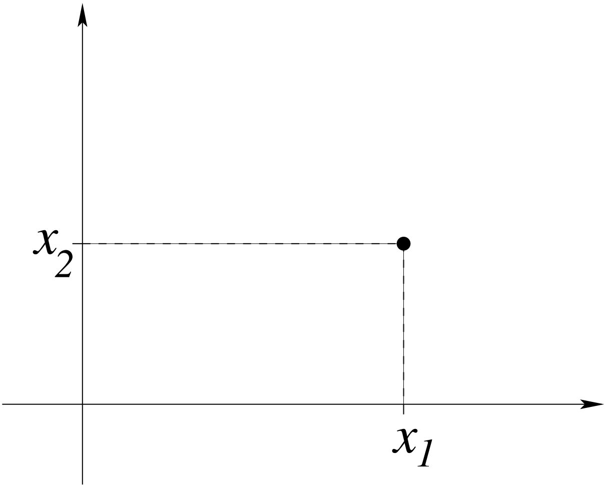
Die Sphäre in n Dimensionen

Roderich Tumulka

Eberhard-Karls-Universität Tübingen

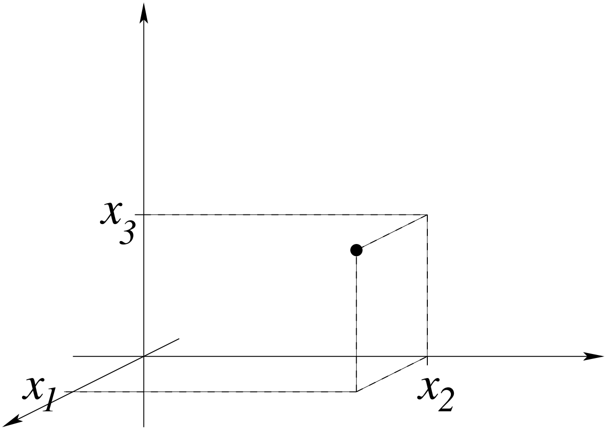
17. November 2021

Koordinaten in der Ebene (2-dimensional)



$$\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) : x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

Koordinaten in 3 Dimensionen



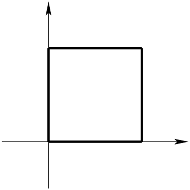
$$\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

Der 4-dimensionale Raum

$$\mathbb{R}^4 = \big\{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}, x_3 \in \mathbb{R}, x_4 \in \mathbb{R}\big\}$$

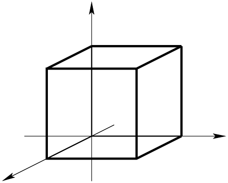
Ebenso $\mathbb{R}^n = \big\{(x_1, \ldots, x_n) : x_1 \in \mathbb{R}, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\big\}$

Der n-dim. Würfel



Quadrat = 2-dim. Würfel

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le x_1 \le 1,\ 0 \le x_2 \le 1\}$$



3-dim. Würfel

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 \le x_1 \le 1,\ 0 \le x_2 \le 1,\ 0 \le x_3 \le 1\}$$

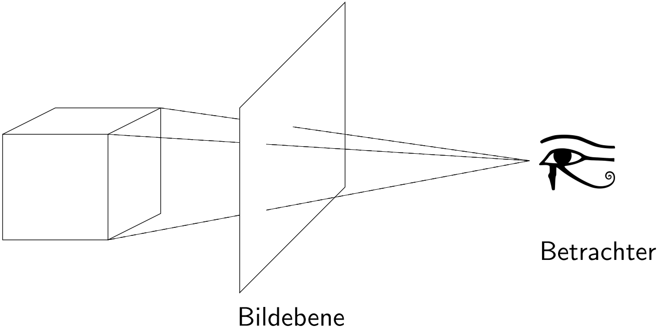
4-dim. Würfel

$$\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 :\ 0 \le x_1 \le 1,\ \ldots,\ 0 \le x_4 \le 1\}$$

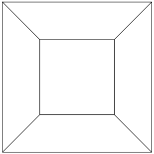
n-dim. Würfel

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n :\ 0 \le x_1 \le 1,\ \ldots,\ 0 \le x_n \le 1\}$$

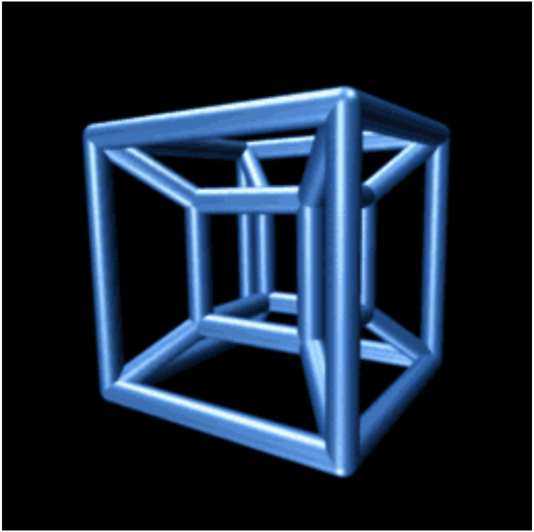
Perspektivische Darstellung



ergibt:

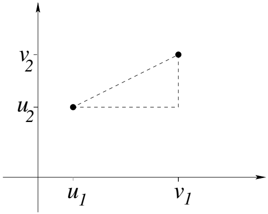


4d-Würfel

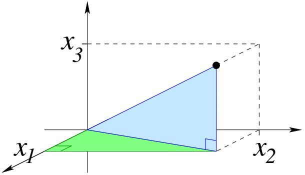


Video von Jason Hise

Abstände: Satz von Pythagoras



In 2 Dimensionen:
Der Abstand zwischen $\vec{u}$ und $\vec{v}$ beträgt $\sqrt{(v_1-u_1)^2+(v_2-u_2)^2} = \|\vec{v}-\vec{u}\|$, wobei $\|\vec{w}\| = \sqrt{w_1^2+w_2^2}$ ("Norm von $\vec{w}$") die Länge des Vektors $\vec{w}$ ist.



In 3 Dimensionen:
Der Abstand zwischen $\vec{u}$ und $\vec{v}$ beträgt $\sqrt{(v_1-u_1)^2+(v_2-u_2)^2+(v_3-u_3)^2}$, entsprechend der Norm $\|\vec{w}\| = \sqrt{w_1^2+w_2^2+w_3^2}$.

In n Dimensionen:
Der Abstand zwischen $\vec{u}$ und $\vec{v}$ beträgt $\sqrt{(v_1-u_1)^2+\ldots+(v_n-u_n)^2}$, entsprechend der Norm $\|\vec{w}\| = \sqrt{w_1^2+\ldots+w_n^2}$.

Die Sphäre in n Dimensionen

Definition:

Die Sphäre vom Radius r in $\mathbb{R}^n$ ist die Menge

$$\mathbb{S}^{n-1}_r = \left\{ \vec{v} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{v}\| = r \right\}$$

aller Punkte mit Abstand r vom Ursprung.

Die Einheits-Sphäre (oder auch einfach "die Sphäre") $\mathbb{S}^{n-1}$ ist die Sphäre vom Radius 1 (die Menge der "Einheitsvektoren" in $\mathbb{R}^n$).

Der Ball vom Radius r in $\mathbb{R}^n$ ist das Innere der Sphäre,

$$\mathbb{B}^n_r = \left\{ \vec{v} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{v}\| < r \right\}.$$

(Die Sphäre ist daher die Oberfläche des Balls.)

Rotationen

- Die $\mathbb{S}_r^{n-1}$ ist invariant unter allen Drehungen um den Ursprung.
- In $\mathbb{R}^3$ ist jede Drehung eine Drehung um eine Gerade (genauer: jede Drehung hat eine Gerade aus Fixpunkten). In $\mathbb{R}^4$ ist eine Drehung eine Drehung um eine 2-dim. Ebene (eine Ebene aus Fixpunkten), außer zusammengesetzte Drehungen.
- Nebenbei bemerkt:
  Die Menge aller (zusammengesetzten) Drehungen um den Ursprung
  - in $\mathbb{R}^2$ ist 1-dimensional
  - in $\mathbb{R}^3$ ist 3-dimensional
  - in $\mathbb{R}^4$ ist 6-dimensional

Diese Dimensionen werden uns im Folgenden besonders interessieren:

- $n = 2$

Diese Dimensionen werden uns im Folgenden besonders interessieren:

- $n = 2$
- $n = 3$

Diese Dimensionen werden uns im Folgenden besonders interessieren:

- $n = 2$
- $n = 3$
- $n = 4$

Diese Dimensionen werden uns im Folgenden besonders interessieren:

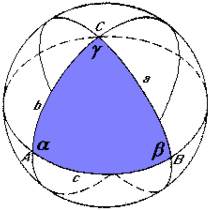
- $n = 2$
- $n = 3$
- $n = 4$
- $n = 10^{23}$ (hundert Trilliarden)

Diese Dimensionen werden uns im Folgenden besonders interessieren:

- $n = 2$
- $n = 3$
- $n = 4$
- $n = 10^{23}$ (hundert Trilliarden)
- $n = 10^{10^{23}}$

Innere Geometrie der $\mathbb{S}^2$ und $\mathbb{S}^3$

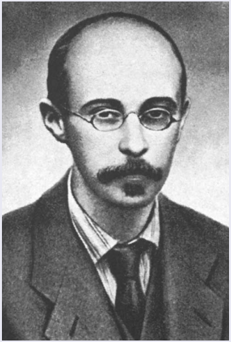
- Stellen Sie sich 2-dim. Lebewesen vor, die auf $\mathbb{S}^2$ leben und sie nie in den $\mathbb{R}^3$ verlassen können.
- Die Wesen können die Krümmung der $\mathbb{S}^2$ bemerken (innere Geometrie):
  - Wenn man lang genug in dieselbe Richtung geht, kommt man wieder am Ausgangspunkt an.
  - Die Winkelsumme im Dreieck ist $> 180°$.
  - ...



Figur von Jürgen Lemke

- Wenn wir in $\mathbb{S}^3$ lebten, dann
  - würde jeder in großer Ferne seinen eigenen Hinterkopf sehen.
  - wäre die Winkelsumme in Dreiecken $> 180°$.
  - ...

$\mathbb{S}^3$ als Geometrie unseres Universums

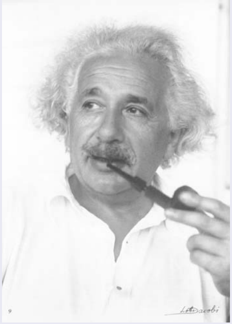


Alexander Friedmann (1888-1925)

1922 studierte der russische Physiker Alexander Friedmann die Grundgleichung der Allgemeinen Relativitätstheorie, die Einsteinsche Feldgleichung (1915)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \,,$$

um die Form des Universums zu bestimmen. Er fand drei mögliche Szenarien, und bei einem davon hat unser Universum die innere Geometrie einer $\mathbb{S}^3_r$ mit $r > 10^{10}$ Lichtjahre.



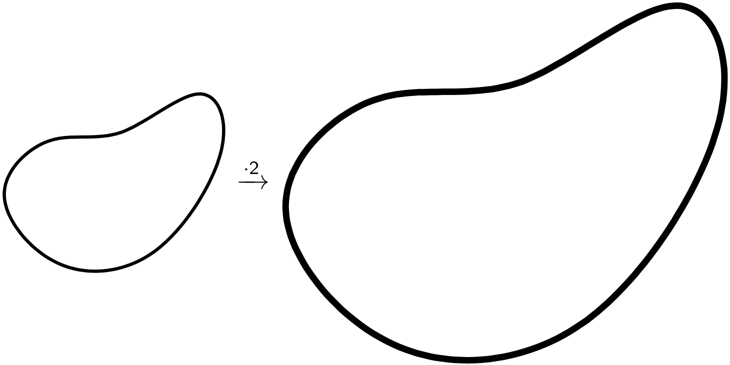
Albert Einstein (1879-1955)

Zwei Fragen

Im $\mathbb{R}^n$, wie groß ist

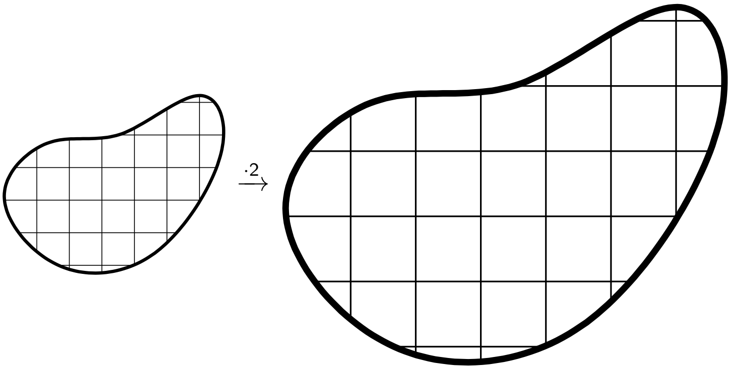
- das n-dim. Volumen des Balles vom Radius r?
- der $(n-1)$-dim. Flächeninhalt der Sphäre vom Radius r?

Skalierung



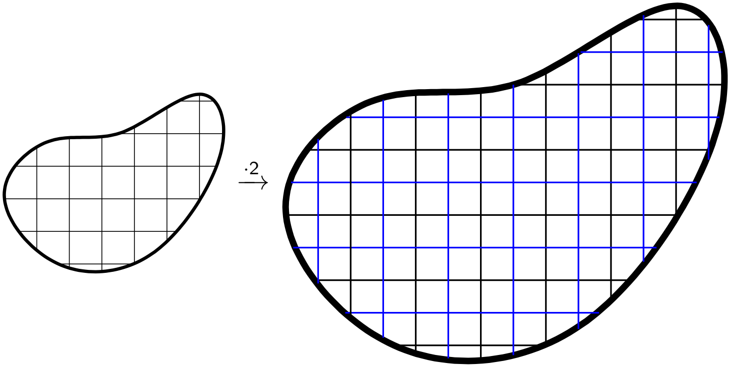
$\vec{u} \mapsto 2\vec{u}$ ("zentrische Streckung")

Skalierung

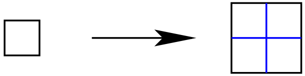


$\vec{u} \mapsto 2\vec{u}$ ("zentrische Streckung")

Skalierung



$\vec{u} \mapsto 2\vec{u}$ ("zentrische Streckung"), 4-facher Flächeninhalt



Skalierung

2-dim. Figur, Vergrößerung um Faktor 2

4-facher Flächeninhalt
2-facher Umfang

Skalierung

2-dim. Figur, Vergrößerung um Faktor 2

4-facher Flächeninhalt
2-facher Umfang

2-dim. Figur, Vergrößerung um Faktor α

α^2-facher Flächeninhalt
α-facher Umfang

Skalierung

2-dim. Figur, Vergrößerung um Faktor 2

4-facher Flächeninhalt
2-facher Umfang

2-dim. Figur, Vergrößerung um Faktor α

α^2-facher Flächeninhalt
α-facher Umfang

3-dim. Figur, Vergrößerung um Faktor α

α^3-faches Volumen
α^2-fache Oberfläche

Skalierung

2-dim. Figur, Vergrößerung um Faktor 2

4-facher Flächeninhalt
2-facher Umfang

2-dim. Figur, Vergrößerung um Faktor α

α^2-facher Flächeninhalt
α-facher Umfang

3-dim. Figur, Vergrößerung um Faktor α

α^3-faches Volumen
α^2-fache Oberfläche

n-dim. Figur, Vergrößerung um Faktor α

α^n-faches n-dim. Volumen
α^{n-1}-fache $(n-1)$-dim. Oberfläche

Skalierung

n-dim. Figur, Vergrößerung um Faktor α

α^n-faches n-dim. Volumen
α^{n-1}-fache $(n-1)$-dim. Oberfläche

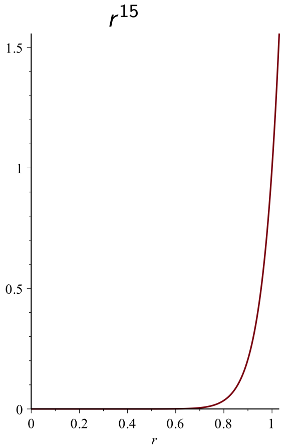
Folgerung

Der n-dim. Würfel mit Seitenlänge a hat Volumen a^n.

Folgerung

Der n-dim. Ball $\mathbb{B}_r^n$ vom Radius r hat n-dim. Volumen $V(\mathbb{B}_r^n) = c_n\, r^n$, wobei c_n eine Konstante ist (das Volumen für $r = 1$).
Die Sphäre $\mathbb{S}_r^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ vom Radius r hat $(n-1)$-dim. Oberfläche $A(\mathbb{S}_r^{n-1}) = d_n\, r^{n-1}$, wobei d_n eine Konstante ist (die Oberfläche für $r = 1$).

In hoher Dimension



Konsequenz aus $V(\mathbb{B}^n_r) = c_n\, r^n$ für $n \gg 1$

99% des Volumens von $\mathbb{B}^n_r$ liegen in einer dünnen Schicht unter der Oberfläche.

Genauer: Für jedes (noch so kleine) $\varepsilon > 0$ und $0 < \delta < r$ liegt mindestens der Anteil $1 - \varepsilon$ des Volumens in der Schicht der Dicke δ unter der Oberfläche, wenn $n > \ln \varepsilon / \ln(1 - \delta/r)$.

Beweis: Der Anteil in der δ-Schicht beträgt $(V(\mathbb{B}^n_r) - V(\mathbb{B}^n_{r-\delta}))/V(\mathbb{B}^n_r) = (r^n - (r-\delta)^n)/r^n = 1 - (1 - \delta/r)^n$. Nach Voraussetzung und wg. $\ln(1 - \delta/r) < 0$ gilt $n \ln(1 - \delta/r) < \ln \varepsilon$, also $(1 - \delta/r)^n < \varepsilon$, also $1 - (1 - \delta/r)^n > 1 - \varepsilon$. $\square$

Zurück zur Volumen-Frage

Im $\mathbb{R}^n$, wie groß ist

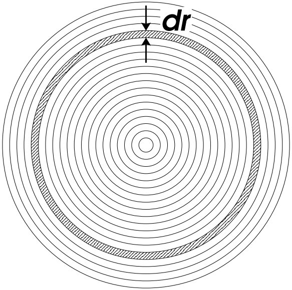
- das Volumen des Balles vom Radius r? $V(\mathbb{B}^n_r) = c_n\, r^n$
- der Flächeninhalt der Sphäre vom Radius r? $A(\mathbb{S}^{n-1}_r) = d_n\, r^{n-1}$

c_n lässt sich aus d_n berechnen

$$V(\mathbb{B}^n_R) = \int_0^R A(\mathbb{S}^{n-1}_r)\, dr$$

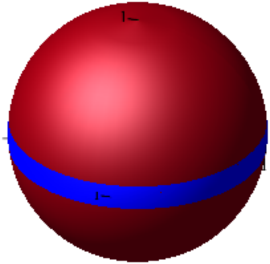
$$\Rightarrow \quad c_n R^n = \int_0^R d_n\, r^{n-1}\, dr = \left[\frac{d_n}{n} r^n\right]_0^R = \frac{d_n}{n} R^n$$

$$\Rightarrow \qquad c_n = \frac{d_n}{n}.$$



Alle d_n wurden berechnet. Die ersten lauten:

n	1	2	3	4	5	6	7
d_n	2	2π	4π	$2\pi^2$	$\frac{8\pi^2}{3}$	π^3	$\frac{16\pi^3}{15}$
c_n	2	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{\pi^2}{2}$	$\frac{8\pi^2}{15}$	$\frac{\pi^3}{6}$	$\frac{16\pi^3}{105}$



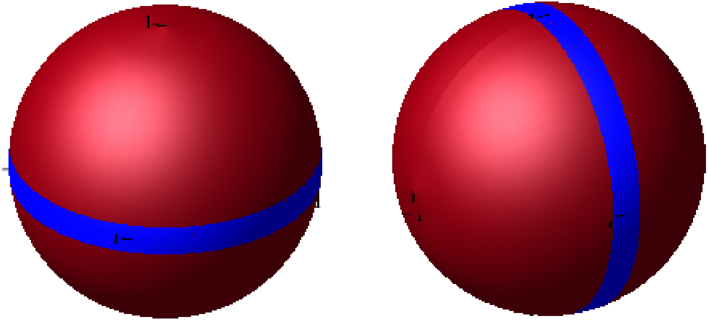
Für $n \gg 1$:

99% der Oberfläche der $\mathbb{S}^{n-1}$ liegen in einem schmalen Gürtel um den Äquator.

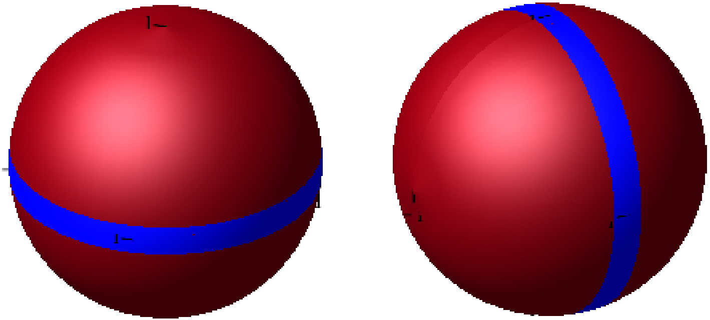
Genauer: Zu allen $0 < \varepsilon < 1$ und $0 < \delta < 1$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n > n_0$ gilt: Ein Anteil von mindestens $1 - \varepsilon$ der Oberfläche der $\mathbb{S}^{n-1}$ liegt in $G_\delta = \left\{\vec{v} \in \mathbb{R}^n : -\delta < v_1 < \delta, \|\vec{v}\| = 1\right\}$.

In Dimension $n = 3$ stimmt das offensichtlich nicht!

Wie kann das sein?



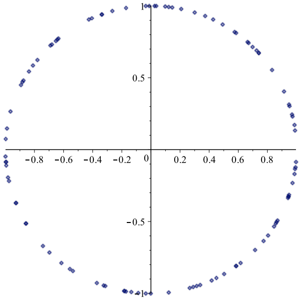
Wie kann das sein?



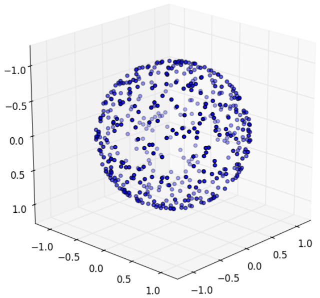
Die Bilder von $\mathbb{S}^2$ sind irreführend. Jeder der Gürtel um Äquatoren (Halbierer) von $\mathbb{S}^{n-1}$ ($n \gg 1$) enthält 99% der Fläche, und die Schnittmenge zweier Gürtel ist keineswegs klein, sondern enthält mindestens 98% der Fläche.

Ich beschreibe nun (in Umrissen) einen Beweis für den Gürtelsatz. Dazu benötige ich ein Hilfsmittel: zufällige Punkte auf $\mathbb{S}^{n-1}$.

Gleichverteilung (jeder Punkt ist "gleich wahrscheinlich")



auf $\mathbb{S}^1$



auf $\mathbb{S}^2$ (Figur von Richard Taylor)

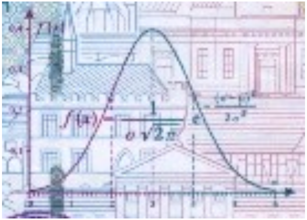
Beweis des Gürtelsatzes

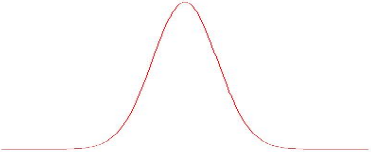
- Wähle $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ zufällig auf $\mathbb{S}^{n-1}$.
- Beachte $\mathbb{E}v_1 = 0$, weil die Verteilung symmetrisch um den Äquator ist.
- Wir berechnen $\mathbb{E}v_1^2$ ($=$ Varianz $=$ Standardabweichung^2).
- Wegen $v_1^2 + \ldots + v_n^2 = 1$ ist $\mathbb{E}(v_1^2 + \ldots + v_n^2) = 1$.
- Andererseits ist $\mathbb{E}(v_1^2 + \ldots + v_n^2) = (\mathbb{E}v_1^2) + \ldots + (\mathbb{E}v_n^2)$.
- Nun gibt es Drehungen, die die Achsen vertauschen, und die Gleichverteilung ist invariant unter Drehungen.
- Daher ist $\mathbb{E}v_1^2 = \mathbb{E}v_2^2 = \ldots = \mathbb{E}v_n^2$.
- Also ist $n\mathbb{E}v_1^2 = 1$, oder $\mathbb{E}v_1^2 = 1/n$.
- Die Tschebyscheff-Ungleichung besagt, dass eine Zufallsvariable mit Wahrscheinlichkeit $\geq 99\%$ innerhalb von 10 Standardabweichungen des Mittelwerts liegt.
- Also gilt mit W'keit $\geq 99\%$, dass $-10/\sqrt{n} < v_1 < 10/\sqrt{n}$.
- Wähle $n > 100/\delta^2$, dann ist $\delta > 10/\sqrt{n}$, also $-\delta < v_1 < \delta$. $\square$

Die Gaußsche Normalverteilung

Carl Friedrich Gauß (1777-1855)

Die Gaußsche Normalverteilung

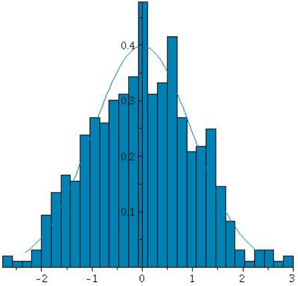




Dichtefunktion

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$\mu =$ Mittelwert, $\sigma =$ Breite

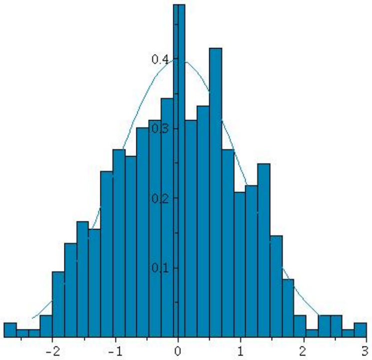


Beispiel: Histogramm der Körpergröße in einer Population

Die Komponenten von $\vec{v} \in \mathbb{S}^{n-1}$, $n \gg 1$, sind Gauß-verteilt

Wähle $\vec{v}$ zufällig auf $\mathbb{S}^{n-1}$, $n \gg 1$. $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ liefert n Punkte:

Zeichne Histogramm:



Gauß-verteilt! Mit Mittel $\mu = 0$, Breite $\sigma = 1/\sqrt{n}$

Anwendung in der Thermodynamik

Wärme ist eine ständige ungeordnete Bewegung der Atome und Moleküle, und Temperatur ein Maß für die Intensität dieser Bewegung. In einem Festkörper haften die Atome aneinander, in einem Gas fliegen die Moleküle (wie N_2 in der Luft) herum. 4 Liter Luft (bei Raumtemperatur und -druck) enthalten etwa $N = 10^{23}$ Moleküle.

Maxwells Geschw.-Verteilung (1866)

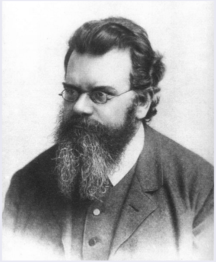
$$f(v_1) = \frac{1}{Z} \exp\Big(-\frac{mv_1^2}{2kT}\Big)$$

Z = Normierungs-Konstante
m = Masse eines Moleküls
k = Boltzmann-Konstante
$= 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K
T = absolute Temperatur
($0°$C = 273.16 K)

= Gauß-Verteilung mit $\mu = 0$ und $\sigma = \sqrt{kT/m}$

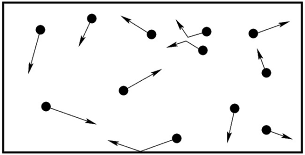
James Clerk Maxwell (1831-1879)

Boltzmanns Erklärung der Maxwell-Verteilung (1872)



Ludwig Boltzmann (1844–1906)

- Boltzmanns Modell: N Billard-Kugeln fliegen in einem starren Kasten herum, kollidieren miteinander und mit den Wänden des Kastens.



- Zustand des Systems zur Zeit t: Liste die Orte und Geschwindigkeiten aller Billard-Kugeln auf:

$$X = \underbrace{(\vec{r}_1, \vec{v}_1, \ldots, \vec{r}_N, \vec{v}_N)}_{\text{Phasenpunkt}} \quad \in \quad \underbrace{\mathbb{R}^{6N}}_{\text{Phasenraum}}$$

- $X(t)$ bewegt sich im Laufe der Zeit t im Phasenraum $\mathbb{R}^{6N}$ umher.

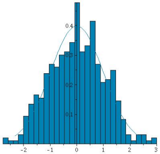
Boltzmanns Erklärung der Maxwell-Verteilung

- Energie $E(X) = \frac{m}{2}\|\vec{v}_1\|^2 + \ldots + \frac{m}{2}\|\vec{v}_N\|^2$
- Energie-Erhaltung: $E(X(t))$ hängt nicht von t ab.
- Betrachte jetzt nur die Geschwindigkeiten: $V = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_N) \in \mathbb{R}^{3N}$.
- $E(X) = E(V)$
- $V(t)$ bleibt auf der "Fläche" konstanter Energie $\{E(V) = E_0\} \subset \mathbb{R}^{3N}$, und das ist gerade die Sphäre vom Radius vom Radius $r = \sqrt{2E_0/m}$ in $n = 3N$ Dimensionen, $\mathbb{S}_r^{n-1}$.
- Wir wissen: Für $n \gg 1$ und ein zufälliges $\vec{v} \in \mathbb{S}^{n-1}$ ist die empirische Verteilung der $v_1, \ldots, v_n$ eine Gauß-Verteilung mit $\mu = 0$ und $\sigma = 1/\sqrt{n}$.
- Daher: Für zufälliges $V \in \mathbb{S}_r^{n-1}$ ist die empirische Verteilung der $v_1, \ldots, v_n$ eine Gauß-Verteilung mit $\mu = 0$ und $\sigma = \sqrt{2E_0/mn}$, also gerade die Maxwell-Verteilung mit $kT = 2E_0/3N$.

Boltzmanns Erklärung der Maxwell-Verteilung

Maxwell-Verteilung ist typisch

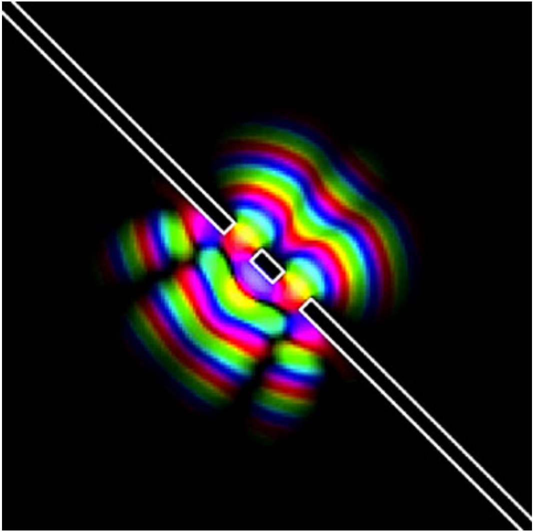
Für die meisten Phasenpunkte mit großem N liegt die empirische Verteilung der Geschwindigkeiten nahe an der Maxwell-Verteilung.



Allgemeine Regel: "Die meisten Zustände sind im Wärme-Gleichgewicht."

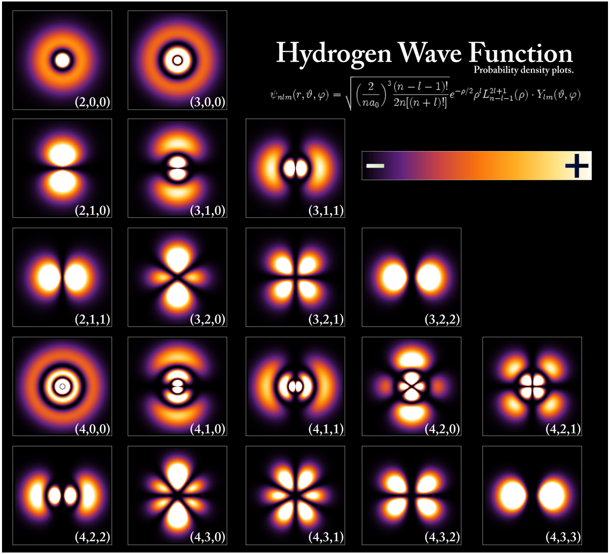
Eine Anwendung aus der Quantenphysik (und aus dem 21. Jahrhundert)

Quantenphysik: Wellenfunktion ψ



Video von Bernd Thaller, Uni Graz

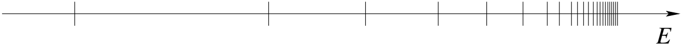
Quantenphysik: Wellenfunktion ψ



In der Chemie nennt man die möglichen stationären (zeit-unabhängigen) Wellenfunktionen eines Elektrons im Atom Orbitale.

Energie-Niveaus

In der Quantenmechanik treten für die Energie nur bestimmte (diskrete) Werte auf:



Bei einem System aus N Atomen beträgt bei typischen Energien der Abstand zweier Energie-Niveaus nur etwa

$$10^{-N} \text{ Joule}\,.$$

Das heißt, für ein Gas mit $N = 10^{23}$ Atomen liegen in einem Energie-Interval $[E, E + 1\,\text{Joule}]$ der Länge 1 Joule etwa

$$10^{10^{23}} \text{ Energie-Niveaus.}$$

Die Wellenfunktionen zu diesem Energie-Intervall bilden einen Raum (genannt Hilbert-Raum), dessen Dimension das Doppelte der Zahl der Energie-Niveaus ist, $\mathbb{R}^n$ mit $n = 2 \cdot 10^{10^{23}}$. Die physikalisch möglichen Wellenfunktionen ψ haben $\|\psi\| = 1$, liegen also auf der Einheits-Sphäre $\mathbb{S}^{n-1}$.

Kanonische Typischkeit

[J. Gemmer, G. Mahler, M. Michel: *Quantum Thermodynamics* 2004]

[S. Popescu, A. Short, A. Winter: *Nature Physics* 2006]

[S. Goldstein, J. Lebowitz, R. Tumulka, N. Zanghì: *Physical Review Letters* 2006]

Theorem über kanonische Typischkeit

Für $> 99,9999\%$ aller Wellenfunktionen $\in \mathbb{S}^{n-1}$ zu einem makroskopischen Energie-Intervall liegt der scheinbare Zustand eines Teilsystems von $< 25\%$ aller Atome näher als 10^{-100} an einem Zustand des Wärme-Gleichgewichts (einem "kanonischen Zustand").

Dies ist eine Variante der Regel: "Die meisten Wellenfunktionen eines makroskopischen Systems sind im Wärme-Gleichgewicht."

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!