der Wurzelfunktion) $x < b$, also ist b obere Schranke von D. Sei nun $c \in \mathbb{R}$ beliebig mit $c < \sqrt{2}$. Wähle nun $\epsilon > 0$ so, dass $\epsilon < \sqrt{2} - c \Rightarrow c + \epsilon < \sqrt{2} \Rightarrow$ (Monotonie von pot_2) $(c + \epsilon)^2 < \sqrt{2}^2 = 2$, also ist $c + \epsilon \in D$, also ist c keine obere Schranke von D.

$$\Rightarrow \sup(D) = \sqrt{2}.$$

6.17 Satz

Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ nach oben beschränkt. Dann besitzt D ein Supremum.

Beweis:
Sei $d > 0$ derart, dass $x \leq d$ ist, $\forall x \in D$. Definiere nun induktiv eine Intervallschachtelung (I_n), $I_n = [a_n, b_n]$ mit

i) $x \leq b_n, \forall x \in D$

ii) $\exists\, x \in D : x > a_n$

- $n = 1$: Sei $x_0 \in D$ beliebig. Setze dann: $a_1 := x_0 - 1$, $b_1 := d$

- $n \to n+1$: Setze $M := \frac{1}{2}(a_n + b_n)$. Ist nun $x \leq M$, $\forall x \in D$, so setze $a_{n+1} := a_n$, $b_{n+1} := M$. Gibt es ein $x \in D$ mit $x > M$, so setze $a_{n+1} := M$, $b_{n+1} := b_n$. Offenbar ist (I_n) tatsächlich eine Intervallschachtelung und erfüllt (i) und (ii). Sei nun $b \in \mathbb{R}$ der Kern von (I_n)
(Vollständigkeit von $\mathbb{R}$!). Dann ist:

$$b_n - x \geq 0, \quad \forall x \in D, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow (6.7) \;\; b - x = \lim_{n\to\infty} (b_n - x) \geq 0 \;\; \text{also} \;\; b \geq x, \; \forall x \in D$$

(weil $(b_n) \to b$). Andererseits gibt es keine kleinere obere Schranke, denn: Ist $c \in \mathbb{R}$ mit $c < b \Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N} : c < a_n < b$, da auch $(a_n) \to b$. Sei nun $x_n \in D$, so dass $x_n > a_n$ ist (Bedingung (ii)). $\Rightarrow c < x_n$ also ist c keine obere Schranke von D.

$$b = \sup(D)$$

□

6.18 Kommentar

a) Man beachte, dass (6.17) wieder die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ benutzt.
(Die Menge $D \cap \mathbb{Q}$ mit D aus Bsp. (6.16) besitzt kein Supremum (in $\mathbb{Q}$) - es gibt zwar obere Schranken, aber keine kleinste). In einigen Lehrbüchern wird auch (6.17) als Vollständigkeitsaxiom eingeführt. Unsere Version des Vollständigkeitsaxiom (4.4) und auch das archimedische Axiom (3.11) folgen dann daraus.

b) Mit Satz (6.17) und den Erweiterungen aus (6.15) hat nun **jede** Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$ ihr Supremum und auch ihr Infimum (siehe (6.15)).

$$\sup(D) \in [-\infty, +\infty] \ ,$$

$$\inf(D) \in [-\infty, +\infty] \ .$$

c) Man beachte, dass das Supremum einer Menge $D \subseteq \mathbb{R}$ Element von D sein kann oder auch nicht. In Beispiel (6.16) etwa ist $\sup(D) \notin D$ (und im Fall $\sup(D) = \pm\infty$ sowieso nicht). Betrachtet man aber etwa $\bar{D} := \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 2\}$, so zeigt eine ähnliche Argumentation wie in (6.16), dass $\sup(\bar{D}) = \sqrt{2}$ ist und dieses Mal ist offenbar $\sup(\bar{D}) \in \bar{D}$. Im Falle, dass für eine Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$ ihr Supremum in D liegt, $\sup(D) \in D$, sprechen wir auch vom Maximum der Menge D und schreiben dann $\max(D)$, also

$$\max(D) := \sup(D), \text{ falls } \sup(D) \in D \text{ ist } .$$

Ähnlich für das Minimum von D,

$$\min(D) := \inf(D), \text{ falls } \inf(D) \in D \text{ ist } .$$

6.19 Satz: Weierstraß

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) \geq f(x)$, für alle $x \in [a, b]$.

Beweis:
Sei $D := \{f(x) \in \mathbb{R} : x \in [a, b]\}$ und $M := \sup(D) \in (-\infty, +\infty]$. Es gibt dann eine Folge (x_n) in $[a, b]$, so dass $(f(x_n))$ monoton wachsend ist und gegen M konvergiert, $(f(x_n)) \to M$. Man hat nun nach (5.5) bei (x_n) einen H.P. $\xi \in \mathbb{R}$, also hat (x_n) eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $(x_{n_k}) \to \xi$. Wegen (6.7) ist $\xi \in [a, b]$. Es folgt dann wegen der Stetigkeit von f (in ξ):

$$M = \lim_{n\to\infty}(f(x_n)) = \lim_{k\to\infty}(f(x_{n_k})) = f(\xi) \ ,$$

insbesondere also $\sup(D) \in D$ und damit $M < \infty$, also f nach oben beschränkt,

$$\sup(D) = \max(D) \ .$$

Nach Konstruktion ist $f(x) \leq M = f(\xi)$, $\forall x \in [a, b]$.

□

6.20 Kommentar

a) Da $f(x) \leq f(\xi)$ für alle $x \in [a,b]$ ist, nennt man ξ ein absolutes Maximum von f. Satz (6.19) kann man daher auch so formulieren:

Eine stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ nimmt ihr Supremum an (natürlich auch ihr Infimum, denn $\max(-f) = -\min(f)$).

b) Man beachte, dass es wichtig ist, dass $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt und abgeschlossen ist. Zum Beispiel ist $f : (0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ unbeschränkt oder auch $g : [0,1) \to \mathbb{R}$, $g(x) = x$ nimmt ihr Supremum nicht an. Auch $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = x$ nimmt ihr Supremum nicht an.

6.21 Definition: gleichmäßige Stetigkeit

Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt gleichmäßig stetig, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass gilt:

$$\text{Sind } x_1,\ x_2 \in I \text{ mit } |x_1 - x_2| < \delta, \text{ so ist } |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon\ .$$

6.22 Beispiel: gleichmäßige Stetigkeit

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig, denn ist $\epsilon > 0$ vorgegeben, so existiert zu jedem $x_0 \in \mathbb{R}$ ein $\delta = \delta(\epsilon, x_0) > 0$, so dass aus $|x - x_0| < \delta$ folgt: $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ (denn f ist stetig in x_0). Es kann aber δ nicht unabhängig von x_0 gewählt werden.

b) Sei $R > 0$ fest und $f : [-R, +R] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Dann ist f gleichmäßig stetig, denn ist $\epsilon > 0$, so ist

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1^2 - x_2^2| = |x_1 + x_2| \cdot |x_1 - x_2|$$

$$\leq (|x_1| + |x_2|) \cdot |x_1 - x_2| \leq 2R|x_1 - x_2| < \epsilon$$

für alle $x_1, x_2 \in [-R, +R]$ mit $|x_1 - x_2| < \delta$, wenn man $\delta := \frac{\epsilon}{2R}$ wählt.

6.23 Satz

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f sogar gleichmäßig stetig.

Beweis:
Angenommen $\exists\, \epsilon_0 > 0\ \forall \delta > 0\ \ \exists\, x, y \in [a, b]$ mit $|x - y| < \delta$, aber $|f(x) - f(y)| \geq \epsilon_0$. Insbesondere für $\delta_n := \frac{1}{n}$ (und $n \in \mathbb{N}$) existieren also $x_n, y_n \in [a, b]$ mit $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ (also $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$) aber $|f(x_n) - f(y_n) \geq \epsilon_0$. Wegen (5.5) folgt, dass (x_n) hat ein Häufungspunkt $\xi \in \mathbb{R}$ hat mit $\xi \in [a, b]$ (6.7). Sei (x_{n_k}) Teilfolge mit $(x_{n_k}) \to \xi$. Es gilt dann auch $(y_{n_k}) = (y_{n_k} - x_{n_k}) + (x_{n_k}) \to 0 + \xi = \xi$. Aber dann ist wegen der Stetigkeit von f (in ξ) auch:

$$0 = f(\xi) - f(\xi) = \lim f(x_{n_k}) - \lim f(y_{n_k}) = \lim(f(x_{n_k}) - f(y_{n_k}))$$

Widerspruch. Denn $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \epsilon_0,\ \forall k \in \mathbb{N}$. Also ist f doch gleichmäßig stetig.

$\square$

7 Integration

7.1 Motivation

Es soll die Fläche A zwischen dem Graphen einer (positiven) Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und der x-Achse erklärt werden.
Idee: Approximiere A durch Rechtecke mit immer kleineren horizontalen Seiten!
Zeichnung fehlt

7.2 Definition: Zerlegung und Feinheit

Eine Zerlegung $Z = (x_0, \ldots, x_n)$ des Intervalls besteht aus endlich vielen Punkten

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Es heißt

$$\delta := \max_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})$$

die **Feinheit der Zerlegung** Z.

7.3 Definition: Treppenfunktion

Es heißt $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine **Treppenfunktion**, wenn es eine Zerlegung $Z = (x_0, \ldots, x_n)$ gibt und $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$, so dass gilt:

$$\varphi(x) = c_i, \qquad \text{falls } x_{i-1} < x < x_i \ \ (i = 1, \ldots, n).$$

Zeichnung fehlt

7.4 Definition: Integral

Sei $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion, $Z = (x_0, \ldots, x_n)$ eine Zerlegung von $[a, b]$ und $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ so, dass $\varphi|(x_{i-1}, x_i) = c_i$ ist mit $i = 1, \ldots, n$.
Wir definieren das **Integral von** φ durch:

$$\int_a^b \varphi(x)dx := \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1}).$$

7.5 Kommentar

a) Streng genommen muss man noch zeigen, dass die Definition nicht von der Auswahl der Zerlegungen Z und $c_1, \ldots, c_n$ abhängt,
d.h.: Ist $Z' = (x'_0, \ldots, x'_m)$ eine weitere Zerlegung und sind $d_1, \ldots, d_m \in \mathbb{R}$, so dass $\varphi|(x'_{j-1}, x'_j) = d_j$ $(j = 1, \ldots, m)$ ist, so gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{j=1}^{m} d_j(x'_j - x'_{j-1}) \qquad \text{(Übung)}.$$

b) Man beachte, dass die Definition auch Flächen von Graphen erfasst, die unter der x-Achse liegen (wenn nämlich $c_i < 0$ ist für ein $i \in \{1, \ldots, n\}$). Diese werden dann negativ gezählt.

7.6 Bemerkung

Ist $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion und $\xi \in [a, b]$, so sind $\varphi|[a, \xi]$ und $\varphi|[\xi, b]$ auch Treppenfunktionen und es gilt:

$$\int_a^{\xi} \varphi(x)dx + \int_{\xi}^{b} \varphi(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx$$

Zeichnung fehlt
(Beweis: Übung)

(Übrigens: $f : A \to B$ Abbildung, $C \subseteq A$. Dann notiert $f|C : C \to B$ die Abbildung $(f|C)(x) = f(x), \forall x \in C$.)

7.7 Satz

Seien $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ Treppenfunktionen, $\lambda \in \mathbb{R}$. Es gilt dann:

a) Es ist auch $\varphi + \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion und es gilt:

$$\int_a^b (\varphi + \psi)(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx + \int_a^b \psi(x)dx.$$

b) Es ist auch $\lambda\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion mit:

$$\int_a^b (\lambda\varphi)(x)dx = \lambda \int_a^b \varphi(x)dx.$$

c) Ist $\varphi \leq \psi$, d.h. $\varphi(x) \leq \psi(x), \forall x \in [a, b]$, so ist auch

$$\int_a^b \varphi(x)dx \leq \int_a^b \psi(x)dx.$$

Beweis:
Durch Übergang zu einer gemeinsamen Verfeinerung Z von zwei Zerlegungen Z_1 und Z_2 (d.h. die Punkte von Z_1 und Z_2 sind enthalten in den Punkten von Z), dürfen wir annehmen, dass es eine Zerlegung $Z = (x_0, \ldots, x_n)$ von $[a, b]$ und $c = (c_1, \ldots, c_n)$ und $d = (d_1, \ldots, d_n)$ gibt, so dass gilt:

$$\varphi|(x_{i-1}, x_i) = c_i, \quad \psi|(x_{i-1}, x_i) = d_i \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

a) Es ist dann $(\varphi + \psi)|(x_{i-1}, x_i) = c_i + d_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, also $\varphi + \psi$ eine Treppenfunktion und es gilt:

$$\begin{aligned} \int_a^b (\varphi + \psi)(x)dx &= \sum_{i=1}^n (c_i + d_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n (c_i(x_i - x_{i-1}) + d_i(x_i - x_{i-1})) \\ &= \sum_{i=1}^n c_i(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^n d_i(x_i - x_{i-1}) \\ &= \int_a^b \varphi(x)dx + \int_a^b \psi(x)dx. \end{aligned}$$

b) ähnlich.

c) ähnlich. (Übung)

7.8 Definition: Ober- und Unterintegral

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt.

a) Man definiert das **Unterintegral von** f durch

$$\int_{a^*}^b f(x)dx = \sup\left\{\int_a^b \varphi(x)dx : \varphi \text{ ist Treppenfunktion mit } \varphi \leq f\right\}.$$

Zeichnung fehlt

b) Man definiert das **Oberintegral von** f durch

$$\int_a^{b^*} f(x)dx := \inf\left\{\int_a^b \psi(x)dx : \psi \text{ ist Treppenfunktion mit } \psi \geq f\right\}.$$

$\boxed{\text{Zeichnung fehlt}}$

7.9 Notation

a) Wenn die Grenzen a, b des Intervalls klar sind und die Integrationsvariable keine weitere Rolle spielt, schreiben wir:

$$\text{statt } \int_a^b \varphi(x)dx \;:\; \int \varphi$$

(und ähnlich $\int_* f$ bzw. $\int^* f$ (und später $\int f$)).

b) Wir definieren folgende Funktionsräume:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}[a,b] &:= \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : \text{ Funktion}\}, \\ \mathfrak{T}[a,b] &:= \{\varphi : [a,b] \to \mathbb{R} : \varphi \text{ ist Treppenfunktion}\}, \\ \mathfrak{C}[a,b] &:= \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : f \text{ ist stetig}\}. \end{aligned}$$

7.10 Kommentar

a) Da f beschränkt ist, existiert ein $c > 0$, so dass $|f(x)| \leq c$ ist, $\forall x \in [a,b]$. Damit ist die Teilmenge

$$D = \left\{\int \varphi \in \mathbb{R}, \varphi \in \mathfrak{T}[a,b], \varphi \leq f\right\} \subseteq \mathbb{R}$$

auf keinen Fall leer, denn die konstante Funktion $\varphi = -c$ liegt in $\mathfrak{T}[a,b]$ und erfüllt $\varphi \leq f$ (und damit ist $\int_* f \geq -c(b-a)$). Es ist auch D nach oben beschränkt, denn wegen $f \leq c$ gilt für alle $\varphi \in \mathfrak{T}[a,b]$ mit $\varphi \leq f$, dass $\varphi \leq c$ ist und damit die Menge nach oben beschränkt,

$$\int \varphi \leq c(b-a).$$

Es folgt, $\int_* f \leq c(b-a)$ und damit $\int_* f \in \mathbb{R}$ mit

$$(b-a)(-c) \leq \int_* f \leq c(b-a)$$

(ähnlich für $\int^* f \in \mathbb{R}$).

b) Nach Definition von $\int_* f$ gibt es eine Folge (φ_n) in $\mathfrak{T}[a,b]$ mit $\varphi_n \leq f$ und

$$\left(\int \varphi_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \nearrow \int_* f \ .$$

(wobei die Notation $(a_n) \nearrow a$ bedeuten möge, dass $(a_n) \to a$ gilt und dass (a_n) monoton wachsend ist).

Entsprechend existiert (ψ_n) in $\mathfrak{T}[a,b]$ mit $\psi_n \geq f$ und

$$\left(\int \psi_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \searrow \int^* f \ .$$

c) Es ist stets

$$\int_* f \leq \int^* f \ ,$$

denn ist (φ_n) in $\mathfrak{T}[a,b]$ mit $(\int \varphi_n) \nearrow \int_* f$ und (ψ_n) in $\mathfrak{T}[a,b]$ mit $\psi_n \geq f$ und $\left(\int \psi_n\right) \searrow \int^* f$, so ist $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$, also $\psi_n - \varphi_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ und damit (mit (6.7),(7.7)):

$$\begin{aligned}
\int^* f - \int_* f &= \lim_{n\to\infty}\left(\int \psi_n\right) - \lim_{n\to\infty}\left(\int \varphi_n\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\int (\psi_n - \varphi_n)\right) \geq 0
\end{aligned}$$

7.11 Definition: (Riemann-) Integral

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Es heißt f (Riemann-) integrierbar, Bezeichnung $f \in \mathfrak{R}[a,b]$, wenn folgendes gilt:

$$\int_a^{b\,*} f(x)dx = \int_{a\,*}^{b} f(x)dx$$

Es heißt dann

$$\int\limits_a^b f(x)dx := \int\limits_{a\ *}^b f(x)dx$$

das Integral von f.

7.12 Beispiele: Jede Treppenfunktion ist integrierbar

(a) Jede Treppenfunktion ist integrierbar,

$$\mathfrak{T}[a,b] \subseteq \mathfrak{R}[a,b],$$

denn $\forall \varphi \in \mathfrak{T}[a,b]$, die unterhalb von $f \in \mathfrak{R}[a,b]$ liegen, gilt: $\int \varphi \leq f$ (wo $\int f$ das Integral einer Treppenfunktion bezeichnet (7.3)). Also ist

$$\int_* f = \sup\left\{\int \varphi : \varphi \in \mathfrak{T}[a,b], \varphi \leq f\right\} = \int f\ .$$

Ähnlich sieht man, dass $\int^* f = \int f$ und damit $f \in \mathfrak{R}[a,b]$ ist und die beiden Definitionen von $\int f$ ((7.3) und (7.11)) überein stimmen.

(b) Die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{wenn } x \notin \mathbb{Q} \cap [0,1] \end{cases}$$

$\boxed{\text{Zeichnung fehlt}}$

ist nicht (Riemann-) integrierbar, denn alle Treppen, die von unten kommen, sind ≤ 0, und alle Treppenfunktionen die von oben kommen sind ≥ 1 (wegen (4.23)). Es ist also $0 = \int_* f \neq \int^* f = 1$ und damit f nicht (Riemann-) integrierbar.

7.13 Satz

Seien $f, g \in \mathfrak{R}[a,b], \lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

(a) $f + g \in \mathfrak{R}[a,b]$ und

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

(b) $\lambda f \in \mathfrak{R}[a,b]$ und

$$\int_a^b (\lambda f)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$$

(c) Ist $f \leq g$, so ist

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Beweis:

(a) Seien (φ_n) und (ψ_n) in $\mathfrak{T}[a,b]$ mit $\varphi_n \leq f$, $\psi_n \leq g$ und $(\int \varphi_n) \nearrow \int f$, $(\int \psi_n) \nearrow \int g$. Es ist dann: $\varphi_n + \psi_n \leq f + g$ und

$$\int (\varphi_n + \psi_n) \overset{(7.7)}{=} \int \varphi_n + \int \psi_n \xrightarrow{(3.15)} \int f + \int g.$$

Es folgt:

$$\int f + \int g \leq \int_* (f+g)$$

und ähnlich sieht man, dass $\int^* (f+g) \leq \int f + \int g$. Damit ist

$$\int_* (f+g) = \int^* (f+g) = \int f + \int g\ .$$

(b) ähnlich

(c) Zeige: Aus $f \geq 0$ folgt: $\int f \geq 0$. Das reicht, denn ist $f \leq g \Rightarrow g - f \geq 0$ und damit $\int g - \int f = \int (g-f) \geq 0$

$$\Rightarrow \int f \leq \int g\ .$$

Aber $0 \in \mathfrak{T}[a,b]$ und $0 \leq f$

$$\Rightarrow 0 = \int 0 \leq \int_* f = \int f\ .$$

$\square$

7.14 Lemma

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $\varphi \in \mathfrak{T}[a,b]$ mit $\varphi \leq f$, so dass für alle $x \in [a,b]$ gilt:

$$f(x) - \varphi(x) < \epsilon$$

Zeichnung fehlt

Beweis:
Sei $\varepsilon > 0$. Weil f gleichmäßig stetig ist (6.23), existiert ein $\delta > 0$, so dass für $x, x' \in [a,b]$ mit $|x - x'| < \delta$ gilt: $|f(x) - f(x')| < \epsilon$. Wähle nun irgendeine Zerlegung $Z = (x_0, \dots, x_n)$ von $[a,b]$ mit der Feinheit kleiner als δ. Setze dann $c_i := \min\{f(x) \in \mathbb{R} : x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$ und wähle $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ mit $f(\xi_i) = c_i$ (Weierstraß, (6.19)). Setze $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = c_i$ für $x_{i-1} \leq x < x_i$ ($\varphi(b) := f(b)$).

Zeichnung fehlt

Dann ist $\varphi \in \mathfrak{T}[a,b]$ und $\varphi \leq f$. Sei nun $x \in [a,b)$ beliebig.
$\Rightarrow \exists\, i \in \{1, \dots, n\} : x_{i-1} \leq x < x_i$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x) - \varphi(x) &= f(x) - c_i \\ &= f(x) - f(\xi_i) < \epsilon\ , \end{aligned}$$

weil $|x - \xi_i| < x_i - x_{i-1} < \delta$ ist.

$\square$

7.15 Satz: f stetig $\Rightarrow$ f integrierbar

Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so ist f integrierbar.

Beweis:
f stetig $\Rightarrow$ f beschränkt (6.19). Sei $\epsilon > 0 \Rightarrow$ (7.14) $\exists\ \varphi, \psi \in \mathfrak{T}[a,b]$ mit $\varphi \leq f \leq \psi$ und

$$\psi(x) - \varphi(x) < \frac{\epsilon}{b-a},$$

für alle $x \in [a,b]$. (Wende nämlich (7.14) auf f bzw. $-f$ mit $\frac{\epsilon}{2(b-a)}$ an.)

$$\Rightarrow \int_a^b (\psi - \varphi) < \frac{\epsilon}{b-a}(b-a) = \epsilon$$

$$\Rightarrow 0 \le \int^* f - \int_* f \le \int \psi - \int \varphi = \int (\psi - \varphi) < \epsilon,$$

$\forall \epsilon > 0$ nur, wenn $\int_* f = \int^* f$, d. h. $f \in \mathfrak{R}[a,b]$: f ist integrierbar.

$\square$

Zeichnung fehlt

7.16 Definition: Riemannsche Summe

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und $Z = (x_0, \ldots, x_n)$ eine Zerlegung von $[a,b]$ sowie $\xi_1, \ldots, \xi_n \in [a,b]$ mit $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Man nennt dann

$$S(f; Z, \xi) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

eine Riemannsche Summe von f.

Zeichnung fehlt

7.17 Satz

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $(Z^{(r)})_{r \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Zerlegungen von $[a,b]$,

$$Z^{(r)} = (x_0^{(r)}, \ldots, x_{n_r}^{(r)})$$

mit Feinheit $\delta_r > 0$ und es sei $\lim_{r\to\infty}(\delta_r) = 0$.
Sei weiter $\xi^{(r)} = (\xi_1^{(r)}, \ldots, \xi_{n_r}^{(r)})$ mit $\xi_i^{(r)} \in [x_{i-1}^{(r)}, x_i^{(r)}]$ $(i = 1, \ldots, n_r)$ und schließlich $S_r := S(f; Z^{(r)}, \xi^{(r)})$ die zugehörige Riemannsche Summe. Dann gilt:

$$\lim_{r\to\infty} S_r = \int_a^b f(x)dx.$$

7.18 Kommentar

(a) Es ist also

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{r\to\infty} \sum_{i=1}^{n_r} f(\xi_i^{(r)})(x_i^{(r)} - x_{i-1}^{(r)})$$

Wählt man die Zerlegung $Z^{(r)}$ äquidistant mit Feinheit $\delta_r = \frac{b-a}{r}$, also

$$\Delta x^{(r)} := x_i^{(r)} - x_{i-1}^{(r)} = \frac{b-a}{r} \qquad (i = 1, \ldots, n) \ ,$$

so schreibt sich (etwas schlampig) die rechte Seite davon so
(beachte: $r \to \infty \Leftrightarrow \Delta x^{(r)} \to 0$):

$$„ \int f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum f(x) \Delta x \text{ “}$$

(b) Der Satz ist auch richtig für alle $f \in \mathfrak{R}[a,b]$ (nicht nur $f \in \mathfrak{C}[a,b]$, siehe z. B. Forster 1).

7.19 Lemma

Ist $f \in \mathfrak{R}[a,b]$, so ist $|f| \in \mathfrak{R}[a,b]$ und es gilt:

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f|(x)dx$$

Beweis:
Definiere für jedes $f \in \mathfrak{T}[a,b]$ $f_+, f_- : [a,b] \to [0,\infty)$ durch:

$$\begin{aligned} f_+(x) &:= \max(f(x), 0) \\ f_-(x) &:= \max(-f(x), 0) \end{aligned}$$

Es ist dann:

$$\begin{aligned} f &= f_+ - f_- \ , \\ |f| &= f_+ + f_- \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Zeichnung fehlt}}$

Ist nun $f \in \mathfrak{R}[a,b]$, so folgt $f_+, f_- \in \mathfrak{R}[a,b]$ (Übung) und

$$\begin{aligned} \int f &= \int f_+ - \int f_- \leq \int f_+ + \int f_- = \int |f| \\ -\int f &= \int f_- - \int f_+ \leq \int f_- + \int f_+ = \int |f| \ . \end{aligned}$$

$\square$

7.20 Bemerkung

Ist $f \in \mathfrak{R}[a,b]$ und $\xi \in (a,b)$, so ist $f|[a,\xi] \in \mathfrak{R}[a,\xi]$, $f|[\xi,b] \in \mathfrak{R}[\xi,b]$ und es gilt

$$\int_a^\xi f(x)dx + \int_\xi^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx \qquad \text{(Beweis: Übung)}$$

Beweis von (7.17):
Sei $\epsilon > 0 \Rightarrow (6.23)\ \exists\ \delta > 0,\ \forall x, x' \in [a,b]$ mit $|x - x'| < \delta : |f(x) - f(x')| < \frac{\epsilon}{b-a}$. Weil $(\delta_r) \to 0$ geht, existiert $r_0 \in \mathbb{N}$, so dass für $r \geq r_0$ gilt: $\delta_r < \delta$.
$\forall r \geq r_0$ und $\forall i \in \{1, \ldots, n_r\}$ gilt: Ist $x \in [x_{i-1}^{(r)}, x_i^{(r)})$, so ist:

$$|f(x) - f(\xi_i^{(r)})| < \frac{\epsilon}{b-a}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \left|\int_{x_{i-1}^{(r)}}^{x_i^{(r)}} (f(x) - f(\xi_i^{(r)})dx\right| &\overset{(7.19)}{\leq} \int_{x_{i-1}^{(r)}}^{x_i^{(r)}} (|f(x) - f(\xi_i^{(r)})|)dx \leq \frac{\epsilon}{b-a}(x_i^{(r)} - x_{i-1}^{(r)}) \\
\Rightarrow \left|\int_a^b f(x)dx - S_r\right| &\overset{(7.20)}{=} \left|\sum_{i=1}^{n_r} \int_{x_{i-1}^{(r)}}^{x_i^{(r)}} f(x)dx - \sum_{i=1}^{n_r} f(\xi_i^{(r)})(x_i^{(r)} - x_{i-1}^{(r)})\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n_r} \left|\int_{x_{i-1}^{(r)}}^{x_i^{(r)}} f(x)dx - \int_{x_{i-1}^{(r)}}^{x_i^{(r)}} f(\xi_i^{(r)})dx\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n_r} \frac{\epsilon}{b-a}(x_i^{(r)} - x_{i-1}^{(r)}) = \frac{\epsilon}{b-a}(b-a) = \epsilon,
\end{aligned}$$

also $(S_r) \to \int_a^b f(x)dx$.

□

7.21 Beispiele

(a) Sei $b > 0$. Dann ist

$$\int_0^b x\,dx = \frac{1}{2}b^2 .$$

Denn: Nehme äquidistante Zerlegung („arithmetische Progression") $Z^{(r)} = (x_0^{(r)}, \ldots, x_r^{(r)})$ mit

$$x_i^{(r)} = i \cdot \frac{b}{r} \quad (i = 0, \ldots, r) ,$$

also Feinheit

$$\delta_r = x_i^{(r)} - x_{i-1}^{(r)} = \frac{b}{r} \ .$$

Wähle weiter die Stützstellen

$$\xi_i^{(r)} = x_i^{(r)} = \frac{ib}{r} \quad (i = 1, \ldots, r) \ .$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow S_r &= \sum_{i=1}^{r} f(\xi_i^{(r)})(x_i^{(r)} - x_{i-1}^{(r)}) \quad \text{mit } f(x) = x \\
&= \sum_{i=1}^{r} \frac{ib}{r} \cdot \frac{b}{r} = \frac{b^2}{r^2} \sum_{i=1}^{r} i \\
&= \frac{b^2}{r^2}(r+1)\frac{1}{2}r \\
&= \frac{b^2}{2} \cdot \frac{r^2 + r}{r^2} \stackrel{r \to \infty}{\longrightarrow} \frac{b^2}{2}.
\end{aligned}$$

Für beliebiges $0 \leq a \leq b$ folgt:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_0^b f(x)dx - \int_0^a f(x)dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \ .$$

Noch allgemeiner setzt man bei $a \geq b$ (und $f \in \mathfrak{R}[a, b]$)

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &:= -\int_b^a f(x)dx \ , \\
\int_a^a f(x)dx &= 0 \ .
\end{aligned}$$

Man erhält dann für alle $a, b \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b x \, dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \ .$$

(b) Für $b > 0$ ist

$$\int_0^b x^2 \, dx = \frac{1}{3}b^3.$$

Denn: Wähle wieder $x_i^{(r)} = \frac{ib}{r}$, $\xi_i^{(r)} = x_i^{(r)}$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow S_r &= \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{ib}{r}\right)^2 \frac{b}{r} = \frac{b^3}{r^3} \sum_{i=1}^{r} i^2 \\
&= \frac{b^3}{r^3} \cdot \frac{1}{3} r(r+\frac{1}{2})(r+1) \\
&\to \frac{b^3}{3} \quad \text{für } r \to \infty \ .
\end{aligned}
$$

Wie oben dann: $\forall\ a, b \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^b x^2\, dx = \frac{1}{3}(b^3 - a^3) \ .$$

(c) Sei nun $n \in \mathbb{N}$ beliebig, $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\int_a^b x^n\, dx = \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1}) \ .$$

Denn: o.E. $a = 1$, $b > 1$. Wähle nun $x_i^{(r)} = q_r^i$ mit $q_r := \sqrt[r]{b}$ („geometrische Progression").

$$\xi_i^{(r)} = x_{i-1}^{(r)}.$$

$$
\begin{aligned}
\overset{\text{Übung}}{\Rightarrow} S_r &= \frac{b^{n+1} - 1}{1 + \sqrt[r]{b} + \sqrt[r]{b^2} + \ldots + \sqrt[r]{b^n}} \quad \text{für } r \to \infty \\
&\longrightarrow \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - 1), \ \text{für } r \to \infty.
\end{aligned}
$$

(d) Für $0 \leq a \leq b$ gilt (Übung):

$$\int_a^b \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3} \cdot (\sqrt{b^3} - \sqrt{a^3}) \ .$$

7.22 Satz: Mittelwertsatz der Integralrechnung

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es ein $\xi \in [a, b]$, so dass folgendes gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a).$$

Zeichnung fehlt

Beweis:
Sei $m := \min\{f(x) : x \in [a,b]\}$ und $M := \max\{f(x) : x \in [a,b]\}$ (vgl. (6.19)). Es ist dann $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in [a,b]$ und damit

$$m(b-a) = \int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx = M(b-a)$$

Setze nun:

$$\mu := \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\ ,$$

also $m \leq \mu \leq M$. Ist nun $x_{\min}, x_{\max} \in [a,b]$ mit $f(x_{\min}) = m$ und $f(x_{\max}) = M$ (6.19) $\Rightarrow$ (6.8)

$$\exists\ \xi \in [a,b] \qquad \text{(zwischen } x_{\min} \text{ und } x_{\max}\text{)}$$

mit $f(\xi) = \mu$ also

$$f(\xi)(b-a) = \mu(b-a) = \int_a^b f(x)dx.$$

□

8 Differentiation

8.1 Motivation

Für eine affin-lineare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = mx + b$ (mit $m, b \in \mathbb{R}$), nennt man $m \in \mathbb{R}$ die Steigung von f (in jedem Punkt), denn:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(mx_2 + b) - (mx_1 + b)}{x_2 - x_1} = m.$$

Zeichnung fehlt

Ziel: Auch für nicht affin-lineare Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$ soll für jeden Punkt $x_0 \in I$ die Steigung von f in x_0 definiert werden.
Idee: Nehme Tangente $t \mapsto mt + b$ an Graph(f) bei $(x_0, f(x_0))$ und deren Steigung m.
Problem: Wie bekommt man die Tangente(-nsteigung)?
Ansatz: Nehme Grenzlage der Sekantensteigung

$$„\frac{\Delta f}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \to 0} \frac{df}{dx}“$$

8.2 Definition: Differenzierbarkeit

(a) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Es heißt f differenzierbar in $x_0 \in I$, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert.

Zeichnung fehlt

(b) Es heißt $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar, wenn f in jedem Punkt $x \in I$ differenzierbar ist.

8.3 Kommentar

(a) Falls $f : I \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar ist, bezeichnet man den Grenzwert mit $f'(x_0)$ oder $\frac{df}{dx}(x_0)$ (oder auch $\frac{df}{dx}\big|_{x=x_0}$).

(b) Bezeichnung: Mit $h := x - x_0$ ist f in x_0 genau dann differenzierbar, wenn folgender Grenzwert existiert:

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(f(x+h) - f(x_0)).$$

(Erinnere (6.4): D.h. für jede Folge (h_n) mit $x_0+h_n \in I,\ h_n \neq 0$ und $(h_n) \to 0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{h_n}(f(x_0+h_n) - f(x_0))$$

existiert (und ist für alle Folgen dann derselbe).)

$\boxed{\text{Zeichnung fehlt}}$

(c) Der Ausdruck

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

heißt Differenzenquotient.

8.4 Beispiel

(a) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ affin-linear, also $f(x) = mx + b$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (mit $m, b \in \mathbb{R}$), so ist f differenzierbar und $f'(x) = m$, für jedes $x \in \mathbb{R}$, denn:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)) &= \frac{1}{h}(m(x+h) + b - (mx+b)) \\ &= \frac{1}{h}(mh) = m\ . \end{aligned}$$

Insbesondere $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)) = m$, für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f = \mathrm{pot}_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^n$. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ und $h \in \mathbb{R}, h \neq 0$ ist nun:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)) &= \frac{1}{h}((x+h)^n - x^n) \\
&= \frac{1}{h}\left((x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \ldots + h^n) - x^n\right) \\
&= \frac{1}{h} \cdot (h(n \cdot x^{n-1} + h \cdot p(h))) \\
&= nx^{n-1} + hp(h)
\end{aligned}$$

mit einem Polynom p (abhängig von x) vom Grad $n-2$
($p = a_0(x) + a_1(x)h + \ldots + a_{n-2}(x)h^{n-2}$, wenn $n \geq 2$ ist (sonst $p = 0$)).
Wegen $\lim_{h\to 0} h \cdot p(h) = 0 \cdot p(0)$ (Stetigkeit von p in 0) gilt also:

$$\frac{d}{dx}(x^n) = n \cdot x^{n-1} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}\ .$$

8.5 Satz: Differenzierbarkeit

Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist in $x_0 \in I$ genau dann differenzierbar, wenn es ein $m \in \mathbb{R}$ gibt und eine Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\varphi(x)}{x - x_0} = 0\ ,$$

so dass für alle $x \in I$ gilt:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + m(x - x_0)}_{\text{affin-lineare Funktion}} + \underbrace{\varphi(x)}_{\text{Fehler}}.$$

8.6 Kommentar

(a) Die Tangente am Graph G_f im Punkt $(x_0, f(x_0))$ ist also der Graph der affin-linearen Funktion $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$T(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$$

Zeichnung fehlt

(b) Differenzierbar in x_0 sein für f bedeutet also, dass der Fehler $\varphi(x) = f(x) - T(x)$ zwischen f und einer (geeigneten) affin-linearen Funktion T für $x \to x_0$ schneller gegen 0 konvergiert als $(x - x_0)$.

(c) Man schreibt auch:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + mh + \psi(h)$$

mit $\lim_{h\to 0} \frac{\psi(h)}{h} = 0$, (mit $\psi(h) := \varphi(x_0 + h)$).

Beweis:
„ $\Rightarrow$ “: Sei f differenzierbar in x_0 und $m := f'(x_0)$. Setze $\varphi : I \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) := f(x) - f(x_0) - m(x - x_0)$$

Dann ist $f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + \varphi(x)$ und

$$\begin{aligned}
\frac{\varphi(x)}{x - x_0} &= \frac{f(x) - f(x_0) - m(x - x_0)}{x - x_0} \\
&= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - m = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \\
&\xrightarrow{x\to x_0} 0.
\end{aligned}$$

„ $\Leftarrow$ “: Sei also $m \in \mathbb{R}$ und $\varphi : I \to \mathbb{R}$ derart, dass $\frac{\varphi(x)}{x - x_0} \to 0$ konvergiert für $x \to x_0$ und $f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + \varphi(x)$ ist. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= m + \frac{\varphi(x)}{x - x_0} \\
&\xrightarrow{x\to x_0} m + 0 = m.
\end{aligned}$$

Also ist f differenzierbar in x_0 (und $f'(x_0) = m$).

□

8.7 Korollar: Aus Differenzierbarkeit folgt Stetigkeit

Ist $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in I$, so ist f auch stetig in x_0.

Beweis:
Zu zeigen: $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Aber

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \varphi(x)$$

mit einem $\varphi : I \to \mathbb{R}$ mit $\frac{\varphi(x)}{x - x_0} \to 0$ für $x \to x_0$. Insbesondere gilt deshalb $\varphi(x) \to 0$ für $x \to x_0$ denn $\varphi(x) = \frac{\varphi(x)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \xrightarrow{x\to x_0} 0 \cdot 0 = 0$. Also:

$$f(x) \xrightarrow{x\to x_0} f(x_0) + f'(x_0) \cdot 0 + 0 = f(x_0) \; .$$

$\square$

8.8 Notation

Für $I = [a,b]$ bezeichnen wir

$$\mathfrak{D}[a,b] := \{f : I \to \mathbb{R} : f \text{ ist differenzierbar}\}.$$

Es gilt dann also:

$$\underbrace{\mathfrak{D}[a,b]}_{diff'bar} \subseteq \underbrace{\mathfrak{C}[a,b]}_{stetig} \subseteq \underbrace{\overset{\mathfrak{T}[a,b]}{\overset{\cap|}{\mathfrak{R}[a,b]}}}_{Riemannintegrierbar} \subseteq \underbrace{\mathfrak{F}[a,b]}_{Funktion} .$$

8.9 Beispiel

(a) $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$ ist differenzierbar und

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} ,$$

denn:

$$\frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)) = \frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{h} \cdot \frac{-h}{x(x+h)} \overset{h\to 0}{\to} \frac{-1}{x^2} .$$

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |x|$ ist stetig in $x_0 = 0$, aber nicht differenzierbar, denn: Ist (h_n) eine Nullfolge mit $h_n > 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{h_n}(f(h_n) - f(0)) = \frac{|h_n|}{h_n} = \frac{h_n}{h_n} = 1 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 ,$$

für $(h_n) \to 0$ mit $h_n < 0$ aber

$$\frac{1}{h_n}(f(h_n) - f(0)) = \frac{|h_n|}{h_n} = -1 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -1 .$$

8.10 Satz

Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in I, \lambda \in \mathbb{R}$. Es gilt:

(a) Es ist auch $f + g : I \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in I$ differenzierbar und es gilt:

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

(b) Auch $\lambda f : I \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar in x_0 und

$$(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$$

Beweis:
(a) Sei (h_n) beliebige Folge mit $h_n \neq 0$, $x_0 + h_n \in I$ und $(h_n) \to 0$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{h_n}(f(x_0+h_n) - f(x_0)) &\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f'(x_0) \\ \frac{1}{h_n}(g(x_0+h_n) - g(x_0)) &\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} g'(x_0)\ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\ & \frac{1}{h_n}((f+g)(x_0+h_n) - (f+g)(x_0)) \\ =\ & \frac{1}{h_n}(f(x_0+h_n) + g(x_0+h) - f(x_0) - g(x_0)) \\ =\ & \frac{1}{h_n}(f(x_0+h_n) - f(x_0)) + \frac{1}{h_n}(g(x_0+h_n) - g(x_0)) \\ \to\ & f'(x_0) + g'(x_0)\ . \end{aligned}$$

(b) ähnlich .

□

8.11 Beispiel

Für jede Polynomfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

mit $(n \in \mathbb{N}, a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, a_n \neq 0)$ wissen wir nun, dass sie differenzierbar ist mit

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} x^k \ .$$

8.12 Motivation

(a) Sei $x \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Will man x^{-n} definieren und das Potenzgesetz

$$x^k \cdot x^l = x^{k+l} \ , \qquad \forall k, l \in \mathbb{Z}$$

beibehalten, so muss man wegen

$$x^0 \cdot x = x^0 \cdot x^1 = x^{0+1} = x^1 = x \Rightarrow x^0 = 1$$
$$x^{-n} \cdot x^n = x^{-n+n} = x^0 = 1$$

also setzen:

$$x^{-n} := \frac{1}{x^n} \qquad (\text{und } x^0 := 1) \ .$$

(b) Sei $x > 0$ und $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ (sagen wir $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$, gekürzt). Will man

$$x^k \cdot x^l = x^{k+l} \ , \qquad \forall k, l \in \mathbb{Q}$$

beibehalten, so muss man wegen

$$(x^r)^q = (x^{\frac{p}{q}})^q = \underbrace{x^{\frac{p}{q}} \cdot \ldots \cdot x^{\frac{p}{q}}}_{q\text{-mal}} = x^{\frac{p}{q}+\ldots+\frac{p}{q}} = x^{q \cdot \frac{p}{q}} = x^p$$

also setzen:

$$x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p} \ .$$

8.13 Definition: Potenzfunktion

Sei $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ (mit $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ und gekürzt). Die Potenzfunktion $f = \mathrm{pot}_r : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ wird definiert durch

$$f(x) = x^r := \sqrt[q]{x^p} \ .$$

8.14 Kommentar

(a) Mit dieser Definition bleiben dann die Potenzgesetze gültig (Übungsaufgabe): Für alle $x > 0,\ r, s \in \mathbb{Q}$ ist

$$x^r \cdot x^s = x^{r+s} \ , \quad (x^r)^s = x^{rs} \ .$$

(b) Auch $f = \mathrm{pot}_n : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $\mathrm{pot}_n(x) = x^n$ mit negativem $n \in \mathbb{Z}$ ist differenzierbar und es gilt (Übung)

$$f'(x) = nx^{n-1} \ .$$

(c) Sogar $\mathrm{pot}_r : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar mit $r \in \mathbb{Q}$ und es gilt (für $r = \frac{1}{2}$ siehe Übung):

$$f'(x) = rx^{r-1} \ .$$

(d) Wir werden später sogar für jedes $c \in \mathbb{R}$ die Potenzfunktion $f = \mathrm{pot}_c : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definieren, $\mathrm{pot}_c(x) = x^c$, und auch dann ist f differenzierbar mit

$$f'(x) = cx^{c-1} \ .$$

8.15 Satz: Rolle

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $f(a) = f(b) = 0$. Es gibt dann ein $\xi \in (a, b)$, so dass $f'(\xi) = 0$.

$\boxed{\text{Zeichnung fehlt}}$

Beweis:
Ist $f(x) = 0,\ \forall x \in [a, b]$, so nehme irgendein $\xi \in (a, b)$. Es gelte daher oBdA: $f(x_0) > 0$ für ein $x_0 \in [a, b]$. Sei nun $\xi \in [a, b]$ so, dass $f(\xi) \geq f(x),\ \forall x \in [a, b]$ ((6.19), denn f ist insbesondere stetig). Wegen $f(\xi) \geq f(x_0) > 0$, muss $\xi \in (a, b)$ sein. Es gibt daher (h_n) mit $h_n < 0, \xi + h_n \in [a, b]$ und $(h_n) \to 0$.

Wegen:

$$\underbrace{\frac{1}{h_n}}_{<0}\underbrace{(f(\xi+h_n)-f(\xi))}_{\leq 0}\geq 0$$

$\forall n\in\mathbb{N} \overset{(6.7)}{\Longrightarrow} f'(\xi)\geq 0$. Ebenso gibt es jetzt eine Folge (h_n) mit $h_n>0$, $\xi+h_n\in[a,b]$ und $(h_n)\to 0$. Nun ist aber:

$$\underbrace{\frac{1}{h_n}}_{>0}\underbrace{(f(\xi+h_n)-f(\xi))}_{\leq 0}\leq 0$$

$\forall n\in\mathbb{N} \Longrightarrow f'(\xi)\leq 0$ Also: $f'(\xi)=0$.

$\square$

8.16 Kommentar

Ist $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ differenzierbar und liegt in $x_0\in(a,b)$ ein lokales Maximum (bzw. ein lokales Minimum), d.h. es existiert ein $\delta>0$, so dass für alle $x\in[a,b]$ mit $|x-x_0|<\delta$ gilt: $f(x)\leq f(x_0)$ (bzw. $f(x)\geq f(x_0)$), so zeigt der Beweis von (8.15):

$$f'(x_0)=0.$$

8.17 Korollar: MWS der Differenzialrechnung

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ differenzierbar. Es gibt dann ein $\xi\in(a,b)$, so dass gilt:

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

Zeichnung fehlt

Beweis:
Setze $g:[a,b]\to\mathbb{R}$,

$$g(x):=f(x)-(m(x-a)+f(a))$$

mit $m=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\Rightarrow g(a)=g(b)=0 \overset{(8.15)}{\Longrightarrow} \exists\xi\in(a,b): g'(\xi)=0\Rightarrow 0= g'(\xi)=f'(\xi)-m\Rightarrow f'(\xi)=m=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

$\square$

8.18 Korollar

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so dass $f'(x) = 0$ ist, für alle $x \in I$. Dann ist f konstant.

Beweis:
Seien $x, y \in I$ beliebig, o.E. $x < y$; weil $f|[x,y]$ differenzierbar ist, gibt es ein $\xi \in (x, y)$, so dass

$$f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x) = 0 \ .$$

Also ist $f(x) = f(y)$, $\forall \ x, y \in I$, also ist f konstant.

$\square$

8.19 Korollar

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$. Dann ist f streng monoton wachsend.

Beweis:
Seien $x, y \in I$ mit $x < y \Rightarrow \exists \ \xi \in (x, y)$ mit

$$f(y) - f(x) = \underbrace{f'(\xi)}_{>0}\underbrace{(y - x)}_{>0} > 0,$$

also $f(x) < f(y)$.

$\square$

9 Der Hauptsatz

„ $F(b) - F(a) = \sum \Delta F = \sum \frac{\Delta F}{\Delta x} \Delta x \overset{\Delta x \to 0}{\longrightarrow} \int_a^b \frac{dF}{dx} dx$ “
$\boxed{\text{Zeichnung fehlt}}$

9.1 Definition: Stammfunktion

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Es heißt dann $F : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f, wenn F differenzierbar ist und $F' = f$ ist.

9.2 Kommentar

Ist $F_1 : I \to \mathbb{R}$ Stammfunktion einer Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$, so ist auch $F_2 : I \to \mathbb{R}, F_2(x) = F_1(x) + c$, differenzierbar und eine Stammfunktion von f, denn

$$F_2'(x) = F_1'(x) + 0 = f(x) \ .$$

Umgekehrt gilt:

9.3 Satz

Sind $F_1, F_2 : I \to \mathbb{R}$ Stammfunktionen einer Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, so gibt es ein $c \in \mathbb{R}$, so dass (für alle $x \in I$) gilt:

$$F_2(x) = F_1(x) + c.$$

Beweis:
Setzt man $g : I \to \mathbb{R}, g(x) = F_2(x) - F_1(x)$, so gilt:

$$\begin{aligned} g'(x) = F_2'(x) - F_1'(x) &= f(x) - f(x) = 0 \\ \Rightarrow \ (8.18)\ \exists\ c \in \mathbb{R} : g(x) &= c, \qquad \forall x \in I \\ \Rightarrow F_2(x) = F_1(x) + g(x) &= F_1(x) + c, \qquad \forall x \in I. \end{aligned}$$

$\square$

9.4 Kommentar

Vorsicht! Nicht jede Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ hat eine Stammfunktion.
z.B. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases} .$$

$\boxed{\text{Zeichnung fehlt}}$

Denn: $f|(0,\infty)$ hat die Stammfunktion $F_0^+ : (0,\infty) \to \mathbb{R}$,

$$F_0^+(x) = x \ .$$

Jede andere Stammfunktion sieht dann so aus: $F_c^+ : (0,\infty) \to \mathbb{R}$,

$$F_c^+(x) = x + c \ , \qquad c \in \mathbb{R} \ .$$

Ebenso hat f in $(-\infty,0) \to \mathbb{R}$ die Stammfunktionen $F_d^- : (-\infty,0) \to \mathbb{R}$,

$$F_d^-(x) = d \ , \qquad d \in \mathbb{R} \ .$$

Ist nun $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Stammfunktion von f, so muss F auf $(-\infty,0)$ mit einem F_d^- und auf $(0,\infty)$ mit einem F_c^+ übereinstimmen. Da F stetig in $x_0 = 0$ ist, muss $c = d$ sein, also

$$F(x) = F_c(x) = \begin{cases} x + c & \text{für } x > 0 \\ c & \text{für } x \leq 0 \end{cases} .$$

$\boxed{\text{Zeichnung fehlt}}$

Aber F_c ist offenbar nicht differenzierbar in $x_0 = 0$.

9.5 Beispiele

Für alle $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \neq -1$ ist $F : (0,\infty) \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

eine Stammfunktion von $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x^n$, denn (8.4b) und (Blatt 9, Aufgabe 3):

$$F'(x) = \frac{1}{n+1}(n+1)x^n = x^n \ .$$

Frage: Gibt es denn auch eine Stammfunktion von $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{x} \ ?$$

9.6 Satz

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und $x_0 \in I$ beliebig. Es ist dann $F : I \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt$$

eine Stammfunktion von f.
Beweis:
(Erinnere, dass wir für $b < a$ vereinbart hatten:

$$\int\limits_{a}^{b} := -\int\limits_{b}^{a}$$

und auch

$$\int\limits_{a}^{a} = 0$$

und für alle $x, y, z \in I$ gilt:

$$\int\limits_{x}^{z} = \int\limits_{x}^{y} + \int\limits_{y}^{z} \quad .)$$

Zunächst ist mit f für alle $x \in I$ auch $f|[x_0, x]$ (bzw.$f|[x, x_0]$) stetig, also $F(x)$ immerhin erklärt, weil $f|[x, x_0]$ integrierbar ist (7.15). Sei o.B.d.A. $x > x_0$. Für jede Folge (h_n) mit $(h_n) \to 0, h_n \neq 0$ und $x + h_n \in I$ ist nun:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_n}(F(x+h_n) - F(x)) &= \frac{1}{h_n}\left(\int\limits_{x_0}^{x+h_n} - \int\limits_{x_0}^{x}\right) f(t)dt \\ &= \frac{1}{h_n}\int\limits_{x}^{x+h_n} f(t)dt \ . \end{aligned}$$

Nach (7.21) existiert nun ein $\xi_n \in [x, x+h_n]$, so dass gilt:

$$\int\limits_{x}^{x+h_n} f(t)dt = f(\xi_n)((x+h_n)-x) = h_n f(\xi_n) \ .$$

Da $(h_n) \to 0$ konvergiert, konvergiert $(\xi_n) \to x$, weil $x \leq \xi_n \leq x + h_n$ ist, also wegen der Stetigkeit von f in x:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{h_n}(F(x+h_n) - F(x)) = \lim_{n\to\infty} f(\xi_n) = f(x) \ .$$

Es ist also F differenzierbar in x und $F'(x) = f(x)$.

$\square$

9.7 Kommentar

Ähnlich wie bei den Umkehrfunktionen (von streng monoton wachsenden, stetigen Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$, vgl. (6.10)), erhält man im Allgemeinen auch bei Stammfunktionen stetiger Funktionen „neue Funktionen“ (d.h. solche, die man vielleicht bisher nicht kannte).
Wir defnieren beispielsweise:

9.8 Definition: ln, arctan

(a) $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$\ln(x) := \int\limits_{1}^{x} \frac{1}{t} \ dt$$

heißt (natürlicher) Logarithmus. $\boxed{\text{Zeichnung fehlt}}$

(b) $\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\arctan(x) := \int\limits_{0}^{x} \frac{1}{1+t^2} \ dt$$

heißt Arcustangens. $\boxed{\text{Zeichnung fehlt}}$

9.9 Kommentar

(a) Umgekehrt muss aber eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, die eine Stammfunktion besitzt, keineswegs stetig sein (Gegenbeispiel später). Man setze daher für $I = [a,b]$:

$$\mathfrak{C}^1[a,b] := \{F \in \mathfrak{D}[a,b] : F' \text{ ist stetig}\} ,$$

den Raum der stetigen differenzierbaren Funktionen auf $[a,b]$.

(b) Es sind also z.B. $\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ und $\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und (nach Definition) ist:

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} , \qquad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} .$$

9.10 Korollar: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f.
Dann gilt:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (=: F(x)|_a^b)$$

Beweis:
Nach (9.6) ist $F_0 : [a,b] \to \mathbb{R}, F_0(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$, eine Stammfunktion von f.
Nach (9.3) gibt es daher ein $c \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in I$ gilt: $F(x) = F_0(x)+c$.
Es folgt:

$$F(b) - F(a) = (F_0(b) + c) - (F_0(a) + c) = \int\limits_a^b f(t)\ dt .$$

$\square$

9.11 Kommentar

Der Hauptsatz gilt sogar für beliebige Funktionen $f \in \mathfrak{R}[a,b]$, die eine Stammfunktion besitzen, $F' = f$.
(Übung, Blatt 10, Aufgabe 4, vgl. Anfang von §9):

$(Z^r)_{r\in\mathbb{N}}$ Folge von Zerlegungen von $[a,b]$ mit Feinheit $(\delta_r) \to 0$.
MWS $\Rightarrow \forall r \in \mathbb{N}, \forall i = 1, ..., n_r \; \exists \; \xi_i^r \in [x_{i-1}^r, x_i^r]$:
$F(x_i^r) - F(x_{i-1}^r) = F'(\xi_i^r)(x_i^r - x_{i-1}^r)$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow F(b) - F(a) \quad &= \quad \sum_{i=1}^{n_r} F(x_i^r) - F(x_{i-1}^r) \\
&= \quad \sum_{i=1}^{n_r} F'(\xi_i^r)(x_i^r - x_{i-1}^r) \\
&= \quad S(f, Z^r, \xi^r) \\
\text{vgl. (7.18b)} \quad &\overset{r\to\infty}{\longrightarrow} \quad \int\limits_a^b f(x)dx \; .
\end{aligned}
$$

10 Ausbau der Differenzial- und Integralrechnung

10.1 Satz: Kettenregel, Substitutionsregel

(a) Sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in I$, sei $g : J \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $y_0 \in J$, sei $f(I) \subseteq J$ und $f(x_0) = y_0$. Es ist dann $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0 und es gilt:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0) \ .$$

(b) Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ stetig differenzierbar mit $\varphi(\alpha) = a$ und $\varphi(\beta) = b$. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(t) \cdot \dot{\varphi}(t)dt \ .$$

10.2 Kommentar

(a) Ist $f : I \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in I$, $g : J \to \mathbb{R}$ stetig in $y_0 \in J$, $f(I) \subseteq J$ und $f(x_0) = y_0$, so ist $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ stetig in x_0, denn

$$\lim_{x \to x_0} g \circ f(x) = \lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(y_0) = g \circ f(x_0)$$

weil $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = y_0$ und $\lim_{y \to y_0} g(y) = g(y_0)$ ist. Deshalb ist der Integrand auf der rechten Seite in (b) stetig und damit integrierbar.

(b) Die Kettenregel kann man sich durch die Leibnizsche Notation $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ einprägen, wenn man die Funktionsbezeichnung f durch die Variable im Zielbereich ersetzt, $f(x) = y(x)$. Mit $g(y) = z(y)$, also $g'(y) = \frac{dz}{dy}$ lautet sie nämlich dann:

$$„\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}“ \ .$$

(c) Die Substitutionsregel merkt man sich so: Ist $x = \varphi(t)$, also mit Leibniz $\dot{\varphi}(t) = \frac{dx}{dt}$, so ist mit $y = f(x)$:

$$„\int y dx = \int y \frac{dx}{dt} dt“ \ .$$

(d) Meist ist $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ ein Diffeomorphismus, d.h. φ ist bijektiv und φ, φ^{-1} sind stetig differenzierbar. Man spricht dann bei $x = \varphi(t)$ von einem Parameterwechsel ($t = \varphi^{-1}(x)$).

$\boxed{\text{Zeichnung fehlt}}$

Beweis:
(a) Da f differenzierbar in x_0 und g differenzierbar in y_0 sind, existieren Funktionen $\varphi : \widetilde{I} \to \mathbb{R}, \psi : \widetilde{J} \to \mathbb{R}$ (mit $\widetilde{I} = \{x - x_0 \in \mathbb{R} : x \in I \ : I - x_0\}$ und $\widetilde{J} = J - y_0$), so dass gilt:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\varphi(h)}{h} = 0 \ , \qquad \lim_{k \to 0} \frac{\psi(k)}{k} = 0 \qquad (*)$$

und

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= f(x_0) + hf'(x_0) + \varphi(h) \ , \\ g(y_0 + k) &= g(y_0) + kg'(y_0) + \psi(k) \end{aligned}$$

(siehe (8.5)). Es folgt:

$$\begin{aligned} g \circ f(x_0 + h) &= g(\underbrace{f(x_0)}_{=y_0} + \underbrace{hf'(x_0) + \varphi(h)}_{=:k(h)}) \\ &= g(y_0) + g'(y_0)k(h) + \psi(k(h)) \\ &= g \circ f(x_0) + hg'(y_0)f'(x_0) + \chi(h) \end{aligned}$$

mit $\chi(h) := g'(y_0)\varphi(h) + \psi(k(h))$. Es ist nun:

$$\frac{1}{h} g'(y_0)\varphi(h) \overset{wegen (*)}{\longrightarrow} g'(y_0) \cdot 0 = 0$$

und

$$\frac{\psi(k(h))}{h} = \begin{cases} \frac{\psi(k(h))}{k(h)} \cdot \frac{k(h)}{h} & \text{, wenn } k(h) \neq 0 \text{ ist} \\ 0 & \text{, wenn } k(h) = 0 \end{cases} .$$

Aber

$$k(h) = f'(x_0)h + \varphi(h) \overset{h \to 0}{\longrightarrow} f'(x_0) \cdot 0 + 0 = 0 \ .$$

Wegen $(*)$ ist deshalb:

$$\frac{\psi(k(h))}{k(h)} \overset{h \to 0}{\longrightarrow} 0 \ .$$

Andererseits:

$$\frac{k(h)}{h} = f'(x_0) + \frac{\varphi(h)}{h} \overset{h\to 0}{\longrightarrow} f'(x_0) + 0 = f'(x_0)\ .$$

Wegen (∗) insgesamt:

$$\frac{\psi(k(h))}{h} \overset{h\to 0}{\longrightarrow} 0 \cdot f'(x_0) = 0$$

und damit $\frac{\chi(h)}{h} \to 0$ für $h \to 0$. Nach (8.5) ist daher $g \circ f$ differenzierbar in x_0 und $(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0)$.

(b) Sei $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ Stammfunktion von $f : [a,b] \to \mathbb{R} \overset{(a)}{\Rightarrow} F \circ \varphi$ ist differenzierbar und $\frac{d}{dt}(F\circ\varphi)(t) = F'(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t) = f \circ \varphi(t)\dot{\varphi}(t)$. Daraus folgt dann:

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta f\circ\varphi(t)\dot{\varphi}(t)dt &= \int_\alpha^\beta \frac{d}{dt}(F\circ\varphi)(t)dt \overset{\text{HS}}{=} F\circ\varphi(t)\big|_{t=\alpha}^{t=\beta} \\ &= F(x)\big|_{x=a}^{x=b} \overset{\text{HS}}{=} \int_a^b F'(x)dx = \int_a^b f(x)dx\ .\end{aligned}$$

□

10.3 Beispiele

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ ist differenzierbar und

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ .$$

(b) $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x^2)$ auch mit

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x}\ .$$

(Übrigens $\frac{d}{dx}(2\ln(x)) = \frac{2}{x}$ und auch $2\ln(x)\big|_{x=1} = 0 = \ln(x^2)\big|_{x=1}$. Deshalb muss $\ln(x^2) = 2\ln(x)$ für alle $x > 0$ sein (vgl. (9.3)).)

(c)

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x+1)^2} = \frac{2}{3}\ ,$$

denn: Setze $t = x+1$, also $\varphi(t) = t-1$ mit $\varphi : [1,3] \to [0,2] \Rightarrow \dot\varphi(t) = 1$, also:

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x+1)^2} = \int_1^3 \frac{\dot\varphi(t)dt}{t^2} = -\frac{1}{t}\Big|_1^3 = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3} \; .$$

(d)

$$\int_1^9 \frac{dx}{x+\sqrt{x}} = 2\ln(2) \; ,$$

denn: Setze $t = \sqrt{x} \Rightarrow x = \varphi(t) = t^2, \varphi : [1,9] \to [1,3], \dot\varphi(t) = 2t$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \int_1^9 \frac{dx}{x+\sqrt{x}} &= \int_1^3 \frac{\dot\varphi(t)dt}{t^2+t} = 2\int_1^3 \frac{dt}{t+1} = 2\ln(t+1)|_1^3 \\ &= 2(\ln(2^2) - \ln(2)) = 2(2\cdot\ln(2) - \ln(2)) = 2\ln(2) \; .\end{aligned}$$

10.4 Satz: Produktregel und partielle Integration

(a) Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in I$ differenzierbar. Dann ist $f \cdot g : I \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und es gilt:

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \; .$$

(b) Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f(x)g'(x)dx \; .$$

Beweis:
(a) Seien φ, ψ mit $\frac{\varphi(h)}{h} \to 0$ und $\frac{\psi(h)}{h} \to 0$ für $h \to 0$ und

$$\begin{aligned} f(x_0+h) &= f(x_0) + f'(x_0)h + \varphi(h) \; , \\ g(x_0+h) &= g(x_0) + g'(x_0)h + \psi(h) \; . \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (fg)(x_0+h) = (fg)(x_0) + (f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0))h + \chi(h)$$

mit

$$\begin{aligned}\chi(h) \;:=\; & f(x_0)\psi(h) + g(x_0)\varphi(h) + f'(x_0)g'(x_0)h^2 \\ & + f'(x_0)h\psi(h) + g'(x_0)h\varphi(h) + \varphi(h)\psi(h)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \frac{\chi(h)}{h} &= f(x_0)\underbrace{\frac{\psi(h)}{h}}_{\to 0}+g(x_0)\underbrace{\frac{\varphi(h)}{h}}_{\to 0}+\underbrace{f'(x_0)g'(x_0)h}_{\to 0} \\ &\quad +\underbrace{f'(x_0)\psi(h)}_{\to 0}+\underbrace{g'(x_0)\varphi(h)}_{\to 0}+\underbrace{\frac{\varphi(h)}{h}\psi(h)}_{\to 0}\ ,\end{aligned}$$

also: $\frac{\chi(h)}{h} \to 0$ für $h \to 0 \Rightarrow fg$ ist differenzierbar in x_0 und

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)\ .$$

(b)

$$\begin{aligned} f(x)g(x)|_a^b &\overset{H.S.}{=} \int_a^b (fg)'(x)dx \\ &\overset{(a)}{=} \int_a^b (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))dx \\ &= \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx\ .\end{aligned}$$

□

10.5 Beispiele

(a) $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x\ln(x)$

$$\Rightarrow f'(x) = \ln(x) + x\frac{1}{x} = \ln(x) + 1\ .$$

(b) $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \arctan(\ln(x)) \cdot \ln(x)$

$$\begin{aligned}\Rightarrow f'(x) &= \frac{1}{1+\ln^2(x)}\frac{1}{x}\ln(x) + \arctan(\ln(x)) \cdot \frac{1}{x} \\ &= \frac{\ln(x) + (1+\ln^2(x))\arctan(\ln(x))}{x(1+\ln^2(x))}\ .\end{aligned}$$

(c)

$$\int_1^2 x\ln(x)dx = 2\ln(2) - \frac{3}{4}\ ,$$

denn mit: $\begin{array}{ll} f(x) = \frac{1}{2}x^2\,, & g(x) = \ln(x) \\ f'(x) = x\,, & g'(x) = \frac{1}{x} \end{array}$, ist

$$\begin{aligned} \int_1^2 x\ln(x)dx &= \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x)\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2}x^2\frac{1}{x}dx \\ &= 2\ln(2) - \frac{1}{4}\,x^2\Big|_1^2 = 2\ln(2) - \frac{1}{4}(4-1) \\ &= 2\ln(2) - \frac{3}{4}\ . \end{aligned}$$

(d)

$$F(x) := \int_0^x \arctan(t)dt = x\cdot\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\ ,$$

denn mit: $\begin{array}{ll} f(t) = t\,, & g(t) = \arctan(t) \\ \dot f(t) = 1\,, & \dot g(t) = \frac{1}{1+t^2} \end{array}$, ist

$$F(x) = t\arctan(t)|_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2}\ dt\ .$$

Setze $u(t) = 1+t^2$, also $\dot u(t) = 2t$. Dann ist:

$$\begin{aligned} F(x) &= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{\dot u(t)dt}{u(t)} \\ &= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\int_{u(0)}^{u(x)} \frac{1}{u}\ du \\ &= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ \ln(u)|_1^{1+x^2} \\ &= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\ . \end{aligned}$$

10.6 Satz: Quotientenregel

Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in I$ differenzierbar und $g(x) \neq 0$ für alle $x \in I$. Es ist dann auch $\frac{f}{g} : I \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und es gilt:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}\ .$$

Beweis:
Für $h : \mathbb{R}\backslash 0 \to \mathbb{R}, h(y) = \frac{1}{y}$ gilt $h'(y) = -\frac{1}{y^2}$ (siehe (8.9), gilt auch für $y < 0$).
Wegen $\frac{1}{g} = h \circ g$ und (10.1) ist deshalb $\frac{1}{g}$ differenzierbar in x_0 mit:

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = h'(g(x_0)) \cdot g'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2} \ .$$

Wegen (10.4) ist daher auch $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ in x_0 differenzierbar und

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= f'(x_0) \cdot \frac{1}{g(x_0)} + f(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) \\ &= \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} - \frac{f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2} \\ &= \frac{f'g - fg'}{g^2}(x_0) \ .\end{aligned}$$

□

10.7 Beispiel

Für $x > 0$ und $f(x) = \frac{\ln(x)}{\arctan(x)}$ ist also

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{\frac{1}{x}\arctan(x) - \ln(x)\frac{1}{1+x^2}}{\arctan^2(x)} \\ &= \frac{(1+x^2)\arctan(x) - x\ln(x)}{x(1+x^2)\arctan^2(x)} \ .\end{aligned}$$

10.8 Satz: Ableitung der Umkehrfunktion

Seien I und $J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle, $f : I \to J$ streng monoton wachsend, bijektiv und stetig. Ist nun f in $x_0 \in I$ differenzierbar und $f'(x_0) \neq 0$, so ist auch die Umkehrfunktion $g = f^{-1} : J \to I$ in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar und es gilt:

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \ .$$

10.9 Kommentar

Mit der Leibniz-Notation $y = f(x), x = g(y)$ wird dies zu:

$$„\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}“ \ .$$

Beweis von (10.8). Zu zeigen:

$$\lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Sei als (y_n) beliebige Folge in J mit $(y_n) \to y_0, y_n \neq y_0, \ \forall n \in \mathbb{N}$. Setze dann $x_n := g(y_n)$ (also $y_n = f(x_n)$), also (x_n) Folge in $I, \ (x_n) = (g(y_n)) \to g(y_0) = x_0$, denn g ist stetig in y_0 (siehe (6.10)) und $x_n \neq x_0$, denn g ist bijektiv. Da f differenzierbar in x_0 ist, folgt:

$$\frac{g(y_n) - g(y_0)}{y_n - y_0} = \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n - x_0}} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{f'(x_0)} .$$

□

10.10 Beispiel

(a) Sei $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}, \ g(y) = \sqrt[n]{y} \ (n \in \mathbb{N})$ und $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}, \ f(x) = x^n$. Es ist dann f differenzierbar mit $f'(x) = nx^{n-1} \neq 0, \ \forall x \in (0,\infty)$, also ist g differenzierbar in jedem Punkt $y \in (0,\infty)$ und

$$\begin{aligned} g'(y) &= \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{n(g(y))^{n-1}} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{y})^{n-1}} \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{y^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n} y^{-\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1} \end{aligned}$$

also mit $r := \frac{1}{n}$ gilt:

$$\frac{d}{dy}(y^r) = ry^{r-1} , \qquad \forall y > 0 .$$

(b) Sei $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ (mit $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$) und $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^r = \sqrt[q]{x^p} .$$

Dann ist f wegen (10.1) differenzierbar und

$$f'(x) = \frac{1}{q}(x^p)^{\frac{1}{q}-1} \cdot px^{p-1} \stackrel{(8.14a))}{=} \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-p+p-1} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1} = rx^{r-1} .$$

Also:

$$\frac{d}{dx}(x^r) = rx^{r-1} , \ \ \forall x > 0 , \ \ \forall r \in \mathbb{Q} .$$

11 Logarithmus und Exponentialfunktion

11.1 Erinnere

$\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$\ln(x) := \int_1^x \frac{dt}{t} \ .$$

$\boxed{\text{Zeichnung fehlt}}$

Also: $\ln(1) = 0$ und $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$. Daraus folgt nach (8.19): ln ist streng monoton wachsend. Daraus:
$\boxed{\text{Zeichnung fehlt}}$

Frage:
(i) $\lim_{x\to\infty} \ln(x) = ?$
(ii) $\lim_{x\to 0} \ln(x) = ?$

11.2 Definition: Limes

Sei $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $C \in \mathbb{R}$.

(a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = C$ (oder $f(x) \to C$ für $x \to \infty$):

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists\, M > 0 \ \forall x > M : |f(x) - C| < \varepsilon$$

(b) $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ (oder $f(x) \to \infty$ für $x \to a$):

$$\Leftrightarrow \forall C > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x \in (a, \infty) : |x - a| < \delta : f(x) > C$$

(c) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ (oder $f(x) \to \infty$ für $x \to \infty$):

$$\Leftrightarrow \forall C > 0 \ \ \exists M > 0 \ \forall x > M : f(x) > C$$

(Ähnlich definiert man $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty$, usw.)

11.3 Lemma

Ist $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ monoton wachsend, so ist entweder $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ oder es gibt ein $c \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{x\to\infty} f(x) = c$.

Beweis:
Sei (x_n) monoton wachsend und der Grenzwert sei unendlich $(x_n) \to \infty$ (z.B. $x_n = n$) $\Rightarrow (f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ist auch monoton wachsend.

Fall 1: $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ist nicht nach oben beschränkt. Behauptung:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty \ .$$

Denn: Sei $C > 0 \Rightarrow \exists\ n \in \mathbb{N} : f(x_n) > C$. Setze $M := x_n \Rightarrow \forall x > M :$
$f(x) \geq f(M) = f(x_n) > C$, also $f(x) \to \infty$, für $x \to \infty$.

Fall 2: $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach oben beschränkt. $\overset{(5.9)}{\Rightarrow} \exists\ c \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} f(x_n) = c$.
Behauptung:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = c \ .$$

(i) Sei $x \in (a, \infty)$ beliebig $\Rightarrow \exists\ n \in \mathbb{N} :\ x_n \geq x \Rightarrow f(x) \leq f(x_n) \leq c$,
also $f(x) \leq c$, $\forall x \in (a, \infty)$.

(ii) Sei $\varepsilon > 0$. $\Rightarrow \exists\ n \in \mathbb{N} :\ c - \varepsilon < f(x_n) \leq c$. Setze $M := x_n \Rightarrow \forall x > M$ ist $f(x) \geq f(M) > c - \varepsilon$. Also: $f(x) \to c$ für $x \to \infty$.

$\square$

11.4 Satz

$\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend und bijektiv.

Beweis:
$\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$ impliziert strenge Monotonie und damit auch Injektivität.
Zu zeigen:

$$\lim_{x\to\infty} \ln(x) = +\infty \text{ und } \lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$$

(*). Daraus Surjektivität: Sei $y \in \mathbb{R}$ beliebig $\Rightarrow \exists\ 0 < x_1 < x_2, f(x_1) < y < f(x_2)$. Da $\ln|[x_1, x_2]$ stetig ist $\Rightarrow$ (6.8) $\exists\ \xi \in [x_1, x_2] : f(\xi) = y$.

Also zu (*): Wähle Zerlegung $(1, 2, \ldots, n)$ von $[1, n]$ und $\varphi : [1, n] \to \mathbb{R}$, $\varphi(t) = \frac{1}{k+1}$ für $k \leq t < k+1$ für $k = 1, 2, \ldots, n-1$ $(\varphi(n) := \frac{1}{n}) \Rightarrow \varphi \in \mathfrak{T}[1, n]$ und $\varphi(t) \leq \frac{1}{t}, \forall t \in [1, n]$.

$$\Rightarrow \ln(n) = \int_1^n \frac{dt}{t} \geq \int_1^n \varphi(t)dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \ ,$$

weil $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$ (harmonische Reihe (4.12)). Daraus folgt nach (11.3):

$$\ln(x) \to \infty \text{ für } x \to \infty.$$

Weiter gilt:

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$$

(Beachte: $\ln(x^{-1}) = (-1)\ln(x)$; später werden wir sehen: $\ln(x^c) = c \cdot \ln(x)$ für alle $c \in \mathbb{R}$), denn:

$$\frac{d}{dx}(\ln\left(\frac{1}{x}\right)) = \frac{1}{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x} = \frac{d}{dx}(-\ln(x))$$

und $\ln\left(\frac{1}{x}\right)|_{x=1} = 0 = -\ln(x)|_{x=1}$ (wegen (9.3)). Es folgt

$$\lim_{x\to 0} \ln(x) = \lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\lim_{x\to\infty} \ln(x) = -\infty \ .$$

$\square$

11.5 Satz: Funktionalgleichung

Es gilt für alle $x_1, x_2 \in (0, \infty)$:

$$\ln(x_1 \cdot x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2)$$

Beweis:
Für festes x_2 betrachte $f, g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \ln(x \cdot x_2), \qquad g(x) = \ln(x) + \ln(x_2)$$

Dann ist $f(1) = \ln(x_2) = g(1)$ und

$$f'(x) = \frac{1}{xx_2}x_2 = \frac{1}{x} = g'(x)$$

für alle $x > 0 \overset{(9.3)}{\Rightarrow} f(x) = g(x)$, insbesondere für $x = x_1$.

$\square$

11.6 Definition: Exponentialfunktion

Die Umkehrfunktion $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ von $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ heißt Exponentialfunktion,

$$\exp := \ln^{-1} \ .$$

11.7 Satz

Es ist $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ streng monoton wachsend, bijektiv und differenzierbar mit

$$\exp'(x) = \exp(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beweis:
Da $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend, bijektiv und stetig ist, ist auch $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ streng monoton wachsend, bijektiv und stetig (siehe (6.10)). Da $\ln'(y) = \frac{1}{y} \neq 0, \forall y > 0$, ist exp auch differenzierbar und es gilt (siehe (10.8)):

$$\exp'(x) = \frac{1}{\ln'(\exp(x))} = \frac{1}{\frac{1}{\exp(x)}} = \exp(x) \ .$$

$\square$

$\boxed{\text{Zeichnung fehlt}}$

11.8 Satz: Funktionalgleichung

Für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\exp(x_1 + x_2) = \exp(x_1) \cdot \exp(x_2)$$

Beweis:
Für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ setzt man $y_1 = \exp(x_1)$ und $y_2 = \exp(x_2)$, also $x_1 = \ln(y_1), x_2 = \ln(y_2)$. Dann gilt wegen (11.5):

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \ln(y_1) + \ln(y_2) \overset{(11.5)}{=} \ln(y_1 y_2) \\ \Rightarrow \exp(x_1 + x_2) &= \exp(\ln(y_1 y_2)) = y_1 y_2 = \exp(x_1)\exp(x_2) \ . \end{aligned}$$

□

11.9 Korollar

Setzt man $e := \exp(1)$, so gilt für alle $r \in \mathbb{Q}$:

$$\exp(r) := e^r \ .$$

Beweis:
Sei $r = \frac{p}{q}$ $(p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N})$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \left[\exp\left(\frac{p}{q}\right)\right]^q \overset{(11.8)}{=} \exp\underbrace{\left(\frac{p}{q} + \cdots + \frac{p}{q}\right)}_{q\text{-mal}} = \exp(p) \overset{(11.8)}{=} \exp(1)^p \\ \Rightarrow \quad & \exp(r) = \exp\left(\frac{p}{q}\right) = \sqrt[q]{\exp(1)^p} = \sqrt[q]{e^p} = e^r \ . \end{aligned}$$

□

11.10 Kommentar

(a) Man schreibt deshalb auch für irrationale $x \in \mathbb{R}$ (auch wenn das keine Bedeutung durch Wurzelziehen und Potenzieren mehr hat):

$$e^x := \exp(x) \ .$$

(b) Man beachte, dass wir hier noch nicht bewiesen haben, dass

$$e := \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

ist (vgl.(5.11)).

11.11 Motivation

Damit ist der Ausdruck a^x für $x \in \mathbb{R}$ auch für irrationale $x \in \mathbb{R}$ wenigstens bereits für $a = e$ definiert. Um dies nun für alle $a > 0$ zu tun, nehmen wir das wünschenswerte Gesetz:

$$\ln(a^x) = x \cdot \ln(a)$$

welches für $a > 0$ beliebig und für $x \in \mathbb{Q}$ gilt (Übung) zum Anlass, denn aus diesem würde nun folgen:

$$a^x = \exp(x \cdot \ln(a)) = e^{(\ln(a) \cdot x)}$$

11.12 Definition

Sei $a > 0$ beliebig. Man definiert dann die Exponentialfunktion zur Basis a durch, $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\exp_a := \exp(\ln(a) \cdot x) \ .$$

11.13 Satz

(a)

- Für $a > 1$ ist $\exp_a : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ streng monoton wachsend, bijektiv und differenzierbar.
- Für $a = 1$ ist $\exp_a(x) = 1$, für alle $x \in \mathbb{R}$.
- Für $a < 1$ ist $\exp_a : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ streng monoton fallend, bijektiv und differenzierbar.

In allen Fällen gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\exp_a(x) = \ln(a) \cdot \exp_a(x)$$

(b) Für alle $a > 0$ ist $exp_a(1) = a$ und für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ist:

$$\exp_a(x_1 + x_2) = \exp_a(x_1) \cdot \exp_a(x_2)$$

Beweis:
(a) Für alle $a > 0$ ist

$$\exp_a'(x) = \exp'(\ln(x) \cdot a) \cdot \ln(a) = \exp(\ln(a) \cdot x) \cdot \ln(a) = \ln(a) \cdot \exp_a(x) \ ,$$

also $\exp_a' > 0$ für $a > 1$, $\exp_a' = 0$ für $a = 1$, $\exp_a' < 0$ für $0 < a < 1$, also die Aussagen über die Monotonie und die Konstanz. Wegen:

$$\lim_{x\to\infty}(\ln(a) \cdot x) = +\infty \ , \ \lim_{x\to-\infty}(\ln(a) \cdot x) = -\infty$$

für $a > 1$ und

$$\lim_{x\to\infty}(\ln(a) \cdot x) = -\infty \ , \ \lim_{x\to-\infty}(\ln(a) \cdot x) = \infty$$

für $0 < a < 1$
folgen auch die Aussagen über die Bijektivität.

(b) Es ist $\exp_a(1) = \exp(\ln(a) \cdot 1) = a$ und für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\exp_a(x_1 + x_2) &= \exp(\ln(a) \cdot (x_1 + x_2)) = \exp(\ln(a)x_1 + \ln(a)x_2) \\ &\overset{(11.1)}{=} \exp(\ln(a) \cdot x_1) \cdot \exp(\ln(a) \cdot x_2) = \exp_a(x_1) \cdot \exp_a(x_2)\end{aligned}$$

$\square$

11.14 Kommentar

(a) Wie in (11.1) sieht man aus Teil b), dass für alle $a > 0$ und $r \in \mathbb{Q}$ gilt:

$$\exp_a(r) = a^r \ .$$

Wir schreiben deshalb nun auch für irrationale $x \in \mathbb{R}$

$$a^x := \exp_a(x) \ .$$

(b) Es wird dann für alle $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$:

$$\ln(a^x) = x \cdot \ln(a)$$

$$\text{denn: } \ln(a^x) = \ln(e^{\ln(a) \cdot x}) = \ln(a) \cdot x \ .$$

(c) Wir haben nun auch für alle $a > 0$ und $c \in \mathbb{R}$ (vgl.(11.14.b)):

$$\frac{d}{dx} x^c = c \cdot x^{c-1}$$

$$\begin{aligned} \text{denn: } \frac{d}{dx}(x^c) &= \frac{d}{dx}(e^{c \cdot \ln(x)}) = e^{c \cdot \ln(x)} \cdot \frac{c}{x} \\ &= c \cdot x^c \cdot \frac{1}{x} \overset{(11.13\text{ b})}{=} c \cdot x^{c-1} \end{aligned}$$

11.15 Kommentar

(a) Da $\exp_a : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ bijektiv ist, für alle für alle $a > 0$ mit $a \neq 1$, können wir nun auch den Logarithmus zur Basis a durch $\log_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ als Umkehrfunktion definieren, $\log_a := \exp_a^{-1}$. Nach Definition ist dann $\log_a(y) = x \Leftrightarrow y = a^x$ (für $a > 0,\ a \neq 1,\ y > 0$).

(b) Insbesondere ist also $\exp = \exp_e$ und $\ln = \log_e$ und wegen $\exp_a'(x) = \ln(a) \cdot \exp_a(x) \neq 0$, für alle $x \in \mathbb{R}$, ist auch $\log_a$ differenzierbar mit

$$\log_a'(y) = \frac{1}{\exp_a'(\log_a(y))} = \frac{1}{\ln(a) \cdot \exp_a(\log_a(y))} = \frac{1}{\ln(a) \cdot y} \ .$$

(c) Man beachte, dass $(0, \infty) \to \mathbb{R},\ y \mapsto \frac{\ln(y)}{\ln(a)}$ wie $\log_a$ die Ableitung $y \mapsto \frac{1}{\ln(a) \cdot y}$ hat und außerdem bei $y = 1$ mit $\log_a$ übereinstimmt. Nach (9.3) ist daher für alle $y > 0$:

$$\log_a(y) = \frac{\ln(y)}{\ln(a)} \ .$$

12 Trigonometrische Funktionen

12.1 Motivation

In einem rechtwinkligen Dreieck mit einem Winkel φ setzt man bekanntlich:

$$\sin(\varphi) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$
$$\cos(\varphi) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$
$$\tan(\varphi) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

Nach den Strahlensätzen hängen dabei diese Verhältnisse nur von den Schenkeln ab, zwischen denen der Winkel φ liegt. Man kann daher o.E. die Länge der Hypotenuse als 1 annehmen.
Problem:

a) $\sin, \cos, \tan$ sollen als Funktionen des Winkels betrachtet werden (nicht nur für **ein** rechtwinkliges Dreieck). Wie „misst“ man einen Winkel?

b) Idee: Nehme die Länge des Bogens am Einheitskreis

$$S = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}$$

zwischen $(1, 0)$ und p (dem Durchschnitt der beiden Schenkel mit dem Einheitskreis).

c) Neues Problem: Wie misst (definiert) man die Länge einer (krummlinigen) Kurve $C \subseteq \mathbb{R}^2$? Was ist überhaupt eine ebene Kurve?

12.2 Definition

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine stetig differenzierbare, ebene und parametrisierte Kurve ist eine Abbildiung:

$$\alpha : I \to \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}\ , \quad \alpha(t) = (\alpha_1(t),\ \alpha_2(t))\ ,$$

so dass $\alpha_1, \alpha_2 : I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar sind. $C = \alpha(I) \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt dann die Spur von α. Man sagt: C wird durch α parametrisiert.

12.3 Beispiele

(a) Seien $p, v \in \mathbb{R}^2,\ v \neq 0$. Durch $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$$\alpha(t) = p + t \cdot v$$

wird eine Gerade parametrisiert.

(b)

$$x_1^2 + x_2^2 = 1 \ , \ x_2 \geq 0 \Rightarrow x_2 = \sqrt{1 - x_1^2}$$

$$\text{Durch: } \alpha : [-1,1] \to \mathbb{R}^2 \ , \quad \alpha(t) = (t, \sqrt{1-t^2}) \ ,$$

wird die obere Hälfte des Einheitskreises S parametrisiert.

(c) Betrachte die Einheitshyperbel:

$$H = \big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 - x_2^2 = 1\big\} \, .$$

Mit $\cosh, \sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\cosh(x) := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \ , \quad \sinh := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \ ,$$

wird der rechte Ast der Einheitshyperbel wie folgt parametrisiert:

$$\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \ , \quad \alpha(t) = (\cosh(t), \sinh(t)) \ .$$

Denn:

$$\begin{aligned} \alpha_1^2(t) - \alpha_2^2(t) = & \ \tfrac{1}{4} \ \ \{\big((e^x)^2 + 2 \cdot e^x \cdot e^{-x} + (e^{-x})^2\big) \\ & - \ \ \big((e^x)^2 - 2 \cdot e^x \cdot e^{-x} + (e^{-x})^2\big)\} = 1 \ . \end{aligned}$$

12.4 Bemerkung

Eine Parametrisierung der rechten Hälfte des Einheitskreises wird durch folgende Abbildung gegeben: $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$,

$$\alpha(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \right)$$

gegeben.

Beweis:
Betrachte für jedes feste $t \in \mathbb{R}$ die Parametrisierung $\lambda_t : [0, \infty] \to \mathbb{R}^2$ des Strahls $L_t \subseteq \mathbb{R}^2$ aus $(0,0)$ mit Steigung t heraus,

$$\lambda_t(s) = (s, t \cdot s) \ .$$

Der Schnittpunkt $p = \lambda_t(s_0)$ von L_t mit S wird gegeben durch $\lambda_t(s_0)$, wo $s_0 \geq 0$ erfüllt:

$$s_0^2 + (t \cdot s_0)^2 = 1 \ ,$$

also
$$s_0 = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \ .$$
Setzt man $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) := \lambda_t(s_0)$, so erhält man nun eine Parametrisierung von $C = \{(x_1, x_2) \in S : x_1 > 0\}$ und es ist offenbar:
$$\alpha(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \right) .$$
$\square$

12.5 Kommentar

Einen elementaren Längenbegriff hat man für Polygone, d.i. stückweise gerade Kurven. Dazu benutzt man folgenden Begriff:

12.6 Definition

Es heißt $||\cdot|| : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$
$$||x|| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$
die **Norm von x**.
Für zwei Elemente $x, y \in \mathbb{R}^2$ heißt
$$d(x,y) := ||y - x|| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$$
der **Abstand zwischen x und y**.

12.7 Kommentar

(a) Besteht ein Polygon P aus den Ecken $p_0, ..., p_n \in \mathbb{R}^2$, wir schreiben $P = \overline{p_0...p_n}$, so definiert man die Länge von P durch
$$L\,[P] = \sum_{i=1}^{n} d(p_i, p_{i-1})$$

(b) Ist nun $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ eine stetige differenzierbare, ebene, parametrisierbare (s.d.e.p.) Kurve, $I = [a,b]$, und $Z = (t_0, ..., t_n)$ eine Zerlegung von $[a,b]$, so nimmt man die Länge des Polygons $P_Z = \overline{\alpha(t_0)...\alpha(t_n)}$ als Approximation für die Länge von $C = \alpha(I)$.

(c) Man kann nun zeigen (sehen wir in M.f.P. Teil III), dass die Länge von Polygonzügen P_Z gegen eine reelle Zahl $L[a] \in \mathbb{R}$ konvergiert, wenn die Feinheit von $\delta(Z)$ gegen Null geht. Und zwar gegen:

$$L[\alpha] = \int_a^b ||\dot{\alpha}(t)||dt \ .$$

Wie setzen deshalb :

12.8 Definition

Sei $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ eine s.d.e.p. Kurve. Die Länge von α wird definiert durch:

$$L[\alpha] = \int_a^b ||\dot{\alpha}(t)||dt \ .$$

12.9 Kommentar

Man kann zeigen (auch später), dass $L[\alpha]$ nur von der Spur $C = \alpha(I) \subseteq \mathbb{R}^2$ der Kurve abhängt. Wir schreiben deshalb auch manchmal $L[C]$ statt $L[\alpha]$.

12.10 Satz

Sei $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ die Parametrisierung (der rechten Hälfte) des Einheitskreises aus (12.4). Die Länge des Einheitskreisbogens C zwischen $\alpha(0)$ und $\alpha(t)$ ist dann $\arctan(t)$.

Beweis
Es ist $\alpha(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)$, also ist:

$$\begin{aligned}
\dot{\alpha_1}(t) &= \frac{d}{dt}\left(1+t^2\right)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}(1+t^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2t = \frac{-t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} \ , \\
\dot{\alpha_2}(t) &= \frac{1 \cdot (1+t^2)^{\frac{1}{2}} - t \cdot \frac{1}{2}(1+t^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2t}{1+t^2} = \frac{(1+t^2) - t^2}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \ ||\dot{\alpha}(t)||^2 = \dot{\alpha}_1^2(t) + \dot{\alpha}_2^2(t) = \frac{t^2+1}{(1+t^2)^3} = \frac{1}{(1+t^2)^2} \\
&\Rightarrow \ ||\dot{\alpha}(t)|| = \frac{1}{1+t^2} \\
&\Rightarrow \ L[C] = \int_0^t ||\dot{\alpha}(s)||ds = \int_0^t \frac{ds}{1+s^2} = \arctan(t) \ .
\end{aligned}$$

$\square$

12.11 Satz

Es ist $\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ streng monoton wachsend, ungerade (d.h. $\arctan(-t) = -\arctan(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$) und es gibt ein $c \in \mathbb{R}$ mit:

$$\lim_{x\to\infty} (\arctan(x)) = c \ .$$

Beweis:
Wegen $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$ ist arctan streng monoton wachsend und ungerade (weil $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ gerade ist), denn:

$$\arctan(-x) = \int_0^{-x} \frac{dt}{1+t^2} \underbrace{=}_{t:=-s\Rightarrow dt=-ds} \int_0^{x} \frac{-ds}{1+(-s)^2} = -\arctan(x)$$

und nach Lemma (11.3) ist $\lim_{x\to\infty}(\arctan(x)) = \begin{cases} c \in \mathbb{R} \\ +\infty \end{cases}$, je nachdem ob $(\arctan(n))_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist oder nicht. Aber

$$\arctan(n) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+k^2} \leq 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k^2} \leq 1 + 2 = 3 \ , \quad \forall n \in \mathbb{N} \ .$$

Also existiert (vgl. (15.12))

$$c = \lim_{x\to\infty} \arctan(x) \ .$$

□

□

12.12 Kommentar

(a) Statt $\lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)dt$ schreibt man kurz

$$\int_0^\infty f(t)dt \ ,$$

wenn dieser Grenzwert existiert (oder $\pm\infty$ ist).

(b) Wegen Satz (12.10) ist für den Fall $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ dieser Grenzwert nun offenbar die Länge eines Viertels des Einheitskreises. Möchte man 2π als die Länge des Einheitskreises definieren, so sollte man daher setzen:

12.13 Definition

$$\pi := 2 \cdot \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2}$$

12.14 Kommentar

Wegen (12.11) ist daher nun das Bild von $\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ das Intervall $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ und $\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ ist streng monoton wachsend und bijektiv. Wir können also nun definieren:

12.15 Definition

Die Umkehrfunktion $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ des Arcustangens heißt Tangens,

$$\tan := \arctan^{-1} \quad .$$

12.16 Kommentar

Ist φ der Winkel zwischen den Schenkeln oP und oQ mit $o = (0,0),\ P = (1,0)$ und $Q = (1,t)$,

$\boxed{\text{Zeichnung fehlt}}$

so ist $x = \arctan(t)$ die Länge des Bogens („Arcus“) zwischen P und $R = \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)$ und damit $t = \tan(x)$ des Tangens des Winkels φ gemessen im Bogenmaß x.

12.17 Satz

Es ist $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ bijektiv, streng monoton wachsend, differenzierbar und es gilt für alle $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$$

Beweis:
tan ist als Umkehrfunktion von $\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ natürlich bijektiv und auch streng monoton wachsend (weil arctan es ist). Da $\arctan'(t) = \frac{1}{1+t^2} \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$, ist tan auch differenzierbar (siehe (10.8)) und es gilt:

$$\tan'(x) = \frac{1}{\arctan'(x)} = \frac{1}{\frac{1}{1+\tan^2(x)}} = 1 + \tan^2(x) \ .$$

□

Zeichnung fehlt

12.18 Definition

Wir definieren $\cos, \sin : \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ durch

$$\cos(x) := \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(x)}} \ , \quad \sin(x) := \frac{\tan(x)}{\sqrt{1+\tan^2(x)}}$$

12.19 Kommentar

(a) Ist also x die Bogenlänge des Einheitskreises zwischen $P = (1,0)$ und $R(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)$, so wissen wir bereits, dass $Q(t) = (1,t)$ die Koordinaten $(1, \tan(x))$ hat, weil $x = \arctan(t)$ ist. Es ist also nach Definition

$$R(x) = (\cos(x), \sin(x))$$

wie gewünscht.

Zeichnung fehlt

(b) Es ist deshalb auch

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

für alle $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$.

12.20 Satz

Es sind $\cos, \sin : \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt für alle $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$

$$\cos'(x) = -\sin(x) \ , \quad \sin'(x) = \cos(x) \ .$$

Beweis:

$$\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(x)}} \ , \quad \sin(x) = \frac{\tan(x)}{\sqrt{1+\tan^2(x)}}$$

Es sind cos und sin als Verkettung von differenzierbaren Funktionen wieder differenzierbar und es gilt (vgl. (10.1)):

$$\begin{aligned}
\cos'(x) &= \frac{d}{dx}(1+\tan^2(x))^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}(1+\tan^2(x))^{-\frac{3}{2}} \cdot 2\tan(x)\cdot\tan'(x) \\
&= -\frac{\tan(x)(1+\tan^2(x))}{(1+\tan^2(x))^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\tan(x)}{\sqrt{1+\tan^2(x)}} = -\sin(x)\ , \\
\sin'(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\tan(x)}{\sqrt{1+\tan^2(x)}}\right) \\
&= \frac{1+\tan^2(x)}{\sqrt{1+\tan^2(x)}} + \tan(x)\left[-\frac{1}{2}\frac{(1+\tan^2(x))\cdot 2\tan(x)}{\sqrt{1+\tan^2(x)}^3}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(x)}} = \cos(x)\ .
\end{aligned}$$

□

12.21 Korollar

Es ist $\sin : \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right) \to (-1,1)$ streng monoton wachsend und bijektiv.

Beweis:
Da

$$\sin'(x) = \cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(x)}} > 0$$

ist, für alle $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$, ist sin streng monoton wachsend. Weiter ist $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan(x) = +\infty$ und daher

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\tan^2(x)}+1}} = 1\ .$$

Schließlich ist sin ungerade, d. h. : $\sin(-x) = -\sin(x)$, für alle $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$, denn tan ist ungerade (weil arctan es ist) und daher

$$\sin(-x) = \frac{\tan(-x)}{\sqrt{1+\tan^2(-x)}} = \frac{-\tan(x)}{\sqrt{1+\tan^2(x)}} = -\sin(x)\ .$$

Daher ist auch

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}} \sin(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \sin(-x) = -\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \sin(x) = -1 \ .$$

Daraus folgt, dass $|\sin(x)| < 1$ und $\sin : \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right) \to (1, -1)$ bijektiv ist (vgl. (11.4) für ln und (12.14) für arctan).

$\boxed{\text{Zeichnung fehlt}}$

12.22 Definition

Die Umkehrfunktion von $\sin : \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right) \to (-1, 1)$ heißt Arcus-Sinus, $\arcsin : (-1, 1) \to \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$,

$$\arcsin := \sin^{-1} \ .$$

12.23 Kommentar

(a) Ist $t = \sin(x)$, so ist also $x = \arcsin(t)$ die Länge des Bogens von $P = (1, 0)$ nach $Q(x) = (\cos(x), \sin(x)) = (\sqrt{1-t^2}, t)$ des Einheitskreises.

$\boxed{\text{Zeichnung fehlt}}$

(b) $\arcsin : (-1, 1) \to \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ ist streng monoton wachsend, ungerade und bijektiv (weil sin es ist) und auch differenzierbar, denn $\sin'(x) = \cos(x) \neq 0$, für alle $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ und es ist:

$$\begin{aligned} \arcsin'(x) &= \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} \\ &\overset{\cos^2 + \sin^2 = 1}{=} \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ . \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Zeichnung fehlt}}$

12.24 Lemma

Für alle $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ gilt:

$$\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{1}{\tan(x)} \ .$$

Beweis:
Für $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ sei $t = \tan(x)$, also $x = \arctan(t)$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \arctan\left(\frac{1}{t}\right) &= \int_0^{\frac{1}{t}} \frac{du}{1+u^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^{\frac{1}{t}} \frac{du}{1+u^2} \overset{u=\frac{1}{v}\Rightarrow du=\frac{-dv}{v^2}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{t} \frac{-dv}{v^2(1+\frac{1}{v^2})} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_t^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{dv}{v^2+1} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{dv}{v^2+1} - \int_0^t \frac{dv}{v^2+1}\right) \\
&= \int_0^\infty \frac{dv}{1+v^2} - \arctan(t) = \frac{\pi}{2} - \arctan(t)
\end{aligned}$$

Also ist

$$\frac{1}{\tan(x)} = \frac{1}{t} = \tan(\arctan(\frac{1}{t})) = \tan(\frac{\pi}{2} - x).$$

□

12.25 Satz

Für alle $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ gilt:

$$\sin(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2})\ , \quad \cos(x) = -\sin(x - \frac{\pi}{2})$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\cos(x - \frac{\pi}{2}) &\overset{\cos\text{ gerade}}{=} \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\frac{\pi}{2}-x)}} \\
&\overset{(12.24)}{=} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\tan^2(x)}}} = \frac{\tan(x)}{\sqrt{\tan^2(x)+1}} = \sin(x)\ ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin(x - \frac{\pi}{2}) &\overset{\sin\text{ ungerade}}{=} -\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{-\tan(\frac{\pi}{2}-x)}{\sqrt{1+\tan^2(\frac{\pi}{2}-x)}} \\
&\overset{(12.24)}{=} \frac{-\frac{1}{\tan(x)}}{\sqrt{1+\frac{1}{\tan^2(x)}}} = -\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(x)}} = -\cos(x)\ .
\end{aligned}$$

□

12.26 Definition

Setze nun induktiv für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und:
$x \in \big((k-1)\frac{\pi}{2}, (k+1)\frac{\pi}{2}\big)$:

$$\sin(x) := \cos(x - \frac{\pi}{2}) \ , \quad \cos(x) = -\sin(x - \frac{\pi}{2})$$

$x \in (-(k+1)\frac{\pi}{2}, -(k-1)\frac{\pi}{2})$:

$$\sin(x) := -\cos(x + \frac{\pi}{2}) \ , \quad \cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$$

$\boxed{\text{Zeichnung fehlt}}$

12.27 Kommentar

(a) Es gilt dann für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2}) \ , \quad \cos(x) = -\sin(x - \frac{\pi}{2}) \ .$$

Weiter sind die Funktionen $\cos, \sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodisch, d. h.

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x) \ , \quad \cos(x + 2\pi) = \cos(x) \ , \quad \forall x \in \mathbb{R} \ ,$$

denn:

$$\sin(x + 2\pi) = \cos(x + \frac{3\pi}{2}) = -\sin(x + \pi) = -\cos(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(x)$$

und ähnlich für cos. Weiterhin gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

und

$$\cos'(x) = -\sin(x) \ , \quad \sin'(x) = \cos(x) \ , \quad \forall x \in \mathbb{R} \ .$$

(b) Weiter ist nun $\cos|(0,\pi) : (0,\pi) \to (-1,1)$ streng monoton fallend, bijektiv und differenzierbar. Wir setzen daher

$$\arccos : (-1,1) \to (0,\pi)\ , \quad \arccos := (\cos|(0,\pi))^{-1}(x)$$

und finden:

$$\begin{aligned} \arccos'(x) &= \frac{1}{\cos'(\arccos(x))} = \frac{-1}{\sin(\arccos(x))} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

(und wegen $\arcsin'(x) = \frac{+1}{\sqrt{1-x^2}}$ muss gelten:

$$\arccos(x) = -\arcsin(x) + \frac{\pi}{2}\ )\ .$$

(c) Schließlich sieht man aus $(\cos x, \sin x) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}, \frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}\right)$ unmittelbar, dass $\tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$, für alle $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Man setzt daher für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$:

$$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\ .$$

Zeichnung fehlt

12.28 Satz

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Dann gilt: Es ist $f'' + f = 0$ genau dann wenn es $a, b \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(x) = a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x)$$

Beweis:
Es ist $\cos'' = (-\sin)' = -\cos$, $\sin'' = \cos' = -\sin$ und damit auch für $f = a \cdot \cos + b \cdot \sin$:

$$\begin{aligned} f'' + f &= (a\cos + b\sin)'' + (a\cos + b\sin) \\ &= a\cos'' + b\sin'' + a\cos + b\sin \\ &= -a\cos - b\sin + a\cos + b\sin \\ &= 0\ . \end{aligned}$$

Umgekehrt sei f beliebig mit $f'' + f = 0$. Dann gilt:

$$(f \cos - f' \sin)' = f' \cos - f \sin - f'' \sin - f' \cos = -\sin \cdot (f + f'') = 0$$

und

$$(f \sin + f' \cos)' = f' \sin + f \cos + f'' \cos - f' \sin = \cos \cdot (f + f'') = 0 \ .$$

Es gibt also $a, b \in \mathbb{R}$, so dass $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcll} f(x)\cos(x) - f'(x)\sin(x) & = & a & \quad | \cdot \cos(x) \\ f(x)\sin(x) + f'(x)\cos(x) & = & b & \quad | \cdot \sin(x) \end{array}$$

$$\Rightarrow f(x) = f(x)(\cos^2(x) + \sin^2(x)) \quad = \quad a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x) \ .$$

□

12.29 Satz (Funktionalgleichungen)

Für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \cos(x_1 + x_2) &= \cos(x_1)\cos(x_2) - \sin(x_1)\sin(x_2) \\ \sin(x_1 + x_2) &= \cos(x_1)\sin(x_2) + \cos(x_2)\sin(x_1) \end{aligned}$$

Beweis:
Für $y \in \mathbb{R}$ und $f(x) := \cos(x + y)$ ist $f'' + f = 0$, also nach (12.28):

$$f(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$$

mit zwei Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$. Für $x = 0$ folgt

$$\begin{aligned} a = f(0) &= \cos(y) \ , \\ b = f'(0) &= -\sin(y) \ , \end{aligned}$$

also:

$$\cos(x + y) = f(x) = \cos(y)\cos(x) - \sin(y)\sin(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ (und $y \in \mathbb{R}$). Differentation (nach x) liefert:

$$-\sin(x + y) = \cos(y)(-\sin(x)) - \sin(y)\cos(x) \ .$$

□

12.30 Kommentar

Zum Abschluss nun noch einmal die Länge der Einheitskreislinie, diesmal berechnet mit folgender Parametrisierung.

$$\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \ , \ \alpha(t) = (\cos(t), \sin(t))$$

$\boxed{\text{Zeichnung fehlt}}$

Erinnere:

$$L[S] = L[\alpha] = \int_0^{2\pi} ||\dot{\alpha}(t)||dt$$

Es ist

$$\dot{\alpha}(t) = (-\sin t, \cos t)$$

$$\Rightarrow ||\dot{\alpha}(t)||^2 = (-\sin t)^2 + (\cos t)^2 = 1$$
$$\Rightarrow L[S] = \int_0^{2\pi} 1dt = 2\pi \ .$$

13 Der Satz von Taylor

13.1 Motivation

Ist $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $a \in I$ so ist für alle $x \in I$:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \varphi(x)$$

mit einer (Fehler-) Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$, die folgendes erfüllt:

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{x-a} = 0 \ .$$

Frage: Wenn f auch noch höhere Ableitungen besitzt: Gibt es dann zu $n \in \mathbb{N}$ ein Polynom $P_{n,a}$ vom Grad $\leq n$, so dass für alle $x \in I$ gilt:

$$f(x) = P_{n,a}(x) + R_{n,a}(x)$$

mit einer (Fehler-) Funktion $R_{n,a} : I \to \mathbb{R}$, die folgendes erfüllt:

$$\lim_{x \to a} \frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0 \ ?$$

Man sagt dann: $P_{n,a}$ approximiert f um a von **besserer als n-ter Ordnung**.

Z.B.: Welches Polynom vom Grand $\leq$ n approximiert die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^x$, um $a = 0$ am besten?
$\boxed{\text{Zeichnung fehlt}}$

13.2 Definition

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $n \in \mathbb{N}$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion:

(a) Es heißt f n-mal stetig differenzierbar, wenn f differenzierbar ist, f' auch differenzierbar ist - wir schreiben dann $f'' := (f')'$ - … usw. $f^{(n-1)} := (f^{(n-2)})'$ differenzierbar, und $f^{(n)}$ noch stetig ist. Wir notieren:

$$\mathfrak{C}^n(I) = \{f : I \to \mathbb{R} |\ f \ n\text{-mal stetig differenzierbar}\}$$

(Für $n = 0$ bedeutet: $\mathfrak{C}^0(I) := \mathfrak{C}(I)$.)

(b) Es heißt f ∞-oft differenzierbar, wenn $f \in \mathfrak{C}^n(I)$ ist, für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir notieren:

$$\mathfrak{C}^\infty(I) := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{C}^n(I)$$

13.3 Kommentar

(a) Zum Beispiel sind alle Polynomfunktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ∞-oft differenzierbar. Wir notieren:

$$\mathrm{Pol}(I) := \{f : I \to \mathbb{R} | \ f \text{ ist Polynomfunktion}\}$$

(b) Wir haben also eine Kette von **Funktionenräumen**

$$\mathrm{Pol}(I) \subseteq \mathfrak{C}^\infty(I) \subseteq \mathfrak{C}^n(I) \subseteq \mathfrak{C}^{n-1}(I) \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{C}^0(I) \subseteq F(I) \ .$$

13.4 Beispiel

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion, also

$$f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$$

mit $n \in \mathbb{N}_0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann approximiert natürlich $P_{n,a} := f$, die Funktion f am besten. Klar! Aber wie kann man die Koeffizienten $a_k \in \mathbb{R}$ durch Ableitungen von f bei a - sagen wir $a = 0$ - ausdrücken? Natürlich durch:

$$a_0 = f(0),\ a_1 = f'(0),\ a_2 = \frac{f''(0)}{2},\ a_3 = \frac{f'''(0)}{6},\ \ldots,\ a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

13.5 Definition

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f \in \mathfrak{C}^n(I)$ (mit $n \in \mathbb{N}_0$) sowie $a \in I$. Das Polynom $P_{n,a} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} P_{n,a}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \end{aligned}$$

heißt Taylorpolynom der Ordnung n von f in a. Es heißt dann weiter $R_{n,a} : I \to \mathbb{R}$:

$$R_{n,a}(x) := f(x) - P_{n,a}(x)$$

das Restglied von f der Ordnung n in a.

13.6 Beispiele

(a) Sei $f = \exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $a = 0$. Es ist dann $f \in \mathfrak{C}^\infty(I)$ und $f^{(n)}(0) = f(0) = e^0 = 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Es folgt:

$$P_{n,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

(b) Sei $f = \ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ und $a = 1$. Es ist $f \in \mathfrak{C}^\infty((0,\infty))$ und

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{x} = x^{-1} , \\
f''(x) &= -\frac{1}{x^2} = -x^{-2} , \\
f'''(x) &= +2x^{-3} , \\
f''''(x) &= -6x^{-4} , \\
&\ldots \\
f^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1}(n-1)! \cdot x^{-n}
\end{aligned}$$

also

$$f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

Das Taylorpolynom der Ordnung n in $a = 1$, also

$$\begin{aligned}
P_{n,1}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!}(x-1)^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k \\
&= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n .
\end{aligned}$$

(c) Sei $f = \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $a = 0$

$$\Rightarrow f^{(2n)}(x) = (-1)^n \cos(x) \ , \ f^{(2n+1)}(x) = (-1)^{n-1} \sin(x) \ ,$$

also

$$f^{(2n)}(0) = (-1)^n \ , \ f^{2n+1)}(0) = 0 \ .$$

Das Taylorpolynom der Ordnung $2n$ (und auch der Ordnung $2n+1$) ist also:

$$P_{2n,0}(x) = P_{2n+1,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} \mp \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} .$$

(d) Ähnlich sieht man für $f = \sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $a = 0$:

$$\begin{aligned} P_{2n+1,0}(x) &= P_{2n+2,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1!)} x^{2k+1} \\ &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 \mp \ldots + \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1} . \end{aligned}$$

13.7 Satz (Taylor)

Sei $n \in \mathbb{N}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal stetig differenzierbar, $f \in \mathfrak{C}^{n+1}(I)$. Sei $a \in I$, $P_{n,a}$ das Taylor-Polynom und $R_{n,a}$ das Restglied der Ordnung n von f in a. Dann gilt für alle $x \in I$:

(a) (Integraldarstellung des Restgliedes):

$$R_{n,a}(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt .$$

(b) (Lagrange-Form des Restgliedes): Es gibt ein ξ zwischen a und x, so dass gilt:

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} .$$

13.8 Lemma

Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$f'(\xi)(g(b) - g(a)) = g'(\xi)(f(b) - f(a))$$

Beweis:
Man betrachte die Funktion $h : [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$h(x) := (g(b) - g(a)) \cdot f(x) - (f(b) - f(a)) \cdot g(x)$$

$$\Rightarrow h(b) - h(a) = 0$$

h ist differenzierbar $\Rightarrow \exists\, \xi \in (a,b) :\ h'(\xi)(b-a) = h(b) - h(a)$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &= \frac{h(b) - h(a)}{b-a} = h'(\xi) \\ &= (g(b) - g(a)) \cdot f'(\xi) - (f(b) - f(a)) \cdot g'(\xi) . \end{aligned}$$

□

13.9 Kommentar

(13.8) wird manchmal als 2. Mittelwertsatz der Differenzialrechnung bezeichnet. Für $g = \mathrm{id}$ geht er in den MWS (8.17) über.

Beweis von (13.7 a)):
Für festes $x \in I$ betrachte die folgende Funktion $S_x : I \to \mathbb{R}$,

$$S_x(t) := R_{n,t}(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k \ .$$

Es ist dann:

$$S_x(a) = R_{n,a}(x) \ , \quad S_x(x) = 0 \ .$$

Weiter ist:

$$\begin{aligned}
\dot{S}_x(t) &= -\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!} k(x-t)^{k-1} \cdot (-1) \\
&= -\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k \\
&= -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \ .
\end{aligned}$$

Nach dem Hauptsatz ist daher:

$$\begin{aligned}
R_{n,a}(x) &= S_x(a) - S_x(x) = \int_x^a \dot{S}_x(t)dt \\
&= \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt \ .
\end{aligned}$$

(a) Für $x \in I$ betrachte $g_x : [a, x] \to \mathbb{R}$ (bzw. $[x, a] \to \mathbb{R}$):

$$g_x(t) := (x-t)^{n+1} \ .$$

$\Rightarrow$ (13.8) es existiert ein $\xi = \xi_x$ zwischen a und x mit:

$$\dot{g}_x(\xi)(S_x(x) - S_x(a)) = \dot{S}_x(\xi)(g_x(x) - g_x(a))$$

$$\Rightarrow (n+1)(x-\xi)^n(-1)(0 - R_{n,a}(x)) = \frac{-1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(0-(x-a)^{n+1})$$

$$\Rightarrow R_{n,a} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \ .$$

□

13.10 Korollar

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ n-mal stetig differenzierbar ($n \in \mathbb{N}$), $a \in I$ und $R_{n,a}$ das Restglied von f der Ordnung n in a. Dann gilt:

$$\lim_{x \to a} \frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0 \ .$$

Beweis:
Sei $P_{k,a}$ das Taylorpolynom von f der Ordnung k ($k = n-1,\ k = n$) in a. Nach (13.7.b) gilt nun:

$$\begin{aligned}
R_{n,a}(x) &= f(x) - P_{n,a}(x) \\
&= f(x) - (P_{n-1,a}(x) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n) \\
&= R_{n-1,a}(x) - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\
&= \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n
\end{aligned}$$

für eine Zwischenstelle $\xi \in (a, x)$ (bzw. (x, a))

$$\Rightarrow \frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = \frac{1}{n!}(f^{(n)}(\xi) - f^{(n)}(a))$$

$$\longrightarrow 0 \text{ für } x \to a,$$

weil dann $\xi_x \to a$ und $f^{(n)}$ stetig (in a) ist.

$\square$

13.11 Definition

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, d.h. $I = (a, b)$ mit $a \in [-\infty, \infty)$, $b \in (-\infty, \infty]$, $a < b$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion.

(a) Es heißt $a \in I$ ein lokales Extremum von f, wenn es ein $\delta > 0$ gibt, so dass $f(x) \leq f(a)$ ist, für alle $x \in I$ mit $|x - a| < \delta$ (lokales Maximum), oder $f(x) \geq f(a)$ für alle $x \in I$ mit $|x - a| < \delta$.

(b) Es heißt $a \in I$ ein Sattelpunkt von f, wenn $f'(a) = 0$ ist und es ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in I$ mit $|x - a| < \delta$ gilt:

i) für $a - \delta < x \leq a$ ist $f(x) \leq f(a)$,
für $a \leq x < a + \delta$ ist $f(x) \geq f(a)$;

ii) für $a - \delta < x \leq a$ ist $f(x) \geq f(a)$,
für $a \leq x < a + \delta$ ist $f(x) \leq f(a)$.

13.12 Kommentar

(a) Ist $a \in I$ eine lokale Extremstelle, so ist $f'(a) = 0$ (vgl. 8.16).

(b) Ist $a \in I$ derart, dass $f'(a) = 0$ ist, so braucht a i.A. weder lokales Extremum noch ein Sattelpunkt zu sein (Blatt 14, Aufgabe 4).

13.13 Satz

Sei I eine offenes Intervall, $a \in I$ und $f : I \to \mathbb{R}$ n-mal stetig differenzierbar ($n \in \mathbb{N}$). Es sei $f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$, aber $f^{(n)}(a) \neq 0$. Dann gilt:

i) Ist n gerade, so ist a ein lokales Extremum.

ii) Ist n ungerade, so ist a ein Sattelpunkt.

Beweis:
Sei oBdA $f(a) = 0$ (sonst subtrahiere von f die Konstante $c := f(a)$) und $f^{(n)}(a) > 0$ (sonst gehe zu $-f$ über).

$$\Rightarrow P_{n,a}(a) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x - a)^n$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{(x - a)^n} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{R_{n,a}(x)}{(x - a)^n} \ , \quad \forall x \neq a$$

$\Rightarrow$ (13.10) $\exists\, \delta > 0 \;\; \forall x \in I : 0 < |x - a| < \delta$

$$\frac{R_{n,a}(x)}{(x - a)^n} > -\frac{1}{2} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \ ,$$

also

$$\frac{f(x)}{(x - a)^n} > \frac{1}{2} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} > 0 \ , \quad \forall x \in (a - \delta, a + \delta) \ , \ (x \neq a).$$

1.Fall: n gerade: $\Rightarrow (x-a)^n > 0,\ \forall x \neq a \Rightarrow f(x) > 0 = f(a),\ \forall x \in I$ mit $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow a$ ist (sogar ein striktes) lokales Minimum.

2. Fall: n ungerade: $\Rightarrow f(x) > 0$ für $a < x < a+\delta$ und $f(x) < 0$ für $a-\delta < x < a \Rightarrow a$ ist (strikter) Sattelpunkt.

□

13.14 Motivation

Betrachten wir nun ein $f : I \to \mathbb{R}$, welches ∞-oft differenzierbar ist, $f \in \mathfrak{C}^\infty(I)$. Sei $a \in I$. Für jedes $x \in I$ und $n \in \mathbb{N}$ ist dann:

$$f(x) = P_{n,a}(x) + R_{n,a}(x)\ .$$

Frage: Für welches $x \in I$ ist dann die Folge $(R_{n,a}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ?

Z.B. für $f = \exp$ und $a = 0$ ist

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + R_{n,0}(x)\ .$$

Ist $(R_{n,0}(x))$ eine Nullfolge?

Wenn das so ist, dann gilt:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} P_{n,a}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\ .$$

13.15 Definition

(a) Seien $a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0$. Der Ausdruck:

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$$

heißt eine formale Potenzreihe mit Koeffizieten in $\mathbb{R}$.

(b) Man sagt, dass eine formale Potenzreihe $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ in einem Punkt $x \in \mathbb{R}$ konvergiert, wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergiert.
(d.h. $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ existiert) und schreibt dann:

$$P(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\ .$$

13.16 Kommentar

(a) Eine formale Potenzreihe $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ konvergiert stets in $x = 0$ und es ist $P(0) = a_0$.

(b) Im Allgemeinen braucht es keinen weiteren Punkt $x \neq 0$ in $\mathbb{R}$ zu geben, wo $\sum_n a_n x^n$ konvergiert!
Z.B. ist für $a_n = n^n$ und $x \neq 0$ beliebig die Folge $(a_n x^n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$a_n x^n = \left(\frac{n}{\frac{1}{x}}\right)^n$$

keine Nullfolge, denn $\frac{n}{1/x}$ konvergiert bereits gegen $\pm\infty$. Damit $\sum a_n x^n$ konvergiert, ist es aber notwendig, dass $(a_n x^n)$ eine Nullfolge ist (siehe (4.11)).

(c) Die geometrische Reihe $P = \sum_n X^n$ konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ (siehe (4.10)) und dort ist $P(x) = \frac{1}{1-x}$, aber divergiert für $|x| \geq 1$, denn dann ist (x^n) nicht mal eine Nullfolge.
Zeichnung fehlt

13.17 Satz

(a) Die Exponentialreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n$ konvergiert in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ und es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} .$$

(b) Die Reihen $P = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} X^{2n+1}$ und $Q = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} X^{2n}$ konvergieren in jedem $x \in \mathbb{R}$ und es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \ , \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \ .$$

Beweis:
(a) Für $f(x) = e^x$ und $a = 0$ ist nach (13.7b)

$$|R_{n,0}(x)| = |\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}| = |e^{\xi}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}|$$

mit einem ξ zwischen 0 und x. Aber $(\frac{c^n}{n!})_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge für jedes $c \in \mathbb{R}$ (Übung). Also ist $(R_{n,0}(x))_{n\in\mathbb{N}} \to 0$, für alle $x \in \mathbb{R}$ und daher

$$e^x = \lim_{n\to\infty}(P_{n,0}(x) + R_{n,0}(x)) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \ .$$

(c) Ähnlich wie bei exp ist für $f = \cos$ bzw. $f = \sin$ das Restglied

$$|R_{n,0}(x)| = |\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

denn $f^{(n+1)}(\xi) = \pm\cos(\xi)$ bzw. $f^{(n+1)}(\xi) = \pm\sin(\xi)$ und $|\cos(\xi)| \leq 1$ und $|\sin(\xi)| \leq 1$, also $|f^{n+1}(\xi)| \leq 1$. Also ist $(R_{n,0}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ wieder Nullfolge und damit

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} \ , \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} \ ,$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

□

13.18 Korollar

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ wächst die Exponentialfunktion $x \mapsto e^x$ schneller gegen ∞ als das Monom $x \mapsto x^n$,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n} = \infty \qquad \text{(vgl. (3.23)).}$$

Beweis:
Für $x > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ fest ist

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} \geq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \Rightarrow \frac{e^x}{x^n} \geq \frac{x}{(n+1)!} \to \infty$$

für $x \to \infty$.

□

13.19 Korollar

Es gilt tatsächlich (vgl. (11.10 b) und (5.11)):

$$e = \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

13.20 Kommentar

Die Abschätzungen für das Restglied im Beweis geben nun auch die Möglichkeit Funktionswerte von exp, cos und sin beliebig genau zu berechnen, z.B. will man cos(1) und $e = \exp(1)$ auf zwei Nachkommastellen genau berechnen, so braucht man:

a) n so groß, dass $|R_{2n,0}(1)| < \frac{1}{1000} = 10^{-3}$, also (bei cos):

$$\frac{1}{(2n+1)!} < \frac{1}{1000}$$

also $(2n+1)! > 1000$, also $2n+1 \geq 7$, also z.B. bei $n = 3$.
Also:

$$\begin{aligned} \cos(1) &= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + R_6(1) \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} - \frac{1}{720} \pm 10^{-3} \\ &= 0,54 \pm 10^{-3}. \end{aligned}$$

b) Wegen $e < 3$ ist für $f = \exp$:

$$|R_n(1)| \leq \frac{e^{\xi} \cdot 1^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-3}$$

wenn $(n+1)! > 3000$, also $n + 1 \geq 7$, also

$$\begin{aligned} e &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + R_6(1) \\ &= 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} \pm 10^{-3} \\ &= 2,718 \pm 10^{-3}\ . \end{aligned}$$

13.21 Satz

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} X^n$ konvergiert für $-1 < x \leq 1$ und es gilt dort:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \mp \ldots \; .$$

Beweis:
Nach der geometrischen Summenformel (siehe (4.10)) ist für alle $t \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{1+t} - \frac{(-1)^n t^n}{1+t} = \frac{1-(-t)^n}{1-(-t)} = \sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k$$

und daher

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) &= \int_1^{1+x} \frac{dt}{t} = \int_0^x \frac{dt}{t+1} \\
&= \int_0^x \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k dt + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n dt}{1+t} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} t^{k+1}|_0^x + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n dt}{1+t} \\
&= \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} t^k}_{P_{n,0}(x)} + \underbrace{(-1)^n \int_0^x \frac{t^n dt}{1+t}}_{\text{spz. Darstellung des Restgliedes beim ln,}}
\end{aligned}$$

also

$$R_{n,0}(x) = (-1)^n \int_0^x \frac{t^n dt}{1+t} \; .$$

Für $0 \leq x \leq 1$ gilt nun für $t \in [0, x]$: $1 + t \geq 1$

$$\Rightarrow |R_{n,0}(x)| \leq \int_0^x t^n dt = \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \overset{n\to\infty}{\to} 0$$

und für $-1 < x \leq 0$ gilt für $t \in [x, 0] : 1 + t \geq 1 + x$

$$\Rightarrow |R_{n,0}(x)| \leq \left| \frac{1}{1+x} \int_0^x t^n dt \right| \leq \frac{1}{x+1} \cdot \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{(x+1)(n+1)} \overset{n\to\infty}{\to} 0 \; .$$

Für $|x| > 1$ ist $\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n\right)$ gar keine Nullfolge und für $x = -1$ ist

$$\frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}|_{x=-1} = \frac{(-1)^{2n-1}}{n} = -\frac{1}{n}$$

also ist die Reihe auch nicht konvergent (weil harmonisch (4.12)).

$\square$

13.22 Korollar

Die alternierende harmonische Reihe erfüllt

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)\ .$$

Beweis:

$$\ln(2) = \ln(1+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

$\square$

13.23 Definition

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ ∞-oft differenzierbar und $a \in I$. Die formale Potenzreihe

$$T_{f,a} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n$$

heißt Taylorreihe von f in a.

13.24 Kommentar

a) Im Allgemeinen braucht die Taylorreihe einer ∞-oft differenzierbaren Funktion in einem Punkt $a \in I$ (außer in $a = x$) nirgends zu konvergieren (vgl. auch Blatt 16, Satz 3 von Borel).

b) Selbst wenn sie für $x \neq a$ konvergiert, braucht sie nicht gegen $f(x)$ zu konvergieren (vgl. (13.28 b))).

c) Wenn es allerdings überhaupt eine formale Potenzreihe (um a) $P = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n$ gibt, so dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in I$ mit $|x-a| < \delta$ gilt:

$$f(x) = P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n\ ,$$

so muss P die Taylorreihe von f in a sein. (Das folgt daraus, dass man bei solchen Potenzreihen „unter dem Summenzeichen“ differenzieren darf, und daher

$$\begin{aligned} f^{(n)}(a) &= \frac{d^n}{dx^n}|_{x=a} \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-a)^k \\ &\stackrel{!}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^n}{dx^n}|_{x=a}\ b_k(x-a)^k = b_n \cdot n! \\ \Rightarrow b_n &= \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \qquad \text{siehe §14 .)} \end{aligned}$$

13.25 Definition

Eine ∞-oft differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt reell-analytisch, wenn es zu jedem $a \in I$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in I$ mit $|x - a| < \delta$ gilt:

$$f(x) = T_{f,a}(x)$$

Wir notieren:

$$\mathfrak{C}^{\omega}(I) := \{f : I \to \mathbb{R}|\ f \text{ ist reell-analytisch}\}$$

13.26 Kommentar

a) Jede Polynomfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ist reell-analytisch, denn $P_{n,a} = f$ für $n \geq \deg(f)$ für alle $a \in \mathbb{R}$ und damit

$$T_{f,a}(x) = P_{n,a} = f(x)\ , \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

b) Ähnliche Argumente wie bei (13.17) (für $a \in \mathbb{R}$ bzw. $a \in (0, \infty)$ bei ln) zeigen, dass $\exp,\ \cos,\ \sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ reell-analytisch sind.

c)

$$\mathrm{Pol}(I) \subsetneqq C^{\omega}(I) \subseteq C^{\infty}(I)\ ,$$

wobei auch die letzte Inklusion echt ist, wie folgender Satz zeigt!

13.27 Satz

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

ist ∞-oft differenzierbar und es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$: $f^{(n)}(0) = 0$.
Zeichnung fehlt

13.28 Kommentar

a) Die Taylorreihe von f bei $a = 0$ ist also die Nullreihe, $T_{f,0} = 0$ und damit konvergent, für alle $x \in \mathbb{R}$. Es ist aber

$$f(x) \neq 0 = T_{f,0}(x) \ , \qquad \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \ .$$

Also ist $f \in \mathfrak{C}^\infty(\mathbb{R})\backslash\mathfrak{C}^\omega(\mathbb{R})$.

b) Die Restgliedfolge $(R_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ist damit für alle $x \neq 0$ keine Nullfolge, da

$$R_n(x) = f(x) \neq 0 \ , \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

konstant ist (und damit zwar konvergent, aber nicht gegen Null).

c) Es folgt auch, dass $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \cos \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

eine $\mathfrak{C}^\infty$-Funktion ist mit $g'(0) = 0$, ohne, dass dort ein lokales Extremum oder ein Sattelpunkt vorliegt (vgl. (13.12)).

13.29 Lemma

Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gibt es ein Polynom p_n und ein $\alpha_n \in \mathbb{N}_0$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ gilt:

$$f^{(n)}(x) = \frac{p_n(x)}{x^{\alpha_n}} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$$

Beweis: von (13.27)
Induktion der folgenden Aussage über n: f ist n-mal differenzierbar und $f^{(n)}(0) = 0$

$n = 0: \ f(0) = 0\checkmark$
$n \to n+1$: Dann ist für alle $h \neq 0$:

$$\frac{1}{h}(f^{(n)}(h) - f^{(n)}(0)) = \frac{f^{(n)}(h)}{h} \overset{(13.29)}{=} \frac{p_n(h)}{h^{\alpha_n+1}} \cdot e^{-\frac{1}{h^2}}$$

nach Induktionsannahme und (13.29). Es ist nun $\lim_{h\to\infty} p_n(h) = p_n(0) \in \mathbb{R}$ und mit $\beta_n := \alpha_n + 1 \in \mathbb{N}$ und $s = \frac{1}{h}$ gilt:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to\infty} \frac{\exp(-\frac{1}{h^2})}{h^{\beta_n}} &= \lim_{s\to\pm\infty} \frac{\exp(-s^2)}{\left(\frac{1}{s}\right)^{\beta_n}} \\ &= \lim_{s\to\pm\infty} \frac{s^{\beta_n}}{e^{s^2}} = 0 \ , \qquad (13.18).\end{aligned}$$

Also ist

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(f^{(n)}(h) - f^{(n)}(0)) = 0 \ ,$$

damit ist $f^{(n)}$ in $x = 0$ differenzierbar, in $x \neq 0$ sowieso (weil auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ f eine Komposition von $\mathfrak{C}^\infty$-Funktionen ist) und

$$f^{(n+1)}(0) = \frac{d}{dx}|_{x=0} f^{(n)}(x) = 0 \ .$$

$\square$

Beweis: (13.29)
Induktion über n:
$n = 0$:

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$$

wähle daher $p_0(x) = 1$, $\alpha_0 = 0$.

$n \to n+1$:

$$\begin{aligned}f^{(n+1)}(x) &= \frac{d}{dx} f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{p_n(x)}{x^{\alpha_n}} e^{-\frac{1}{x^2}}\right) \\ &= x^{-2\alpha_n}((p_n'(x) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} + p_n(x)\frac{2}{x^3} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}})x^{\alpha_n} \\ &\quad -(p_n(x) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \alpha_n \cdot x^{\alpha_n - 1})) \\ &= \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{\alpha_n+3}}(x^3 p_n'(x) + 2p_n(x) - \alpha_n x^2 p_n(x)) \\ &= \frac{p_{n+1}(x)}{x^{\alpha_{n+1}}} \cdot e^{\frac{-1}{x^2}}\end{aligned}$$

mit $\alpha_n + 3 =: \alpha_{n+1}$ und $p_{n+1} := (x^3 p_n'(x) + 2p_n(x) - \alpha_n x^2 p_n(x))$.

$\square$

13.30 Kommentar

a) Eine Polynomfunktion vom Grad n ist bereits festgelegt, wenn man sie an $n+1$ (verschiedenen) Stellen kennt (Übung). Eine C^∞-Funktion dagegen ist sehr „flexibel". Ist z.B. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ∞-oft differenzierbar und ist $f(x) = 0$ - sagen wir für $0 \leq x \leq 1$, so kann man i.A. keine Aussage darüber treffen, wie sie sich für $x < 0$ oder $x > 1$ verhält.

b) Ist dagegen f reell-analytisch, so ist f wiederum sehr starr. Aus dem folgenden Satz geht beispielsweise unmittelbar hervor: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ reell-analytisch und $f|(a-\varepsilon, a+\varepsilon) = 0$, für ein $a \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig klein, so ist $f(x) = 0$ schon für alle $x \in \mathbb{R}$.

13.31 Satz: Indentitätssatz für reell-analytische Funktionen

Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ reell-analytisch, $a \in I$ und $f^{(n)}(a) = g^{(n)}(a)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $f(x) = g(x)$ für alle $x \in I$.

Beweis:
Sei $I = (\alpha, \beta)$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. (Wenn f und g auf jedem endlichen, offenem Intervall übereinstimmen, so ist $f = g$. Sei nun

$$c := \sup\{x \in I : \; f|[a,x] = g|[a,x]\} \in [\alpha, \beta].$$

Ist $c < \beta$, so ist $f^{(n)}(c) = g^{(n)}(c)$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$, weil $f|(c-\delta, c)| = g|(c-\delta, c)|$ für $c > a$ gilt (falls $c = a$ nach Vorraussetzung).

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad T_{f,c} = T_{g,c} \\ &\Rightarrow \quad f(x) = T_{f,c} = T_{g,c} = g(x) \end{aligned}$$

für alle x mit $c < x < c + \delta$, bei einem $\delta > 0$, weil f und g reell-analytisch sind. Widerspruch zur Definition von c! Also ist $c = \beta$. Ähnlich sieht man, dass $\inf\{x \in I : \; f|[x,a] = g|[x,a]\} = \alpha$ ist, also ist $f(x) = g(x)$, $\forall x \in (\alpha, \beta)$.

□

14 Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen

14.1 Motivation

Sei (f_n) eine Folge von Funktionen $f_n : I \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Für jedes $x \in I$ sei die Folge reeller Zahlen $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. Setzte $f : I \to \mathbb{R}$

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} (f_n(x)) \ ,$$

kurz $\qquad f = \lim_{n\to\infty} f_n$.
Frage: Welche Eigenschaft von f_n „vererben“ sich dabei auf f?

14.2 Beispiele

Sei $I = [0,1]$, $f_n : I \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist für $0 \leq x < 1 :\ (f_n(x)) \to 0$ für $n \to \infty$ und für $x = 1 :\ f_n(x) = 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$, also $(f_n(1)) \to 1$. Für $f : I \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{für } \ x = 1 \end{cases}$$

gilt also $(f_n) \to f$.
$\boxed{\text{Zeichnung fehlt}}$
Beachte: f_n ist stetig für alle $n \in \mathbb{N}$, aber f ist nicht stetig (in $x = 1$), also:

$$\lim_{x\to 1} (\lim_{n\to\infty} f_n(x)) = 0 \neq 1 = \lim_{n\to\infty} (\lim_{x\to 1} f_n(x)).$$

14.3 Beispiel

Betrachte $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{für } \ 0 \leq x < \frac{1}{n} \\ -n^2 x + 2n & \text{für } \ \frac{1}{n} \leq x < \frac{2}{n} \\ 0 & \text{für } \ \frac{2}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Zeichnung fehlt}}$
Dann ist mit $f : I \to \mathbb{R},\ f(x) = 0\ \forall x \in I :\ (f_n(x)) \to 0 = f(x)$, also $(f_n) \to 0$. Beachte nun:

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{2}{n} \cdot n \cdot \frac{1}{2} = 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

aber $\int_0^1 f(x)dx = 0$, also:

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_0^1 f_n(x)dx}_{=1} = 1 \neq 0 = \int_0^1 \underbrace{\lim_{n\to\infty} f_n(x)}_{=0}\, dx.$$

14.4 Definition

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und (f_n) eine Folge von Funktionen, $f_n : I \to \mathbb{R}$ und sei $f : I \to \mathbb{R}$.

a) Man sagt, (f_n) konvergiert punktweise gegen f, $(f_n) \to f$, wenn $f(x) = \lim_{n\to\infty}(f_n(x))$ ist, für alle $x \in I$, also:
Für jedes $\varepsilon > 0$ und für jedes $x \in I$ gibt es ein $n_0 = n_0(\varepsilon, x)$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

b) Man sagt, (f_n) konvergiert gleichmäßig gegen f, $(f_n) \stackrel{glm.}{\to} f$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \geq n_0$ und für alle $x \in I$ gilt:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

(Diesmal hängt n_0 nicht von x ab; n_0 gilt für alle x!)

14.5 Kommentar

a) Jede gleichmäßig konvergente Funktionenfolge ist natürlich punktweise konvergent, nicht aber umgekehrt (siehe Beispiel (14.2) und (14.3)).

b) Gleichmäßige Konvergenz bedeutet, dass zu einem beliebig kleinen $\varepsilon > 0$ fast alle Graphen von f_n im ε-Schlauch um den Graphen von f liegen.

Zeichnung fehlt

14.6 Satz

Seien $f_n, f : I \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ Funktionen und f_n sei stetig, für alle $n \in \mathbb{N}$. Es konvergiere (f_n) gleichmäßig gegen f. Dnn ist auch f stetig.

Beweis: („$\frac{\varepsilon}{3}$-Argument“)
Sei $a \in I$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Z.z.: Es gibt ein $\delta > 0$, so dass $\forall x \in I$ mit $|x - a| < \delta$ gilt: $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Da $(f_n) \stackrel{glm.}{\longrightarrow} f$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\forall x \in I$ gilt: $|f_{n_0}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Da f_{n_0} stetig in a ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass $\forall x \in I$ mit $|x-a| < \delta$ gilt: $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Es folgt nun für alle $x \in I$ mit $|x-a| < \delta$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| + |f_{n_0}(a) - f(a)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

□

14.7 Satz

Seien $f_n, f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Funktionen, f_n stetig für jedes $n \in \mathbb{N}$ und f_n konvergiere gleichmäßig gegen f. Dann ist

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Beweis:
Wegen (14.6) ist f auch stetig und damit integrierbar (siehe (7.15)). Sei $\varepsilon > 0$. Da $(f_n) \stackrel{glm.}{\longrightarrow} f$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}, \qquad \forall x \in I.$$

Es folgt für $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right| &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx \\ &< \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \varepsilon \ , \end{aligned}$$

also

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

□