

Mathematische Physik: Klassische Mechanik*

Sommersemester 2013

Stefan Teufel
Mathematisches Institut
Uni Tübingen

13. September 2013

* Dieses Skriptum ist nur zum Gebrauch parallel zum Besuch der Vorlesung gedacht. Das Studium des Skripts kann den Besuch der Vorlesung **nicht** ersetzen! Falls Sie Fehler finden, teilen Sie mir diese (auch die offensichtlichen) bitte mit!

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Analysis auf Mannigfaltigkeiten | 5 |
| 1.1 | Mannigfaltigkeiten | 5 |
| 1.2 | Das Tangentialbündel | 10 |
| 1.3 | Tangentialvektoren als Derivationen | 13 |
| 1.4 | Flüsse auf Mannigfaltigkeiten | 15 |
| 1.5 | Tensoren | 19 |
| 1.6 | Ableitungen | 31 |
| 1.7 | Integration | 37 |
| 2 | Hamiltonsche Mechanik und symplektische Geometrie | 45 |
| 2.1 | Symplektische Vektorräume | 45 |
| 2.2 | Hamiltonsche Mechanik auf symplektischen Mannigfaltigkeiten | 51 |
| 2.3 | Integrable Systeme und das Liouville-Arnold Theorem | 62 |
| 2.4 | Das Mittelungsprinzip | 70 |
| 2.5 | Störungstheorie integrierbarer Systeme und das KAM-Theorem | 75 |
| 3 | Bemerkungen zur Lagrangeschen Mechanik | 85 |

Ziel dieser Vorlesung ist es, mathematische Methoden und Gebiete am Leitthema der klassischen Mechanik kennenzulernen. Im Mittelpunkt stehen dabei die Differentialgeometrie und die symplektische Geometrie, sowie Konzepte der Störungstheorie.

In der klassischen Mechanik beschreibt man die zeitliche Entwicklung von Systemen, deren Zustand zum Zeitpunkt t durch die **Konfiguration** $x(t)$ beschrieben wird. Beispielsweise ist in einem System aus N Partikeln im dreidimensionalen Raum die Konfiguration $x(t) = (x_1(t), \dots, x_N(t)) \in \mathbb{R}^{3N}$ der Vektor im **Konfigurationsraum** \mathbb{R}^{3N} den man aus den N Ortsvektoren $x_j(t)$ der Teilchen erhält. Im Allgemeinen wird $x(t)$ ein Punkt in einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M sein.

In der Newtonschen Formulierung erhält man die möglichen Trajektorien $t \mapsto x(t)$ im Konfigurationsraum als Lösungen der **Newtonschen Bewegungsgleichung**,

$$m \ddot{x}(t) = F(x(t), \dot{x}(t), t),$$

einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung. In dieser Notation ist $\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}x(t)$ und $\ddot{x}(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t)$. Die Funktion $F : TM \times \mathbb{R} \rightarrow T(TM)$ heißt Kraft und ist im Allgemeinen eine Funktion der Konfiguration und ihrer zeitlichen Änderung, der Geschwindigkeit. Geometrisch bedeutet das, dass F eine Funktion auf dem Tangentialbündel TM an M ist. Schließlich bezeichnet m die Massenmatrix, den Proportionalitätsfaktor zwischen Kraft F und Beschleunigung $\ddot{x}(t)$.

Inhalt dieser Vorlesung wird u.a. sein, die erwähnten Begriffe mathematisch präzise zu verstehen und eine geometrisch noch elegantere Formulierung der klassischen Mechanik, die Hamiltonsche Mechanik, kennenzulernen und zu analysieren.

Bevor wir uns der Mathematik zuwenden, noch zwei einleitende Beispiele aus der Newtonschen Mechanik:

• **Bewegung der Erde um die Sonne (idealisiert):**

Die Sonne wird als Punktmasse M bei $0 \in \mathbb{R}^3$ und die Erde als Punktmasse m am Ort $x(t) \in \mathbb{R}^3$ modelliert. Die Anziehungskraft wirkt in Richtung $-x(t)$ und ist proportional zu

$$\frac{mM}{|0 - x(t)|^2} = \frac{mM}{|x(t)|^2}.$$

Die Newtonsche Gleichung lautet also

$$m \ddot{x}(t) = -\frac{GmM}{|x(t)|^2} \frac{x(t)}{|x(t)|}.$$

Das ist eine autonome Differentialgleichung 2. Ordnung auf dem Konfigurationsraum $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Als Anfangsdaten werden $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = v_0$ benötigt. Die zugehörigen Lösungen sind explizit bekannt (Keplerbahnen).

Wie wir sehen werden, haben die Differentialgleichungen der klassischen Mechanik eine spezielle Struktur, insbesondere spielen Erhaltungsgrößen eine wichtige Rolle. Mit deren Hilfe kann man weitreichende Informationen über Lösungen erlangen, ohne die Gleichungen explizit zu lösen. Auf dem Tangentialbündel $(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^3$ seien

$$E(x, v) = \frac{1}{2} m |v|^2 - \frac{GmM}{|x|}$$

die Gesamtenergie,

$$L(x, v) = m v \times x$$

der Drehimpuls und

$$F(x, v) = m v \times L(x, v) + \frac{Gm^2M^2}{m+M} \frac{x}{|x|}$$

der Lenzsche Vektor. Entlang der Lösungen setzen wir $E(t) := E(x(t), \dot{x}(t))$ und definieren analog $L(t)$ und $F(t)$. Dann existieren die Lösungen für alle Zeiten falls $L(t) = L(0) \neq 0$ und es gilt auch $E(t) = E(0)$ und $F(t) = F(0)$. Die "Untermannigfaltigkeiten" gegeben durch

$$M = \{(x, v) \in (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^3 \mid E(x, v) = E(x_0, v_0), L(x, v) = L(x_0, v_0), F(x, v) = F(x_0, v_0)\}$$

auf denen die Lösungen also liegen müssen haben die Form von

- Ellipsen falls $E(t) = E(0) < 0$
- Parabeln falls $E(t) = E(0) = 0$
- Hyperbeln falls $E(t) = E(0) > 0$.

• Starres Pendel (idealisiert)

Eine Masse m am Ort $x(t) \in \mathbb{R}^2$ sei durch einen masselosen Stab der Länge l mit dem Ursprung verbunden. Man spricht von einer Zwangsbedingung $|x(t)| = l$. Der Konfigurationsraum ist statt \mathbb{R}^2 jetzt die eindimensionale Mannigfaltigkeit

$$M = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = l\} \cong S^1.$$

Auf die Masse wirke die konstante Schwerkraft $F = -m g e_2 = \text{const.}$ in Richtung $-e_2$. Aufgrund der Zwangsbedingung wirkt aber nur der Anteil tangential an M also

$$m \ddot{x}(t) = F_{\parallel}(x(t))$$

oder mit $\alpha \in [0, 2\pi)$

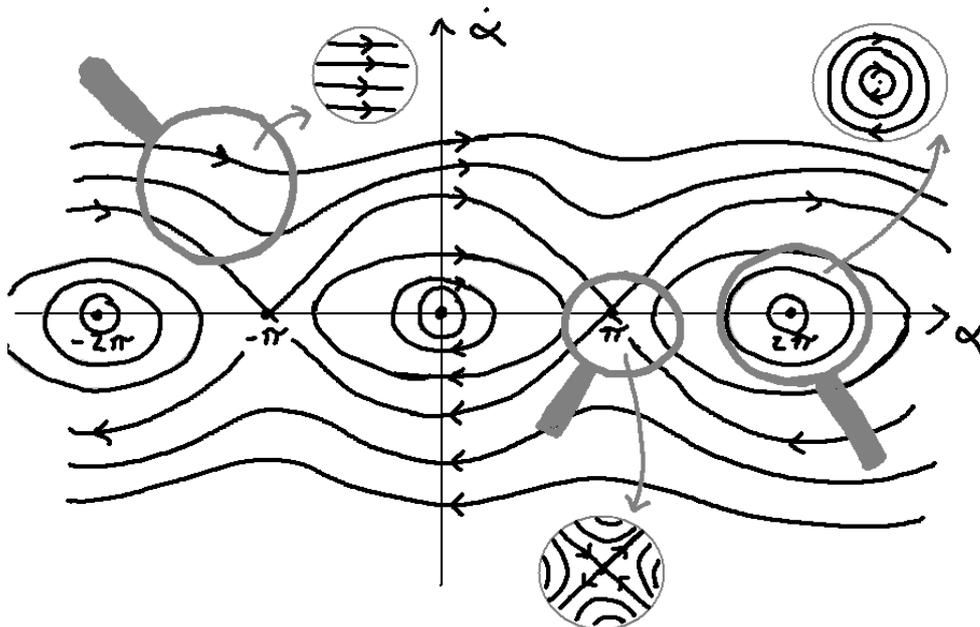
$$m l \ddot{\alpha}(t) = -m g \sin \alpha(t).$$

Die Lösungen existieren wieder global.

Fixpunkte: $\alpha(t) = 0 \Rightarrow \ddot{\alpha}(t) = 0$ ist ein stabiler Fixpunkt, $\alpha(t) = \pi \Rightarrow \ddot{\alpha}(t) = 0$ ist ein instabiler Fixpunkt.

Das **Phasenportrait** könne wir sofort zeichnen, wenn wir die Gleichung als System erster Ordnung schreiben, also als Vektorfeld auf dem \mathbb{R}^2 :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \alpha \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ -\frac{g}{l} \sin \alpha \end{pmatrix}.$$



Fixpunkte und das Phasenportrait spielen eine wichtige Rolle im qualitativen Verständnis der Lösungen.

Diese beiden Beispiele sollten lediglich einen Vorgeschmack für diejenigen Hörer geben, die bisher keinerlei Kontakt zur klassischen Mechanik hatten. Weiterhin motivieren sie zumindest ein wenig, warum einerseits Erhaltungsgrößen (und die der Energieerhaltung zugrunde liegende Hamiltonsche bzw. symplektische Struktur) eine wichtige Rolle spielen und andererseits Mannigfaltigkeiten (hier S^1) als Konfigurationsräume auftauchen.

Abschließend noch ein paar Literaturvorschläge: Eher mathematische Bücher die begleitend zur Vorlesung herangezogen werden können sind

- V. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer, Graduate Texts in Mathematics,
- A. Knauf, *Mathematische Physik: Klassische Mechnik*, Springer-Lehrbuch Masterclass,
- W. Thirring, *Lehrbuch der Mathematischen Physik*, Band 1, Springer,
- R. Abraham, J.E. Marsden, *Foundations of Mechanics*, Addison-Wesley.

Im Stile der theoretischen Physik geschrieben sind

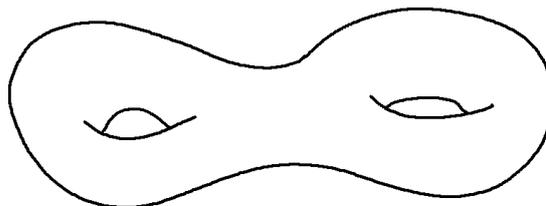
- F. Scheck, *Theoretische Physik 1*, Springer,
- N. Straumann, *Klassische Mechanik*, Lecture Notes in Physics, Springer.

Aus den genannten Büchern habe ich bei der Erstellung dieses Skriptes vieles übernommen, ohne jeweils im einzelnen zu zitieren.

1 Analysis auf Mannigfaltigkeiten

1.1 Mannigfaltigkeiten

Anschaulich gesprochen ist eine Mannigfaltigkeit ein topologischer Raum, der im „Kleinen“ aussieht wie der \mathbb{R}^n , global aber möglicherweise eine andere Form (Topologie) hat. Eine gekrümmte Fläche wie im Bild ist beispielsweise eine Mannigfaltigkeit.



Im Gegensatz zu meiner Vorlesung MaPhy 4 bzw. Analysis 3 betrachten wir im Folgenden abstrakte Mannigfaltigkeiten und nicht nur Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n .

Daraus ergeben sich zwei wesentliche Unterschiede:

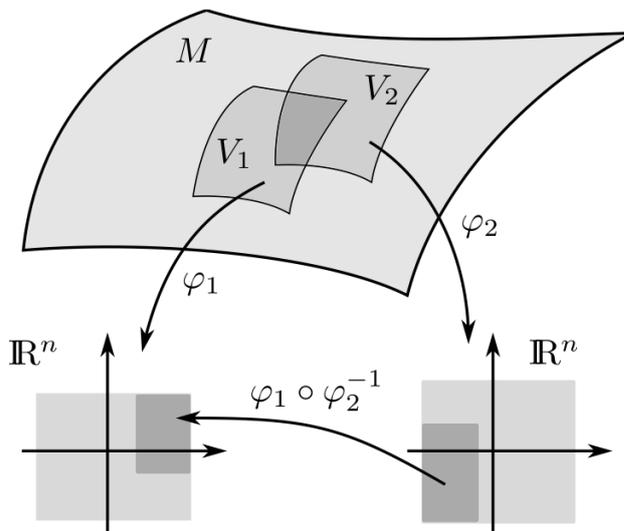
- M ist nicht mehr in kanonischer Weise mit einer Topologie versehen. Zur Erinnerung: $M \subset \mathbb{R}^n$ trägt die induzierte Topologie, auch Relativtopologie genannt.
- Für eine Parametrisierung $f : \mathbb{R}^k \supset U \rightarrow M$ ist nicht klar, was Differenzierbarkeit bedeuten soll, falls $M \not\subset \mathbb{R}^n$.

1.1 Definition. Karten

Sei M ein topologischer Raum. Eine **Karte** auf M ist ein Tupel (V, φ) bestehend aus einer offenen Menge $V \subset M$ und einem Homöomorphismus $\varphi : V \rightarrow \varphi(V) \subset \mathbb{R}^n$ auf eine offene Teilmenge $\varphi(V)$ des \mathbb{R}^n .

Zwei Karten (V_1, φ_1) und (V_2, φ_2) auf M heißen **verträglich**, falls $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, oder falls die sinngemäß eingeschränkte Abbildung $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ ein Diffeomorphismus zwischen offenen Gebieten des \mathbb{R}^n ist.

Die Abbildungen $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ bzw. $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ heißen **Kartenwechsel** oder **Übergangsfunktionen**.



1.2 Definition. Atlas

Ein **Atlas** ist eine Menge von paarweise verträglichen Karten (V_j, φ_j) in den \mathbb{R}^n , die M überdecken, d.h. $M = \cup_j V_j$.

Zwei Atlanten heißen **äquivalent**, falls je zwei Karten verträglich sind.

Äquivalenz von Atlanten ist offenbar eine Äquivalenzrelation.

1.3 Definition. Differenzierbare Mannigfaltigkeit

Ein topologischer Hausdorffraum M zusammen mit einer Äquivalenzklasse von Atlanten von M heißt **differenzierbare Mannigfaltigkeit**. Die **Dimension** $\dim M$ der Mannigfaltigkeit ist gleich der Dimension n des Bildraums \mathbb{R}^n der Karten.

1.4 Erinnerung. Topologischer Raum

Ein **topologischer Raum** ist ein Paar (M, \mathcal{O}) , bestehend aus einer Menge M und einer Menge \mathcal{O} von Teilmengen von M (genannt „offene Mengen“) derart, dass

- (i) \emptyset und M offen sind,
- (ii) beliebige Vereinigungen offener Mengen wieder offen sind,
- (iii) der Durchschnitt von je zwei offenen Mengen wieder offen ist.

Ein topologischer Raum (M, \mathcal{O}) heißt **Hausdorff**, falls \mathcal{O} Punkte in M trennt, d.h. für $x, y \in M$ mit $x \neq y$ existieren offene Mengen $U, V \in \mathcal{O}$ mit $x \in U, y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$.

1.5 Beispiele. (a) Der \mathbb{R}^n , offene Teilmengen des \mathbb{R}^n und die Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n aus MaPhy 4 bzw. Analysis 3 sind differenzierbare Mannigfaltigkeiten.

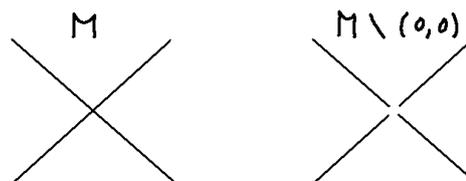
(b) Beachte, dass wir in Definition 1.3 von einer Einbettung der Mannigfaltigkeit völlig abgesehen haben. Beispielsweise ist \mathbb{R}/\mathbb{Z} ein topologischer Raum und wird mit den Karten

$$\varphi_1 = \text{Id}|_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} \quad \text{und} \quad \varphi_2 = \text{Id}|_{(0,1)}$$

zu einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit, welche diffeomorph zur Kreislinie S^1 ist. Sie erbt zwar die Topologie von \mathbb{R} , läßt sich aber nicht in \mathbb{R} einbetten, sondern nur in \mathbb{R}^2 .

(c) Die n^2 Elemente einer $n \times n$ -Matrix definieren einen Punkt in \mathbb{R}^{n^2} . So lassen sich die $n \times n$ -Matrizen mit \mathbb{R}^{n^2} identifizieren und übernehmen dessen Struktur als Mannigfaltigkeit. Die invertierbaren Matrizen A , also $\det A \neq 0$, bilden als offene Teilmenge eine Untermannigfaltigkeit, die Gruppe $GL(n)$.

(d) $M = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| = |x_2|\}$ mit der Relativtopologie ist keine Mannigfaltigkeit, da jede Umgebung von $(0, 0) \in M$ ohne diesen Punkt in vier statt in zwei Komponenten zerfällt.



Deshalb kann keine Umgebung von $(0, 0)$ homöomorph auf ein offenes Intervall abgebildet werden, da die Zahl der Zusammenhangskomponenten unter Homöomorphismen invariant bleibt.

(e) Die Forderung an die Topologie auf M Hausdorff zu sein ist nicht redundant, d.h. sie folgt nicht automatisch aus der lokalen Homöomorphie zu \mathbb{R}^n .

Beispiel: Sei $M = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cup \{p_1\} \cup \{p_2\}$ versehen mit den Karten

$$\varphi_j : \mathbb{R} \setminus \{0\} \cup \{p_j\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi_j(x) = \begin{cases} x & \text{falls } x \neq p_j \\ 0 & \text{falls } x = p_j \end{cases}$$

Dann sind die Kartenwechsel $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} = \text{Id}|_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}$ zwar Diffeomorphismen, aber die induzierte Topologie ist nicht Hausdorff: $\{p_1\}$ und $\{p_2\}$ haben keine disjunkten Umgebungen, da je zwei Umgebungen von $0 \in \mathbb{R}$ auch noch weitere Punkte gemeinsam haben.

- (f) Man kann aus zwei Mannigfaltigkeiten M_1 und M_2 die **Produktmannigfaltigkeit** $M_1 \times M_2$ bilden. Dazu stattet man das kartesische Produkt $M_1 \times M_2$ zunächst mit der Produkttopologie aus und überdeckt es dann mit Produktkarten der Form $(V_1, \varphi_1) \times (V_2, \varphi_2) = (V_1 \times V_2, (\varphi_1, \varphi_2))$.

- 1.6 Bemerkung.** (a) Statt Karte sagt man auch oft lokales Koordinatensystem. Die Inverse φ^{-1} wird auch als Parametrisierung bezeichnet.
 (b) Dass M durch eine Äquivalenzklasse von Atlanten und nicht durch einen bestimmten Atlas definiert ist, stellt eine mathematische Formulierung der „allgemeinen Kovarianz“ dar: jedes taugliche Koordinatensystem ist gleichberechtigt.
 (c) Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit hat noch keine metrische Struktur. Abstände zwischen Punkten, auch innerhalb eines Kartengebiets, sind noch nicht definiert.

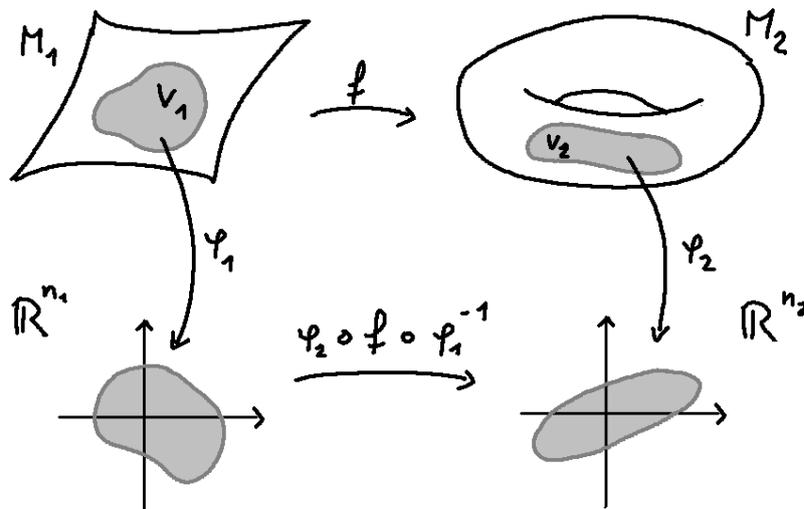
1.7 Definition. Differenzierbare Abbildungen, Immersion, Submersion

Seien M_1 und M_2 Mannigfaltigkeiten mit $\dim M_1 = n_1$ und $\dim M_2 = n_2$.

- (a) Eine stetige Abbildung $f : M_1 \rightarrow M_2$ heißt **p -mal differenzierbar**, falls für jede Karte φ_1 eines Atlas von M_1 und für jede Karte φ_2 eines Atlas von M_2 die Abbildung

$$\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{R}^{n_1} \supset \varphi_1(V_1 \cap f^{-1}(V_2)) \rightarrow \mathbb{R}^{n_2}$$

p -mal stetig differenzierbar ist. Wir schreiben dann $f \in C^p(M_1, M_2)$.



- (b) $f : M_1 \rightarrow M_2$ heißt **Immersion** oder **immersiv**, falls $f \in C^1$ ist, $n_1 \leq n_2$ und $\text{Rang}D(\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1}) = n_1$ für alle Karten (später: falls Tf injektiv)
 (c) $f : M_1 \rightarrow M_2$ heißt **Submersion** oder **submersiv**, falls $f \in C^1$ ist, $n_1 \geq n_2$ und $\text{Rang}D(\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1}) = n_2$ für alle Karten (später: falls Tf surjektiv).

Untermannigfaltigkeiten können wir nun wie in MaPhy 4 bzw. Analysis 3 definieren.

1.8 Definition. Untermannigfaltigkeit

Sei M eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann heißt $N \subset M$ eine **k -dimensionale Untermannigfaltigkeit**, wenn eine der drei folgenden äquivalenten Situationen vorliegt:

- (a) Zu jedem Punkt $x \in N$ existieren eine offene Umgebung $V \subset N$ von x , ein Gebiet $U \subset \mathbb{R}^k$ und eine immersiver Homöomorphismus

$$f : U \rightarrow V.$$

($\hat{=}$ regulärer Parametrisierung aus MaPhy 4 bzw. Analysis 3)

1 Analysis auf Mannigfaltigkeiten

- (b) Zu jedem Punkt $x \in N$ existieren eine offene Umgebung $V \subset M$ von x und eine Submersion $F : V \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ so, dass

$$N \cap V = \{y \in V \mid F(y) = 0\}.$$

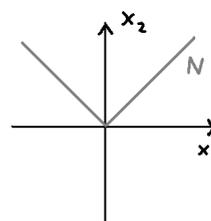
- (c) Zu jedem $x \in N$ existiert eine Karte (V, φ) mit

$$\varphi(y) = (q_1, \dots, q_k, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-k}) \quad \text{für alle } y \in N \cap V.$$

(Vgl. Lemma zum „Glattbügeln“ aus MaPhy 4 bzw. Analysis 3.)

1.9 Bemerkung. Die Karten aus Definition 1.8 (c) machen eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit N selbst wieder zu einer k -dimensionalen Mannigfaltigkeit, indem man die letzten $n - k$ Komponenten weglässt.

1.10 Beispiel. Sei $M = \mathbb{R}^2$, dann ist $N = \{x \in M \mid x_2 = |x_1|\}$ **keine** Untermannigfaltigkeit, kann aber mit einer Mannigfaltigkeitsstruktur versehen werden. Z.B. macht der Atlas $(V = N, \varphi : (x_1, x_2) \mapsto x_1)$ die Menge N zu einer Mannigfaltigkeit, welche diffeomorph zu \mathbb{R} ist.



1.11 Definition. C^p -Diffeomorphismus

Ein C^p -Diffeomorphismus f zweier Mannigfaltigkeiten M_1 und M_2 ist eine Bijektion $f : M_1 \rightarrow M_2$, für die $f \in C^p$ und $f^{-1} \in C^p$ sind. Wenn wir von einem Diffeomorphismus sprechen, ohne p zu spezifizieren, ist immer $p \geq 1$ gemeint.

1.12 Beispiel. Jede Karte (V, φ) ist ein Diffeomorphismus der Untermannigfaltigkeit $V \subset M$ auf $\varphi(V) \subset \mathbb{R}^n$.

1.13 Bemerkung. In den Übungen wird gezeigt: Zwei Mannigfaltigkeitsstrukturen über demselben topologischen Raum M können diffeomorph aber trotzdem verschieden sein. Sie sind genau dann gleich, wenn die Identität auf M ein Diffeomorphismus ist.

Anschaulich ist klar, dass der Rand einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit, falls er glatt ist, selbst eine Mannigfaltigkeit der Dimension $n - 1$ ist. Das wollen wir nun präzisieren, indem wir berandete Mannigfaltigkeiten definieren.

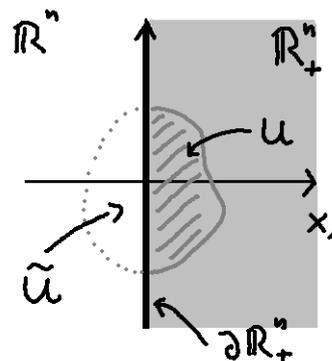
1.14 Definition. Randkarte

Seien

$$\mathbb{R}_+^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0\} \quad \text{und} \quad \partial \mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\}.$$

Es heißt $U \subset \mathbb{R}_+^n$ offen bzgl. der Relativtopologie, wenn es ein offenes $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ mit $U = \tilde{U} \cap \mathbb{R}_+^n$ gibt. Eine Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt **differenzierbar**, falls es ein offenes $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ und ein differenzierbares $\tilde{f} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ gibt, mit $\tilde{f}|_U = f$.

Eine **Randkarte** für einen topologischen Raum M ist ein Tupel (V, φ) bestehend aus einer offenen Menge $V \subset M$ und einem Homöomorphismus $\varphi : V \rightarrow \varphi(V) \subset \mathbb{R}_+^n$.

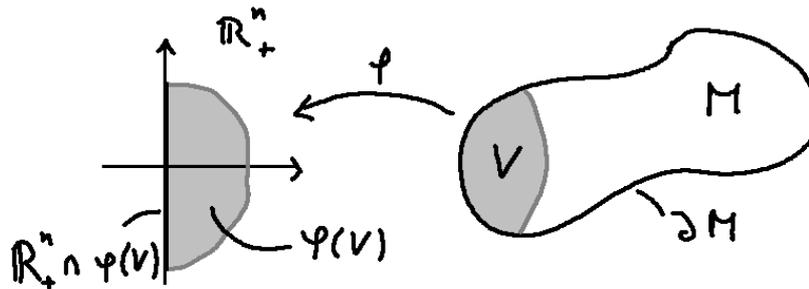


1.15 Definition. Mannigfaltigkeit mit Rand

Sei M topologischer Hausdorffraum. Die Struktur einer **berandeten Mannigfaltigkeit** auf M wird durch eine Überdeckung (V_i, φ_i) aus Randkarten gegeben, die wieder im Sinne von Definition 1.1 verträglich sind.

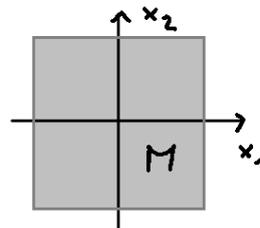
Der **Rand** von M ist

$$\partial M := \bigcup_i \varphi_i^{-1}(\varphi_i(V_i) \cap \partial \mathbb{R}_+^n).$$



1.16 Beispiele. (a) Das abgeschlossene Intervall $M = [a, b]$ ist mit den Karten $V_1 = [a, b)$, $\varphi_1 : x \mapsto x - a$, und $V_2 = (a, b]$, $\varphi_2 : x \mapsto b - x$, eine berandete Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial M = \{a\} \cup \{b\}$.

(b) Das abgeschlossene Einheitsquadrat $M = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1\}$ ist keine (Unter)-Mannigfaltigkeit mit Rand, da M Ecken hat. Das Innere von M ist als offene Teilmenge von \mathbb{R}^2 aber natürlich eine Mannigfaltigkeit.



1.17 Bemerkung. (a) Der Rand ∂M einer Mannigfaltigkeit ist vom topologischen Rand, welcher von der Einbettung abhängt, zu unterscheiden. So ist der topologische Rand von $\partial \mathbb{R}_+^n \subset \mathbb{R}^n$ gleich $\partial \mathbb{R}_+^n$, als Mannigfaltigkeit ist $\partial \mathbb{R}_+^n$ aber randlos.

(b) Eine berandete Mannigfaltigkeit muss nicht kompakt sein (z.B. $M = (0, 1]$) und eine kompakte Mannigfaltigkeit muss keinen Rand haben (z.B. S^1).

1.18 Folgerung. $M \setminus \partial M$ und ∂M sind Mannigfaltigkeiten ohne Rand mit $\dim M \setminus \partial M = n$ und $\dim \partial M = n - 1$.

Beweis. Sei (V_i, φ_i) mit $\varphi_i : V_i \rightarrow \mathbb{R}_+^n$ ein Atlas für die berandete Mannigfaltigkeit M . Dann ist

$$(V_i \cap (M \setminus \partial M), \varphi_i|_{V_i \cap (M \setminus \partial M)})$$

ein Atlas für $M \setminus \partial M$. Für ∂M setze $U_i = V_i \cap \partial M$ und $\tilde{\varphi}_i : U_i \rightarrow \partial \mathbb{R}_+^n \cong \mathbb{R}^{n-1}$, $\tilde{\varphi}_i = \varphi_i|_{U_i}$. Dann ist $(U_i, \tilde{\varphi}_i)$ ein Atlas für ∂M . □

1.2 Das Tangentialbündel

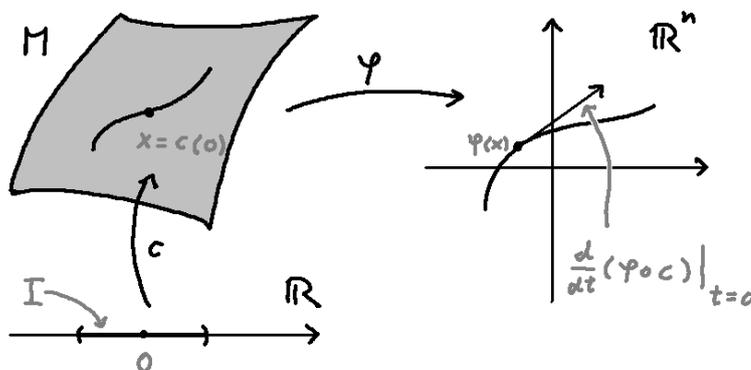
Während man sich bei Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n den Tangentialraum in einem Punkt $x \in M$ noch als in x tangential angehefteten Unterraum vorstellen kann (und sollte), liefert diese Vorstellung bei abstrakten Mannigfaltigkeiten keine Definition mehr. Man kann aber immer noch Tangentialvektoren als Äquivalenzklassen von Kurven durch einen Punkt definieren.

Es bezeichne C_x die Menge der C^1 -Kurven $c : I \rightarrow M$ mit $0 \in I \subset \mathbb{R}$ offen und $c(0) = x$.

1.19 Definition. Tangentialvektoren und der Tangentialraum

- (a) Ein **Tangentialvektor** v an eine Mannigfaltigkeit M im Punkt $x \in M$ ist eine Äquivalenzklasse $[c]_x$ von Kurven $c \in C_x$, wobei zwei Kurven c_1 und c_2 in C_x äquivalent heißen, falls in einer (und somit in jeder) Karte (V, φ) mit $x \in V$ gilt:

$$\left. \frac{d}{dt}(\varphi \circ c_1)(t) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}(\varphi \circ c_2)(t) \right|_{t=0}.$$



- (b) Die Menge $T_x M$ der Tangentialvektoren an M in x heißt der **Tangentialraum** an M in x . Für jede Karte (V, φ) mit $x \in V$ ist die Abbildung

$$T\varphi : T_x M \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad [c]_x \mapsto \left. \frac{d}{dt}(\varphi \circ c)(t) \right|_{t=0}$$

eine Bijektion. Die durch $T\varphi$ auf $T_x M$ induzierte Vektorraumstruktur ist unabhängig von φ und macht $T_x M$ somit in natürlicher Weise zu einem reellen Vektorraum mit $\dim T_x M = \dim M$. (Beweis in den Übungen)

- 1.20 Bemerkung.** (a) Jede Karte (V, φ) für M mit $x \in V$ liefert einen Vektorraum-Isomorphismus von $T_x M$ und \mathbb{R}^n . Es hat $v \in T_x M$ bezüglich φ die Komponenten v_i definiert durch

$$\left. \frac{d}{dt}(\varphi \circ c_v)(t) \right|_{t=0} = \sum_{i=1}^n v_i e_i,$$

wobei (e_i) die kanonischen Basisvektoren des \mathbb{R}^n bezeichnen. Die Komponenten v_i hängen natürlich von der Karte φ ab.

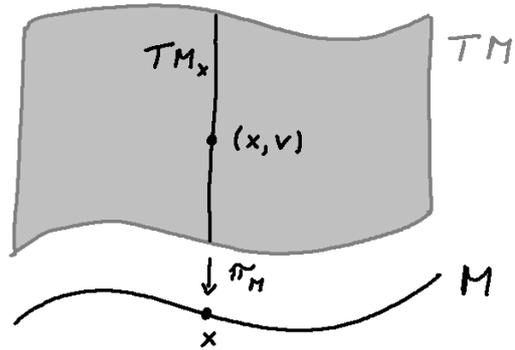
- (b) Da es in M kein ausgezeichnetes Koordinatensystem (also keine ausgezeichnete Karte) gibt, gibt es in $T_x M$ auch keine ausgezeichnete Basis und daher auch kein natürliches Skalarprodukt.

1.21 Definition. Tangentialbündel

Das **Tangentialbündel** TM von M ist die Vereinigung der Tangentialräume

$$TM := \bigcup_{x \in M} (\{x\} \times T_x M).$$

Wir schreiben Punkte in TM als Tupel (x, v) mit $x \in M$ und $v \in T_x M$. Die Projektion der Tangentialvektoren in $T_x M$ auf ihren Fußpunkt x wird mit $\pi_M : TM \rightarrow M$ bezeichnet. Der Tangentialraum $\pi_M^{-1}(\{x\}) = \{x\} \times T_x M$ heißt **Faser** über $x \in M$.



1.22 Beispiel. Für $M \subset \mathbb{R}^n$ offen können wir TM in natürlicher Weise mit $M \times \mathbb{R}^n$ identifizieren. Da $M \times \mathbb{R}^n$ als Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^{2n} eine Mannigfaltigkeit ist, können wir TM in diesem Fall in natürlicher Weise mit der Struktur einer Mannigfaltigkeit versehen.

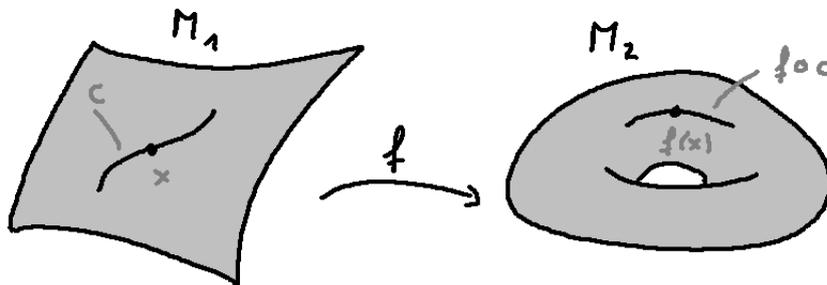
1.23 Definition. Die Tangentialabbildung

Sei $f \in C^1(M_1, M_2)$. Die **Tangentialabbildung**

$$Tf : TM_1 \rightarrow TM_2$$

bildet den Punkt $(x, [c]) \in TM_1$ auf den Punkt $(f(x), [f \circ c]) \in TM_2$ ab, also in Kurzform

$$Tf([c]_x) := [f \circ c]_{f(x)}.$$



Bemerkung: Es ist klar, dass f Kurven c in M_1 auf Kurven $f \circ c$ in M_2 abbildet. Man überlegt sich leicht (Übungen), dass äquivalente Kurven durch $x \in M_1$ auf äquivalente Kurven durch $f(x) \in M_2$ abgebildet werden und, dass Tf als Abbildung von $T_x M_1$ nach $T_{f(x)} M_2$ linear ist.

1.24 Bemerkung. Tangentialraum einer Untermannigfaltigkeit

Ist N Untermannigfaltigkeit von M , so ist $T_x N$ Unterraum von $T_x M$. Die Elemente von $T_x N$ entsprechen den Äquivalenzklassen von Kurven in M , die Vertreter ganz in N haben.

Ist N lokal durch eine Immersion f (vgl. Definition 1.8 (a)) gegeben, so ist $T_x N = \text{Bild } Tf|_{T_{f^{-1}(x)} U}$. Ist N lokal durch eine Submersion F (vgl. Definition 1.8 (b)) gegeben, so ist $T_x N = \text{Kern } TF|_{T_x M}$.

1.25 Definition. Das Tangentialbündel als Mannigfaltigkeit

Wir versehen das Tangentialbündel TM mit der Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit der Dimension $2n$, indem wir es mit dem **natürlichen Atlas** überdecken: Sei $\mathcal{A} = (V_i, \varphi_i)$ ein Atlas von M , dann ist

$$T\mathcal{A} := (TV_i, T\varphi_i)$$

ein Atlas von TM . In diesem Fall wird die Topologie auf TM durch die Karten $T\varphi_i$ definiert.

1.26 Bemerkung. Das Tangentialbündel an die Mannigfaltigkeit entspricht in der klassischen Mechanik dem Orts-Geschwindigkeits-Raum, d.h. ein Punkt $p \in TM$, $p = (x, v)$ liefert ein Tupel aus Ort $x = \pi_M p$ und Geschwindigkeit $v \in T_x M$. Später werden wir sehen, dass die Lagrange-funktion der klassischen Mechanik auf dem Tangentialbündel lebt.

1.27 Bemerkung. Lokal ist TM diffeomorph zu $M \times \mathbb{R}^n$, denn jede **Bündelkarte** liefert ja einen solchen lokalen Diffeomorphismus:

$$T\varphi_i : TM \supset TV_i \rightarrow T\varphi_i(TV_i) = \varphi_i(V_i) \times \mathbb{R}^n \subset T\mathbb{R}^n.$$

Global muss TM nicht diffeomorph zu $M \times \mathbb{R}^n$ sein.

1.28 Definition. Parallelisierbarkeit

Gibt es einen Diffeomorphismus $\phi : TM \rightarrow M \times \mathbb{R}^n$ so, dass $\phi|_{T_x M} : T_x M \rightarrow \{x\} \times \mathbb{R}^n$ für alle $x \in M$ ein Vektorraum-Isomorphismus ist, so nennt man M **parallelisierbar** bzw. TM **trivialisierbar**, denn dann lassen sich die Tangentialräume an verschiedenen Punkten identifizieren:

$$T_x M \xrightarrow{\phi} \{x\} \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\cong} \{y\} \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\phi} T_y M.$$

Diese Identifizierung ist aber nicht kanonisch, sondern hängt von der Wahl der Trivialisierung ϕ ab.

1.29 Bemerkung. Kettenregel

Für differenzierbare Abbildungen $f : M_1 \rightarrow M_2$ und $g : M_2 \rightarrow M_3$ gilt die Kettenregel

$$T(g \circ f) = Tg \circ Tf.$$

Beweis. $T(g \circ f)([c]_x) = [g \circ f \circ c]_{g \circ f(x)} = Tg([f \circ c]_{f(x)}) = Tg(Tf([c]_x)).$ □

1.30 Definition. Vektorfelder

Eine C^p -Abbildung $X : M \rightarrow TM$ mit $\pi_M \circ X = \text{id}_M$ heißt **C^p -Vektorfeld** und die Menge der C^∞ -Vektorfelder bezeichnen wir mit $\mathcal{T}_0^1(M)$.

Ein Vektorfeld ist also eine Abbildung, die an jedem Punkt der Mannigfaltigkeit einen Tangentialvektor auswählt.

Der Sinn der Notation $\mathcal{T}_0^1(M)$ wird später klar werden. Ein erster Hinweis sei, dass man in der Physik auch von 1-fach kontravarianten Tensoren spricht.

1.31 Bemerkung. Die Forderung $\pi_M \circ X = \text{id}_M$ bedeutet in einer Bündelkarte von TM , dass $X : x \mapsto (x, v(x))$. Oft erwähnt man deshalb nur den Vektoranteil $v(x)$.

1.32 Bemerkung. TM ist genau dann parallelisierbar (d.h. trivialisierbar), wenn es n C^1 -Vektorfelder X_1, \dots, X_n gibt, so dass $(X_1(x), \dots, X_n(x))$ für jedes $x \in M$ eine Basis von $T_x M$ ist. (Beweis in den Übungen).

1.33 Definition. Der Push-Forward

Ein Diffeomorphismus $\Phi : M_1 \rightarrow M_2$ erlaubt es, Vektorfelder auf M_1 auf Vektorfelder auf M_2 abzubilden. Die Abbildung

$$\Phi_* : \mathcal{T}_0^1(M_1) \rightarrow \mathcal{T}_0^1(M_2), \quad X \mapsto \Phi_* X = T\Phi \circ X \circ \Phi^{-1}$$

heißt der **Push-Forward** und läßt sich durch folgendes Diagramm leicht verstehen:

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xleftarrow{\Phi^{-1}} & M_2 \\ X \downarrow & & \downarrow \Phi_* X \\ TM_1 & \xrightarrow{T\Phi} & TM_2. \end{array}$$

1.3 Tangentialvektoren als Derivationen

Gegeben einen Tangentialvektor $v \in T_x M$ am Punkt $x \in M$, so kann man die Richtungsableitung einer Funktion $f \in C^1(M, \mathbb{R}) =: C^1(M)$ am Punkt x durch

$$v(f)(x) = \frac{d}{dt}(f \circ c_v)(t)|_{t=0}$$

definieren, wobei c_v eine v definierende Kurve ist. Dies ist nichts anderes als die Anwendung der Tangentialabbildung von f

$$Tf : TM \rightarrow T\mathbb{R} \quad , \quad (x, v) \mapsto (f(x), v(f)(x))$$

in der natürlichen Karte $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \text{id})$ für $T\mathbb{R}$.

In einer Karte (V, φ) für M mit $x \in V$ und $q := \varphi(x)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} v(f)(x) &= \frac{d}{dt}(f \circ c_v)(t)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ c_v)(t)|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial q_i}(q) \frac{d}{dt}(\varphi \circ c_v)_i(0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\varphi^{-1}(q))}{\partial q_i} v_i(\varphi^{-1}(q)) \\ &= \sum_{i=1}^n v_i(\varphi^{-1}(q)) \frac{\partial}{\partial q_i} f(\varphi^{-1}(q)). \end{aligned}$$

In diesem Sinne können wir also Tangentialvektoren als Differentialoperatoren erster Ordnung auffassen, und jede Karte (V, φ) liefert für $x \in V$ eine Basis $\left(\frac{\partial}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial q_n}\right)$ des Tangentialraums $T_x M$, die so genannte natürliche Basis, bezüglich derer $v \in T_x M$ die Darstellung

$$v(x) = \sum_{i=1}^n v_i(x) \frac{\partial}{\partial q_i}$$

hat. Setzt man $\tilde{v}_i := v_i \circ \varphi^{-1}$ und $\tilde{f} := f \circ \varphi^{-1}$ so ist die Wirkung von v auf Funktionen $f \in C^1(M)$ in dieser Karte durch

$$v(f)(\varphi^{-1}(q)) = \sum_{i=1}^n \tilde{v}_i(q) \frac{\partial}{\partial q_i} \tilde{f}(q)$$

gegeben. In der Praxis verwendet man oft die verkürzte Notation

$$v(f)(q) = \sum_{i=1}^n v_i(q) \frac{\partial}{\partial q_i} f(q),$$

in welcher der Diffeomorphismus φ nicht mehr explizit gemacht wird.

1.34 Definition. Lie-Ableitung einer Funktion

Sei $X \in \mathcal{T}_0^1(M)$ ein Vektorfeld, dann heißt die Abbildung $L_X : C^1(M) \rightarrow C^0(M)$ mit

$$f \mapsto L_X(f)(y) := X_y(f)(y) = I \circ Tf \circ X$$

die **Lie-Ableitung** von f bzgl. X . Hier ist $I : T\mathbb{R} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Projektion auf den zweiten Faktor. Im Kartenbereich einer Karte (V, φ) mit $X(x) = (x, v(x))$ gilt wieder

$$L_X(f)(\varphi^{-1}(q)) = \sum_{i=1}^n \tilde{v}_i(q) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial q_i}(q).$$

Die Lie-Ableitung einer Funktion f in Richtung eines Vektorfeldes X ist also diejenige Funktion, die man erhält, indem man an jedem Punkt der Mannigfaltigkeit die Richtungsableitung von f in Richtung X bildet.

1.35 Proposition. Eigenschaften der Lie-Ableitung

Die Lie-Ableitung hat die folgenden Eigenschaften:

- (a) $L_X(f + g) = L_X(f) + L_X(g) \quad \forall f, g \in C^1(M)$
- (b) $L_X(f \cdot g) = fL_X(g) + gL_X(f) \quad \forall f, g \in C^1(M)$
- (c) $L_{\alpha X + \beta Y}(f) = \alpha L_X(f) + \beta L_Y(f) \quad \forall f, \alpha, \beta \in C^1(M)$

Beweis. Übungen. □

1.36 Bemerkung. Derivationen

Eine Abbildung $L : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ mit den Eigenschaften

- (i) $L(\alpha f + g) = \alpha Lf + Lg$
- (ii) $L(f \cdot g) = fLg + gLf$

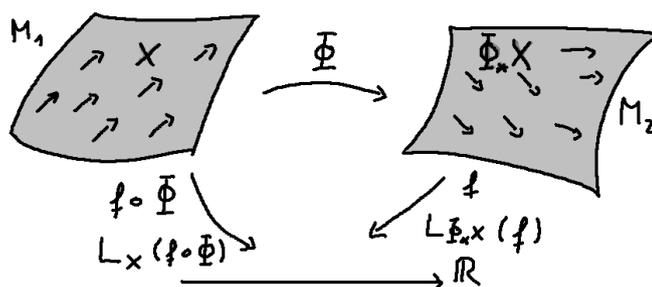
für alle $f, g \in C^\infty(M)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ heißt **Derivation**. Jede Derivation L bestimmt ein eindeutiges Vektorfeld $X \in \mathcal{T}_0^1(M)$ mit $L = L_X$. Man kann Tangentialvektoren deshalb auch als Derivationen statt als Äquivalenzklassen von Kurven definieren.

1.37 Bemerkung. Sei $\Phi : M_1 \rightarrow M_2$ ein Diffeomorphismus, $f \in C^\infty(M_2)$ und $X \in \mathcal{T}_0^1(M_1)$. Da das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} M_1 & \xrightarrow{\Phi} & M_2 & & \\ X \downarrow & & \downarrow \Phi_* X & & \\ TM_1 & \xrightarrow{T\Phi} & TM_2 & \xrightarrow{Tf} & T\mathbb{R} \end{array}$$

nach Definition von $\Phi_* X$ kommutativ ist, folgt

$$\begin{aligned} L_X(f \circ \Phi) &= I \circ T(f \circ \Phi) \circ X = I \circ Tf \circ T\Phi \circ X = I \circ Tf \circ \Phi_* X \circ \Phi \\ &= L_{\Phi_* X}(f) \circ \Phi. \end{aligned}$$



1.4 Flüsse auf Mannigfaltigkeiten

Genau wie die Vektorfelder auf \mathbb{R}^n definieren auch Vektorfelder auf Mannigfaltigkeiten zugehörige Differentialgleichungen:

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $u : I \rightarrow M$ eine glatte Kurve in M . An jedem Punkt $u(t) \in M$ hat u den Tangentialvektor

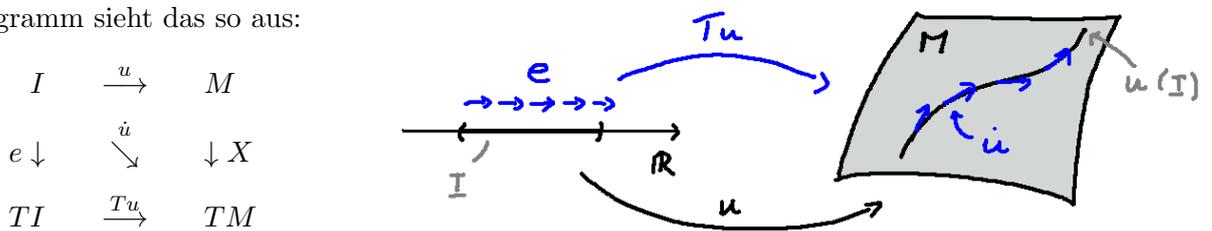
$$\dot{u}(t) = [u(\cdot - t)]_{u(t)} = (Tu \circ e)(t) \in T_{u(t)}M,$$

wobei $e : I \rightarrow TI$, $t \mapsto (t, 1)$ das Einheitsvektorfeld auf I ist.

1.38 Definition. Eine Kurve $u \in C_1(I, M)$ heißt **Integralkurve** an das Vektorfeld $X \in \mathcal{T}_0^1(M)$, falls auf I gilt

$$\dot{u} := Tu \circ e = X \circ u. \tag{*}$$

Im Diagramm sieht das so aus:



In einer Karte φ mit

$$\varphi \circ u : t \mapsto \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \varphi_* X : \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} \mapsto \left(\begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1(q) \\ \vdots \\ v_n(q) \end{pmatrix} \right)$$

hat (*) die übliche Form (man wende auf beiden Seiten $T\varphi$ an)

$$\dot{u}_j(t) = v_j(u_1(t), \dots, u_n(t)) \quad , \quad j = 1, \dots, n,$$

einer Differentialgleichung erster Ordnung auf dem \mathbb{R}^n . D.h. wir können zumindest lokal die Theorie aus dem \mathbb{R}^n übertragen.

1.39 Erinnerung. Sei

$$X : \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

ein Vektorfeld auf dem \mathbb{R}^n . Dann gelten folgende Implikationen:

- (a) Ist X stetig, so existieren lokale Lösungen (Satz von Peano).
- (b) Ist X lokal Lipschitz-stetig, so sind die Lösungen eindeutig (Satz von Picard-Lindelöf).
- (c) Ist X in $C^p(U, \mathbb{R}^n)$ so ist die Lösung $u : (t, x_0) \mapsto u(t, x_0)$ eine p -mal differenzierbare Funktion der Anfangsdaten, d.h. $u(t, \cdot) \in C^p(U)$ für alle t im Existenzintervall.

1.40 Satz. Existenz, Eindeutigkeit und Differenzierbarkeit lokaler Lösungen

Sei $X \in \mathcal{T}_0^1(M)$ ein C^∞ -Vektorfeld auf M . Für alle $x \in M \setminus \partial M$ existieren dann ein $\varepsilon > 0$, eine Umgebung U von x und eine Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U &\rightarrow M \\ (t, x_0) &\mapsto \Phi(t, x_0) =: u(t, x_0), \end{aligned}$$

so, dass

1 Analysis auf Mannigfaltigkeiten

- (a) für jedes $x_0 \in U$ ist $t \mapsto u(t, x_0)$ eine Integralkurve von X durch x_0 , also $\dot{u} = X \circ u$ und $u(0, x_0) = x_0$,

und

- (b) für jedes $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ ist $\Phi_t : U \rightarrow M$, $x_0 \mapsto \Phi_t(x_0) := \Phi(t, x_0)$ ein Diffeomorphismus von U auf eine offene Teilmenge von M .

Beweis. Die Aussagen folgen sofort aus den entsprechenden Resultaten auf dem \mathbb{R}^n wenn man sich auf eine Karte (V, φ) mit $x \in V$ einschränkt.

Teil (a) wurde in MaPhy 3 bzw. Analysis 2 für den \mathbb{R}^n bewiesen.

Teil (b) ist selbst für den \mathbb{R}^n etwas aufwendig und wir skizzieren das Argument hier nur: Die Bijektivität von $\Phi_t : U \rightarrow \Phi_t(U)$ folgt aus der Eindeutigkeit der Lösung, die Stetigkeit kann man z.B. zeigen, indem man die Picard-Lindelöf-Kontraktion auf $C([-\delta, \delta] \times U)$ durchführt. Differenzierbarkeit ist aufwendig: man zeigt direkt Konvergenz des Differenzquotienten und verwendet das Lemma von Gronwall.

Um schließlich zu zeigen, dass Φ_t ein Diffeomorphismus ist, verwendet man den Umkehrsatz. Man muss also zeigen, dass $\det D\Phi_t \neq 0$ oder äquivalent, dass $\frac{\partial u(t, x_0)}{\partial x_{0j}}$, $j = 1, \dots, n$, linear unabhängig sind. Differentiation von $\dot{u}(t, x_0) = X(u(t, x_0))$ liefert

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial x_{0j}} u(t, x_0) \right) = DX(u(t, x_0)) \cdot \frac{\partial}{\partial x_{0j}} u(t, x_0)$$

Also lösen die $\frac{\partial u}{\partial x_{0j}}(t)$, $j = 1, \dots, n$, alle dieselbe lineare Differentialgleichung. Da $\frac{\partial u}{\partial x_{0j}}(0, x_0) = \frac{\partial x_0}{\partial x_{0j}} = e_j$ für $t = 0$ linear unabhängig sind, sind sie es für alle Zeiten. \square

Nun kann man genau wie im Fall von $M \subset \mathbb{R}^n$ offen auch für allgemeine Mannigfaltigkeiten M die eindeutige Existenz einer maximalen Lösung zeigen, welche notwendigerweise jedes Kompaktum verlassen muss.

1.41 Satz. Existenz und Verhalten maximaler Lösungen

Sei $X \in \mathcal{T}_0^1(M)$.

- (a) Dann existiert zu jedem $x_0 \in M \setminus \partial M$ eine eindeutige maximale Lösung $u : I_{x_0} \rightarrow M$ von $\dot{u} = X \circ u$ mit $I_{x_0} \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $u(0) = x_0$. Die Menge $D := \{(t, x_0) \in \mathbb{R} \times M \mid t \in I_{x_0}\}$ ist offen und $\Phi^X : D \rightarrow M$, $(t, x_0) \mapsto u(t, x_0)$ heißt der maximale Fluss.
- (b) Sei $x_0 \in M$ und $I_{x_0} = (t^-(x_0), t^+(x_0))$ mit $t^+(x_0) < \infty$. Sei $K \subset M \setminus \partial M$ ein Kompaktum. Dann gibt es ein $0 < \tau < t^+(x_0)$ so, dass

$$u(t, x_0) \notin K \quad \text{für alle } t \in (\tau, t^+(x_0)).$$

1.42 Bemerkung. Existiert die Lösung nicht für alle Zeiten, so verlässt sie zumindest jedes Kompaktum. D.h. sie läuft entweder in endlicher Zeit nach Unendlich oder sie trifft den Rand von M .

1.43 Definition. Globale Flüsse und vollständige Vektorfelder

Ist $I_{x_0} = \mathbb{R}$ für alle $x_0 \in M$, ist also $\Phi_t^X : M \rightarrow M$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ein Diffeomorphismus, so nennt man Φ_t^X einen **globalen Fluss** und $X \in \mathcal{T}_0^1(M)$ **vollständig**. Es gilt dann offenbar

$$\Phi_{t_1}^X \circ \Phi_{t_2}^X = \Phi_{t_1+t_2}^X, \quad (*)$$

die Φ_t^X bilden also eine einparametrische Gruppe von Diffeomorphismen. Gilt (*) nur für genügend kleine Umgebungen jedes Punktes und genügend kurze Zeiten, so heißt Φ ein **lokaler Fluss**.

1.44 Korollar. (zu Satz 1.41) Sei M kompakt und ohne Rand und $X \in \mathcal{T}_0^1(M)$. Dann ist Φ_t^X ein globaler Fluss und X ist vollständig.

1.45 Beispiel. Konstantes Vektorfeld auf \mathbb{R}^n

Sei $M = \mathbb{R}^n$, $L = (q_1, \dots, q_n) \mapsto ((q_1, \dots, q_n), (v, 0, 0, \dots, 0))$. Dann ist Φ^L ein globaler Fluss gegeben durch die **lineare Strömung**

$$\Phi^L(t, q) = (q_1 + vt, q_2, \dots, q_n).$$

Wie bereits in der Einleitung angedeutet, hat jeder Fluss Φ^X lokal in geeigneten Koordinaten die Form der linearen Strömung, außer an den Fixpunkten, wo $X = 0$ ist.

1.46 Satz. Normalform des Flusses außerhalb der kritischen Punkte

Sei $X \in \mathcal{T}_0^1(M)$ und $x \in M$ mit $X(x) \neq (x, 0)$. Dann existiert eine Karte (V, φ) mit $x \in V$ so, dass

$$\varphi_*X(q_1, \dots, q_n) = ((q_1, \dots, q_n), (1, 0, \dots, 0)) \quad \text{für alle } q \in \varphi(V).$$

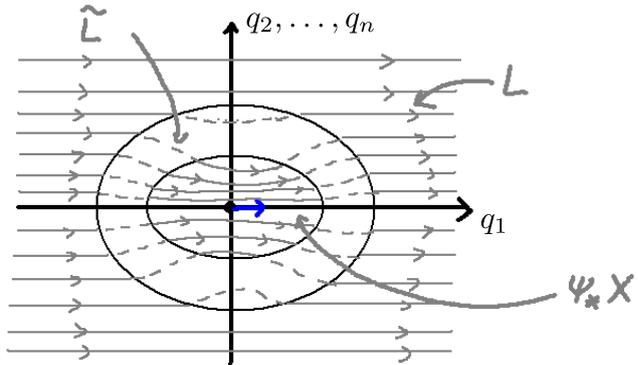
Insbesondere gilt: Sei $\Phi_t^L(q) = (q_1 + t, q_2, \dots, q_n)$ die lineare Strömung auf \mathbb{R}^n mit Geschwindigkeit 1, also der Fluss zu φ_*X , dann ist

$$\Phi_t^X := \varphi^{-1} \circ \Phi_t^L \circ \varphi$$

lokaler Fluss von X , denn mit $L = \varphi_*X = T\varphi \circ X \circ \varphi^{-1}$ ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Phi_t^X(x_0) &:= T\Phi_t^X(x_0) \circ e = T\varphi^{-1} \circ T\Phi_t^L(q_0) \circ e \\ &= T\varphi^{-1} \circ L \circ \Phi_t^L(q_0) = X \circ \varphi^{-1} \circ \Phi_t^L(q_0) = X \circ \Phi_t^X(x_0). \end{aligned}$$

Beweis. Da $X(x) \neq (x, 0)$, gibt es eine Karte (V_1, ψ) mit $\psi(x) = 0 \in \mathbb{R}^n$ und $\psi_*X(0) = (1, 0, \dots, 0)$. Da $\psi_*X \in \mathcal{T}_0^1(\psi(V_1))$ stetig ist, gibt es eine offene, relativ kompakte Umgebung $U_2 \subset \psi(V_1)$ von 0 so, dass auf ihr die erste Komponente des Bildes von X größer als $\frac{1}{2}$ ist, also $(\psi_*X)_1(q) > \frac{1}{2}$ für alle $q \in U_2$.



Strategie: Interpoliere die Vektorfelder ψ_*X auf $U \subset U_2$ und L auf U_2^c zu \tilde{L} auf ganz \mathbb{R}^n . Zeige dann, dass L und \tilde{L} diffeomorph sind, es also einen Diffeomorphismus $\Omega : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ gibt mit $\Omega_*\tilde{L} = L$. Dann ist $\varphi = \Omega \circ \psi$ die gewünschte Karte, da $\varphi_*X = \Omega_*\psi_*X = L$ auf $V = \psi^{-1}(U)$.

Sei $U \subset U_2$ offen mit $0 \in U$ und $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

$$f(q) = \begin{cases} 1 & \text{falls } q \in U \\ 0 & \text{falls } q \in U_2^c \end{cases}$$

und $0 \leq f(q) \leq 1$. Dann definieren wir das interpolierende Vektorfeld durch

$$\tilde{L} = f \psi_*X + (1 - f) L \in \mathcal{T}_0^1(\mathbb{R}^n).$$

1 Analysis auf Mannigfaltigkeiten

Es erfüllt \tilde{L} eine globale Lipschitzbedingung und der zugehörige Fluss $\Phi_t^{\tilde{L}}$ existiert global. Wir zeigen nun, dass

$$\Omega = \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_{-t}^L \circ \Phi_t^{\tilde{L}}$$

existiert und ein Diffeomorphismus ist, der

$$\Omega_* \tilde{L} = L$$

erfüllt.

Da $(\Phi_t^{\tilde{L}}(q))_1 \geq q_1 + \frac{1}{2}t$, verlässt jede Integralkurve nach endlicher Zeit U_2 . Auf kompakten Mengen $K \subset \mathbb{R}^n$ wird deshalb der Limes

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_{-t}^L \circ \Phi_t^{\tilde{L}} \Big|_K = \Phi_{-\tau}^L \circ \Phi_{\tau}^{\tilde{L}}$$

schon für endliche Zeiten $\tau > \tau_0(K)$ angenommen. Somit ist Ω wohldefiniert und ein Diffeomorphismus und es gilt

$$\Omega \circ \Phi_t^{\tilde{L}} = \lim_{s \rightarrow \infty} \Phi_{-s}^L \circ \Phi_s^{\tilde{L}} \circ \Phi_t^{\tilde{L}} = \lim_{s \rightarrow \infty} \Phi_t^L \circ \Phi_{-s-t}^L \circ \Phi_{s+t}^{\tilde{L}} = \Phi_t^L \circ \Omega.$$

Die Flüsse $\Phi_t^{\tilde{L}}$ und Φ_t^L sind also diffeomorph. Für festes $q \in \mathbb{R}^n$ und $\tilde{q} = \Omega(q)$ fassen wir $(\Phi_t^L \circ \Omega)(q) = (\Omega \circ \Phi_t^{\tilde{L}})(q)$ als Kurve in \mathbb{R}^n auf und leiten nach t ab. Einerseits ist

$$\frac{d}{dt}(\Phi_t^L \circ \Omega)(q) = \frac{d}{dt}\Phi_t^L(\tilde{q}) = L \circ \Phi_t^L(\tilde{q}) = L \circ \Phi_t^L \circ \Omega(q),$$

und andererseits

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\Omega \circ \Phi_t^{\tilde{L}})(q) &= T(\Omega \circ \Phi_t^{\tilde{L}})(q) \circ e = T\Omega \circ T\Phi_t^{\tilde{L}}(q) \circ e = T\Omega \circ \tilde{L} \circ \Phi_t^{\tilde{L}}(q) \\ &= T\Omega \circ \tilde{L} \circ \Omega^{-1} \circ \Phi_t^L \circ \Omega(q) = \Omega_* \tilde{L} \circ \Phi_t^L \circ \Omega(q) \end{aligned}$$

Da Ω und Φ_t^L als Diffeomorphismen insbesondere surjektiv sind und da q beliebig war, liefert Vergleich der beiden Ausdrücke, dass $\Omega_* \tilde{L} = L$ auf ganz \mathbb{R}^n . \square

1.47 Bemerkung. Linearisierung eines Vektorfeldes an einem Fixpunkt

Außer an Fixpunkten ist also jeder Fluss lokal diffeomorph zur linearen Strömung. Das lokale Verhalten in der Nähe eines Fixpunktes läßt sich durch **Linearisierung** des Vektorfeldes an diesem Punkt ermitteln.

Sei $X \in \mathcal{T}_0^1(M)$ und $x_0 \in M$ mit $X(x_0) = (x_0, 0)$. In einer Karte φ mit $\varphi(x_0) = 0$ gilt dann

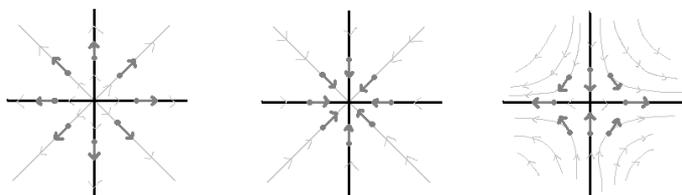
$$X_\varphi(q) = \underbrace{X_\varphi(0)}_{=0} + DX_\varphi(0)q + o(\|q\|) = DX_\varphi(0)q + \mathcal{O}(\|q\|^2),$$

wobei wir $X_\varphi(q) := (I \circ \varphi_* X)(q)$ abkürzen. In der Nähe von $q = 0$ reicht es also, das lineare Vektorfeld $X_\varphi(q) = DX_\varphi(0)q$ zu betrachten. Der Typ des Fixpunktes wird dabei durch die Eigenwerte von $DX_\varphi(0)$ und deren geometrischer Vielfachheit bestimmt. Diese hängen nicht von der Karte φ ab, da $DX_\varphi(0)$ und $DX_\psi(0)$ für verschiedene Karten φ und ψ ähnliche Matrizen sind (Übungsaufgabe).

Wir wollen die möglichen Typen hier nur am Beispiel $n = 2$ illustrieren:

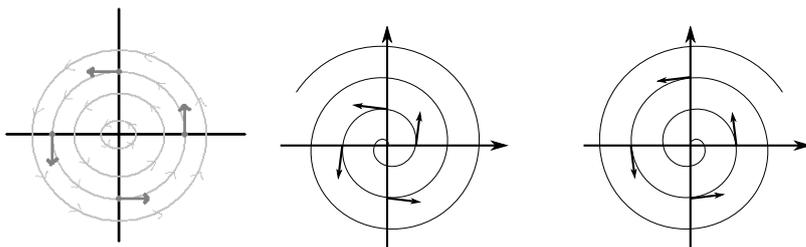
(a) $DX(0)$ diagonalisierbar und

(i) $\lambda_1, \lambda_2 > 0$: (ii) $\lambda_1, \lambda_2 < 0$: (iii) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$:



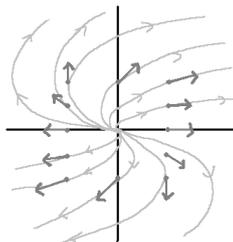
(b) $DX(0)$ hat zwei komplexe Eigenwerte $\lambda_{1/2} = a \pm ib$, also z.B. $DX(0) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$:

(i) $b > 0, a = 0$: (ii) $b > 0, a > 0$: (iii) $b > 0, a < 0$:



(c) Ein reeller Eigenwert der geometrischen Vielfachheit 1, also $DX(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

(Eigenwert -1 analog).



1.5 Tensoren

1.48 Erinnerung. Dualraum

Ist V ein reeller Vektorraum der Dimension $n \in \mathbb{N}$, so ist sein **Dualraum** V^* definiert als der Raum der linearen Abbildungen von V nach \mathbb{R} . Auch V^* ist ein reeller Vektorraum der Dimension n . Die Elemente von V^* heißen lineare Funktionale und für $v^* \in V^*$ und $u \in V$ schreiben wir

$$v^*(u) =: (v^*, u) =: (v^* | u),$$

auch wenn es sich bei der sog. natürlichen Paarung (v^*, u) **nicht** um ein Skalarprodukt handelt.

1.49 Definition. Kotangententialraum

Sei M eine Mannigfaltigkeit und $x \in M$. Der Dualraum T_x^*M des Tangentialraums T_xM heißt **Kotangententialraum** von M im Punkt x . Seine Elemente heißen **Kotangential- oder Kovektoren** bzw. auch 1-Formen.

1.50 Bemerkung. Ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf einem Vektorraum V induziert eine natürliche Identifikation von V mit V^* , nämlich $V \ni v \mapsto \langle v, \cdot \rangle \in V^*$. Auch ohne Skalarprodukt gilt zwar $\dim V^* = \dim V$, aber es gibt keinen kanonischen Isomorphismus.

1.51 Beispiel. Das Differential

Für $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fasst man den Gradienten $\nabla f(x)$ oft als Vektor auf. Ohne weitere Struktur ist

1 Analysis auf Mannigfaltigkeiten

aber das Differential einer Funktion zunächst eine 1-Form, d.h. ein Kovektor:
Für $f \in C^\infty(M)$ ist die Tangentialabbildung

$$Tf|_x : T_x M \rightarrow T_{f(x)} \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

linear also $Tf|_x \in T_x^* M$. Diese Abbildung wird auch mit $df|_x$ bezeichnet, das **Differential** oder die **äußere Ableitung** von f .

Wie zu Beginn von Abschnitt 1.3 erklärt, ist die Anwendung von $df|_x$ auf einen Tangentialvektor $v \in T_x M$ einfach die Richtungsableitung der Funktion f an der Stelle $x \in M$ in Richtung v . Für $v = [c]$ gilt also

$$df|_x(v) = \frac{d}{dt} f(c(t))|_{t=0}.$$

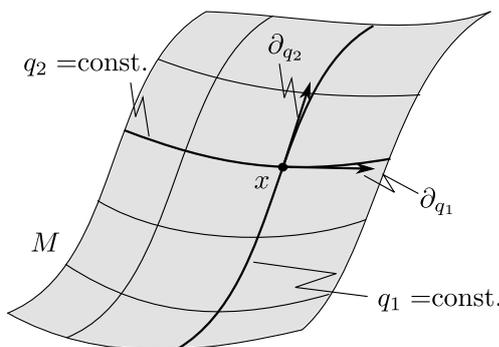
Man kann sich also in der natürlichen Paarung (df, v) vorstellen, dass df als 1-Form auf den Vektor v wirkt oder umgekehrt v als Derivation auffassen, die auf der Funktion f operiert.

1.52 Bemerkung. Koordinaten 1-Formen

In einer Karte (V, φ) , $\varphi : M \supset V \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x \mapsto \varphi(x) = q$ kann man q_i für $i = 1, \dots, n$, als Funktionen $q_i : V \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \varphi(x)_i = q_i(x)$ auffassen. Die zugehörigen Koordinaten 1-Formen $dq_i|_x \in T_x^* M$, $i = 1, \dots, n$, bilden eine Basis des Kotangentialraums $T_x^* M$, denn gemäß Abschnitt 1.3 gilt

$$\left(dq_i, \frac{\partial}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial}{\partial q_j} q_i = \delta_{ij}. \quad (*)$$

Es heißt $(dq_i)_{i=1, \dots, n}$ auch die natürliche Basis von $T_x^* M$. Sie ist wegen $(*)$ dual zur natürlichen Basis $(\frac{\partial}{\partial q_i})_{i=1, \dots, n}$ von $T_x M$.



1.53 Bemerkung. Der Bidualraum

Es gibt zwar keine natürliche Identifikation von $T_x M$ mit dem Dualraum $T_x^* M$, aber mit dem Bidualraum $T_x^{**} M$: Sei $v \in T_x M$ dann ist

$$\ell_v : T_x^* M \rightarrow \mathbb{R}, \quad u^* \mapsto \ell_v(u^*) := (u^*, v)$$

linear und somit $\ell_v \in T_x^{**} M$. Die Abbildung $i : T_x M \rightarrow T_x^{**} M$, $v \mapsto \ell_v$, ist ein Vektorraumisomorphismus: i ist offensichtlich linear und da $\text{Kern}(i) = \{0\}$ gilt (man überlege sich das), ist i injektiv und wegen $\dim T_x M = \dim T_x^{**} M < \infty$ dann auch surjektiv.

Man merke sich also: Ein Vektor ist eine lineare Abbildung auf Kovektoren und umgekehrt.

Kovektoren verallgemeinert man nun zu „Kotensoren“ oder **kovarianten Tensoren** s -ter Stufe, indem man sie als multilineare Abbildung

$$\underbrace{T_x M \times T_x M \times \dots \times T_x M}_{s\text{-mal}} \rightarrow \mathbb{R}$$

definiert. Vektoren werden zu **kontravarianten Tensoren** r -ter Stufe verallgemeinert, d.h. zu multilinearen Abbildungen

$$\underbrace{T_x^* M \times \dots \times T_x^* M}_{r\text{-mal}} \rightarrow \mathbb{R}.$$

1.54 Definition. Tensoren

Eine multilineare Abbildung

$$t : \underbrace{T_x^* M \times \cdots \times T_x^* M}_{r\text{-mal}} \times \underbrace{T_x M \times \cdots \times T_x M}_{s\text{-mal}} \rightarrow \mathbb{R}$$

heißt **r -fach kontravarianter und s -fach kovarianter Tensor** und wir schreiben wieder

$$t(v_1^*, \dots, v_r^*; v_1, \dots, v_s) =: (t | v_1^*, \dots, v_r^*; v_1, \dots, v_s).$$

Indem man für Tensoren t_1 und t_2 sowie $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$$(\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2 | \dots) := \alpha_1 (t_1 | \dots) + \alpha_2 (t_2 | \dots)$$

definiert, erhält der Raum der multilinearen Abbildungen selbst eine lineare Struktur. Er wird mit $T_x^r M$ bezeichnet. Insbesondere gilt $T_{x_0}^1 M = T_x M$ und $T_{x_1}^0 M = T_x^* M$.

Im folgenden betrachten wir zunächst Tensoren in einem Punkt $x \in M$. Statt $T_x^r M$ schreiben wir dann T_s^r und können für den Moment vergessen, dass der zugrundeliegende Vektorraum $T = T_0^1$ ein Tangentialraum an eine Mannigfaltigkeit ist.

1.55 Definition. Das Tensorprodukt

Das **Tensorprodukt** $v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \otimes v_1^* \otimes \cdots \otimes v_s^* \in T_s^r$ von r Vektoren und s Kovektoren ist durch

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \otimes v_1^* \otimes \cdots \otimes v_s^* | u_1^*, \dots, u_r^*; u_1, \dots, u_s) = \prod_{i=1}^r (u_i^* | v_i) \prod_{j=1}^s (v_j^* | u_j)$$

definiert.

1.56 Bemerkung. (a) Aus der Definition folgt, dass \otimes distributiv ist,

$$v_1 \otimes (v_2 + v_3) = v_1 \otimes v_2 + v_1 \otimes v_3.$$

Es ist also

$$\otimes : T_s^r \times T_{s'}^{r'} \rightarrow T_{s+s'}^{r+r'}$$

eine assoziative, distributive aber **nicht kommutative** Abbildung. Hier ist für $t_1 \in T_s^r$ und $t_2 \in T_{s'}^{r'}$

$$\begin{aligned} t_1 \otimes t_2 (u_1^*, \dots, u_{r+r'}^*; u_1, \dots, u_{s+s'}) &= \\ &= t_1(u_1^*, \dots, u_r^*; u_1, \dots, u_s) \cdot t_2(u_{r+1}^*, \dots, u_{r+r'}^*; u_{s+1}, \dots, u_{s+s'}). \end{aligned}$$

(b) Nicht jeder Tensor läßt sich als Tensorprodukt von Vektoren schreiben. Seien e_i^* und e_j Basen in T_1^0 bzw. T_0^1 , so kann man aber $t \in T_s^r$ eindeutig darstellen als

$$t = \sum_{(i),(j)} t_{i_1 \dots i_s}^{j_1 \dots j_r} e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_r} \otimes e_{i_1}^* \otimes \cdots \otimes e_{i_s}^*. \quad (*)$$

In der Summe laufen alle Indizes i_1, \dots, i_s und j_1, \dots, j_r von 1 bis n . Die Tensoren

$$e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_r} \otimes e_{i_1}^* \otimes \cdots \otimes e_{i_s}^*, \quad i_1, \dots, i_s, j_1, \dots, j_r = 1, \dots, n$$

bilden eine Basis von T_s^r und der Raum T_s^r hat die Dimension n^{s+r} .

1 Analysis auf Mannigfaltigkeiten

Beweis. Es seien (b_j^*) und (b_i) die jeweils zu (e_j) und (e_i^*) dualen Basen, also

$$b_j^*(e_i) = \delta_{ij} \quad \text{und} \quad e_i^*(b_j) = \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{wenn } i = j \\ 0 & \text{wenn } i \neq j \end{cases} .$$

Da man lineare Abbildungen nur auf einer Basis festlegen muss, sind die dualen Basen eindeutig. Setzt man nun

$$t_{i_1 \dots i_s}^{j_1 \dots j_r} = t(b_{j_1}^*, \dots, b_{j_r}^*, b_{i_1}, \dots, b_{i_s}),$$

so gilt (*) auf Elementen der Form $(b_{j_1}^*, \dots, b_{j_r}^*, b_{i_1}, \dots, b_{i_s})$ und wegen Multilinearität auf allen $(u_1^*, \dots, u_r^*, u_1, \dots, u_s)$. \square

Die Komponenten $t_{i_1 \dots i_s}^{j_1 \dots j_r}$ eines Tensors t bezeichnet man in der Physik oft als Tensoren. Bei den Komponenten verwenden wir die übliche Schreibweise Vektorindizes oben und Kovektorindizes unten zu stellen.

1.57 Definition. Das äußere Produkt und die alternierenden Formen

- (a) Das **äußere Produkt** (oder Keil-Produkt) $v_1^* \wedge \dots \wedge v_k^* \in T_k^0$ von k Kovektoren ist durch

$$(v_1^* \wedge \dots \wedge v_k^* | u_1, \dots, u_k) = \det((v_i^* | u_j))$$

definiert.

Aufgrund der Eigenschaften der Determinante ist klar, dass $v_1^* \wedge \dots \wedge v_k^*$ eine alternierende k -Form ist, d.h. die Vertauschung zweier Argumente führt nur zu einem Vorzeichenwechsel:

$$(v_1^* \wedge \dots \wedge v_k^* | u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_k) = - (v_1^* \wedge \dots \wedge v_k^* | u_1, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_k) .$$

Analog sieht man sofort, dass auch

$$v_1^* \wedge \dots \wedge v_i^* \wedge \dots \wedge v_j^* \wedge \dots \wedge v_k^* = - v_1^* \wedge \dots \wedge v_j^* \wedge \dots \wedge v_i^* \wedge \dots \wedge v_k^*$$

gilt. Insbesondere liefert also die Permutation der Faktoren im äußeren Produkt nur ein Vorzeichen.

- (b) Ist $(e_j^*)_{j=1, \dots, n}$ eine Basis von T^* , so bilden die Elemente der Form

$$e_{j_1}^* \wedge \dots \wedge e_{j_k}^* \quad \text{mit} \quad 1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$$

also eine Basis des Raumes $\Lambda_k \subset T_k^0$ der **alternierenden k -Formen**. Man verwendet aber üblicherweise die Darstellung

$$\omega = \frac{1}{k!} \sum_{(i)} \omega_{i_1 \dots i_k} e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*$$

mit antisymmetrischen Koeffizienten $\omega_{i_1 \dots i_k}$, also

$$\omega_{\pi(i_1) \dots \pi(i_k)} = \text{sgn}(\pi) \omega_{i_1 \dots i_k}$$

für alle Permutationen $\pi \in S_k$. Die Normierung $\frac{1}{k!}$ stellt sicher, dass

$$\omega = \frac{1}{k!} \sum_{(i)} \omega_{i_1 \dots i_k} e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^* = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \dots i_k} e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*$$

gilt, die Koeffizienten also in beiden Darstellungen einheitlich sind.

1.58 Bemerkung. Die Projektion P_k in T_k^0 auf Λ_k lässt sich explizit schreiben als

$$(P_k t)(u_1, \dots, u_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in S_k} \operatorname{sgn}(\pi) t(u_{\pi(1)}, \dots, u_{\pi(k)}).$$

Der Zusammenhang zwischen Tensor- und Keil-Produkt ist dann

$$v_1^* \wedge \dots \wedge v_k^* = k! P_k(v_1^* \otimes \dots \otimes v_k^*).$$

Also kann man auch das äußere Produkt fortsetzen zu

$$\begin{aligned} \wedge : \Lambda_k \times \Lambda_p &\rightarrow \Lambda_{k+p} \\ (\omega_1, \omega_2) &\mapsto \omega_1 \wedge \omega_2 := \frac{(k+p)!}{k! p!} P_{k+p}(\omega_1 \otimes \omega_2). \end{aligned}$$

Es hat die folgende Eigenschaften

$$\begin{aligned} (\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3 &= \omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3) && \text{(Assoziativität)} \\ (\omega_1 + \omega_2) \wedge \omega_3 &= \omega_1 \wedge \omega_3 + \omega_2 \wedge \omega_3 && \text{(Distributivität)} \\ \omega_1 \wedge (\omega_2 + \omega_3) &= \omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \omega_3 \\ \omega_1 \wedge \omega_2 &= (-1)^{kp} \omega_2 \wedge \omega_1 \end{aligned}$$

für jeweils geeignete $\omega_1, \omega_2, \omega_3$.

1.59 Erinnerung. Eine alternierende k -Form ω definiert ein signiertes ‘‘Volumen’’ welches von k Vektoren v_1, \dots, v_k in $T_x M$ aufgespannt wird via

$$\omega(v_1, \dots, v_k) =: \operatorname{Vol}_k(v_1, \dots, v_k).$$

Dabei ist ‘‘Volumen’’ so zu verstehen, dass für $k = 1$ eine Länge, für $k = 2$ eine Fläche und für $k = n$ eben tatsächlich ein Volumen gemeint ist.

1.60 Definition. Metrischer Tensor

(a) Ein Tensor $g \in T_2^0$ der symmetrisch ist, also

$$g(u, v) = g(v, u) \quad \text{für alle } u, v \in T_0^1$$

erfüllt, und positiv definit ist, d.h.

$$g(v, v) > 0 \quad \text{für alle } v \neq 0,$$

heißt **metrischer Tensor** und definiert durch $\langle u | v \rangle_g := g(u, v)$ ein Skalarprodukt auf T_0^1 .

(b) Ein Tensor $g \in T_2^0$ mit der Eigenschaft

$$g(v, u) = 0 \quad \forall u \in T_0^1 \quad \Rightarrow \quad v = 0 \quad (*)$$

heißt **nicht entartet**. Auch in diesem Fall schreiben wir $\langle v | u \rangle_g := g(v, u)$, auch wenn es sich im allgemeinen dann nicht um ein Skalarprodukt handelt.

Beispiele für (b) sind Pseudometriken (g symmetrisch und nicht entartet) oder symplektische Formen (g alternierend und nicht entartet).

1.61 Bemerkung. Mit Hilfe eines nicht entarteten $g \in T_2^0$ können T_0^1 und T_1^0 kanonisch identifiziert werden:

Für $v \in T_0^1$ ist die Abbildung

$$\langle v | \cdot \rangle_g : T_0^1 \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto \langle v | u \rangle_g = g(v, u)$$

linear und somit in T_1^0 . Die Abbildung

$$T_0^1 \rightarrow T_1^0, \quad v \mapsto \langle v | \cdot \rangle_g =: v^*$$

ist linear. Ihr Kern enthält wegen (*) nur die Null und sie ist somit bijektiv.

1.62 Definition. Der Indexkalkül

Sei $(e_j)_{j=1, \dots, n}$ Basis von T_0^1 und es bezeichne ab jetzt immer $(e^i)_{i=1, \dots, n}$ (Index hochgestellt!) die duale Basis von T_1^0 definiert durch

$$e^i(e_j) = \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{wenn } i = j \\ 0 & \text{wenn } i \neq j \end{cases}$$

Bezüglich dieser Basis hat beispielsweise ein metrischer Tensor $g \in T_2^0$ die Komponenten g_{ij} ,

$$g = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} e^i \otimes e^j =: g_{ij} e^i \otimes e^j,$$

wobei im rechten Ausdruck nach der **Einsteinsche Summenkonvention** über gleiche Indizes summiert wird. Um sicherzustellen, dass man die Komponenten von Vektoren bzw. Tensoren und die Basisvektoren bzw. Basiskovektoren nicht durcheinander bringt, stellt man die Indizes bei Komponenten von Vektoren hoch und bei den Basisvektoren tief. So schreibt man für einen Vektor $u \in T_0^1$ dann die Basisdarstellung bzgl. (e_i) als

$$u = u^i e_i.$$

Es bezeichnet u^i also die i -te Komponente von u bzgl. der Basis (e_i) . Für Kovektoren kehrt man die Konvention um. Das liefert einen eleganten Kalkül der einem das Rechnen in Komponenten vereinfacht. Sind $u, v \in T_0^1$ mit $u = u^n e_n$ und $v = v^n e_n$ und $u^* \in T_1^0$ mit $u^* = u_n e^n$ so gilt beispielsweise

- (a) $u^*(v) = u_n e^n(v^m e_m) = u_n v^m e^n(e_m) = u_n v^n$
- (b) $\langle u | v \rangle_g = g(u, v) = g_{ij} (e^i \otimes e^j)(u^m e_m, v^n e_n) = g_{ij} u^m v^n e^i(e_m) e^j(e_n) = g_{ij} u^i v^j = u^m g_{mn} v^n$
- (c) $u^* := \langle u | \cdot \rangle$ hat mit (a) und (b) also die Basisdarstellung $u^* = u_n e^n$ mit Komponenten $u_n = u^m g_{mn}$.
- (d) Mit g^{ij} bezeichnet man die zu g_{ij} inverse Matrix, also

$$g_{ij} g^{jn} = g^{ij} g_{jn} = \delta_n^i := \delta_{in}.$$

Dann gilt in (c) auch $u^n = u_m g^{mn}$ und insbesondere ist $(e_i)^* = g(e_i, \cdot) = g_{ij} e^j$.

Sei $A : T_0^1 \rightarrow T_0^1$ ein Basiswechsel mit Matrix a_i^j bzgl. der Basis $(e_i)_{i=1, \dots, n}$ und $\hat{e}_i := A e_i = a_i^j e_j$ die neuen Basisvektoren, so transformieren sich die dualen Basisvektoren gemäß $\hat{e}^i := A^{-1} e^i = b_j^i e^j$ wobei $b_i^j a_k^i = \delta_k^j$. Entsprechend transformieren sich die Komponenten eines Tensors wegen

$$t = t_{i_1 \dots i_s}^{j_1 \dots j_r} e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_r} \otimes e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_s} = \hat{t}_{k_1 \dots k_s}^{l_1 \dots l_r} \hat{e}_{l_1} \otimes \dots \otimes \hat{e}_{l_r} \otimes \hat{e}^{k_1} \otimes \dots \otimes \hat{e}^{k_s}$$

gemäß

$$\hat{t}_{k_1 \dots k_s}^{l_1 \dots l_r} a_{l_1}^{j_1} \dots a_{l_r}^{j_r} b_{i_1}^{k_1} \dots b_{i_s}^{k_s} = t_{i_1 \dots i_s}^{j_1 \dots j_r} \quad \text{oder} \quad \hat{t}_{k_1 \dots k_s}^{l_1 \dots l_r} = t_{i_1 \dots i_s}^{j_1 \dots j_r} b_{j_1}^{l_1} \dots b_{j_r}^{l_r} a_{k_1}^{i_1} \dots a_{k_s}^{i_s}.$$

1.63 Bemerkung. Hat man ein nichtentartetes $g \in T_2^0$, so identifiziert man oft u und $u^* = g(u, \cdot)$ und nennt u^j die kontravarianten und u_j die kovarianten Komponenten von u , obwohl u_j ja eigentlich die Komponenten von u^* sind.

1.64 Definition. Analog liefert ein nichtentartetes $g \in T_2^0$ eine Identifikation aller T_s^r mit $r + s = \sigma$. Sei dazu $t \in T_s^r$ mit $t = t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_s}$, dann ist z.B.

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} (e_{i_1})^* \otimes \dots \otimes (e_{i_r})^* \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_s} \\ &= t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} g_{i_1 n_1} \dots g_{i_r n_r} e^{n_1} \otimes \dots \otimes e^{n_r} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_s} \\ &=: t_{j_1 \dots j_s n_1 \dots n_r} e^{n_1} \otimes \dots \otimes e^{n_r} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_s} \end{aligned}$$

in T_{r+s}^0 . Allgemein kann man mit g_{ij} und g^{ij} also Indizes nach unten bzw. nach oben "ziehen".

1.65 Definition. Auch auf Tensoren definiert jedes nichtentartete $g \in T_2^0$ eine bilineare Abbildung

$$\langle \cdot | \cdot \rangle_g : T_s^r \times T_s^r \rightarrow \mathbb{R}$$

gegeben durch

$$\langle t | \tilde{t} \rangle = t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \tilde{t}_{n_1 \dots n_s}^{m_1 \dots m_r} g_{i_1 m_1} \dots g_{i_r m_r} g^{j_1 n_1} \dots g^{j_s n_s}.$$

Ist g eine Metrik, so ist $\langle \cdot | \cdot \rangle_g$ ein Skalarprodukt auf T_s^r . (Übung: Zeige dies und die Unabhängigkeit von der Basis).

1.66 Definition. Kontraktion von Tensoren

Durch **Kontraktion** zweier Indizes, genauer des ℓ -ten oberen und des k -ten unteren Index eines Tensors $t \in T_s^r$ mit

$$t = t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_s}$$

erhält man einen Tensor $\tilde{t} \in T_{s-1}^{r-1}$ via

$$\tilde{t} = t_{j_1 \dots m \dots j_s}^{i_1 \dots m \dots i_r} e_{i_1} \otimes \dots \otimes \hat{e}_{i_\ell} \otimes \dots \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes \hat{e}^{j_k} = \sum_{m=1}^n t(\dots, e^m, \dots, e_m, \dots),$$

wobei der Hut über einem Faktor dessen Auslassung bedeute und in der Summe e^m im ℓ -ten Vektorargument und e_m im k -ten Kovektorargument steht.

Ist $t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ nicht symmetrisch jeweils in allen oberen und allen unteren Indizes, so hängt das Ergebnis natürlich davon ab, welche Indizes man kontrahiert.

Für $t \in T_1^1$ nennt man $\text{tr } t := t_i^i$ die Spur von t . Für $t \in T_2^0$ bzw. $\tilde{t} \in T_2^0$ heißt $\text{tr}_g t = t^{ij} g_{ij}$ bzw. $\text{tr}_g \tilde{t} = t_{ij} g^{ij}$ die metrische Spur.

1.67 Definition. Das innere Produkt von äußeren Formen

Das **innere Produkt** in Λ_k bezüglich eines nichtentarteten $g \in T_2^0$ ist die bilineare Abbildung

$$\begin{aligned} \Lambda_k \times \Lambda_\ell &\rightarrow \Lambda_{k-\ell}, \quad k \geq \ell \\ (\omega, \nu) &\mapsto i_\nu \omega \end{aligned}$$

definiert durch die Regeln

- (i) $i_\nu \omega := \langle \nu | \omega \rangle_g$ für $\omega, \nu \in \Lambda_1$
- (ii) $i_\nu(\omega_1 \wedge \omega_2) := (i_\nu \omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^{k_1} \omega_1 \wedge i_\nu \omega_2$ für $\nu \in \Lambda_1$ und $\omega_i \in \Lambda_{k_i}$
- (iii) $i_{\nu_1 \wedge \nu_2} = i_{\nu_2} \circ i_{\nu_1}$

1 Analysis auf Mannigfaltigkeiten

und eben durch Bilinearität.

Schreibt man $e^{j_1 \dots j_k} := e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_k}$ und $\omega = \frac{1}{k!} \omega_{j_1 \dots j_k} e^{j_1 \dots j_k}$ und $\nu = \frac{1}{\ell!} \nu_{i_1 \dots i_\ell} e^{i_1 \dots i_\ell}$, so ist

$$i_\nu \omega = \frac{1}{\ell!(k-\ell)!} \nu^{j_1 \dots j_\ell} \omega_{j_1 \dots j_\ell j_{\ell+1} \dots j_k} e^{j_{\ell+1} \dots j_k}.$$

Für $k = \ell$ ist also $i_\nu \omega = \frac{1}{k!} \langle \nu | \omega \rangle_g$.

1.68 Definition. Die kanonische Volumenform

Die **kanonische n -Form** (Volumenform) zu einem nichtentarteten $g \in T_2^0$ ist durch

$$\varepsilon := \sqrt{|\det(g_{ij})|} e^1 \wedge e^2 \wedge \dots \wedge e^n$$

definiert. Sie ist bis auf das Vorzeichen unabhängig von der Wahl der Basis (Übung).

Da Λ_k und Λ_{n-k} beide die Dimensionen $\binom{n}{k}$ haben, können wir auch sie mit Hilfe eines nichtentarteten $g \in T_2^0$ identifizieren. Dazu definieren wir $\Lambda_0 = T_0^0 := \mathbb{R}$.

1.69 Definition. Der Hodge-Operator

Die lineare Bijektion

$$\begin{aligned} * : \Lambda_k &\rightarrow \Lambda_{n-k}, \\ \omega &\mapsto * \omega := i_\omega \varepsilon \end{aligned}$$

heißt **Hodge-Dualität** und $*$ der **Hodge-Operator**.

1.70 Bemerkung. Eigenschaften von $*$ und ε

(i) Die Koeffizienten von ε haben die Form

$$\varepsilon_{j_1 \dots j_n} = \begin{cases} 0 & \text{falls } j_l = j_k \text{ für } l \neq k \\ \operatorname{sgn} \pi \cdot \sqrt{|g|} & \text{falls } (j_1, \dots, j_n) = \pi(1, \dots, n) \end{cases}$$

wobei $g = \det(g_{ij})$.

(ii) Für $1 \in \Lambda_0$ ist

$$*1 = i_1 \varepsilon := \varepsilon.$$

Umgekehrt gilt

$$\begin{aligned} * \varepsilon = i_\varepsilon \varepsilon &= \frac{1}{n!} \varepsilon_{j_1 \dots j_n} \varepsilon_{i_1 \dots i_n} g^{j_1 i_1} \dots g^{j_n i_n} \\ &= |g| \frac{1}{n!} \sum_{\pi, \pi' \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \operatorname{sgn}(\pi') g^{\pi(1)\pi'(1)} \dots g^{\pi(n)\pi'(n)} \\ &= |g| \det g^{-1} = \frac{g}{|g|} =: (-1)^s, \end{aligned}$$

wobei s für eine Metrik g offenbar Null ist.

(iii) Ist g symmetrisch, so gilt $* \circ *|_{\Lambda_k} = (-1)^{k(n-k)+s} \operatorname{id}_{\Lambda_k}$. (Übungsaufgabe)

(iv) $i_\nu * \omega = i_\nu i_\omega \varepsilon = i_{\omega \wedge \nu} \varepsilon = *(\omega \wedge \nu)$

1.71 Beispiel. Sei $T_0^1 = \mathbb{R}^3$ mit der euklidischen Metrik $g_{ij} = \delta_{ij}$. Dann ist $g = 1$, $s = 0$ und $* \circ *|_{\Lambda_k} = \operatorname{id}_{\Lambda_k}$ für alle $k = 0, \dots, 3$. Die $*$ -Bilder der Basisformen sind

$$\begin{aligned} k = 0, 3 : & \quad 1 \xleftrightarrow{*} dq_1 \wedge dq_2 \wedge dq_3 \\ k = 1, 2 : & \quad (dq_1, dq_2, dq_3) \xleftrightarrow{*} (dq^2 \wedge dq^3, dq^3 \wedge dq^1, dq^1 \wedge dq^2) \end{aligned}$$

Nun fassen wir die Tensorräume in einzelnen Punkten wieder zu Bündeln zusammen. Beim Tangentialbündel liefert uns die Tangentialabbildung eine Bündelkarte. Beim Kotangentialbündel ist das Analogon der Pull-back:

1.72 Definition. Das Kotangentialbündel

Das **Kotangentialbündel** T^*M von M ist die Vereinigung der Kotangentialräume

$$T^*M := \bigcup_{x \in M} (\{x\} \times T_x^*M).$$

Auch T^*M kann wieder in natürlicher Weise mit einer differenzierbaren Struktur versehen werden. Sei $\mathcal{A} = (V_i, \varphi_i)$ Atlas von M , dann ist

$$T^*\mathcal{A} := (T^*V_i, (\varphi_i^{-1})^*)$$

Atlas von T^*M . Hier ist

$$\begin{aligned} (\varphi_i^{-1})^* : T^*V_i &\rightarrow T^*\varphi_i(V_i) \subset T^*\mathbb{R}^n \\ (x, u^*) &\mapsto (\varphi_i(x), (\varphi_i^{-1})^*u^*) \end{aligned}$$

mit

$$(\varphi_i^{-1})^*u^*(v) := u^*(T\varphi_i^{-1}v) \quad \text{für alle } v \in T_{\varphi_i(x)}\mathbb{R}^n$$

der Pull-back von 1-Formen.

Schließlich definiert man analog die Tensorbündel.

1.73 Definition. Tensorbündel

Sei $T_s^r M = \bigcup_{x \in M} (\{x\} \times T_{x_s}^r M)$ das Bündel der r -fach kontravarianten und s -fach kovarianten Tensoren. Dann liefert ein Atlas $\mathcal{A} = (V_i, \varphi_i)$ von M einen natürlichen Atlas auf $T_s^r M$ via

$$T_s^r \mathcal{A} = (T_s^r V_i, \tilde{\varphi}_i)$$

wobei

$$\tilde{\varphi}_i : T_s^r V_i \rightarrow T_s^r \varphi_i(V_i)$$

durch

$$\tilde{\varphi}_i(x, e_{k_1} \otimes \cdots \otimes e_{k_r} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_s}) = (\varphi_i(x), T\varphi_i e_{k_1} \otimes \cdots \otimes T\varphi_i e_{k_r} \otimes (\varphi_i^{-1})^* e^{j_1} \otimes \cdots \otimes (\varphi_i^{-1})^* e^{j_s})$$

und Linearität in der Faser definiert ist.

1.74 Definition. Tensorfelder und Differentialformen

Eine C^∞ -Abbildung $t : M \rightarrow T_s^r M$ mit $\pi_M \circ t = \text{id}_M$ heißt **Tensorfeld** und den Raum der Tensorfelder bezeichnen wir mit $\mathcal{T}_s^r(M)$. Ein alternierendes (man sagt auch total antisymmetrisches) $\omega \in \mathcal{T}_p^0(M)$, also $\omega_x \in \Lambda_p$ für alle $x \in M$, heißt **Differentialform** oder **p -Form** und die Menge der p -Formen bezeichnen wir mit $\Lambda_p(M)$.

1.75 Bemerkung. (a) Es sind also jeweils synonym:

- Vektorfeld und 1-mal kontravariantes Tensorfeld
- Kovektorfeld, 1-mal kovariantes Tensorfeld und 1-Form
- skalare Funktion und 0-Form

- (b) Lokal lässt sich ein Tensorfeld bzgl. der natürlichen Basis einer Karte darstellen:

$$t(x) = t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}(x) \partial_{q_{i_1}} \otimes \dots \otimes \partial_{q_{i_r}} \otimes dq^{j_1} \otimes \dots \otimes dq^{j_s}$$

mit $t_{(j)}^{(i)} \in C^\infty(M)$. In der Physik bezeichnet man oft die Komponenten $t_{(j)}^{(i)}(x)$ als Tensorfelder.

Die Basisdarstellung von p -Formen ist wieder

$$\omega(x) = \frac{1}{p!} \omega_{j_1 \dots j_p}(x) dq^{j_1} \wedge \dots \wedge dq^{j_p}.$$

- (c) Existieren n punktweise linear unabhängige Vektorfelder $e_i \in \mathcal{T}_0^1(M)$, ist also M parallelisierbar, so sind die punktweise dualen Kovektorfelder $e^j \in \mathcal{T}_1^0(M)$ ebenfalls punktweise linear unabhängig in $T_1^0(M)$. Durch Tensorproduktbildung erhält man Basisschnitte aller Tensorbündel. Es gilt also: Ist M parallelisierbar, so sind alle Tensorbündel über M trivialisierbar. Es gibt dann aber im Allgemeinen dennoch Vektorbündel über M , die nicht trivialisierbar sind.

1.76 Definition. Orientierbarkeit und Orientierung

Eine Mannigfaltigkeit M der Dimension n heißt **orientierbar**, falls eine nirgends verschwindende n -Form $\omega \in \Lambda_n(M)$ existiert.

So ein ω heißt **Orientierung** und man nennt eine Basis (e_i) von $T_{x_0}^1 M$ **positiv orientiert** (bzgl. ω), wenn $\omega_x(e_1, \dots, e_n) > 0$ und **negativ orientiert** wenn $\omega_x(e_1, \dots, e_n) < 0$.

1.77 Bemerkung. Ist M parallelisierbar, so ist M auch orientierbar, denn $e^1 \wedge \dots \wedge e^n$ verschwindet nirgends, wenn die e^i linear unabhängig sind. Die Umkehrung gilt nicht: z.B. ist S^2 orientierbar aber nicht parallelisierbar. Mit der üblichen Einbettung von S^2 in \mathbb{R}^3 und $n(x)$ dem äußeren Normalenfeld an die Sphäre wäre z.B. $\omega_x(u, v) := \langle n(x), u \times v \rangle_{\mathbb{R}^3}$ eine nirgends verschwindende Volumenform auf S^2 . Hier ist $u \times v = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$ das Vektorprodukt im \mathbb{R}^3 . Anders gesagt: eine Basis (e_1, e_2) des Tangentialraums $T_x S^2$ ist positiv orientiert, falls $e_1 \times e_2$ nach Außen zeigt.

1.78 Erinnerung. Das Differential einer glatten Funktion

Sei $f \in C^\infty(M)$, dann ist die äußere Ableitung $df : M \rightarrow T^*M$, $x \mapsto (x, df|_x)$ eine 1-Form, also $df \in \mathcal{T}_1^0(M)$. Es symbolisiert df also die Ableitung von f in einer noch anzugebenden Richtung, df ist aber **keine** infinitesimale Größe.

1.79 Definition. Riemannsche und pseudo-Riemannsche Metrik

Sei $g \in \mathcal{T}_2^0(M)$ nicht entartet, d.h. für alle $x \in M$ erfüllt $g(x)$ die Bedingung

$$g(v, u) = 0 \quad \forall u \in T_0^1 \quad \Rightarrow \quad v = 0.$$

- (a) Ist g symmetrisch, so nennt man g eine **pseudo-Riemannsche Metrik**.

- (b) Ist g symmetrisch und positiv definit, so heißt g eine **Riemannsche Metrik**.

1.80 Beispiel. Der Minkowskiraum

Auf $M = \mathbb{R}^4$ ist durch

$$\eta = \eta_{ij} dq^i \otimes dq^j$$

mit

$$\eta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

eine pseudo-Riemannsche Metrik definiert, die sog. Minkowski-Metrik. Der Raum M mit der pseudo-Metrik η heißt Minkowskiraum und ist die Raum-Zeit der speziellen Relativitätstheorie.

1.81 Bemerkung. Wir können nun die punktweise für Tensoren eingeführten Operationen auf Tensorfelder verallgemeinern:

$$\begin{aligned} \langle \cdot | \cdot \rangle &: \mathcal{T}_s^r(M) \times \mathcal{T}_s^r(M) \rightarrow C^\infty(M) \\ \wedge &: \Lambda_p(M) \times \Lambda_q(M) \rightarrow \Lambda_{p+q}(M) \\ i &: \Lambda_p(M) \times \Lambda_q(M) \rightarrow \Lambda_{p-q}(M) \end{aligned}$$

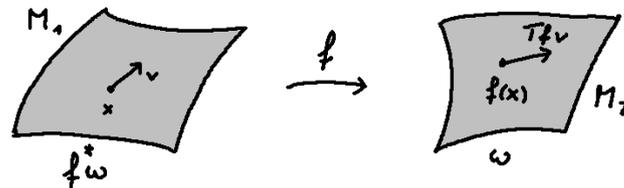
Und falls M orientierbar ist, also eine nirgends verschwindende Volumenform $\varepsilon \in \Lambda_n$ global definiert werden kann, so gibt es auch den entsprechenden Hodge-Operator

$$*: \Lambda_p(M) \rightarrow \Lambda_{n-p}(M).$$

1.82 Definition. Der Pull-Back von Multilinearformen

Sei $f : M_1 \rightarrow M_2$ glatt und $\omega \in \mathcal{T}_p^0(M_2)$ so ist $f^*\omega \in \mathcal{T}_p^0(M_1)$ definiert durch

$$f^*\omega|_x(v_1, \dots, v_p) = \omega|_{f(x)}(Tf v_1, \dots, Tf v_p) \quad \text{für alle } v_1, \dots, v_p \in T_x M_1.$$



Ist $\Phi : M_1 \rightarrow M_2$ ein Diffeomorphismus, so liefert die Abbildung

$$T^*M_2 \rightarrow T^*M_1, \quad (x, \omega) \mapsto (\Phi^{-1}(x), \Phi^*\omega)$$

einen Diffeomorphismus der Kotangentenbündel. Für die Inverse dieser Abbildung schreiben wir

$$T^*\Phi : T^*M_1 \rightarrow T^*M_2, \quad (x, \omega) \mapsto (\Phi(x), \Phi^{-1*}\omega).$$

Es gilt

$$(T^*\Phi\omega | T\Phi v)_{\Phi(x)} = (\omega | v)_x \quad \text{für alle } \omega \in T_x^*M_1, v \in T_x M_1,$$

da $(T^*\Phi\omega)(T\Phi v) = \omega(T\Phi^{-1} \circ T\Phi v) = \omega(v)$.

Einen Diffeomorphismus der Tensorbündel erhält man durch

$$T\Phi \otimes \dots \otimes T\Phi \otimes T^*\Phi \otimes \dots \otimes T^*\Phi : T_s^r M_1 \rightarrow T_s^r M_2$$

wobei man auf Produkten

$$\begin{aligned} &T\Phi \otimes \dots \otimes T\Phi \otimes T^*\Phi \otimes \dots \otimes T^*\Phi(x, u_1 \otimes \dots \otimes u_r \otimes \omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^s) \\ &:= (\Phi(x), T\Phi u_1 \otimes \dots \otimes T\Phi u_r \otimes T^*\Phi \omega^1 \otimes \dots \otimes T^*\Phi \omega^s) \end{aligned}$$

definiert und in jeder Faser $T_{x_s}^r M_1$ linear fortsetzt.

1.83 Definition. Der Push-Forward von Tensorfeldern

Ein Diffeomorphismus $\Phi : M_1 \rightarrow M_2$ induziert eine Abbildung $\Phi_* : \mathcal{T}_s^r(M_1) \rightarrow \mathcal{T}_s^r(M_2)$, den **Push-Forward** von Tensorfeldern, welche durch die Vertauschbarkeit des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{\Phi} & M_2 \\ t \downarrow & & \downarrow \Phi_* t \\ T_s^r M_1 & \xrightarrow{T\Phi \otimes \dots \otimes T\Phi \otimes T^*\Phi \otimes \dots \otimes T^*\Phi} & T_s^r M_2 \end{array}$$

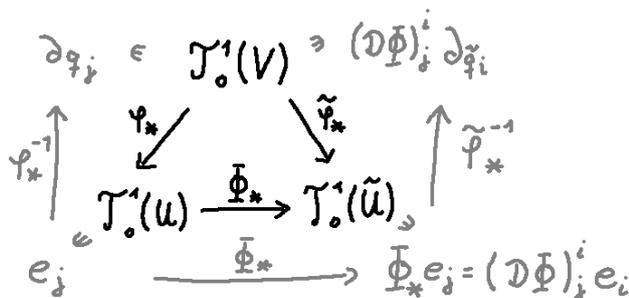
1 Analysis auf Mannigfaltigkeiten

mit $t \in \mathcal{T}_s^r(M_1)$ definiert wird:

$$\Phi_* t = \underbrace{T\Phi \otimes \dots \otimes T\Phi}_r\text{-mal} \otimes \underbrace{T^*\Phi \otimes \dots \otimes T^*\Phi}_s\text{-mal} \circ t \circ \Phi^{-1}.$$

Es gilt wieder die Kettenregel $(\Phi \circ \Psi)_* = \Phi_* \Psi_*$.

- 1.84 Beispiele.** (a) Für eine Funktion $f \in \mathcal{T}_0^0(M_1)$ ist $\Phi_* f = f \circ \Phi^{-1}$.
 (b) Für ein Vektorfeld $X \in \mathcal{T}_0^1(M_1)$ haben wir in Definition 1.33 den Push-Forward $\Phi_* X = T\Phi \circ X \circ \Phi^{-1}$ bereits erklärt.
 (c) Für eine 1-Form $\omega \in \mathcal{T}_1^0(M_1)$ ist der Push-Forward einfach der Pull-Back der Umkehrabbildung, $\Phi_* \omega = \Phi^{-1*} \omega$.
 (d) Push-Forward und Differentialbildung vertauschen: für $f \in \mathcal{T}_0^0(M_1)$ ist $\Phi_* df = d(\Phi_* f)$ (Übung).
 (e) Sei (V, φ) eine Karte von M , e_i das i -te kanonische Einheitsvektorfeld in \mathbb{R}^n und $e^i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $q = (q_1, \dots, q_n) \mapsto q_i$ die i -te Koordinatenfunktion auf \mathbb{R}^n . Dann sind die Koordinatenformen und -vektorfelder gegeben durch $dq^i = \varphi^* de^i$ und $\partial_{q_j} = (\varphi^{-1})_* e_j$. Daraus folgt sofort das Transformationsverhalten von ∂_{q_j} bzw. dq^i unter Kartenwechseln: Sei $\tilde{\varphi}$ eine weitere Kartenabbildung auf V , $\partial_{\tilde{q}_j} = (\tilde{\varphi}^{-1})_* e_j$ und $d\tilde{q}^i = \tilde{\varphi}^* de^i$ die zugehörigen Koordinatenvektorfelder bzw. -formen und $\Phi = \tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ der Kartenwechsel im \mathbb{R}^n .



Aufgrund der Kommutativität des Diagramms ist aber

$$\partial_{q_j} = (\varphi^{-1})_* e_j = (\varphi^{-1})_* (\Phi^{-1})_* \Phi_* e_j = (\tilde{\varphi}^{-1})_* (D\Phi)_j^i e_i = (D\Phi)_j^i \partial_{\tilde{q}_i}$$

und somit

$$\partial_{\tilde{q}_j} = (D\Phi^{-1})_j^i \partial_{q_i}.$$

Aus $d\tilde{q}^j(\partial_{\tilde{q}_i}) = \delta_i^j$ folgt dann auch sofort $d\tilde{q}^j = (D\Phi)_i^j dq^i$ und $dq^j = (D\Phi^{-1})_i^j d\tilde{q}^i$.

Während die natürliche Paarung $(|)$ unter Diffeomorphismen invariant bleibt,

$$(T^*\Phi \omega | T\Phi v) = (\omega | v),$$

gilt dies im Allgemeinen für das Skalarprodukt nicht, sondern nur wenn Φ die Metrik invariant läßt.

1.85 Definition. Isometrien und kanonische Transformationen

Seien M_1 und M_2 Mannigfaltigkeiten und seien $g_1 \in \mathcal{T}_2^0(M_1)$ und $g_2 \in \mathcal{T}_2^0(M_2)$ nicht entartet. Ein Diffeomorphismus $\Phi : M_1 \rightarrow M_2$ mit $g_2 = \Phi_* g_1$, also

$$g_2(T\Phi v, T\Phi u) \circ \Phi = g_1(v, u) \quad \text{für alle } v, u \in \mathcal{T}_0^1(M_1),$$

heißt **Isometrie**, falls g_1 und g_2 (Pseudo-)Metriken sind, bzw. **kanonische Transformation**, falls g_1 und g_2 symplektische Formen sind.

Sei nun $M_1 = M_2 = M$ und $g_1 = g_2 = g$. Ist Φ_t^X der Fluss zu einem Vektorfeld $X \in \mathcal{T}_0^1(M)$, so heißt X **Killingsches Vektorfeld**, falls die Φ_t^X Isometrien sind, bzw. **Hamiltonsches Vektorfeld**, falls die Φ_t^X kanonische Transformationen sind.

1.6 Ableitungen

Ohne weitere Struktur läßt sich auf einer Mannigfaltigkeit nur die äußere Ableitung von Differentialformen definieren. Ist durch ein Vektorfeld ein lokaler Fluss gegeben, so definiert er die Lie-Ableitung beliebiger Tensorfelder.

1.86 Definition. Äußere Ableitung

Sei $\omega \in \Lambda_p(M)$ und bzgl. einer Karte (V, φ) sei

$$\omega = \frac{1}{p!} \sum_{(i)} c_{(i)} dq^{i_1} \wedge \cdots \wedge dq^{i_p} \quad \text{mit} \quad c_{(i)} \in C^\infty(M).$$

Dann ist die **äußere Ableitung** $d\omega \in \Lambda_{p+1}(M)$ in dieser Karte durch

$$d\omega = \frac{1}{p!} \sum_{(i)} dc_{(i)} \wedge dq^{i_1} \wedge \cdots \wedge dq^{i_p}$$

definiert.

Das so definierte $d\omega$ ist unabhängig von der gewählten Karte, da d natürlich bzgl. Diffeomorphismen ist. Genauer: Sei $\Phi : M_1 \rightarrow M_2$ ein Diffeomorphismus, dann ist $\Phi_* d\omega = d\Phi_* \omega$, also das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_p(M_1) & \xrightarrow{\Phi_*} & \Lambda_p(M_2) \\ d \downarrow & & d \downarrow \\ \Lambda_{p+1}(M_1) & \xrightarrow{\Phi_*} & \Lambda_{p+1}(M_2) \end{array}$$

kommutativ. Das folgt sofort aus dem Spezialfall 1.84 (d), also aus $\Phi_* df = d\Phi_* f$ für $f \in \mathcal{T}_0^0(M)$: Es ist

$$\Phi_* \omega = \frac{1}{p!} \sum_{(i)} (c_{(i)} \circ \Phi^{-1}) \Phi_* (dq^{i_1}) \wedge \cdots \wedge \Phi_* (dq^{i_p}) = \frac{1}{p!} \sum_{(i)} (c_{(i)} \circ \Phi^{-1}) d(q^{i_1} \circ \Phi^{-1}) \wedge \cdots \wedge d(q^{i_p} \circ \Phi^{-1})$$

und

$$\Phi_* d\omega = \frac{1}{p!} \sum_{(i)} d(c_{(i)} \circ \Phi^{-1}) \wedge d(q^{i_1} \circ \Phi^{-1}) \wedge \cdots \wedge d(q^{i_p} \circ \Phi^{-1}),$$

also $d\Phi_* \omega = \Phi_* d\omega$.

Ist Φ der Diffeomorphismus eines Kartenwechsel, so wird $d\omega$ im neuen Koordinatensystem so gebildet wie im alten, nur ist alles durch die neuen Koordinaten auszudrücken. Somit ist die Definition von $d\omega$ tatsächlich koordinatenunabhängig.

1.87 Bemerkung. Natürlichkeit der äußeren Ableitung und Einschränkung von Formen

Ist $f : M_1 \rightarrow M_2$ glatt (aber nicht notwendigerweise ein Diffeomorphismus), so gilt für den Pull-Back immer noch

$$f^* d\omega = d(f^* \omega) \quad \text{für alle} \quad \omega \in \Lambda_p(M_2).$$

Das folgt sofort aus obiger Rechnung für Diffeomorphismen, indem man Φ^{-1} durch f ersetzt.

Ist M_1 Untermannigfaltigkeit von M_2 und $\psi : M_1 \rightarrow M_2$ die natürliche Injektion, so liefert

$$\psi^* : \Lambda_p(M_2) \rightarrow \Lambda_p(M_1)$$

die Einschränkung von Formen auf die Untermannigfaltigkeit und es gilt

$$\psi^* d\omega = d(\psi^* \omega),$$

Einschränkung und äußere Ableitung vertauschen also.

1.88 Bemerkung. Eigenschaften der äußeren Ableitung

Aus der Definition ergeben sich unmittelbar die folgenden Eigenschaften der äußeren Ableitung

- (a) $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2, \quad \omega_i \in \Lambda_p(M)$
- (b) $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2, \quad \omega_1 \in \Lambda_p, \omega_2 \in \Lambda_k$
- (c) $d(d\omega) = 0$ für alle $\omega \in \Lambda_p$, da

$$d(d\omega) = \sum_{(i)} \sum_{j,k} \frac{\partial^2 c_{(i)}}{\partial q_k \partial q_j} dq^k \wedge dq^j \wedge dq^{(i)} = \sum_{(i)} \sum_{j < k} \left(\frac{\partial^2 c_{(i)}}{\partial q_k \partial q_j} - \frac{\partial^2 c_{(i)}}{\partial q_j \partial q_k} \right) dq^k \wedge dq^j \wedge dq^{(i)} = 0.$$

1.89 Beispiel. Vektordifferentialoperatoren und äußere Ableitung im \mathbb{R}^3

Sei $M = \mathbb{R}^3$ mit der Euklidischen Metrik $g_{ij} = \delta_{ij}$. Dann können wir Vektorfelder und 1-Formen identifizieren und für die Komponenten gilt $v_i = v^i$. Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ und $v \in \mathcal{T}_0^1(\mathbb{R}^3)$. Es ergeben sich die folgenden Zusammenhänge zwischen den Vektordifferentialoperatoren im \mathbb{R}^3 und der äußeren Ableitung:

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial q_i} dq^i = (\text{grad } f)_i dq^i \\ *(dv) &= *(d(v_i dq^i)) = *(dv^i \wedge dq^i) = *\left(\frac{\partial v_i}{\partial q_k} dq^k \wedge dq^i\right) = \varepsilon_{jki} \frac{\partial v_i}{\partial q_k} dq^j = (\text{rot } v)_j dq^j \\ *d(*v) &= *d\left(v^i \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} dq^j \wedge dq^k\right) = *\left(\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} dv^i \wedge dq^j \wedge dq^k\right) = *\left(\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial v^i}{\partial q_l} dq^l \wedge dq^j \wedge dq^k\right) \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial v^i}{\partial q_l} \varepsilon_{ljk} = \sum_i \frac{\partial v_i}{\partial q_i} = \text{div } v. \end{aligned}$$

Die Rechenregeln für die äußere Ableitung aus 1.88 lassen sich nun direkt auf die Differentialoperatoren übersetzen. Aus (b) lesen wir ab:

- Für $p = k = 0$ folgt aus $d(f \cdot g) = f dg + g df$, dass $\text{grad}(f \cdot g) = f \text{grad } g + g \text{grad } f$
- Für $p = 0, k = 1$ folgt aus $d(f\omega) = df \wedge \omega + f d\omega$, dass $\text{rot}(f\vec{v}) = \text{grad } f \times \vec{v} + f \text{rot } \vec{v}$

Aus (c) ergibt sich:

- Für $p = 0$ folgt aus $d(df) = 0$, dass $\text{rot grad } f = 0$
- Für $p = 1$ folgt aus $0 = *d\omega = *d* *d\omega$, dass $\text{div rot } \vec{v} = 0$.

1.90 Definition. Geschlossene und exakte Formen

Eine p -Form ω heißt **geschlossen**, wenn $d\omega = 0$ ist. Sie heißt **exakt**, wenn $\omega = d\nu$ für ein $\nu \in \Lambda_{p-1}(M)$, wenn sie also eine Stammform besitzt.

Wegen Bemerkung 1.88 (c) gilt

$$\omega \text{ ist exakt} \quad \Rightarrow \quad \omega \text{ ist geschlossen.}$$

Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nur lokal.

1.91 Satz. Lemma von Poincaré

Sei $\omega \in \Lambda_p(M)$ geschlossen, also $d\omega = 0$. Sei $V \subset M$ offen und zusammenziehbar, d.h. diffeomorph zu einem sternförmigen Gebiet im \mathbb{R}^n . Dann existiert $\nu \in \Lambda_{p-1}(V)$ so, dass $\omega|_V = d\nu$.

Beweis. Der folgende Beweis läuft über eine explizite Rechnung im \mathbb{R}^n . Ein eleganterer Beweis unter Verwendung des Homotopie-Operators wird in den Übungen erarbeitet.

Sei $\varphi : V \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus auf das sternförmige Gebiet $U \subset \mathbb{R}^n$. Dann ist $\tilde{\omega} := \varphi_* \omega$ eine geschlossene p -Form auf U und nach dem Lemma von Poincaré auf dem \mathbb{R}^n , das

wir gleich zeigen werden, existiert eine Stammform $\tilde{\nu} \in \Lambda_{p-1}(U)$, also $\tilde{\omega} = d\tilde{\nu}$. Dann ist $\nu := \varphi^*\tilde{\nu}$ aber Stammform zu ω , da $d\varphi^*\tilde{\nu} = \varphi^*d\tilde{\nu} = \varphi^*\tilde{\omega} = \omega$.

Wir zeigen nun das Poincaré Lemma auf dem \mathbb{R}^n . Sei dazu $U \subset \mathbb{R}^n$ o.B.d.A. sternförmig bezüglich des Ursprungs. Wir definieren zunächst für beliebiges $\omega \in \Lambda_p(U)$ mit $\omega = \sum_I \omega_I dq^I$, die Abbildung $P^p : \Lambda_p(U) \rightarrow \Lambda_{p-1}(U)$ mit

$$P^p \omega := \sum_I \sum_{\alpha=1}^p (-1)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 t^{p-1} \omega_I(tq) q_{i_\alpha} dt \right) dq^{I^\alpha}.$$

Hier haben wir die Schreibweise $I = (i_1, \dots, i_p)$ für ein geordnetes p -Tupel $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$ eingeführt. Es bezeichnet $dq^I = dq^{i_1} \wedge \dots \wedge dq^{i_p} \in \Lambda_p(U)$ und $dq^{I^\alpha} = dq^{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dq^{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dq^{i_p} \in \Lambda_{p-1}(U)$, wobei der Hut wieder Auslassung bedeutet.

Wir werden zeigen, dass $\omega = dP^p \omega + P^{p+1} d\omega$ gilt, woraus dann für geschlossenes ω sofort $\omega = d(P^p \omega)$ folgt, also die Existenz einer Stammform. Zunächst berechnen wir

$$\begin{aligned} dP^p \omega &= \sum_{\ell=1}^n \sum_I \sum_{\alpha=1}^p (-1)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 t^{p-1} \frac{\partial(\omega_I(tq) q_{i_\alpha})}{\partial q_\ell} dt \right) dq^\ell \wedge dq^{I^\alpha} \\ &= \sum_I \sum_{\ell \notin I} \sum_{\alpha=1}^p (-1)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 t^p \frac{\partial \omega_I}{\partial q_\ell}(tq) q_{i_\alpha} dt \right) dq^\ell \wedge dq^{I^\alpha} \\ &\quad + \sum_I \sum_{\alpha=1}^p \left(\int_0^1 t^{p-1} \frac{\partial(\omega_I(tq) q_{i_\alpha})}{\partial q_{i_\alpha}} dt \right) dq^I. \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$d\omega = \sum_I \sum_{\ell \notin I} \frac{\partial \omega_I}{\partial q_\ell} dq^\ell \wedge dq^I$$

und somit

$$P^{p+1} d\omega = \sum_I \sum_{\ell \notin I} \left\{ \left(\int_0^1 t^p \frac{\partial \omega_I}{\partial q_\ell}(tq) q_\ell dt \right) dq^I + \sum_{\alpha=1}^p (-1)^\alpha \left(\int_0^1 t^p \frac{\partial \omega_I}{\partial q_\ell}(tq) q_{i_\alpha} dt \right) dq^\ell \wedge dq^{I^\alpha} \right\}.$$

Für die Summe ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} dP^p \omega + P^{p+1} d\omega &= \sum_I \int_0^1 \left(\sum_{\ell=1}^n t^p \frac{\partial \omega_I}{\partial q_\ell}(tq) q_\ell + p t^{p-1} \omega_I(tq) \right) dt dq^I \\ &= \sum_I \int_0^1 \frac{d}{dt} (t^p \omega_I(tq)) dt dq^I = \sum_I \omega_I dq^I = \omega. \end{aligned}$$

□

Den allgemeinen Satz aus der Cohomologietheorie können wir nur ohne Beweis angeben:

1.92 Satz. Zur Existenz von Stammformen

Sei $\omega \in \Lambda_p(M)$ geschlossen, also $d\omega = 0$. Falls in M jede p -dimensionale Untermannigfaltigkeit stetig auf einen Punkt zusammenziehbar ist, so folgt

$$\omega = d\nu \quad \text{für ein } \nu \in \Lambda_{p-1}(M),$$

dann ist also ω exakt.

1.93 Beispiel. Auf der 2-Sphäre S^2 ist also jede geschlossene 1-Form exakt, da sich jede geschlossene Kurve stetig auf einen Punkt zusammenziehen lässt. Da aber S^2 in sich selbst nicht stetig zusammengezogen werden kann, gibt es 2-Formen (die wegen $\dim S^2 = 2$ alle geschlossen sind), die nicht exakt sind (z.B. die Volumenform aus Bemerkung 1.77).

Die äußere Ableitung von Differentialformen ist also auf jeder Mannigfaltigkeit ohne weitere Struktur definiert. Versucht man allgemeine Tensorfelder zu differenzieren, stellt sich die Frage, wie man im Differenzenquotienten Tensorfelder $t(x)$ und $t(x + \delta x)$ an verschiedenen Punkten vergleicht. Im Gegensatz zum gewohnten Fall \mathbb{R}^n liegen $t(x)$ und $t(x + \delta x)$ ja in verschiedenen Räumen, nämlich in $T_{x_s}^r M$ und $T_{x+\delta x_s}^r M$. In einer Karte könnte man zwar beispielsweise für ein Vektorfeld $v \in \mathcal{T}_0^1(M)$

$$Dv = D(v^i \partial_{q_i}) := \frac{\partial v^i}{\partial q_j} \partial_{q_j} \otimes \partial_{q_i}$$

definieren. Diese Definition ist aber **nicht** kartenunabhängig und liefert somit **kein** globales Tensorfeld in $\mathcal{T}_0^2(M)$.

Um Tensorfelder abzuleiten, benötigt man weitere Strukturen, die eine koordinatenunabhängige Identifikation benachbarter Tangentialräume erlauben:

- Ein **Zusammenhang** ∇ bildet Vektorfelder auf Felder linearer Abbildungen ab, also $\mathcal{T}_0^1(M)$ auf $\mathcal{T}_1^1(M)$:

$$\nabla X|_y(\cdot, v) \in T_y M$$

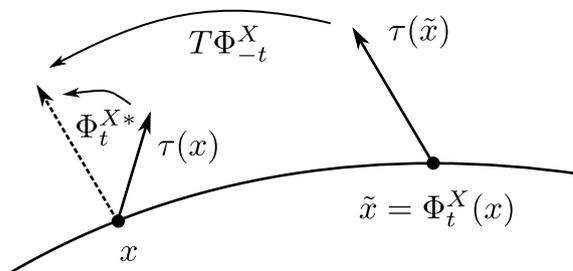
ist die Richtungsableitung von X in Richtung $v \in T_y M$ an der Stelle $y \in M$. Ein Zusammenhang liefert bzw. kann definiert werden durch eine Identifikation benachbarter Tangentialräume. Eine Metrik auf M induziert einen Zusammenhang, den sogenannten Levi-Civita-Zusammenhang. Wir werden uns in dieser Vorlesung nicht weiter mit Zusammenhängen befassen.

- Alternativ liefert einem ein Vektorfeld X selbst eine Identifikation benachbarter Tensorräume, nämlich über den zugehörigen Fluss Φ_t^X . Mit Hilfe des Pullbacks Φ_t^{X*} kann man nun den Raum $T_{y_s}^r M$ bei $y = \Phi_t^X(x)$ mit $T_{x_s}^r M$ identifizieren und erhält im Limes $t \rightarrow 0$ die Lie-Ableitung. Aber: man leitet jetzt in Richtung eines Vektorfeldes, nicht in Richtung eines Vektors ab!

1.94 Definition. Die Lie-Ableitung

Für $X \in \mathcal{T}_0^1(M)$ ist die **Lie-Ableitung** von $\tau \in \mathcal{T}_s^r(M)$ definiert durch

$$L_X \tau = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi_t^{X*} \tau - \tau}{t} = \frac{d}{dt} \Phi_t^{X*} \tau|_{t=0}.$$



1.95 Bemerkung. (a) Für $r = s = 0$ ist

$$L_X f = \frac{d}{dt} f \circ \Phi_t^X|_{t=0} = df(X) = (df|X),$$

also die in Bemerkung 1.34 definierte Lie-Ableitung von Funktionen. In diesem Fall hängt $L_X f(y)$ nur von $X(y)$ ab.

- (b) Für $r + s > 0$ hängt $L_X \tau(y)$ nicht nur von $X(y)$ ab, sondern von X auf einer Umgebung von $y \in M$.

1.96 Proposition. Eigenschaften der Lie-Ableitung

Seien $t_1, t_2 \in \mathcal{T}_s^r(M)$, $t_3 \in \mathcal{T}_{s'}^{r'}(M)$, $t_4 \in \mathcal{T}_r^s(M)$ und $X \in \mathcal{T}_0^1(M)$. Dann gilt

- (i) $L_X(t_1 + t_2) = L_X t_1 + L_X t_2$
- (ii) $L_X(t_1 \otimes t_3) = L_X t_1 \otimes t_3 + t_1 \otimes L_X t_3$
- (iii) $L_X(t_1 | t_4) = (L_X t_1 | t_4) + (t_1 | L_X t_4)$

Beweis. Für Φ_t^{X*} gilt

- (i) $\Phi_t^{X*}(t_1 + t_2) = \Phi_t^{X*} t_1 + \Phi_t^{X*} t_2$
- (ii) $\Phi_t^{X*}(t_1 \otimes t_3) = \Phi_t^{X*} t_1 \otimes \Phi_t^{X*} t_3$
- (iii) $\Phi_t^{X*}(t_1 | t_4) = (\Phi_t^{X*} t_1 | \Phi_t^{X*} t_4)$.

Ableiten nach t liefert jeweils die Behauptung. □

1.97 Bemerkung. Für isometrische bzw. kanonische Transformationen gilt

$$\Phi^* g = g \quad \text{bzw.} \quad \Phi^* \langle t_1 | t_2 \rangle_g = \langle \Phi^* t_1 | \Phi^* t_2 \rangle_g.$$

Also gilt für die erzeugenden Killingschen bzw. Hamiltonschen Vektorfelder X

$$L_X \langle t_1 | t_2 \rangle_g = \langle L_X t_1 | t_2 \rangle_g + \langle t_1 | L_X t_2 \rangle_g.$$

Achtung: für allgemeine Vektorfelder gilt das nicht, da dann auch g selbst "abgeleitet" werden muss!

1.98 Bemerkung. (a) Im Beweis von Satz 1.46 haben wir gezeigt, dass für einen Diffeomorphismus $\psi : M_1 \rightarrow M_2$ und ein Vektorfeld $X \in \mathcal{T}_0^1(M_1)$ gilt:

$$\psi \circ \Phi_t^X = \Phi_t^{\psi_* X} \circ \psi.$$

Also ist

$$\psi_* (\Phi_t^X)_* \tau = (\Phi_t^{\psi_* X})_* \psi_* \tau \quad \forall \tau \in \mathcal{T}_s^r(M_1),$$

oder nach Ableiten

$$\psi_* L_X \tau = L_{\psi_* X} \psi_* \tau.$$

Die Lie-Ableitung L_X ist also natürlich in Bezug auf Diffeomorphismen.

- (b) Da d mit $(\Phi_t^X)^*$ vertauscht, $d(\Phi_t^X)^* \omega = (\Phi_t^X)^* d\omega$, vertauscht es auch mit L_X ,

$$dL_X \omega = L_X d\omega.$$

1.99 Definition. Sei $X \in \mathcal{T}_0^1(M)$ und $\omega \in \Lambda_p(M)$, dann ist das innere Produkt $i_X \omega \in \Lambda_{p-1}(M)$ definiert durch

$$i_X \omega(v_1, \dots, v_{p-1})|_y = \omega(X(y), v_1, \dots, v_{p-1}).$$

Also $(i_X \omega)_{i_1 \dots i_{p-1}} = X^j \omega_{j i_1 \dots i_{p-1}}$.

1.100 Satz. Lie-Ableitung auf Differentialformen: die Cartansche Formel

Für $X \in \mathcal{T}_0^1(M)$ und $\omega \in \Lambda_p(M)$ ist

$$L_X \omega = i_X d\omega + d(i_X \omega).$$

Auf Differentialformen gilt also

$$L_X = i_X \circ d + d \circ i_X.$$

1 Analysis auf Mannigfaltigkeiten

Beweis. Für $f \in \mathcal{T}_0^0(M)$ ist gemäß Bemerkung 1.95 (a) $L_X f = df(X) = i_X df$ und $i_X f = 0$ per Definition. Für $\omega = \omega_j dq^j$ gilt einerseits mit Proposition 1.96 (ii), dass

$$L_X \omega_j dq^j = (L_X \omega_j) dq^j + \omega_j L_X dq^j = d\omega_j(X) dq^j + \omega_j dL_X q^j = d\omega_j(X) dq^j + \omega_j d(dq^j(X)),$$

und andererseits

$$\begin{aligned} (i_X d + di_X) \omega_j dq^j &= d\omega_j(X) dq^j - dq^j(X) d\omega_j + dq^j(X) d\omega_j + \omega_j d(dq^j(X)) \\ &= d\omega_j(X) dq^j + \omega_j d(dq^j(X)). \end{aligned}$$

Damit ist $L_X = i_X \circ d + d \circ i_X$ auf Λ_0 und Λ_1 . Wiederum mit Proposition 1.96 (ii) gilt für $\omega \in \Lambda_1$ und $\nu \in \Lambda_k$

$$L_X(\omega \wedge \nu) = L_X \omega \wedge \nu + \omega \wedge L_X \nu$$

und

$$\begin{aligned} (i_X d + di_X)(\omega \wedge \nu) &= i_X(d\omega \wedge \nu - \omega \wedge d\nu) + d(i_X \omega \wedge \nu - \omega \wedge i_X \nu) \\ &= (i_X d + di_X)\omega \wedge \nu + \omega \wedge (i_X d + di_X)\nu. \end{aligned}$$

Per Induktion folgt nun, dass L_X und $di_X + i_X d$ auch auf $\omega = \frac{1}{p!} \sum_{(i)} \omega_{(i)} dq^{i_1} \wedge \cdots \wedge dq^{i_p}$ übereinstimmen. \square

1.101 Definition. Die Lie-Klammer von Vektorfeldern

Die Lie-Klammer zweier Vektorfelder $X, Y \in \mathcal{T}_0^1(M)$ ist das Vektorfeld

$$L_X Y =: [X, Y].$$

Auf $\mathcal{T}_0^0(M)$ gilt wegen Proposition 1.96 (iii), Bemerkung 1.95 (a) und Bemerkung 1.98 (b)

$$L_{[X, Y]} f = (df|[X, Y]) = (df|L_X Y) = L_X(df|Y) - (dL_X f|Y) = L_X L_Y f - L_Y L_X f,$$

was die Kommutatorschreibweise erklärt und mit Bemerkung 1.98 (b) auch

$$L_{[X, Y]} df = L_X L_Y df - L_Y L_X df$$

liefert. Außerdem folgt $[X, Y] = -[Y, X]$, da $L_{-X} = -L_X$ und da die Wirkung auf \mathcal{T}_0^0 das Vektorfeld eindeutig festlegt.

1.102 Proposition. Für $t \in \mathcal{T}_s^r(M)$ und $X, Y \in \mathcal{T}_0^1(M)$ gilt

$$L_{[X, Y]} t = (L_X L_Y - L_Y L_X) t$$

und die Jacobi-Identität

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

Beweis. Übungsaufgabe. \square

1.103 Beispiele. Sei X in einer Karte gegeben durch $X = X^i \partial_{q_i}$.

(a) Für $f \in \mathcal{T}_0^0$ ist $L_X f = (df|X) = \frac{\partial f}{\partial q_i} X^i =: f_{,i} X^i$.

(b) Für $\omega = \omega_i dq^i \in \mathcal{T}_1^0$ ist

$$\begin{aligned} L_X \omega &= (L_X \omega_i) dq^i + \omega_i d(L_X q^i) = \omega_{i,k} X^k dq^i + \omega_i d(X^i) \\ &= \omega_{i,k} X^k dq^i + \omega_i X_{,k}^i dq^k = (\omega_{i,k} X^k + \omega_k X_{,i}^k) dq^i. \end{aligned}$$

(c) Da $L_{[X, Y]} f = X^j \partial_j Y^i \partial_i f - Y^j \partial_j X^i \partial_i f = (X^j Y_{,j}^i - Y^j X_{,j}^i) f_{,i}$, hat der Kommutator die Koordinatendarstellung

$$[X, Y] = (X^j Y_{,j}^i - Y^j X_{,j}^i) \partial_{q_i}.$$

1.7 Integration

Man kann nun n -Formen auf n -dimensionalen Mannigfaltigkeiten integrieren, bzw. p -Formen auf p -dimensionalen Untermannigfaltigkeiten. Aufgrund des folgenden Lemmas reicht es, den ersten Fall zu betrachten.

1.104 Lemma. Sei ω eine p -Form auf M und $N \subset M$ eine p -dimensionale Untermannigfaltigkeit (möglicherweise berandet). Dann ist $\tilde{\omega} := \omega|_N := \psi^*\omega$ (mit $\psi : N \rightarrow M$ die natürliche Injektion) eine p -Form auf N und es gilt

- (i) $d\omega = 0 \Rightarrow d\tilde{\omega} = 0$
- (ii) $\omega = d\nu \Rightarrow \tilde{\omega} = d\tilde{\nu}$.

Beweis. Vergleiche Bemerkung 1.87. □

Nun definiert man Integrale über n -Formen auf n -dimensionalen Mannigfaltigkeiten, indem man sie auf (Lebesgue-)Integrale im \mathbb{R}^n zurückführt. Zunächst tun wir dies in einem Kartengebiet.

1.105 Definition. Das Integral auf einem Kartengebiet

Sei (V, φ) Karte auf M und $\omega \in \Lambda_n(M)$ mit

$$\text{supp } \omega := \overline{\{x \in M \mid \omega(x) \neq 0\}} \subset V.$$

Dann ist

$$\int_M \omega = \int_V \omega := \int_{\varphi(V)} \varphi_* \omega := \int_{\mathbb{R}_+^n} \omega(q) d^n q,$$

wobei

$$\varphi_* \omega := \omega(q) dq^1 \wedge \dots \wedge dq^n \in \Lambda_n(\mathbb{R}_+^n)$$

und $d^n q$ das n -dimensionale Lebesguemaß auf \mathbb{R}^n bezeichnet.

1.106 Bemerkung. Unabhängigkeit von der Kartenwahl

Die Definition $\int_M \omega$ ist, bis auf die Orientierung, unabhängig von der Wahl der Karte. Seien φ und $\tilde{\varphi}$ zwei gleichorientierte Karten auf V , also für $\Phi = \tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ ist $\det D\Phi > 0$, dann gilt mit dem Transformationssatz im \mathbb{R}^n

$$\int_{\varphi(V)} \varphi_* \omega := \int \omega(q) d^n q = \int (\tilde{\omega} \circ \Phi)(q) \det(D\Phi(q)) d^n q \stackrel{\text{Trafo}}{=} \int \tilde{\omega}(\tilde{q}) d^n \tilde{q} = \int_{\tilde{\varphi}(V)} \tilde{\varphi}_* \omega,$$

da $\omega(q) = (\tilde{\omega} \circ \Phi)(q) \det(D\Phi(q))$. Letzteres folgt aus dem Transformationsverhalten von Volumenformen: wegen $d\tilde{q}^j = (D\Phi)_i^j dq^i$ gilt mit $\tilde{q} = \Phi(q)$

$$\begin{aligned} \omega = \tilde{\omega}(\tilde{q}) d\tilde{q}^1 \wedge \dots \wedge d\tilde{q}^n &= (\tilde{\omega} \circ \Phi)(q) (D\Phi)_{j_1}^1(q) \dots (D\Phi)_{j_n}^n(q) dq^{j_1} \wedge \dots \wedge dq^{j_n} \\ &= (\tilde{\omega} \circ \Phi)(q) \det(D\Phi(q)) dq^1 \wedge \dots \wedge dq^n \\ &= \omega(q) dq^1 \wedge \dots \wedge dq^n. \end{aligned}$$

Um auch Funktionen integrieren zu können, deren Träger nicht innerhalb eines Kartengebiets liegt, zerlegt man das Integral mit Hilfe einer "Zerlegung der Eins".

1.107 Definition. Zerlegung der Eins

Sei M eine Mannigfaltigkeit und $\mathcal{A} = (V_i, \varphi_i)_{i \in I}$ ein Atlas. Eine an \mathcal{A} **adaptierte Zerlegung der Eins** $(\chi_i)_{i \in I}$ ist eine Familie von glatten Funktionen $\chi_i : M \rightarrow [0, 1]$ mit den Eigenschaften:

- (a) Jedes χ_i hat Träger in nur einem Kartengebiet: $\text{supp } \chi_i \subset V_i$.

1 Analysis auf Mannigfaltigkeiten

(b) Die Zerlegung ist lokal endlich: Zu jedem $x \in M$ gibt es eine Umgebung U so, dass $U \cap \text{supp} \chi_i \neq \emptyset$ nur für endlich viele $i \in I$.

(c) Die χ_i summieren sich überall zu Eins: $\sum_{i \in I} \chi_i(x) = 1$ für alle $x \in M$.

Man beachte, dass aufgrund der lokalen Endlichkeit die Summe in (c) immer nur endlich viele Terme ungleich Null enthält.

1.108 Bemerkung. Zur Existenz einer Zerlegung der Eins

Auf parakompakten Mannigfaltigkeiten existiert zu jedem Atlas eine adaptierte Zerlegung der Eins. Der \mathbb{R}^n mit der üblichen Topologie ist parakompakt und Untermannigfaltigkeiten parakompakter Mannigfaltigkeiten sind ebenfalls wieder parakompakt. Tatsächlich sind Gegenbeispiele zur Parakompaktheit so ausgefallen, dass die Parakompaktheit oft bei der Definition von Mannigfaltigkeiten in Form des 2ten Abzählbarkeitsaxioms angenommen wird (dieses hatten wir nicht in die Definition aufgenommen). Da wir auf geometrische Aspekte fokussieren wollen, beschränken wir uns auf die Integration von Formen mit kompaktem Träger. Da aber Kompakta immer auch parakompakt sind, können wir im folgenden immer von der Existenz einer Zerlegung der Eins ausgehen.

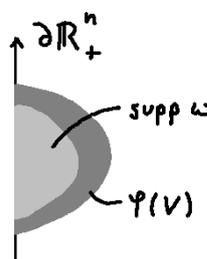
Sei also (V_i, φ_i) ein positiv orientierter Atlas der n -dimensionalen Mannigfaltigkeit M . Für $\omega \in \Lambda_n(M)$ mit kompaktem Träger ist

$$\text{supp } \omega \subset \bigcup_{j=1}^m V_{i_j} =: \bigcup_{j=1}^m V_j$$

und es existiert dann immer eine an $(V_j, \varphi_j)_{j=1, \dots, m}$ adaptierte Zerlegung der Eins $(\chi_j)_{j=1, \dots, m}$ auf $V := \bigcup_{j=1}^m V_j$.

1.109 Bemerkung. Verhalten am Rand

Dass der Träger $\text{supp } \omega$ in einer offenen Menge V enthalten ist, impliziert **nicht**, dass ω auf dem Rand ∂M von M Null ist.



1.110 Definition. Das Integral über n -Formen

Sei M eine orientierte Mannigfaltigkeit und (V_i, φ_i) ein positiv orientierter Atlas. Sei $\omega \in \Lambda_n(M)$ und $\text{supp } \omega$ kompakt. Dann ist

$$\int_M \omega := \sum_{j=1}^m \int_{V_j} \chi_j \omega := \sum_{j=1}^m \int_{\varphi_j(V_j)} \varphi_{j*}(\chi_j \omega)$$

wobei χ_j eine Zerlegung der Eins ist, welche an eine endliche Überdeckung des Trägers durch Kartengebiete V_j adaptiert ist.

Diese Definition ist unabhängig von der Wahl der Karte und der Wahl der Zerlegung der Eins. Die Unabhängigkeit von der Kartenwahl haben wir bereits in Bemerkung 1.106 besprochen. Sei nun $\tilde{\chi}_j$ eine weitere an V_j adaptierte Zerlegung der Eins. Dann ist

$$\sum_{j=1}^m \int_{\varphi_j(V_j)} \varphi_{j*}(\chi_j \omega) = \sum_{j=1}^m \int_{\varphi_j(V_j)} \varphi_{j*}(\chi_j \sum_{i=1}^m \tilde{\chi}_i \omega)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j,i=1}^m \int_{\varphi_j(V_j \cap V_i)} \varphi_{j*}(\chi_j \tilde{\chi}_i \omega) = \sum_{j,i=1}^m \int_{\varphi_i(V_j \cap V_i)} \varphi_{i*}(\chi_j \tilde{\chi}_i \omega) \\
&= \sum_{i=1}^m \int_{\varphi_i(V_i)} \varphi_{i*} \left(\sum_{j=1}^m \chi_j \tilde{\chi}_i \omega \right) = \sum_{i=1}^m \int_{\varphi_i(V_i)} \varphi_{i*}(\tilde{\chi}_i \omega).
\end{aligned}$$

1.111 Bemerkung. Das Integral von Funktionen

Ist auf M eine „natürliche“ Volumenform $\Omega \in \Lambda_n(M)$ gegeben, so schreibt man für $f \in C_0^\infty(M)$ auch

$$\int_M f := \int_M f \Omega.$$

1.112 Beispiel. Sei $M = [a, b] \subset \mathbb{R}$ berandete Mannigfaltigkeit und $f \in C_0^\infty(M)$ (daraus folgt **nicht**, dass $f(a) = f(b) = 0$ ist, da M selbst kompakt ist). Dann ist $df \in \Lambda_1(M)$ und $\text{supp } df$ kompakt, und es gilt in der natürlichen Karte $\varphi = \text{Id}_{\mathbb{R}}$

$$\int_M df = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x} dx = f(b) - f(a) =: \int_{\partial M} f.$$

1.113 Bemerkung. Das Integral über Untermannigfaltigkeiten

Sei M eine Mannigfaltigkeit, $N \subset M$ eine orientierte, möglicherweise berandete, Untermannigfaltigkeit der Dimension $p \leq n$ und $\omega \in \Lambda_p(M)$ mit kompaktem Träger. Dann definieren wir

$$\int_N \omega := \int_N \psi^* \omega,$$

wobei $\psi : N \rightarrow M$ die natürliche Injektion bezeichnet.

Tatsächlich muss N keine Untermannigfaltigkeit sein: Für jede p -dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit und glatte Abbildung $\psi : N \rightarrow M$ kann man das Integral analog definieren. Beispielsweise könnte $N = S^1$ sein und $\psi(N) \subset M$ eine geschlossene Kurve die sich selbst überschneidet.

1.114 Bemerkung. Orientierung des Randes

Ist M eine orientierte Mannigfaltigkeit, so ist auch der Rand ∂M orientierbar und die Orientierung auf M induziert eine solche auf ∂M : Sei (V_i, φ_i) ein positiv orientierter Atlas auf M , dann sei $(V_i|_{\partial M}, \varphi_i|_{\partial M})$ negativ orientiert. Anders gesagt: Ist $dq^1 \wedge \cdots \wedge dq^n$ eine positive Volumenform auf M , so ist in randadaptierten Karten $-dq^2 \wedge \cdots \wedge dq^n$ eine positive Volumenform auf ∂M .

Wir zeigen nun die Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Integral- und Differentialrechnung auf berandete Mannigfaltigkeiten:

1.115 Satz. Satz von Stokes

Sei M eine berandete, orientierte Mannigfaltigkeit und $\omega \in \Lambda_{n-1}(M)$ habe kompakten Träger. Dann gilt

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega,$$

wobei ∂M die oben beschriebene Orientierung von M erbt.

Auf Untermannigfaltigkeiten ergibt sich dann sofort folgende Version des Satzes:

1.116 Korollar. Sei M eine Mannigfaltigkeit und $N \subset M$ eine orientierte, möglicherweise berandete Untermannigfaltigkeit der Dimension p . Sei $\omega \in \Lambda_{p-1}(M)$ mit kompaktem Träger, dann gilt mit Lemma 1.104 und Bemerkung 1.113

$$\int_N d\omega = \int_{\partial N} \omega,$$

1 Analysis auf Mannigfaltigkeiten

wobei ∂N wieder die Orientierung von N erbt.

Auch hier können wir statt einer Untermannigfaltigkeit wieder das glatte Bild $\psi(N) \subset M$ einer p -dimensionalen Mannigfaltigkeit N betrachten.

1.117 Bemerkung. (a) Die Forderung nach kompaktem Träger dient einerseits dazu, Konvergenzprobleme zu umgehen, ist aber andererseits auch am Rand wichtig: Als Beispiel betrachte $M = (a, b)$, also $\partial M = \emptyset$, und die Funktion $f(x) = x$. Dann ist

$$\int_a^b df = b - a \neq \int_{\partial M} f = 0,$$

was nicht im Widerspruch zum Satz von Stokes steht, da f keinen kompakten Träger hat. Auf $M = [a, b]$ ist $\partial M = \{a, b\}$ und $f(x) = x$ hat kompakten Träger.

(b) Die Aussage, dass $dd\omega = 0$ für jedes $\omega \in \Lambda_p(M)$ entspricht der Tatsache, dass der Rand eines Randes leer ist, also $\partial\partial N = \emptyset$:

$$0 = \int_N dd\omega = \int_{\partial N} d\omega = \int_{\partial\partial N} \omega = 0.$$

Beweis. des Stokesschen Satzes:

Sei (V_i, φ_i) eine endliche Überdeckung von $\text{supp } \omega$ mit randadaptierten, positiv orientierten Karten und χ_i eine adaptierte Zerlegung der Eins. Setze $\omega = \sum_i \chi_i \omega =: \sum_i \omega_i$, dann ist

$$\int_M d\omega = \sum_i \int_{V_i} d\omega_i$$

und es genügt $\int_{V_i} d\omega_i = \int_{\partial V_i} \omega_i$ zu zeigen. In einer randadaptierten Karte hat ω_i die Form

$$\omega_i = \sum_{j=1}^n a_j(q) dq^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dq^j} \wedge \cdots \wedge dq^n,$$

und, da $\Psi^* dq^1 = 0$, gilt

$$\omega_i \Big|_{\partial M} = \Psi^* \omega_i = a_1(0, q_2, \dots, q_n) dq^2 \wedge \cdots \wedge dq^n.$$

Es ist

$$d\omega_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_j(q)}{\partial q_j} (-1)^{j-1} dq^1 \wedge \cdots \wedge dq^n,$$

also

$$\begin{aligned} \int_M d\omega_i &= \sum_{j=1}^n \int_M \frac{\partial a_j}{\partial q_j} (-1)^{j-1} dq^1 \wedge \cdots \wedge dq^n \\ &= \sum_{j=1}^n \int_0^\infty dq_1 \int_{-\infty}^\infty dq_2 \cdots \int_{-\infty}^\infty dq_n \frac{\partial a_j(q)}{\partial q_j} (-1)^{j-1} \\ &= - \int_{-\infty}^\infty dq_2 \cdots \int_{-\infty}^\infty dq_n a_1(0, q_2, \dots, q_n) \\ &= - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} a_1(0, q_2, \dots, q_n) dq^2 \wedge \cdots \wedge dq^n = \int_{\partial M} \omega_i \end{aligned}$$

□

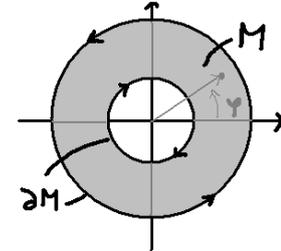
1.118 Beispiele. (a) Betrachte den Kreisring $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$ und die 1-Form $\omega = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$ ("= $d\varphi$ "). Dann ist $d\omega = 0$, also $\int_M d\omega = 0$, und ebenfalls

$$\int_{\partial M} \omega = \int_{x^2+y^2=1} \omega + \int_{x^2+y^2=\frac{1}{2}} \omega = \int_0^{2\pi} d\varphi - \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi - 2\pi = 0.$$

Beachte, dass ω zwar lokal das Differential der Winkelfunktion φ ist, aber nicht auf ganz M exakt sein kann, denn $\omega = d\nu$ implizierte

$$2\pi = \int_{S^1} \omega = \int_{S^1} d\nu = \int_{\partial S^1} \nu = 0$$

da $\partial S^1 = \emptyset$.

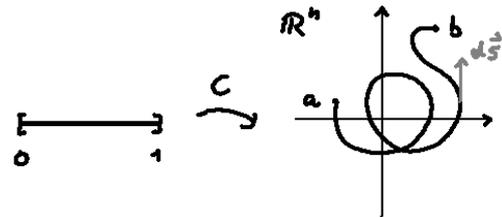


(b) Die üblichen Integralsätze der Vektoranalysis ergeben sich jetzt als Spezialfälle des Stokes'schen Satzes (vgl. Beispiel 1.89).

(i) Sei $C : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine berandete Kurve im \mathbb{R}^n mit $C(0) = a$ und $C(1) = b$ und $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Dann ist

$$\begin{aligned} \int_C df &= \int_C \frac{\partial f}{\partial q_j} dq^j = \int_C \text{grad} f \cdot d\vec{s} \\ &= \int_{\partial C} f = f(b) - f(a). \end{aligned}$$



(ii) Sei M eine 2-dimensional berandete Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 und $\omega = \omega_j dq^j$ eine kompakt getragene 1-Form. Dann ist einerseits

$$\int_{\partial M} \omega = \int_{\partial M} \omega_j dq^j = \int_{\partial M} \vec{\omega} \cdot d\vec{s}$$

und andererseits

$$\begin{aligned} \int_M d\omega &= \int_M *(d\omega) = \int_M (\text{rot } \vec{\omega})_j *dq^j \\ &= \int_M \text{rot } \vec{\omega} \cdot \begin{pmatrix} dq^2 \wedge dq^3 \\ dq^3 \wedge dq^1 \\ dq^1 \wedge dq^2 \end{pmatrix} =: \int_M \text{rot } \vec{\omega} \cdot d\vec{F}. \end{aligned}$$

Wir erhalten also den klassischen Satz von Stokes im \mathbb{R}^3 :

$$\int_{\partial M} \vec{\omega} \cdot d\vec{s} = \int_M \text{rot } \vec{\omega} \cdot d\vec{F}.$$

(iii) Sei M eine 3-dimensionale berandete Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 und $\omega = *(\omega_j dq^j)$ eine kompakt getragene 2-Form. Dann ist

$$\int_{\partial M} \omega = \int_{\partial M} \omega_j *dq^j = \int_{\partial M} \vec{\omega} \cdot d\vec{F}$$

und

$$\int_M d\omega = \int_M **d*\omega_j dq^j = \int_M *\text{div } \vec{\omega} = \int_M \text{div } \vec{\omega} \varepsilon = \int_M \text{div } \vec{\omega} dV.$$

Wir erhalten also den Gaußschen Satz im \mathbb{R}^3 :

$$\int_{\partial M} \vec{\omega} \cdot d\vec{F} = \int_M \operatorname{div} \vec{\omega} \, dV.$$

1.119 Definition. Diffeotopie (=Glatte Homotopie)

Es seien $N_0 = \psi_0(N)$ und $N_1 = \psi_1(N)$ jeweils das glatte Bild einer p -dimensionalen Mannigfaltigkeit N in der n -dimensionalen Mannigfaltigkeit M , also $\psi_0 : N \rightarrow M$ und $\psi_1 : N \rightarrow M$ glatt. Es heißen N_0 und N_1 **diffeotop** (oder **glatt homotop**), falls es ein glattes $F : [0, 1] \times N \rightarrow M$ gibt, sodass

$$\psi_0 = F \circ \iota_0 : N \rightarrow N_0 \quad \text{und} \quad \psi_1 = F \circ \iota_1 : N \rightarrow N_1,$$

wobei ι_0 und ι_1 jeweils die Injektion von N in $\{0\} \times N$ bzw. $\{1\} \times N$ ist. Ist N berandet, so fordert man zusätzlich, dass $\psi_0|_{\partial N} = \psi_1|_{\partial N} = F(t, \cdot)|_{\partial N}$ für alle $t \in (0, 1)$, und spricht von **Diffeotopie bei festem Rand**.

Ein weiteres Korollar zum Satz von Stokes ist dann die folgende Aussage: Das Integral einer geschlossenen Form über das glatte Bild einer p -dimensionalen Mannigfaltigkeit ändert sich nicht, wenn man letzteres glatt deformiert ohne das Bild des Randes zu ändern.

1.120 Satz. Invarianz des Integrals von geschlossenen Formen unter Diffeotopien

Es seien $N_0 = \psi_0(N)$ und $N_1 = \psi_1(N)$ jeweils das glatte Bild einer p -dimensionalen, orientierbaren Mannigfaltigkeit N in der n -dimensionalen Mannigfaltigkeit M . Es sei entweder N randlos, oder $\psi_0|_{\partial N} = \psi_1|_{\partial N}$. Falls N_0 und N_1 diffeotop sind, so gilt für jede geschlossene Form $\omega \in \Lambda_p(M)$ mit kompaktem Träger, dass

$$\int_{N_0} \omega = \int_{N_1} \omega.$$

Beweis. Übungen. □

Insbesondere verschwindet also das Integral einer geschlossenen Form über jede auf einen Punkt zusammenziehbare Untermannigfaltigkeit.

1.121 Proposition. Invarianz des Integrals unter Diffeomorphismen

Sei $\Phi : M_1 \rightarrow M_2$ ein Diffeomorphismus und $\omega \in \Lambda_n(M_1)$. Dann ist

$$\int_{M_1} \omega = \int_{M_2} \Phi_* \omega.$$

Beweis. Vgl. Bemerkung 1.106. □

1.122 Korollar. Sei $\omega \in \Lambda_n(M)$, $V \subset M$ eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit und $X \in \mathcal{T}_0^1(M)$ habe kompakten Träger. Dann ist

$$\int_{\partial V} i_X \omega = \int_V L_X \omega = \frac{d}{dt} \int_{\Phi_t^X(V)} \omega \Big|_{t=0} =: \frac{d}{dt} \operatorname{Vol}^\omega(\Phi_t^X(V)) \Big|_{t=0}$$

und insbesondere

$$\int_M L_X \omega = 0,$$

falls M keinen Rand hat.

Beweis. Die erste Gleichheit folgt aus der Cartanformel und dem Satz von Stokes. Sie kann als verallgemeinerte Version des Gaußschen Satzes gelesen werden. Die zweite Gleichheit ist die infinitesimale Version von Proposition 1.121. □

1.123 Korollar. Sei $\Phi : M \rightarrow M$ ein Diffeomorphismus und Ω eine n -Form mit $\Phi^*\Omega = \Omega$. Dann gilt für alle $f \in C_0^\infty(M)$

$$\int_M f\Omega = \int_M (f \circ \Phi)\Omega$$

Beweis. Folgt sofort aus Proposition 1.121 und

$$\Phi^*(f\Omega) = (f \circ \Phi)\Phi^*\Omega = (f \circ \Phi)\Omega.$$

□

1.124 Bemerkung. Integral über messbare bzw. integrierbare Funktionen

Der Integralbegriff aus Definition 1.110 läßt sich offensichtlich auf messbare Funktionen erweitern: Sei $\Omega \in \Lambda_n(M)$ positiv und $f : M \rightarrow [0, \infty)$ messbar, dann setzt man

$$\begin{aligned} \int_M f\Omega &= \sum_i \int_{\varphi_i(V_i)} \varphi_{i*}(\chi_i f \Omega) = \sum_i \int_{\varphi_i(V_i)} (\chi_i f \circ \varphi_i^{-1}) \varphi_{i*} \Omega \\ &= \sum_i \int_{\varphi_i(V_i)} (\chi_i f \circ \varphi_i^{-1})(q) \Omega(q) d^n q, \end{aligned}$$

wobei das letzte Integral wieder ein gewöhnliches Lebesgueintegral ist. Man nennt f integrierbar, falls $\int_M |f|\Omega < \infty$ und definiert für integrierbares $f \in L^1(M, \Omega)$ wie üblich $\int_M f\Omega := \int_M f^+\Omega - \int_M f^-\Omega$.

Als Anwendung zeigen wir noch einen berühmten (aber nicht sehr relevanten) Satz aus der statistischen Mechanik:

1.125 Satz. Poincaréscher Wiederkehrsat

Sei $\Phi_t : M \rightarrow M$ ein Fluss und $\Omega \in \Lambda_n(M)$ eine invariante Volumenform, also $\Phi_t^*\Omega = \Omega$. Sei $A \subset M$ Borel-messbar mit $\Omega(A) := \int_M \chi_A \Omega < \infty$ und $\Phi_t(A) \subset A$.

Für jedes messbare $B \subset A$ gilt dann, dass fast alle Punkte in B unendlich oft nach B zurückkehren. Genauer gilt, dass die Menge

$$G := \{x \in B \mid \Phi_t(x) \in B \text{ für unendlich viele } t \in \mathbb{N}\}$$

volles Maß hat, $\Omega(G) = \Omega(B)$.

Beweis. Es ist $K_n = \bigcup_{j=n}^\infty \Phi_{-j}(B)$ die Menge der Punkte in A , die nach n oder mehreren ganzzahligen Zeitschritten mindestens einmal nach B kommen. Es gilt

$$B \subset K_0 \supset K_1 \supset K_2 \supset \cdots \supset K_{n-1} \supset K_n.$$

und somit

$$G = B \cap \left(\bigcap_{n \geq 0} K_n \right).$$

Nach Annahme ist

$$\Omega(K_n) = \Omega(\Phi_1(K_n)) = \Omega(K_{n-1}) \leq \Omega(A) < \infty$$

1 Analysis auf Mannigfaltigkeiten

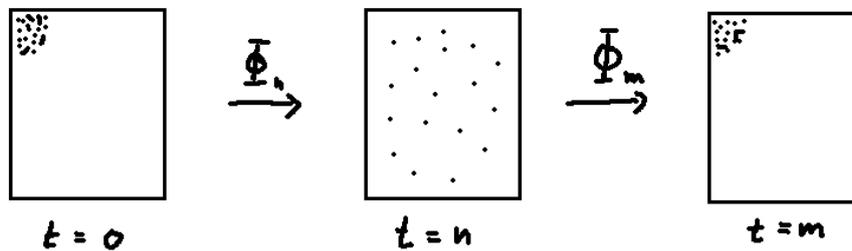
und somit

$$\Omega(G) = \lim_{m \rightarrow \infty} \Omega(B \cap (\cap_{n=0}^m K_n)) = \Omega(B \cap K_0) - \sum_{i=1}^{\infty} \Omega(B \cap (K_{i-1} \setminus K_i)) = \Omega(B),$$

denn $B \cap K_0 = B$ und aus $\Omega(K_n) = \Omega(K_{n-1})$ und $K_n \subset K_{n-1}$ folgt $\Omega(K_{n-1} \setminus K_n) = 0$. \square

Was besagt der Poincarésche Wiederkehrsatz physikalisch? Sei dazu beispielsweise Φ_t der Hamiltonsche Fluss für ein System aus N Gasteilchen in einem Container. Wie wir bald sehen werden, können wir einen solchen Fluss auf einer kompakten Energieschale betrachten und auf dieser gibt es eine invariante Volumenform.

Der Poincarésche Satz sagt dann beispielsweise, dass wenn für $t = 0$ alle $N \approx 10^{23}$ Teilchen in einem beliebig kleinen Gebiet nahe einer Ecke starten, so wird es unendlich viele spätere Zeiten geben, zu denen wieder alle Gasteilchen in diesem Gebiet sind.



Ursprünglich war diese Beobachtung als Einwand gegen Boltzmanns Erklärung der Irreversibilität dieses Prozesses gedacht: denn wir erwarten ja, dass sich ein solches Gas gleichmäßig im ganzen Container ausbreitet und sich nie wieder in eine Ecke zurückzieht.

Tatsächlich ist dieser Einwand aber irrelevant, da für ein solches System die Wiederkehrzeiten (m im Bild oben) astronomisch groß sind (vermutlich größer als das Alter des Universums).

2 Hamiltonsche Mechanik und symplektische Geometrie

Ein Hamiltonsches System auf \mathbb{R}^{2n} wird bestimmt durch eine Funktion $H \in C^2(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$ und ist das Differentialgleichungssystem

$$\dot{Q}_j(t) = \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_j} \Big|_{(q,p)=(Q(t), P(t))}, \quad \dot{P}_j(t) = -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q_j} \Big|_{(q,p)=(Q(t), P(t))},$$

wobei $x = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) = (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}$ und die Lösungskurve $u(t, x_0) =: (Q(t, x_0), P(t, x_0))$ ist. Es heißt H die Hamiltonfunktion (oder Gesamtenergie), \mathbb{R}^{2n} der Phasenraum und n die Anzahl der Freiheitsgrade. Weiterhin heißt $q \in \mathbb{R}^n$ die Konfiguration und $p \in \mathbb{R}^n$ der Impuls.

In kompakter Form lautet das Differentialgleichungssystem

$$(*) \quad \dot{u} = X_H \circ u$$

mit dem Hamiltonschen Vektorfeld

$$X_H := (J^T)^{-1} \nabla H = J \nabla H,$$

wobei die zweite Gleichheit nur für die Standardform

$$J := \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(2n, \mathbb{R})$$

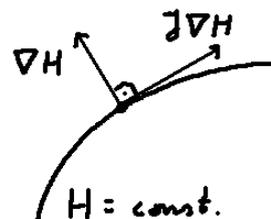
gilt. Im allgemeinen wird $J = -J^T$ eine schiefsymmetrische Matrix mit vollem Rang sein.

Als erste einfache Konsequenz der speziellen Struktur Hamiltonscher Systeme findet man die Energieerhaltung:

H ist entlang der Lösungskurven von $(*)$ konstant, da

$$\langle \nabla H, (J^T)^{-1} \nabla H \rangle_{\mathbb{R}^{2n}} = 0$$

und somit $X_H = (J^T)^{-1} \nabla H$ tangential an die Höhenflächen von H ist.



2.1 Symplektische Vektorräume

Wie immer ist es nützlich, zunächst den linearen Fall zu verstehen. Wir betrachten dazu symplektische Vektorräume und lineare Hamiltonsche Systeme. Damit die Hamiltonschen Differentialgleichungen linear werden, muss $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ quadratisch sein, also

$$H(x) = H(0) + \frac{1}{2} \langle x, Ax \rangle$$

mit $A \in \mathcal{M}(2n, \mathbb{R})$. Dann ist

$$\nabla H(x) = \frac{1}{2} (Ax + A^T x).$$

Also können wir o.B.d.A. annehmen, dass A symmetrisch $A = A^T$ und $H(0) = 0$ ist. Dann ist

$$\nabla H(x) = Ax$$

2 Hamiltonsche Mechanik und symplektische Geometrie

und die Hamiltonschen Gleichungen sind linear,

$$\dot{u} = (J^T)^{-1} A u.$$

Setzt man $B := (J^T)^{-1} A$, so ergibt sich aus

$$B^T J = A^T J^{-1} J = A^T = A \quad \text{und} \quad J B = J (J^T)^{-1} A = -J J^{-1} A = -A,$$

dass

$$B^T J + J B = 0.$$

2.1 Definition. Eine Matrix $B \in \mathcal{M}(2n, \mathbb{R})$ heißt **infinitesimal symplektisch**, falls

$$B^T J + J B = 0.$$

Der Unterraum der **infinitesimal symplektischen** Endomorphismen wird mit $\mathfrak{sp}(2n) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$ bezeichnet. Es gilt $\text{tr } B = 0$ für $B \in \mathfrak{sp}(2n)$, da

$$\text{tr } B = -\text{tr}(B J^2) = -\text{tr}(J B J) = -\text{tr}(B^T) = -\text{tr } B.$$

2.2 Proposition. Lineare Hamiltonsche Systeme sind volumenerhaltend bzgl. des Lebesguemaßes λ auf \mathbb{R}^{2n} : es gilt also

$$\lambda(A) = \lambda(\Phi_t^{X_H}(A)) \quad \text{für alle } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{2n}).$$

Geometrisch formuliert gilt

$$\Phi_{t*}^{X_H} \varepsilon = \varepsilon,$$

wobei $\varepsilon = dq^1 \wedge \dots \wedge dq^n \wedge dp^1 \wedge \dots \wedge dp^n$ die kanonische Volumenform auf \mathbb{R}^{2n} ist.

Beweis. Es ist

$$\Phi_t^{X_H}(x) = e^{tB} x \quad \text{und} \quad \det(e^{tB}) = e^{t \text{tr } B} = e^0 = 1.$$

Also folgt die Aussage mit dem Transformationssatz. □

2.3 Bemerkung. Ein linearer Hamiltonscher Fluss erhält nicht nur das Volumen, es gilt auch

$$(\Phi_t^{X_H})^T J \Phi_t^{X_H} = J.$$

Beweis. Übung. □

Also lässt ein linearer Hamiltonscher Fluss die schiefsymmetrische Bilinearform

$$\omega_0 : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \omega_0(u, v) = \langle u, Jv \rangle_{\mathbb{R}^{2n}}$$

invariant, d.h.

$$\omega_0(\Phi_t^{X_H} u, \Phi_t^{X_H} v) = \omega_0(u, v),$$

ähnlich wie eine orthogonale Transformation das kanonische Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^{2n}}$ des \mathbb{R}^{2n} invariant lässt.

2.4 Beispiel. Der harmonische Oszillator

Sei $n = 1$, also $M = \mathbb{R}^2$,

$$H(q, p) = \frac{1}{2} p^2 + \frac{\omega^2}{2} q^2 \quad \text{und} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann lauten die Hamiltonschen Gleichungen

$$\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial p}(Q, P) = P, \quad \dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial q}(Q, P) = -\omega^2 Q.$$

Es ist H quadratisch,

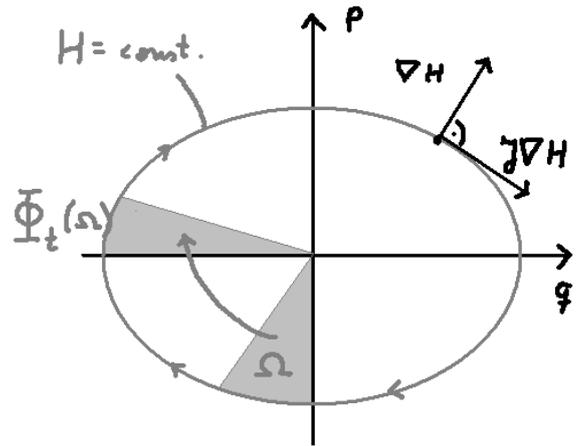
$$H(x) = \frac{1}{2} \langle x, Ax \rangle \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und

$$\dot{u} = (J^T)^{-1} \nabla H \circ u = (J^T)^{-1} A u = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}}_B u.$$

Also ist

$$\Phi_t^{X_H} = e^{tB} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \frac{1}{\omega} \sin \omega t \\ -\omega \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \det \Phi_t^{X_H} = 1.$$



Wir zeigen nun, dass schiefsymmetrische Bilinearformen eine sehr einfache Normalform haben. Dies ist z.B. analog zu der Diagonalform symmetrischer Bilinearformen zu sehen.

2.5 Satz. Normalform für schiefsymmetrische Bilinearformen

Sei V ein n -dimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum und ω eine schiefsymmetrische Bilinearform mit $\text{Rang } \omega = r$, wobei der Rang von ω gleich dem basisunabhängigen Rang der darstellenden Matrix $J_{ij} := \omega(e_i, e_j)$ ist.

Dann gilt $r = 2m$ für ein $m \in \mathbb{N}_0$ und es gibt eine Basis in der J folgende Form hat:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_{m \times m} & 0 \\ -\mathbb{1}_{m \times m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(n \times n, \mathbb{R}).$$

Beweis. Für $\omega \neq 0$ existieren $\tilde{a}_1, \tilde{b}_1 \in V$ mit $c_1 := \omega(\tilde{a}_1, \tilde{b}_1) \neq 0$. Setze $a_1 := \tilde{a}_1/c_1$ und $b_1 = \tilde{b}_1$. Es ist dann

$$\omega(a_1, a_1) = \omega(b_1, b_1) = 0$$

und

$$\omega(a_1, b_1) = 1 = -\omega(b_1, a_1).$$

Wir definieren den Unterraum $P_1 = \text{Span}\{a_1, b_1\} \subset V$ und das symplektische Komplement

$$P_1^\omega := \{v \in V \mid \omega(v, u) = 0 \text{ für alle } u \in P_1\}.$$

Es gilt in diesem speziellen Fall, dass $P_1^\omega \cap P_1 = \{0\}$ und $P_1^\omega + P_1 = V$, denn für $v \in V$ gilt

$$v - \omega(a_1, v)b_1 + \omega(b_1, v)a_1 \in P_1^\omega.$$

(Warnung: Für allgemeine Unterräume $W \subset V$ gilt weder $W^\omega \cap W = \{0\}$ noch $W^\omega + W = V$. Dazu später mehr.) Nun betrachtet man ω eingeschränkt auf den $n-2$ -dimensionalen Unterraum P_1^ω und konstruiert induktiv a_j, b_j und P_j solange, bis $\omega|_{P_m^\omega} = 0$ ist. Die gesuchte Basis von V erhält man dann, indem man $(a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m)$ beliebig zu einer Basis von V ergänzt. \square

2.6 Definition. Symplektische Formen, Räume und Abbildungen

- (a) Eine nichtentartete schiefsymmetrische Bilinearform $\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem \mathbb{R} -Vektorraum V heißt **symplektische Form**. Das Paar (V, ω) heißt dann **symplektischer Vektorraum**. Mit Satz 2.5 gilt $\dim V = n = 2m$ für ein $m \in \mathbb{N}$.
- (b) Sind (V, ω) und (W, σ) symplektische Räume, so heißt eine lineare Abbildung $f : V \rightarrow W$ **symplektisch**, wenn

$$f^* \sigma = \omega,$$

also

$$f^* \sigma(u, v) := \sigma(fu, fv) = \omega(u, v) \quad \text{für alle } u, v \in V.$$

2.7 Bemerkung. (a) Satz 2.5 besagt nicht, dass jede schiefsymmetrische Matrix ähnlich zu obiger Normalform ist. Denn die darstellende Matrix J einer Bilinearform transformiert sich unter einem Basiswechsel S gemäß $\tilde{J} = S^T J S$ und nicht wie die darstellende Matrix A einer linearen Abbildung, für die ein Basiswechsel eine Ähnlichkeitstransformation $\tilde{A} = S^{-1} A S$ ist.

- (b) Die symplektischen Endomorphismen $f \in \mathcal{L}(V)$ sind also diejenigen, die die symplektische Form ω erhalten, d.h. $f^* \omega = \omega$ erfüllen. Sei A die darstellende Matrix von f und J die darsellende Matrix von ω in einer beliebigen Basis von V . Es ist f symplektisch, genau dann wenn (Übungsaufgabe)

$$A^T J A = J.$$

Also ist mit Bemerkung 2.3 jeder lineare Hamiltonsche Fluss $\Phi_t^{X_H}$ symplektisch. Multipliziert man obige Gleichung mit J^{-1} , so ergibt sich $J^{-1} A^T J A = \mathbf{1}$. Also gilt für symplektisches A , dass

$$A^{-1} = J^{-1} A^T J,$$

was wir im folgenden mehrmals verwenden werden.

- (c) Es ist zwar jede symplektische Abbildung volumenerhaltend, da wegen

$$\frac{1}{\det A} = \det A^{-1} = \det(J^{-1} A^T J) = \det A^T = \det A$$

$|\det A| = 1$ gilt. Im Allgemeinen ist aber nicht jede volumenerhaltende Abbildung symplektisch. Sei beispielsweise \mathbb{R}^4 mit der kanonischen symplektischen Form ω_0 versehen und $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ die Abbildung $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (-x_1, -x_2, x_3, x_4)$, dann ist f sogar orthogonal, aber nicht symplektisch, da $\omega(f(e_1), f(e_3)) = -\omega(e_1, e_3)$.

2.8 Proposition. Sei (V, ω) ein symplektischer Raum und $f \in \mathcal{L}(V)$ eine symplektische Abbildung. Dann gilt $\det f = 1$, es ist also f sowohl volumen-, als auch orientierungserhaltend.

Beweis. Sei $\dim V = n = 2m$ und (e_i) eine Basis, in der die darstellende Matrix J von ω Normalform hat, also

$$\omega = \sum_{j=1}^m e^j \wedge e^{m+j},$$

wobei (e^j) die zu (e_i) duale Basis von V^* bezeichne. Dann gilt

$$\varepsilon = e^1 \wedge e^2 \wedge \dots \wedge e^n = \frac{(-1)^{(m-1)m/2}}{m!} \underbrace{\omega \wedge \dots \wedge \omega}_{m\text{-mal}}.$$

Damit folgt aus $f^* \omega = \omega$ auch $f^* \varepsilon = \varepsilon$ und somit

$$\varepsilon = f^* \varepsilon = \det(f) \varepsilon,$$

also $\det f = 1$. □

2.9 Proposition. Die symplektische Gruppe

Sei (V, ω) ein symplektischer Raum, dann bildet die Menge der symplektischen Endomorphismen $f : V \rightarrow V$ unter Komposition eine Gruppe, genannt die **symplektische Gruppe** $\text{Sp}(V, \omega)$.

Beweis. Übung. □

2.10 Bemerkung. Sei $f \in \text{Sp}(V, \omega)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ Eigenwert von f . Dann sind auch $\bar{\lambda}$, λ^{-1} und $\bar{\lambda}^{-1}$ Eigenwerte von f .

Beweis. Da f reell ist, ist mit λ auch $\bar{\lambda}$ Eigenwert. Wir müssen also nur zeigen, dass auch λ^{-1} ein Eigenwert ist ($\lambda \neq 0$, da f invertierbar). Seien A und J wieder darstellende Matrizen von f und ω , und betrachte das charakteristische Polynom:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda \mathbb{1}) &= \det(A^T - \lambda \mathbb{1}) = \det(J^{-1}(A^T - \lambda \mathbb{1})J) = \det(J^{-1}A^T J - \lambda \mathbb{1}) \\ &= \det(A^{-1} - \lambda \mathbb{1}) = \det(\lambda A^{-1}(\frac{1}{\lambda} - A)) \\ &= \underbrace{(\lambda)^{2m}}_{\neq 0} \underbrace{\det(A^{-1})}_{=1} \det(A - \frac{1}{\lambda} \mathbb{1}). \end{aligned}$$

□

2.11 Satz. Eigenwerte symplektischer Abbildungen

Sei $f \in \text{Sp}(V, \omega)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ Eigenwert von f mit algebraischer Vielfachheit k . Dann sind auch $\bar{\lambda}$, λ^{-1} und $\bar{\lambda}^{-1}$ Eigenwerte mit Vielfachheit k . Sind $+1$ oder -1 Eigenwerte, so haben sie gerade Vielfachheit.

Beweis. Für $P(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1})$ gilt nach obiger Bemerkung, dass $P(\lambda) = \lambda^{2m} P(\frac{1}{\lambda})$. Sei λ_0 der Eigenwert der Vielfachheit k , also

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k Q(\lambda)$$

und

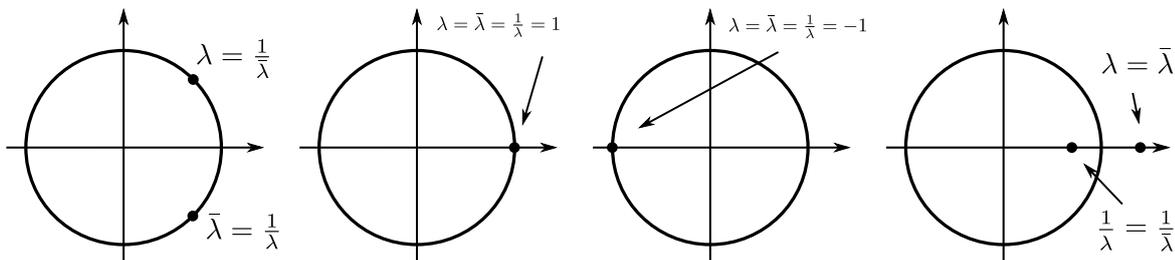
$$P\left(\frac{1}{\lambda}\right)\lambda^{2m} = (\lambda - \lambda_0)^k Q(\lambda) = (\lambda\lambda_0)^k \left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda}\right)^k Q(\lambda).$$

Da $Q(\lambda)$ ein Polynom vom Grad $2m - k$ ist, ist

$$\frac{\lambda_0^k}{\lambda^{2m-k}} \cdot Q(\lambda) \quad \text{ein Polynom in } \frac{1}{\lambda}.$$

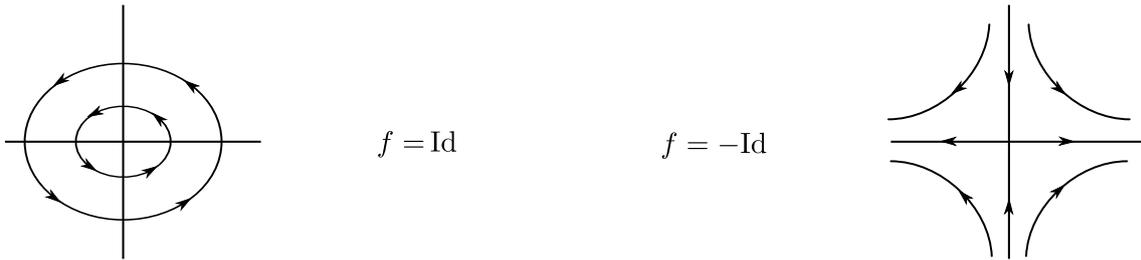
Also ist $\frac{1}{\lambda_0}$ eine Nullstelle der Multiplizität $\ell \geq k$ von $P(\frac{1}{\lambda})$. Vertauschen der Rollen von λ_0 und $\frac{1}{\lambda_0}$ liefert $\ell = k$. Nun gilt $\lambda_0 = 1/\lambda_0$ genau dann wenn $\lambda_0 \in \{\pm 1\}$. Da $\dim V = 2m$ gerade ist und da die Zahl der anderen Eigenwerte gerade ist, müssen $+1$ und -1 zusammen gerade Multiplizität haben, wegen $\det A = 1$ aber dann auch einzeln. □

Für $\dim V = 2$ treten folgende Fälle für die Eigenwerte einer symplektischen Abbildung auf:

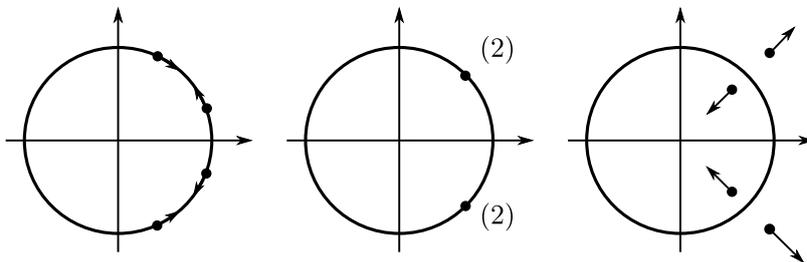


2 Hamiltonsche Mechanik und symplektische Geometrie

Qualitativ könnte f jeweils ein Element aus den folgenden Flüssen sein:



2.12 Bemerkung. Wie $SO(\mathbb{R}^n)$ ist auch $Sp(\mathbb{R}^{2n}) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$ eine Untermannigfaltigkeit und insbesondere ein topologischer Raum. Betrachtet man Wege in $Sp(\mathbb{R}^{2n})$, so liefert der obige Satz beispielsweise, dass die Eigenwerte den Einheitskreis bzw. die reelle Achse nicht verlassen können, solange sie isoliert sind:



Dieses Verhalten ist wichtig, wenn wir Störungen Hamiltonscher Systeme betrachten.

Wir haben bereits beim linearen Hamiltonschen Fluss gesehen, dass eine infinitesimal symplektische Abbildung B eine symplektische Abbildung $\Phi_t^{X^H} = e^{tB}$ erzeugt. Diesen Zusammenhang wollen wir nun etwas allgemeiner verstehen.

2.13 Definition. Infinitesimal symplektische Abbildung

Eine lineare Abbildung $B \in \mathcal{L}(V)$ heißt **infinitesimal symplektisch** bezüglich einer symplektischen Form ω , wenn

$$\omega(Bu, v) + \omega(u, Bv) = 0 \quad \text{für alle } u, v \in V.$$

Den Vektorraum dieser Abbildungen bezeichnen wir mit $\text{sp}(V, \omega)$.

2.14 Definition. Lie Algebra

Eine **Lie-Algebra** ist ein Vektorraum V mit einer bilinearen schiefsymmetrischen Abbildung

$$[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V,$$

welche die Jacobi-Identität

$$[A, [B, C]] + [C, [A, B]] + [B, [C, A]] = 0 \quad \text{für alle } A, B, C \in V$$

erfüllt.

2.15 Lemma. Der Kommutator

Der **Kommutator** von $A, B \in \mathcal{L}(V)$ sei

$$[A, B] := AB - BA.$$

Es ist $(\text{sp}(V, \omega), [\cdot, \cdot])$ eine Lie-Algebra.

Beweis. Offensichtlich ist $(\mathcal{L}(V), [\cdot, \cdot])$ eine Lie-Algebra. Es bleibt also zu zeigen, dass mit $A, B \in \text{sp}(V, \omega)$ auch $[A, B] \in \text{sp}(V, \omega)$:

$$\begin{aligned} \omega([A, B]u, v) + \omega(u, [A, B]v) &= \omega(ABu, v) - \omega(BAu, v) + \omega(u, ABv) - \omega(u, BAv) \\ &= -\omega(Bu, Av) + \omega(Au, Bv) - \omega(Au, Bv) + \omega(Bu, Av) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Analog zu Satz 2.11 findet man für die Eigenwerte infinitesimal symplektischer Abbildungen den folgenden Satz.

2.16 Satz. Eigenwerte infinitesimal symplektischer Abbildungen

Sei (V, ω) ein symplektischer Raum und $B \in \text{sp}(V, \omega)$. Ist λ Eigenwert von B der Multiplizität k , so sind auch $-\lambda$, $\bar{\lambda}$ und $-\bar{\lambda}$ Eigenwerte der Multiplizität k . Ist Null Eigenwert, so hat er gerade Multiplizität.

Für $B \in \text{sp}(\mathbb{R}^2, \omega_0)$ treten also folgende Fälle auf:

- (a) $\lambda = i\alpha$ für $\alpha \in \mathbb{R}$, also $\lambda = -\bar{\lambda}$
- (b) $\lambda = 0$ zweifach entartet
- (c) $\lambda = \alpha$ für $\alpha \in \mathbb{R}$, also $\lambda = \bar{\lambda}$

2.17 Bemerkung. zu Lie-Gruppen

Durch Exponentieren von Endomorphismen in $\text{sp}(V, \omega)$ erhält man Abbildungen in $\text{Sp}(V, \omega)$:

$$\begin{array}{ccc} \text{Lie-Algebra} & \rightarrow & \text{Lie-Gruppe} \\ \text{sp}(V, \omega) & & \text{Sp}(V, \omega) \\ B & \rightarrow & e^B \end{array}$$

Eine Lie-Gruppe ist eine Mannigfaltigkeit G die gleichzeitig eine Gruppe ist, und zwar so, dass die Gruppenverknüpfung $G \rightarrow G : g \mapsto f \circ g$ für jedes $f \in G$ glatt ist. Beispiele sind eben $\text{Sp}(V, \omega)$, $\text{SO}(\mathbb{R}^n)$ oder $\text{SU}(\mathbb{C}^n)$.

Beweis. Es ist $e^B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n}{n!}$, also

$$\begin{aligned} \omega(e^B u, e^B v) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \omega(B^n u, e^B v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \omega(u, B^n e^B v) \\ &= \omega(u, e^{-B} e^B v) = \omega(u, v). \end{aligned}$$

□

Der Kommutator der Lie-Algebra kommt ins Spiel, wenn man den Kommutator der Gruppenelemente nahe der Identität betrachtet,

$$e^{\varepsilon A} e^{\varepsilon B} - e^{\varepsilon B} e^{\varepsilon A} = \varepsilon^2 [A, B] + \mathcal{O}(\varepsilon^3).$$

2.2 Hamiltonsche Mechanik auf symplektischen Mannigfaltigkeiten

2.18 Definition. Symplektische Mannigfaltigkeit

Eine **symplektische Form** auf einer Mannigfaltigkeit M ist eine geschlossene, nicht entartete 2-Form ω auf M , also $\omega \in \Lambda_2(M)$ mit $d\omega = 0$. Das Paar (M, ω) heißt **symplektische Mannigfaltigkeit**.

- 2.19 Bemerkung.** (a) Aus Satz 2.5 folgt, dass die Dimension von M gerade sein muss.
 (b) Falls ω exakt ist, so heißt (M, ω) **exakt symplektisch**.
 (c) Auf $M = T^*\mathbb{R}^n$ ist $\omega_0 := \sum_{j=1}^n dq^j \wedge dp^j$ die kanonische symplektische Form.

Wie wir wissen (vgl. Bemerkung 1.61), liefert eine nichtentartete 2-Form ω einen Isomorphismus von $\mathcal{T}_0^1(M)$ und $\mathcal{T}_1^0(M)$:

$$X \in \mathcal{T}_0^1 \mapsto X^* = \omega(X, \cdot) = i_X \omega \in \mathcal{T}_1^0(M).$$

2.20 Definition. Hamiltonsche Vektorfelder

Ein Vektorfeld $X \in \mathcal{T}_0^1(M)$ auf einer symplektischen Mannigfaltigkeit (M, ω) heißt **Hamiltonsches Vektorfeld**, wenn $\omega(X, \cdot)$ eine exakte 1-Form ist, bzw. **lokal Hamiltonsch**, falls $\omega(X, \cdot)$ geschlossen ist.

Für $H \in \mathcal{T}_0^0(M)$ heißt das durch ω mit dH assoziierte Vektorfeld X_H , also

$$\omega(X_H, \cdot) = dH,$$

das **von H erzeugte Hamiltonsche Vektorfeld**.

Die Abbildung $C^\infty(M) \rightarrow \mathcal{T}_0^1(M)$, $H \mapsto X_H$ ist linear, also $X_{H_1+H_2} = X_{H_1} + X_{H_2}$ und $X_{\alpha H} = \alpha X_H$ für $\alpha \in \mathbb{R}$.

2.21 Beispiel. Für $T^*\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n_q \times \mathbb{R}^n_p$ und eine symplektischen Form $\omega \in \Lambda_2(T^*\mathbb{R}^n)$ sei $J_{ij} = \omega(e_i, e_j)$. Für $H \in C^\infty(T^*\mathbb{R}^n)$ folgt

$$\begin{aligned} \omega(X_H, Y) = dH(Y) \quad \forall Y \in \mathcal{T}_0^1(T^*\mathbb{R}^n) &\Leftrightarrow X_H^i J_{ij} Y^j = Y^j \partial_j H \quad \forall Y \in \mathcal{T}_0^1(T^*\mathbb{R}^n) \\ &\Leftrightarrow J_{ij} X_H^i = \partial_j H \quad \forall j = 1, \dots, 2n \\ &\Leftrightarrow J^T X_H = \nabla H \\ &\Leftrightarrow X_H = (J^T)^{-1} \nabla H. \end{aligned}$$

Hat J die kanonische Form $J_0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$, so ergeben sich wegen $(J_0^T)^{-1} = J_0$ für das Hamiltonsche Vektorfeld X_H mit

$$(X_H)_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \quad \text{und} \quad (X_H)_{j+n} = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, n,$$

die üblichen Hamiltonschen Gleichungen.

Es stellt sich die Frage, in welchem Sinne ω_0 auf $T^*\mathbb{R}^n$ kanonisch ist? Wie wir nun zeigen, lässt sich auf beliebigen Kotangentenbündeln T^*M eine kanonische symplektische Form definieren. Dazu definieren wir zunächst die kanonische 1-Form Θ_0 auf T^*M und dann ω_0 als deren äußere Ableitung.

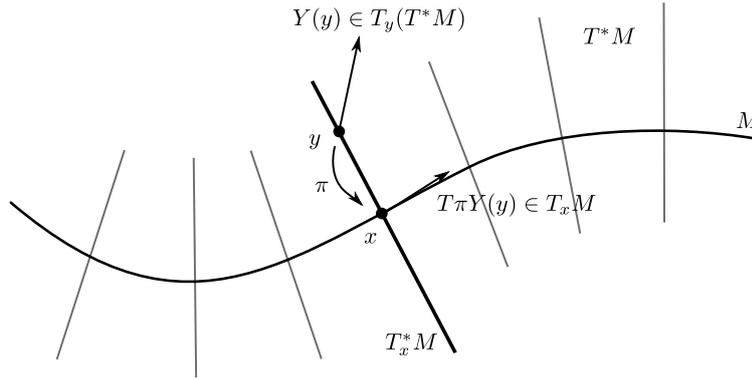
Sei $y = (x, v^*) \in T^*M$ (also $x \in M$ und $v^* \in T_x^*M$) und $Y \in \mathcal{T}_0^1(T^*M)$, dann sei

$$\begin{array}{cccc} \left(\Theta_0(y) \mid Y(y) \right) & := & \left(v^* \mid T\pi(Y(y)) \right) \\ \cap & & \cap & \cap \\ T_y^*(T^*M) & T_y(T^*M) & T_x^*M & T_x M \end{array}$$

wobei $\pi : T^*M \rightarrow M$ die Projektion $(x, v^*) \mapsto x$ auf den Fußpunkt sei und somit die Tangentialabbildung eine Abbildung

$$T\pi : T(T^*M) \rightarrow TM$$

ist. $\Theta_0(y)$ wirkt auf $Y(y)$ also wie v^* auf $T\pi(Y(y))$.



2.22 Definition. Die kanonische symplektische Form

Die oben definierte Form $\Theta_0 \in \mathcal{T}_1^0(T^*M)$ heißt **kanonische 1-Form** auf dem Kotangententialbündel. Die Form $\omega_0 = -d\Theta_0 \in \mathcal{T}_2^0(T^*M)$ heißt **kanonische symplektische Form** auf dem Phasenraum $P = T^*M$.

2.23 Bemerkung. In einer Bündelkarte $T^*\varphi : T^*V \rightarrow T^*\varphi(V) \cong \varphi(V) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}_q^n \times \mathbb{R}_p^n$ bezeichnen wir die Koordinaten im ersten Faktor mit q und im zweiten mit p . Ein Punkt $(q, p) \in T^*M$ bezeichnet also den Kovektor $p_i dq^i \in T_q^*M$ am Punkt $q \in M$.

Ein Vektorfeld $Y \in \mathcal{T}_0^1(T^*M)$ können wir dann lokal als

$$Y(q, p) = v^i(q, p) \partial_{q_i} + w^i(q, p) \partial_{p_i}$$

schreiben, wobei der Index i jetzt von 1 bis n läuft. Es ist

$$T\pi Y(q, p) = v^i(q, p) \partial_{q_i}$$

und

$$\left(\Theta_0(q, p) \mid Y(q, p) \right) = (p_j dq^j \mid v^i(q, p) \partial_{q_i}) = p_i v^i(q, p) = (p_j dq^j \mid Y(q, p)) .$$

Daher gilt $\Theta_0 = p_j dq^j$, wobei zu beachten ist, dass Θ_0 eine 1-Form auf T^*M und nicht auf M ist! Allerdings verschwindet Θ_0 auf allen Vektoren tangential an die Fasern von T^*M .

Für die kanonische symplektische Form ergibt sich dann

$$\omega_0 = -d\Theta_0 = -dp^i \wedge dq^i = dq^i \wedge dp^i .$$

Es ist ω_0 also insbesondere nicht entartet und definiert tatsächlich eine symplektische Form. Die darstellende Matrix bezüglich der Koordinatenbasis $(\partial_{q_1}, \dots, \partial_{q_n}, \partial_{p_1}, \dots, \partial_{p_n})$ hat auf dem gesamten Kartengebiet die Form

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_{n \times n} \\ -\mathbf{1}_{n \times n} & 0 \end{pmatrix} .$$

2.24 Satz. Darboux

Sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit der Dimension $2n$ und $x \in M$. Dann existiert eine Karte (V, φ) mit $x \in V$, so dass mit $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, $\varphi(x) =: (q(x), p(x))$, auf ganz V gilt

$$\omega = \sum_{i=1}^n dq^i \wedge dp^i .$$

Eine Karte in der ω diese Form hat heißt **kanonische Karte** oder **Darboux-Karte**.

Beweis. Wir zeigen eine etwas allgemeinere Aussage:

2.25 Lemma. Moser's Trick

Seien $U_0, U_1 \subset \mathbb{R}^{2n}$ offene Umgebungen von $0 \in \mathbb{R}^{2n}$ und ω_0, ω_1 symplektische Formen auf U_0 bzw. U_1 . Dann existiert eine offene Umgebung $U \subset U_0 \cap U_1$ der Null und ein Diffeomorphismus $F : U \rightarrow U$ mit $\omega_0|_U = F^*(\omega_1|_U)$ und $F(0) = 0$.

Die Aussage des Satzes folgt dann, indem wir in einer lokalen Karte $(\tilde{V}, \tilde{\varphi})$ setzen: $U_0 = \tilde{\varphi}(\tilde{V})$, $U_1 = \mathbb{R}^{2n}$, $\omega_0 = \tilde{\varphi}_*\omega$ und $\omega_1 = \sum_{i=1}^n dq^i \wedge dp^i$. Die Karte (V, φ) ist dann gegeben durch $V = \tilde{\varphi}^{-1}(U)$ und $\varphi = F \circ \tilde{\varphi}|_V$. □

Beweis. von Moser's Trick. Mit Satz 2.5 können wir durch eine lineare Transformation des \mathbb{R}^{2n} erreichen, dass $\omega_0(0) = \omega_1(0)$. Aus Gründen der Übersichtlichkeit führen wir diese Transformation im folgenden nicht mit.

Den Diffeomorphismus $F = F_1$ konstruieren wir als Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}F_t = X_t \circ F_t$$

mit Anfangswert $F_0 = \text{Id}$ und einem noch zu konstruierenden zeitabhängigen Vektorfeld X_t . Dabei ist X_t so beschaffen, dass

$$L_{X_t}\omega_t = \omega_0 - \omega_1 \quad \text{mit} \quad \omega_t := (1-t)\omega_0 + t\omega_1 \quad (*)$$

gilt. Damit folgt aber, dass für alle Zeiten $F_t^*\omega_t = \omega_0$ gilt, denn $F_0^*\omega_0 = \omega_0$ und

$$\frac{d}{dt}F_t^*\omega_t = F_t^*(L_{X_t}\omega_t + \frac{d}{dt}\omega_t) = 0.$$

Um nun X_t mit der Eigenschaft $(*)$ zu finden, stellen wir zunächst fest, dass $\omega_t|_U$ für alle $t \in [0, 1]$ eine symplektische Form ist, wenn wir nur die Umgebung U der Null klein genug wählen. Denn $\omega_t(0) = \omega_0(0) = \omega_1(0)$ ist konstant und nicht entartet für alle t .

Wählen wir U zusammenziehbar, so ist auf U die geschlossene Form $\omega_0 - \omega_1$ exakt, also $\omega_0 - \omega_1 = d\theta$. Andererseits ist auch ω_t geschlossen und mit Cartan's Formel gilt $L_{X_t}\omega_t = di_{X_t}\omega_t$. Wir müssen also

$$i_{X_t}\omega_t = \theta + df$$

für ein beliebiges $f \in \Lambda_0(U)$ und alle $t \in [0, 1]$ erreichen, um $(*)$ zu bekommen. Da ω_t auf U nicht entartet ist, gibt es aber zu jedem f so ein X_t . Durch geeignete Wahl von f erreichen wir $\theta(0) + df(0) = 0$ und somit $X_t(0) = 0$ und $F_t(0) = 0$ für alle $t \in [0, 1]$. □

2.26 Bemerkung. Man kann also auf **jeder** symplektischen Mannigfaltigkeit durch geeignete Koordinatenwahl ω auf die Normalform $\omega = \sum_{i=1}^n dq^i \wedge dp^i$ bringen, und zwar nicht nur punktweise, sondern jeweils lokal auf einer offenen Umgebung.

Für Riemannsche Mannigfaltigkeiten gilt **kein** analoges Resultat. Man kann zwar zu (M, g) und $x \in M$ eine Karte finden mit $g(x) = \sum_{i=1}^n dq^i \otimes dq^i$ aber

$$g|_V = dq^i \otimes dq^i$$

für eine offene Umgebung V von x ist genau dann möglich, wenn die Krümmung von g auf ganz V verschwindet, g also flach ist.

Ein zentrales Resultat der klassischen Mechanik ist der Satz von Liouville, der besagt, dass Hamiltonsche Flüsse (also Flüsse zu Hamiltonschen Vektorfeldern) symplektisch sind, also die symplektische Form invariant lassen.

2.27 Satz. Liouville

Sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit mit $\dim M = 2n$ und X_H das von $H \in C^\infty(M)$ erzeugte Hamiltonsche Vektorfeld. Dann gilt für den von X_H erzeugten Fluss

$$\Phi_t^{X_H^*} \omega = \omega$$

und somit auch

$$\Phi_t^{X_H^*} (\underbrace{\omega \wedge \cdots \wedge \omega}_{k\text{-mal}}) = \underbrace{\omega \wedge \cdots \wedge \omega}_{k\text{-mal}} \quad \text{für } 1 \leq k \leq n.$$

Beweis. Es ist

$$L_{X_H} \omega = (i_{X_H} d + di_{X_H}) \omega = i_{X_H} \underbrace{d\omega}_{=0} + \underbrace{ddH}_{=0} = 0.$$

Wegen $\Phi_0^{X_H} = \text{Id}$, also $\Phi_0^{X_H^*} \omega = \omega$, und

$$\frac{d}{dt} \Phi_t^{X_H^*} \omega = \Phi_t^{X_H^*} L_{X_H} \omega = 0$$

folgt dann die Aussage. □

2.28 Definition. Das Liouville-Maß

Die Volumenform

$$\Omega := \frac{(-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}}{n!} \underbrace{\omega \wedge \omega \wedge \cdots \wedge \omega}_{n\text{-mal}} \in \Lambda_{2n}(M)$$

heißt das **Liouville-Maß**. In jeder kanonischen Karte gilt

$$\Omega = dq^1 \wedge \cdots \wedge dq^n \wedge dp^1 \wedge \cdots \wedge dp^n.$$

2.29 Korollar. Invarianz des Liouville Maßes

Ein Hamiltonscher Fluss $\Phi_t^{X_H}$ läßt Ω invariant, d.h.

$$\Phi_t^{X_H^*} \Omega = \Omega.$$

Hamiltonsche Flüsse sind also volumenerhaltend.

2.30 Definition. Die Poissonklammer

Sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit und $f, g \in C^\infty(M)$. Die **Poissonklammer** von f und g ist die Funktion

$$\{f, g\} := \omega(X_f, X_g) \in C^\infty(M).$$

Es gilt offenbar

$$\{f, g\} = \omega(X_f, X_g) = i_{X_g} \omega(X_f, \cdot) = i_{X_g} df = L_{X_g} f = -L_{X_f} g.$$

2.31 Bemerkung. In einer kanonischen Karte gilt

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right).$$

Für die Koordinatenfunktionen gelten dann die kanonischen Relationen

$$\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0 \quad \text{und} \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}.$$

2.32 Proposition. Die Liouvillegleichung

Es sei Φ_t^H der von X_H erzeugte Fluss mit $g, H \in C^\infty(M)$. Dann löst $g(t) := g \circ \Phi_t^H$ die Liouvillegleichung

$$\frac{d}{dt} g(t) = \{g(t), H\}.$$

Es ist $g(t) = g(0)$ falls $\{g, H\} = 0$, und somit insbesondere $H(t) = H \circ \Phi_t^H = H$.

Beweis. Übungsaufgabe □

2.33 Definition. Symplektische Abbildung und kanonische Transformation

Seien (M, ω) und (N, σ) symplektische Mannigfaltigkeiten. Eine glatte Abbildung $\Psi : M \rightarrow N$ heißt symplektisch, falls

$$\Psi^* \sigma = \omega.$$

Ein symplektischer Diffeomorphismus heißt **Symplektomorphismus** oder **kanonische Transformation**.

2.34 Proposition. Kanonische Transformation von Hamiltonschen Vektorfeldern

Sei $\Psi : M \rightarrow N$ eine kanonische Transformation und $f \in C^\infty(N)$. Dann gilt

$$\Psi^* X_f = X_{\Psi^* f}.$$

Beweis. Da ω nicht entartet ist, folgt dies aus

$$\begin{aligned} \omega(X_{\Psi^* f}, Y) &= d(\Psi^* f)(Y) = (\Psi^* df)(Y) = df(\Psi_* Y) = \sigma(X_f, \Psi_* Y) \\ &= (\Psi_* \omega)(X_f, \Psi_* Y) = \omega(\Psi^* X_f, Y). \end{aligned}$$

□

2.35 Korollar. Die Lieklammer Hamiltonscher Vektorfelder

Die Lie-Klammer Hamiltonscher Vektorfelder ist wieder ein Hamiltonsches Vektorfeld und zwar

$$[X_g, X_f] = X_{\{f, g\}}.$$

Beweis. X_g erzeuge den lokalen Fluss Φ_t , dann ist nach Proposition 2.34

$$\Phi_t^* X_f = X_{\Phi_t^* f}$$

und Ableiten bei $t = 0$ liefert

$$L_{X_g} X_f = X_{L_{X_g} f},$$

da die Abbildung $f \mapsto X_f$ ja linear ist. Nun ist nach Definition 2.30 $L_{X_g} f = \{f, g\}$ und nach Definition 1.101 $L_{X_g} X_f = [X_g, X_f]$. □

2.36 Korollar. Die Form der Hamiltonschen Gleichungen ist unter kanonischen Transformationen invariant: Sei $H \in C^\infty(M)$ und (q, p) eine kanonische Karte auf M . Dann ist nach Beispiel 2.21 in dieser Karte

$$X_H = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p} \\ -\frac{\partial H}{\partial q} \end{pmatrix} := \frac{\partial H}{\partial p_i} \partial_{q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \partial_{p_i}.$$

Sei nun $\Psi : M \rightarrow N$ eine kanonische Transformation und $K := \Psi_* H = H \circ \Psi^{-1}$. Dann ist $(Q, P) = (q, p) \circ \Psi^{-1}$ eine kanonische Karte auf N und in dieser Karte ist

$$\Psi_* X_H = X_K = \begin{pmatrix} \frac{\partial K}{\partial P} \\ -\frac{\partial K}{\partial Q} \end{pmatrix}.$$

Beweis. Die Aussage $\Psi_* X_H = X_K$ wurde bereits in Proposition 2.34 gezeigt. Es bleibt zu zeigen, dass (Q, P) eine kanonische Karte ist, was aus

$$\sigma(\partial_{Q_i}, \partial_{P_j}) = \sigma(\Psi_* \partial_{q_i}, \Psi_* \partial_{p_j}) = \Psi^* \sigma(\partial_{q_i}, \partial_{p_j}) = \omega(\partial_{q_i}, \partial_{p_j})$$

folgt. □

2.37 Satz. Der Vektorraum der glatten Funktion $C^\infty(M)$ bildet mit der Poissonklammer

$$\{\cdot, \cdot\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$$

eine Lie-Algebra.

Beweis. Bilinearität und Antisymmetrie der Poissonklammer sind klar. Die Jacobi-Identität folgt aus der Jacobi-Identität für die entsprechenden Vektorfelder mit Korollar 2.35. □

Die zugehörige Lie-Gruppe ist die Gruppe der kanonischen Transformationen.

Es gibt aber noch andere Möglichkeiten, kanonische Transformationen zu „erzeugen“. Wir betrachten zunächst wieder den linearen Fall.

2.38 Definition. Isotrope und Lagrangesche Unterräume

Sei (V, ω) ein symplektischer Vektorraum und $F \subset V$ ein Unterraum. Das **symplektische Komplement** von F ist der Unterraum

$$F^\omega = \{v \in V \mid \omega(v, f) = 0 \quad \forall f \in F\}.$$

Ein Unterraum $F \subset V$ heißt **isotrop**, wenn $F \subset F^\omega$, also wenn $\omega|_F = 0$, und **Lagrangesch**, falls $F = F^\omega$.

2.39 Beispiele. Sei $V = \mathbb{R}_q^n \times \mathbb{R}_p^n$ und $\omega = \omega_0 = \sum_i dq^i \wedge dp^i$.

- (a) $F_1 = V \quad \Rightarrow \quad F_1^\omega = \{0\}$
- (b) $F_2 = \mathbb{R}_q^n \times \{0\}_p \quad \Rightarrow \quad F_2^\omega = F_2$
- (c) $F_3 = \{0\}_q \times \mathbb{R}_p^n \quad \Rightarrow \quad F_3^\omega = F_3$

2.40 Satz. Dimensionsformel

- (a) $\dim F + \dim F^\omega = \dim V$
- (b) $F = F^\omega \quad \Leftrightarrow \quad F \subset F^\omega$ und $\dim F = \frac{1}{2} \dim V$

Beweis. In einer kanonischen Basis gilt

$$F^\omega = \{v \in V \mid \langle v | Jf \rangle = 0 \quad \forall f \in F\}.$$

Also ist F^ω das orthogonale Komplement von JF und offensichtlich ist $\dim JF = \dim F$. Das zeigt (a). Aussage (b) folgt sofort aus (a). □

2.41 Definition. Direkte Summe symplektischer Vektorräume

Seien (V_1, ω_1) und (V_2, ω_2) symplektische Vektorräume und $\pi_i : V_1 \times V_2 \rightarrow V_i$, $i = 1, 2$, die Projektionen. Dann ist

$$\omega_1 \ominus \omega_2 := \pi_1^* \omega_1 - \pi_2^* \omega_2$$

eine symplektische Form auf $V_1 \times V_2$.

2 Hamiltonsche Mechanik und symplektische Geometrie

Beweis. Bilinearität, Antisymmetrie und voller Rang folgen alle sofort aus der Definition

$$\omega_1 \ominus \omega_2((v_1, v_2), (w_1, w_2)) = \omega_1(v_1, w_1) - \omega_2(v_2, w_2).$$

□

2.42 Satz. Kanonische Transformationen und Lagrangesche Unterräume

Ein Isomorphismus $A : V_1 \rightarrow V_2$ symplektischer Vektorräume (V_1, ω_1) und (V_2, ω_2) ist genau dann symplektisch, wenn sein Graph

$$\Gamma_A = \{(v, Av) \mid v \in V_1\} \subset V_1 \times V_2$$

Lagrangesch ist bzgl. der symplektischen Form $\omega_1 \ominus \omega_2$.

Beweis. Da Γ_A ein Unterraum der Dimension $\frac{1}{2}\dim(V_1 \times V_2)$ ist, ist er genau dann Lagrangesch, wenn er isotrop ist. Es ist nun $\Gamma_A \subset \Gamma_A^\omega$ genau dann wenn

$$\omega_1 \ominus \omega_2((v, Av), (w, Aw)) = 0 \quad \text{für alle } v, w \in V_1,$$

also

$$\omega_1(v, w) - \omega_2(Av, Aw) = 0 \quad \text{für alle } v, w \in V_1.$$

Das ist genau dann der Fall, wenn A symplektisch ist. □

2.43 Definition. Isotrope und Lagrangesche Untermannigfaltigkeiten

Sei (P, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit und $I : L \rightarrow P$ die Einbettung einer Untermannigfaltigkeit L . Es heißt L **isotrop**, wenn $I^*\omega = 0$ und **Lagrangesch**, wenn außerdem $\dim L = \frac{1}{2} \dim P$.

2.44 Beispiel. Für $\dim P = 2$ ist jede eindimensionale Untermannigfaltigkeit L Lagrangesch, da $I^*\omega$ eine 2-Form auf L und damit Null ist.

2.45 Satz. Kanonische Transformationen und Lagrangesche Untermannigfaltigkeiten

Sei $\Psi : P_1 \rightarrow P_2$ ein Diffeomorphismus der symplektischen Mannigfaltigkeiten (P_i, ω_i) . Dann ist Ψ genau dann symplektisch, wenn der Graph

$$\Gamma_\Psi = \{(x, \Psi(x)) \mid x \in P_1\} \subset P_1 \times P_2$$

von Ψ eine Lagrangesche Untermannigfaltigkeit von $P_1 \times P_2$ bezüglich der symplektischen Form $\Omega := \omega_1 \ominus \omega_2$ ist.

Beweis. Analog zu Satz 2.42 (Übung). □

Wir führen nun den in der Physik sehr wichtigen Begriff der **erzeugenden Funktion einer kanonischen Transformation** ein. Dazu sei zunächst (P, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit und $I : L \rightarrow P$ eine Lagrangesche Untermannigfaltigkeit. Da die symplektische Form ω nach Definition geschlossen ist, ist sie lokal exakt. Es existiert also für alle $x \in L$ eine Umgebung $U \subset P$ von x und eine 1-Form Θ auf U mit $\omega|_U = -d\Theta$. Wegen

$$0 = I^*\omega = -I^*d\Theta = -dI^*\Theta$$

ist $I^*\Theta$ geschlossen und wiederum lokal exakt. Es existiert somit eine Umgebung $V \subset L$ von x und eine Funktion S auf V mit

$$-I^*\Theta|_V = dS.$$

Eine solche Funktion S heißt **erzeugende Funktion für die Lagrangesche Untermannigfaltigkeit** L . Für sich genommen ist das noch nicht wirklich nützlich, da S ja auf L lebt. Wir werden aber gleich sehen, dass man mit Hilfe erzeugender Funktionen Lagrangesche Untermannigfaltigkeiten zu kanonischen Koordinatentransformationen finden kann:

Sei $\Psi : M_1 \rightarrow M_2$ eine kanonische Transformation, dann ist (lokal)

$$\Omega := \omega_1 \ominus \omega_2 = -d\Theta$$

mit

$$\Theta := \Theta_1 \ominus \Theta_2 = \pi_1^* \Theta_1 - \pi_2^* \Theta_2 \quad \text{auf } M_1 \times M_2.$$

Wir verwenden lokale Koordinaten (q, p) auf M_1 und (Q, P) auf M_2 , wobei

$$(Q, P) = (q, p) \circ \Psi^{-1}$$

sei. Nach dem Satz von Darboux können wir $\Theta_1 = p_i dq^i$ annehmen und somit $\Theta_2 = \Psi_* \Theta_1 = P_i dQ^i$. Also ist

$$\Theta = p_i dq^i - P_i dQ^i.$$

Es geht uns nicht darum, zu gegebenen Ψ die erzeugende S zu konstruieren, sondern umgekehrt, aus einer Funktion S eine kanonische Transformation Ψ zu erhalten. Dabei ist ja die zugehörige Lagrangesche Untermannigfaltigkeit L noch nicht bekannt. Deshalb nehmen wir an, dass zumindest lokal eines der Koordinatenpaare (q, Q) , (q, P) , (p, Q) oder (p, P) auch Koordinaten für das noch zu bestimmende L sind.

Man unterscheidet deshalb die folgenden vier Fälle:

- (1) Es sei S eine Funktion $S_1(q, Q)$ von $(q_1, \dots, q_n, Q_1, \dots, Q_n)$. Aus $dS_1 = -I^* \Theta$ folgt

$$dS_1 = \frac{\partial S_1}{\partial q_i} dq^i + \frac{\partial S_1}{\partial Q_i} dQ^i = -p_i dq^i + P_i dQ^i,$$

also

$$p_i = -\frac{\partial S_1}{\partial q_i} \quad \text{und} \quad P_i = \frac{\partial S_1}{\partial Q_i} \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Falls man $p = -\frac{\partial S_1}{\partial q}(q, Q)$ nach Q auflösen kann, also die Abbildung

$$Q \mapsto -\frac{\partial S_1}{\partial q}(q, Q)$$

invertierbar ist, also

$$\det\left(\frac{\partial S_1}{\partial Q_i \partial q_j}\right) \neq 0$$

ist, so definiert S_1 über

$$p = -\frac{\partial S_1}{\partial q}(q, Q) \quad \text{und} \quad P = \frac{\partial S_1}{\partial Q}(q, Q)$$

eine lokale kanonische Transformation:

$$L = \left\{ \left(\left(q, -\frac{\partial S_1}{\partial q}(q, Q) \right), \left(Q, \frac{\partial S_1}{\partial Q}(q, Q) \right) \right) \in M_1 \times M_2 \mid (q, Q) \in U \right\}$$

ist Lagrangesche Untermannigfaltigkeit, da

$$I^* \Omega = -I^* d\Theta = ddS_1 = 0$$

und $\dim L = \frac{1}{2} \dim(M_1 \times M_2)$.

2 Hamiltonsche Mechanik und symplektische Geometrie

- (2) Es sei S nun eine Funktion $S_2(q, P)$ und $\tilde{\Theta} = \Theta + d(Q_i P_i) = p_i dq^i + Q_i dP^i$. Dann gilt immer noch $d\tilde{\Theta} = d\Theta = -\Omega$. Wie zuvor erhalten wir aus

$$dS_2 = \frac{\partial S_2}{\partial q_i} dq^i + \frac{\partial S_2}{\partial P_i} dP^i = -I^* \tilde{\Theta},$$

dass

$$p = -\frac{\partial S_2}{\partial q}(q, P) \quad \text{und} \quad Q = -\frac{\partial S_2}{\partial P}(q, P)$$

eine lokale kanonische Transformation definiert, falls

$$\det \left(\frac{\partial S_2}{\partial q_i \partial P_j} \right) \neq 0 \quad \text{ist.}$$

- (3) Für $S = S_3(p, Q)$ und $\tilde{\Theta} = \Theta - d(q_i p_i) = -q_i dp^i - P_i dQ^i$ ergibt sich

$$dS_3 = \frac{\partial S_3}{\partial p_i} dp^i + \frac{\partial S_3}{\partial Q_i} dQ^i = -I^* \tilde{\Theta},$$

also

$$q = \frac{\partial S_3}{\partial p}(p, Q) \quad \text{und} \quad P = \frac{\partial S_3}{\partial Q}(p, Q).$$

- (4) Für $S = S_4(p, P)$ und $\tilde{\Theta} = \Theta + d(Q_i P_i - q_i p_i) = -q_i dp^i + Q_i dP^i$ ergibt sich

$$dS_4 = \frac{\partial S_4}{\partial p_i} dp^i + \frac{\partial S_4}{\partial P_i} dP^i = -I^* \tilde{\Theta}$$

also

$$q = \frac{\partial S_4}{\partial p}(p, P) \quad \text{und} \quad Q = -\frac{\partial S_4}{\partial P}(p, P).$$

2.46 Bemerkung. Allgemeiner kann man natürlich S als Funktion von n der $2n$ Variablen $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ und n der $2n$ Variablen $(Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n)$ ansetzen. Lokal kann man jede kanonische Transformation in mindestens einer solchen Weise schreiben.

2.47 Beispiel. Harmonischer Oszillator

Sei $M = T^*\mathbb{R}$ mit der kanonischen symplektischen Form $\omega_0 = dq \wedge dp$ und $H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2)$. Wir suchen eine kanonische Transformation $(q, p) \mapsto (Q, P)$ so, dass $K(Q, P) = \omega P$ gilt. Ein naheliegender Ansatz ist

$$\begin{aligned} p(Q, P) &= \sqrt{2P\omega} \cos(Q) \\ q(Q, P) &= \sqrt{\frac{2P}{\omega}} \sin(Q) \end{aligned} \quad (*)$$

Um zu zeigen, dass diese Transformation kanonisch ist, suchen wir eine erzeugende Funktion $S(q, Q)$. Es ist $\frac{p}{q} = \omega \cot(Q)$, also $p = \omega q \cot(Q) \stackrel{!}{=} -\frac{\partial S}{\partial q}$. Als Kandidat ergibt sich somit $S(q, Q) = -\frac{\omega}{2} q^2 \cot(Q)$. Da auch $P = \frac{\omega q^2}{2 \sin^2(Q)} = \frac{\partial S}{\partial Q}$ gilt, ist $(*)$ kanonisch und in den neuen Koordinaten liefert $K(Q, P) = \omega P$ die sehr einfachen Bewegungsgleichungen

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = \omega \quad \text{und} \quad \dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = 0,$$

deren Lösungen

$$Q(t) = \omega t + Q_0, \quad P(t) = P_0 =: \frac{E}{\omega}$$

sich direkt ablesen lassen. Eingesetzt in (*) erhält man die Lösung in den ursprünglichen Koordinaten,

$$\begin{aligned} p(t) &= \sqrt{2E} \cos(\omega t + Q_0) \\ q(t) &= \sqrt{\frac{2E}{\omega^2}} \sin(\omega t + Q_0). \end{aligned}$$

2.48 Beispiel. Bewegung im radialsymmetrischen Potential

Sei nun $M = T^*\mathbb{R}^2$, $\omega_0 = dq^1 \wedge dp^1 + dq^2 \wedge dp^2$ und $H(q, p) = \frac{1}{2}p^2 + V(q)$ mit $V \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ radialsymmetrisch, also $V(q) = W(|q|)$. Der Drehimpuls $L(q, p) = p \times q := p_1 q_2 - p_2 q_1$ ist dann erhalten, da $\{H, L\} = 0$. Für $h = H(q_0, p_0)$ und $\ell = L(q_0, p_0)$ bleibt die Lösungskurve $(q(t), p(t))$ also auf der 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit

$$\{(q, p) \mid H(q, p) = h, L(q, p) = \ell\}.$$

Wegen der Radialsymmetrie von V liegt es nahe, für q Polarkoordinaten einzuführen, also

$$q_1 = r \cos \varphi \quad \text{und} \quad q_2 = r \sin \varphi,$$

die wir nun zu kanonischen Koordinaten ausbauen wollen. Dazu setzen wir $S = S(p_1, p_2, r, \varphi)$ wie in Fall (3) an, wobei (r, φ) die Rolle von (Q_1, Q_2) übernimmt. Die dort gefundene Beziehung

$$(q_1, q_2, P_r, P_\varphi) = \left(\frac{\partial S}{\partial p_1}, \frac{\partial S}{\partial p_2}, \frac{\partial S}{\partial r}, \frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)$$

liefert dann als eine Möglichkeit

$$S = p_1 r \cos \varphi + p_2 r \sin \varphi$$

und somit

$$P_r = p_1 \cos \varphi + p_2 \sin \varphi \quad \text{und} \quad P_\varphi = r p_2 \cos \varphi - r p_1 \sin \varphi = p_2 q_1 - p_1 q_2 = -L.$$

Nun ist $p_1^2 + p_2^2 = P_r^2 + \frac{P_\varphi^2}{r^2}$ und somit

$$K(r, \varphi, P_r, P_\varphi) = \frac{P_r^2}{2} + \underbrace{\frac{\ell^2}{2r^2}}_{W_\ell(r)} + W(r) = K(r, P_r)$$

ein 1-dimensionales Problem, das wir direkt integrieren können:

$$\dot{r} = P_r = \sqrt{2(h - W_\ell(r))}$$

also

$$\int \frac{dr}{\sqrt{2(h - W_\ell(r))}} = \int dt = t.$$

Diese beiden Beispiele sind Fälle von integrablen Systemen. Der Name kommt daher, dass man in integrablen Systemen die Lösung durch eine oder mehrere eindimensionale Integrationen (sog. "Quadraturen") bestimmen kann.

2.3 Integrable Systeme und das Liouville-Arnold Theorem

2.49 Definition. Integrable Systeme

Sei $H \in C^\infty(M)$ eine Hamiltonfunktion auf der symplektischen Mannigfaltigkeit (M, ω) der Dimension $2n$.

- (a) Es heißt $F \in C^\infty(M)$ **Konstante der Bewegung**, wenn

$$\{F, H\} = 0,$$

denn gemäß Proposition 2.32 gilt dann ja $F \circ \Phi_t^H = F$.

- (b) Eine Menge $\{F_1, \dots, F_k\}$ von Funktionen $F_i \in C^\infty(M)$ heißt **in Involution**, wenn

$$\{F_i, F_j\} = 0 \quad \text{für alle } i, j \in \{1, \dots, k\}.$$

- (c) Eine Menge $\{F_1, \dots, F_k\}$ von Funktionen $F_i \in C^\infty(M)$ heißt auf einer Untermannigfaltigkeit $N \subset M$ **unabhängig**, wenn $dF_1 \wedge \dots \wedge dF_k(x) \neq 0$ für alle $x \in N$.
- (d) Eine Menge $\{F_1, \dots, F_n\}$ von Funktionen $F_i \in C^\infty(M)$ heißt **integrabel**, falls die F_i in Involution und unabhängig sind.
- (e) Eine Hamiltonfunktion H heißt **integrabel**, wenn zusätzlich zu H weitere $n-1$ Konstanten der Bewegung F_2, \dots, F_n existieren, so dass $\{H, F_2, \dots, F_n\}$ integrabel ist.

Wir werden zeigen, dass integrable Systeme lokal in I aber global in φ kanonische Koordinaten

$$(\varphi_1, \dots, \varphi_n, I_1, \dots, I_n)$$

besitzen, so dass in diesen Koordinaten $H(\varphi, I) = H(I)$, also

$$\dot{\varphi}_j = \frac{\partial H}{\partial I_j} =: \omega_j(I) \quad \text{und} \quad \dot{I}_j = 0,$$

und somit

$$\varphi_j(t) = \varphi_j(0) + \omega_j(I(0))t \quad \text{und} \quad I_j(t) = I_j(0).$$

Die I_j nennt man **Wirkungsvariable**, sie sind Erhaltungsgrößen. Die φ_j heißen **Winkelvariable** und wachsen linear in der Zeit mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega_j(I(0))$.

2.50 Beispiel. Eindimensionale Systeme sind immer integrabel, da H Erhaltungsgröße ist. Man muss allerdings die Punkte mit $dH = 0$, also die stationären Punkte aus dem Phasenraum herausnehmen.

Der erste Schritt zu diesem Resultat, genannt das Liouville-Arnold Theorem, ist der folgende Satz, in dem wir die Notation

$$F : M \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto F(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x))$$

verwenden. Er besagt, dass die Zusammenhangskomponenten der Niveauflächen $F^{-1}(\{f\})$ von F n -Tori oder Produkte von k -Tori mit \mathbb{R}^{n-k} sind. Eine Zusammenhangskomponente eines topologischen Raumes ist eine maximale zusammenhängende Teilmenge, also eine zusammenhängende Teilmenge, die in keiner größeren zusammenhängenden Teilmenge enthalten ist. Ein topologischer Raum heißt zusammenhängend, wenn die einzigen Teilmengen, die offen und abgeschlossen sind, der ganze Raum und die leere Menge sind.

2.51 Satz. Liouville-Arnold Theorem, Teil 1

Es sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit mit $\dim M = 2n$ und $\{F_1, \dots, F_n\}$ seien in Involution. Es sei $f \in F(M) \subset \mathbb{R}^n$ und M_f eine Zusammenhangskomponente von $F^{-1}(\{f\})$ derart, dass auf M_f die Hamiltonschen Vektorfelder X_{F_j} , $j = 1, \dots, n$, vollständig sind und $dF_1 \wedge \dots \wedge dF_n \neq 0$ gilt.

Dann ist M_f diffeomorph zu $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, wobei $\mathbb{T}^k = (S^1)^k$ den k -dimensionalen Torus bezeichne.

Beweis. Nach Definition 1.8 ist M_f eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Es bezeichne Φ_t^j den Hamiltonschen Fluss erzeugt von X_{F_j} , der nach Annahme auf M_f global existiert. Gemäß Proposition 2.32 folgt aus $\{F_i, F_j\} = 0$, dass $F_i \circ \Phi_t^j = F_i$ für alle $i, j = 1, \dots, n$, also, dass jedes F_i für jeden Fluss Φ_t^j Erhaltungsgröße ist. Damit ist M_f invariant unter allen Flüssen Φ_t^j und die X_{F_j} sind alle tangential an M_f . Die Vektorfelder kommutieren auch alle, da wegen $\{F_i, F_j\} = 0$ auch

$$[X_{F_i}, X_{F_j}] = X_{\{F_j, F_i\}} = 0$$

gilt. Daraus folgt nach Aufgabe 39, dass auch die zugehörigen Flüsse kommutieren, also

$$\Phi_{t_1}^i \circ \Phi_{t_2}^j = \Phi_{t_2}^j \circ \Phi_{t_1}^i \quad \text{für alle } i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Betrachte nun die Abbildung

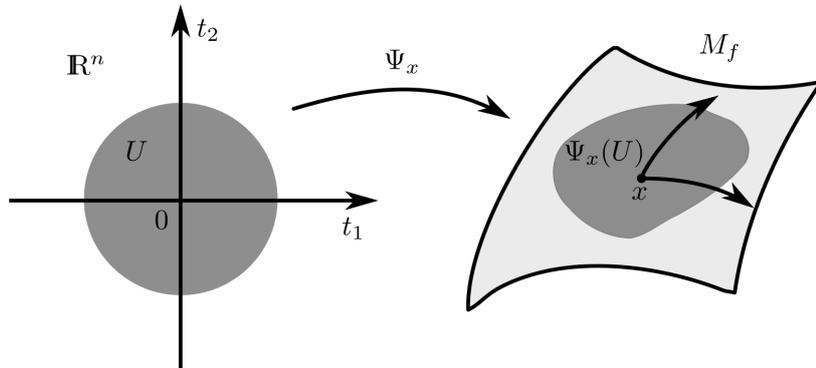
$$\Psi : \mathbb{R}^n \times M_f \rightarrow M_f, \quad (\mathbf{t}, x) \mapsto \Phi_{t_1}^1 \circ \dots \circ \Phi_{t_n}^n(x)$$

mit $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)$. Für $\Psi_{\mathbf{t}} : M_f \rightarrow M_f$, $\Psi_{\mathbf{t}}(x) = \Psi(\mathbf{t}, x)$ gilt $\Psi_0 = \text{Id}_{M_f}$ und $\Psi_{\mathbf{s}} \circ \Psi_{\mathbf{t}} = \Psi_{\mathbf{s}+\mathbf{t}}$. Damit ist Ψ eine Gruppenwirkung der Gruppe \mathbb{R}^n auf M_f .

Wegen der Unabhängigkeit der dF_j sind auch die n Vektorfelder X_{F_j} an jedem Punkt in M_f linear unabhängig. Für jedes $x \in M_f$ hat somit die Tangentialabbildung der Funktion

$$\Psi_x : \mathbb{R}^n \rightarrow M_f, \quad \mathbf{t} \mapsto \Psi_x(\mathbf{t}) := \Psi(\mathbf{t}, x)$$

bei $\mathbf{t} = 0$ vollen Rang. Mit dem Satz über die Umkehrfunktion folgt, dass es jeweils eine Kugel U_x um $0 \in \mathbb{R}^n$ gibt so, dass $\Psi_x|_{U_x}$ ein Diffeomorphismus auf sein Bild ist. Die Gruppenwirkung ist also lokal frei, d.h. $\Psi_x(\mathbf{t}) = x$ für $\mathbf{t} \in U_x$ impliziert schon $\mathbf{t} = 0$.



Wegen der Gruppeneigenschaft gibt es zu jedem $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$ eine solche Kugel (nämlich $U_x + \mathbf{t}$) und somit ist $\Psi_x : \mathbb{R}^n \rightarrow M_f$ zumindest lokal ein Diffeomorphismus. Insbesondere ist $B := \Psi_x(\mathbb{R}^n)$ in M_f offen. Es ist B in M_f auch abgeschlossen: sei $y \in M_f \setminus B$, dann ist auch $\Phi_y(U_y) \cap B = \emptyset$, sonst könnten wir ja von y nach B fließen und dann auch nach x . Damit ist B in M_f offen, abgeschlossen und nichtleer, also $B = M_f$. Es gibt also zu jedem $y \in M_f$ ein $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$ mit $\Psi_{\mathbf{t}}(x) = y$. Diese Eigenschaft der Gruppenwirkung nennt man Transitivität.

Die Isotropiegruppe Γ eines Punktes $x \in M_f$ ist durch

$$\Gamma \equiv \Gamma_x := \{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n \mid \Psi_{\mathbf{t}}(x) = x\}$$

definiert und wegen der Transitivität von Ψ und der Kommutativität von \mathbb{R}^n unabhängig von x : sei $\tau \in \Gamma_x$, dann folgt

$$\Psi_{\tau}(y) \stackrel{\text{Trans.}}{=} \Psi_{\tau}(\Psi_{\mathbf{t}}(x)) \stackrel{\text{Komm.}}{=} \Psi_{\mathbf{t}}(\Psi_{\tau}(x)) = \Psi_{\mathbf{t}}(x) = y,$$

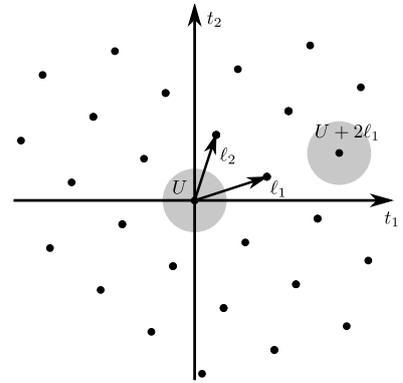
also auch $\tau \in \Gamma_y$. Da die Gruppenwirkung lokal frei ist, ist $U_x \cap \Gamma = \{0\}$ und für $\tau \in \Gamma$ ist $(\tau + U_x) \cap \Gamma = \{\tau\}$. Damit ist Γ eine sogenannte diskrete Untergruppe des \mathbb{R}^n und \mathbb{R}^n/Γ eine Mannigfaltigkeit: für jedes $[\mathbf{t}] \in \mathbb{R}^n/\Gamma$ ist $[\mathbf{t} + U_x] := \{[\mathbf{t} + \mathbf{s}] \mid \mathbf{s} \in U_x\}$ eine offene Umgebung auf der man z.B. die Kartenabbildung $\varphi : [\mathbf{t} + U_x] \rightarrow U_x, [\mathbf{t} + \mathbf{s}] \mapsto \mathbf{s}$, definiert. Schließlich ist $\Psi_x : \mathbb{R}^n/\Gamma \rightarrow M_f$ wohldefiniert und injektiv, da $\mathbf{t} - \mathbf{s} \in \Gamma$ genau dann gilt, wenn $\Psi_x(\mathbf{t}) = \Psi_x(\mathbf{s})$. Da Ψ_x auch surjektiv ist und lokal ein Diffeomorphismus, ist $\Psi_x : \mathbb{R}^n/\Gamma \rightarrow M_f$ ein Diffeomorphismus von Mannigfaltigkeiten.

Es bleibt zu zeigen, dass \mathbb{R}^n/Γ diffeomorph zu $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ ist.

2.52 Lemma. Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ eine diskrete Untergruppe und $k := \dim(\text{span}_{\mathbb{R}}\Gamma)$. Dann existieren k linear unabhängige Vektoren $\ell_1, \dots, \ell_k \in \Gamma$ mit

$$\Gamma = \text{span}_{\mathbb{Z}}(\ell_1, \dots, \ell_k) := \{\sum_{i=1}^k \alpha_i \ell_i \mid \alpha_i \in \mathbb{Z}\}.$$

Beweis. Siehe z.B. das Buch von Arnold, Lemma 3 in Kapitel 10. \square



Somit ist

$$\mathbb{R}^n/\Gamma \cong \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^k \cong (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^k \times \mathbb{R}^{n-k} \cong \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k},$$

wobei \cong jeweils für die offensichtliche Diffeomorphie steht. Da wir bereits gezeigt haben, dass Ψ_x für beliebiges $x \in M_f$ einen Diffeomorphismus von \mathbb{R}^n/Γ auf M_f liefert, ist M_f diffeomorph zu $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$. Wenn M_f kompakt ist, muss $k = n$ und somit $M_f \cong \mathbb{T}^n$ gelten. \square

2.53 Korollar. Winkelkoordinaten

Es existieren Frequenzen $\omega_1, \dots, \omega_n \in \mathbb{R}$ und Winkelkoordinaten $\varphi : M_f \rightarrow \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ auf M_f , in denen der von $H := F_1$ erzeugte Fluss Φ_t^H auf M_f die Form

$$\varphi_j(\Phi_t^H(x)) = \varphi_j(x) + \omega_j t \quad (\text{mod } 2\pi \quad \text{für } j \in \{1, \dots, k\})$$

besitzt.

Beweis. Es sei ℓ_1, \dots, ℓ_k eine Basis von $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ die wir zu einer Basis ℓ_1, \dots, ℓ_n des \mathbb{R}^n ergänzen. Für festes $y \in M_f$ ist Abbildung $\Psi_y : [0, 2\pi)^k \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow M_f$,

$$(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \mapsto \Psi\left(\sum_{j=1}^n \frac{\varphi_j \ell_j}{2\pi}, y\right)$$

nach Konstruktion injektiv und surjektiv. Wir setzen daher $\varphi = \Psi_y^{-1}$, womit

$$x = \Psi\left(\sum_{j=1}^n \frac{\varphi_j(x) \ell_j}{2\pi}, y\right)$$

für alle $x \in M_f$ folgt.

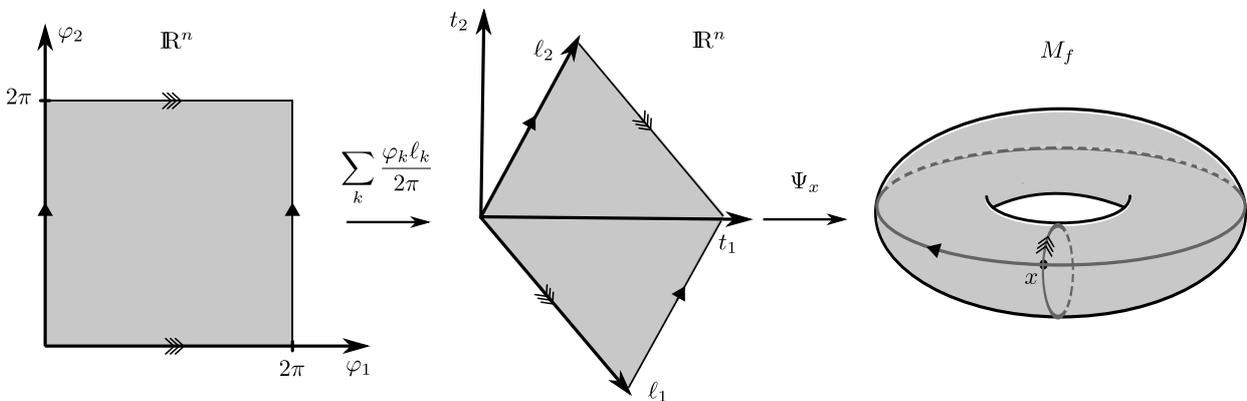
Der Vektor $e_1 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ besitze nun die Basisdarstellung

$$e_1 = \sum_{j=1}^n \frac{\omega_j \ell_j}{2\pi}$$

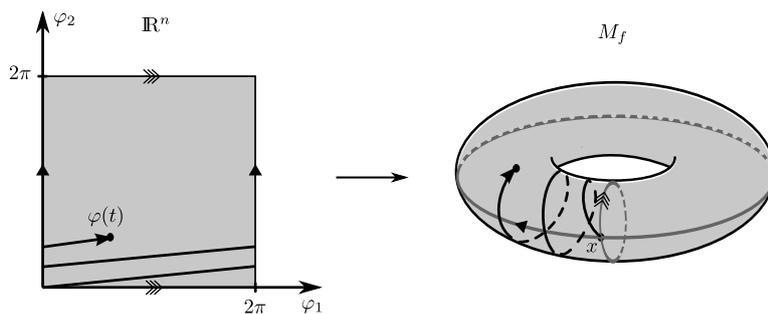
dann ist der von $H = F_1$ erzeugte Fluss gegeben durch

$$\begin{aligned} \Phi_t^H(x) &= \Psi((t, 0, \dots, 0), x) = \Psi(t \cdot (1, 0, \dots, 0), x) = \\ &= \Psi\left(t \sum_{j=1}^n \frac{\omega_j \ell_j}{2\pi}, x\right) = \Psi\left(t \sum_{j=1}^n \frac{\omega_j \ell_j}{2\pi}, \Psi\left(\sum_{i=1}^n \frac{\varphi_i(x) \ell_i}{2\pi}, y\right)\right) \\ &= \Psi\left(\sum_{j=1}^n (\varphi_j(x) + t\omega_j) \frac{\ell_j}{2\pi}, y\right), \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Flusseigenschaft von Ψ verwendet haben. □



2.54 Bemerkung. Eine Bewegung von dem im Korollar gegebenen Typ auf einem n -Torus heißt bedingt-periodische Bewegung.



Für den zweidimensionalen Fall sieht man leicht (Übung), dass für $\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{Q}$ die Bahn $\varphi(t)$ periodisch ist. Ist $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{Q}$, so füllt die Bahnkurve $\varphi(\mathbb{R})$ den 2-Torus \mathbb{T}^2 dicht aus.

Im zweiten Schritt wollen wir nicht nur auf einem einzelnen Torus M_f Winkelkoordinaten einführen, sondern diese auf ein offenes Phasenraumgebiet ausdehnen und durch n sogenannte Wirkungskoordinaten zu kanonischen Koordinaten ergänzen.

2.55 Satz. Liouville-Arnold Theorem, Teil 2

Es sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit mit $\dim M = 2n$ und $\{F_1, \dots, F_n\}$ seien integrierbar. Weiterhin nehmen wir an, dass die Hamiltonschen Vektorfelder X_{F_j} vollständig sind.

2 Hamiltonsche Mechanik und symplektische Geometrie

Sei $f_0 \in F(M)$ und M_{f_0} eine Zusammenhangskomponente von $F^{-1}(f_0)$, die nach Satz 2.51 diffeomorph zu $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ ist. Falls $k < n$ ist, müssen wir zusätzlich annehmen, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt so, dass in der Zusammenhangskomponente von $F^{-1}(\{|f - f_0| < \varepsilon\})$, welche M_{f_0} enthält, alle M_f diffeomorph zu $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ sind.

Dann gibt es auf einer Umgebung $U \subset M$ von M_{f_0} Wirkungskoordinaten $I : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ und Winkelkoordinaten $\varphi : U \rightarrow \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ so, dass

$$\omega = \sum_{j=1}^n d\varphi^j \wedge dI^j,$$

also (φ, I) eine kanonische Karte ist.

In dieser Karte ist $H = F_1$ eine Funktion nur der Wirkungsvariable, $H = H(I)$, und die Hamiltonschen Differentialgleichungen haben die Form

$$\dot{\varphi}_j = \frac{\partial H}{\partial I_j} =: \omega_j(I), \quad \text{und} \quad \dot{I}_j = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

2.56 Bemerkung. Die zusätzliche Bedingung im Fall $k < n$ ist tatsächlich notwendig: Sei beispielsweise $M = \mathbb{R}^2$ mit der kanonischen symplektischen Form und $H(q, p) = \frac{1}{2}p^2 + V(q)$ mit einer Potentialfunktion $V \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $\lim_{q \rightarrow \pm\infty} V(q) = 0$. Dann sind die Kurven M_E zu konstantem $H(q, p) = E$ für $E \geq 0$ diffeomorph zu \mathbb{R} und für $E < 0$ diffeomorph zu \mathbb{T}^1 . Globale Wirkungs-Winkel-Variable können also auf einer offenen Umgebung von M_0 nicht existieren.

Beweis. Wir können o.B.d.A. $f_0 = 0$ setzen, indem wir F durch $F - f_0$ ersetzen. Für $\varepsilon > 0$ sei M_ε die Zusammenhangskomponente von $F^{-1}(B_\varepsilon(0))$ welche $M_{f_0} = M_0$ enthält. Wir werden im Laufe des Beweises $\varepsilon > 0$ in jedem Schritt höchstens verkleinern. Für $|f| < \varepsilon$ sei $M_f = F^{-1}(f) \cap M_\varepsilon$, also

$$M_\varepsilon = \bigcup_{|f| < \varepsilon} M_f.$$

Wir benötigen das folgende Lemma.

2.57 Lemma. von Liouville

Es sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit mit $\dim M = 2n$ und $\{F_1, \dots, F_n\}$ seien integrabel. Dann existieren zu jedem $x_0 \in M$ eine offene Umgebung V von x_0 und Funktionen $G_1, \dots, G_n \in C^\infty(V)$ so, dass $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, $x \mapsto (F_1(x), \dots, F_n(x), G_1(x), \dots, G_n(x))$ eine kanonische Karte auf V ist.

Den Beweis des Lemmas liefern wir später nach.

Sei nun $x_0 \in M_0$, dann existieren nach dem Lemma von Liouville auf einer offenen Umgebung V von x_0 Funktionen $G_1, \dots, G_n : V \rightarrow \mathbb{R}$ so, dass $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, $x \mapsto (F_1(x), \dots, F_n(x), G_1(x), \dots, G_n(x))$ eine kanonische Karte ist. Sei o.B.d.A. auch $G(x_0) = 0$ und $\varepsilon > 0$ so klein, dass $B_\varepsilon(0) \subset F(V)$. Dann ist $S_0 := G^{-1}(0)$ eine Lagrangesche Untermannigfaltigkeit, die zu allen M_f mit $|f| < \varepsilon$ transversal ist, also je genau einen Schnittpunkt $x(f) := \psi^{-1}(f, 0) \in M_f \cap S_0$ hat.

Nun können wir auf jeder Menge M_f mit $|f| < \varepsilon$ Winkelkoordinaten $\varphi_f : M_f \rightarrow \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ mit Startpunkt $x(f)$, also $\varphi_f(x(f)) = 0$, konstruieren. Dass wir die Basisvektoren $\ell_1(f), \dots, \ell_k(f)$ des Gitters $\Gamma(f)$ als glatte Funktionen von $f \in B_\varepsilon(0)$ wählen können, folgt aus dem Satz über implizite Funktionen: Es ist $\mathbf{t} \in \Gamma(f)$ genau dann wenn $\Psi(\mathbf{t}, x) = x$ für ein und somit alle $x \in M_f$. Das ist wiederum genau dann der Fall, wenn $G(\Psi(\mathbf{t}, x(f))) = G(x(f))$, da $F(\Psi(\mathbf{t}, x)) = F(x)$ wegen der Invarianz von M_f unter Ψ sowieso gilt. Sei also

$$H : \mathbb{R}^n \times B_\varepsilon(0) \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (\mathbf{t}, f) \mapsto H(\mathbf{t}, f) := G(\Psi(\mathbf{t}, x(f))) - G(x(f)) = G(\Psi(\mathbf{t}, x(f))),$$

dann lässt sich die Gleichung $H(\mathbf{t}, f) = 0$ lokal um $(\ell, 0)$ mit $\ell \in \Gamma(0)$ nach \mathbf{t} auflösen, da wegen

$$\frac{\partial H(\mathbf{t}, f)}{\partial t_i} = TG \circ X_{F_i}(\Psi(\mathbf{t}, x(f))) = TG \circ \partial_{G_i} = e_i$$

die Matrix $\frac{\partial H(\mathbf{t}, f)}{\partial \mathbf{t}} = E_n$ vollen Rang hat. Wir erhalten also ausgehend von einer Basis $\ell_1^0, \dots, \ell_k^0$ von $\Gamma(0)$ auf einer möglicherweise weiter geschrumpften Kugel $B_\varepsilon(0)$ glatte Funktionen $\ell_1, \dots, \ell_k : B_\varepsilon(0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\ell_j(0) = \ell_j^0$ und $\ell_j(f) \in \Gamma(f)$. Für $\varepsilon > 0$ klein genug bleiben ℓ_1, \dots, ℓ_k auch auf ganz $B_\varepsilon(0)$ linear unabhängig, da dies eine offene Bedingung ist.

Damit ist die Dimension des Aufspans von $\Gamma(f)$ auch für den Fall $k = n$ konstant. Nun ist aber auch noch zu zeigen, dass nicht nur $\Gamma_\ell(f) := \text{span}_{\mathbb{Z}}(\ell_1(f), \dots, \ell_k(f)) \subset \Gamma(f)$ sondern $\Gamma_\ell(f) = \Gamma(f)$ für $f \in B_\varepsilon(0)$. Angenommen, dies wäre nicht der Fall, dann gibt es Folgen $\tilde{f}_m \in B_\varepsilon(0)$ und $\tilde{\ell}_m \in \Gamma(\tilde{f}_m) \setminus \Gamma_\ell(\tilde{f}_m)$ mit $\lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{f}_m = 0$. O.B.d.A. kann $\tilde{\ell}_m \in \text{span}_{(0,1)}(\ell_1(\tilde{f}_m), \dots, \ell_k(\tilde{f}_m))$ gewählt werden, weshalb $\tilde{\ell}_m$ eine konvergente Teilfolge hat, deren Grenzwert $\tilde{\ell}$ wegen der Stetigkeit von $\Psi : \mathbb{R}^n \times M_\varepsilon \rightarrow M_\varepsilon$ in $\Gamma(0) = \Gamma_\ell(0)$ liegen muss, also gleich $\ell_j(0)$ für ein $j \in \{1, \dots, k\}$ ist. Dann muss aber für $|\tilde{f}_m| < \varepsilon$ nach dem impliziten Funktionensatz $\ell_m = \ell_j(\tilde{f}_m)$ gelten, im Widerspruch zur Annahme, dass $\tilde{\ell}_m \in \Gamma(\tilde{f}_m) \setminus \Gamma_\ell(\tilde{f}_m)$.

Somit haben wir Winkelkoordinaten $\varphi : M_\varepsilon \rightarrow \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ auf ganz M_ε konstruiert. Für spätere Zwecke halten wir fest, dass der implizite Funktionensatz auch

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell_j(f)}{\partial f} &= - \left(\frac{\partial H(\mathbf{t}, f)}{\partial \mathbf{t}} \right)^{-1} \frac{\partial H(\mathbf{t}, f)}{\partial f} \Big|_{\mathbf{t}=\ell_j(f)} = - \frac{\partial G(\Psi(\mathbf{t}, x(f)))}{\partial f} \Big|_{\mathbf{t}=\ell_j(f)} \\ &= TG \circ T\Psi_{\ell_j(f)} \circ T\psi^{-1} \Big|_{(f,0)} \end{aligned}$$

liefert. Die Matrix $\frac{\partial \ell_j(f)}{\partial f}$ ist also der linke untere Block von $T\Psi_{\ell_j(f)}$ in der Basisdarstellung bzgl. der Karte ψ und an der Stelle $(f, 0)$.

Um nun die zugehörigen Wirkungsvariablen zu finden, zeigen wir, dass die Koordinatenvektorfelder $\partial_{\varphi_j} \in \mathcal{T}_0^1(M_\varepsilon)$ Hamiltonsch sind: Auf der zusammenziehbaren Menge $\varphi^{-1}((-\pi, \pi)^k \times \mathbb{R}^{n-k})$ gibt es Funktionen I_j mit

$$\omega_j(\cdot) := \omega(\partial_{\varphi_j}, \cdot) = dI^j \quad (*)$$

genau dann, wenn ω_j geschlossen ist. Nun ist aber nach Konstruktion

$$\partial_{\varphi_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\ell_{j,i}}{2\pi} X_{F_i} \quad \text{also} \quad \omega_j(\cdot) = \sum_{i=1}^n \frac{\ell_{j,i}}{2\pi} \omega(X_{F_i}, \cdot) = \sum_{i=1}^n \frac{\ell_{j,i}}{2\pi} dF^i.$$

Wir müssen also zeigen, dass $\ell_{k,i} dF^i$ geschlossen ist, oder äquivalent, dass

$$\frac{\partial \ell_{j,i}}{\partial f_l} = \frac{\partial \ell_{j,l}}{\partial f_i}$$

gilt. Mit dem zuvor Gesagten ist das wiederum äquivalent dazu, dass der linke untere Block von $A_{il} := (T\Psi_{\ell_j(f)})_{il}$ in der Basisdarstellung bzgl. der Karte ψ an der Stelle $(f, 0)$ symmetrisch ist. Dann gilt

$$A = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ C & E_n \end{pmatrix},$$

denn auf Kurven in M_f ist $\Psi_{\ell_j(f)}$ die Identität also $T\Psi_{\ell_j(f)} \partial_{G_i} \Big|_{M_f} = \partial_{G_i} \Big|_{M_f}$ für alle i . Weiterhin folgt aus $F(\Psi_{\ell_j(f)}(x)) = F(x)$, dass $dF_i(T\Psi_{\ell_j(f)} \partial_{F_i}) = \delta_{il}$ auf ganz M_ε .

Gemäß Bemerkung 2.7 erfüllt A als symplektischer Isomorphismus $A^T J A = J$, was nach einer einfachen Rechnung $C = C^T$ liefert. Damit sind die Koordinatenvektorfelder ∂_{φ_j} auf $\varphi^{-1}((-\pi, \pi)^k \times \mathbb{R}^{n-k})$ Hamiltonsch, also $\partial_{\varphi_j} = X_{I_j}$ für geeignete Funktionen I_1, \dots, I_n . Nun gilt aber $\omega(\partial_{\varphi_j}, \partial_{\varphi_i}) =$

0, da die ∂_{φ_j} tangential an die Lagrangemannigfaltigkeiten M_f sind und somit $\partial_{\varphi_i} I_j = 0$. Die I 's also Funktionen der F 's, d.h. $I = \tilde{I} \circ F$ mit einem $\tilde{I} : B_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^n$. Damit können wir die I 's zu glatten Funktionen auf ganz M_ε fortsetzen.

Um zu sehen, dass (φ, I) tatsächlich eine kanonische Karte ist, stellen wir fest, dass $\omega(\partial_{\varphi_j}, \partial_{\varphi_i}) = 0$ und mit (*) auch $\omega(\partial_{\varphi_j}, \partial_{I_i}) = \delta_{ji}$ schon gezeigt wurde. Es bleibt $\omega(\partial_{I_i}, \partial_{I_j}) = 0$ zu zeigen. Das folgt aber daraus, dass die Koordinatenflächen $S_\theta := \{x \in M_\varepsilon \mid \varphi(x) = \theta\} = \Psi_\theta^{X_I}(S_0)$ als symplektische Bilder der Lagrangemannigfaltigkeit S_0 ebenfalls Lagrangemannigfaltigkeiten sind. \square

Beweis. des Lemmas von Liouville. Sei $(\tilde{V}, \tilde{\varphi})$ eine Darboux-Karte mit $\tilde{\varphi}(x_0) = 0$ und $\tilde{\varphi}(x) =: (q(x), p(x))$. Sei weiterhin $\tilde{F}_j := \tilde{\varphi}_* F_j$, dann sind die Funktionen \tilde{F}_j auf $U := \tilde{\varphi}(\tilde{V})$ bezüglich der kanonischen symplektischen Form $\omega_0 = \sum_k dq^k \wedge dp^k$ auf \mathbb{R}^{2n} integrabel. Wir konstruieren nun eine kanonische Transformation $\Psi : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ mit $\Psi(q, p)_j = \tilde{F}_j(q, p)$ für $j = 1, \dots, n$ auf einer möglicherweise geschrumpften Umgebung $U_0 \subset U$ der Null. Damit können wir die \tilde{F}_j durch $\tilde{G}_j := \Psi_{n+j}$ zu kanonischen Koordinaten auf U_0 ergänzen und setzen dann am Ende $G_j = \tilde{\varphi}^* \tilde{G}_j$ auf $\tilde{\varphi}^{-1}(U_0)$.

Zur Konstruktion von Ψ verwenden wir die Methode der erzeugenden Funktion. Die lineare Unabhängigkeit der Gradienten $\nabla \tilde{F}_j$ impliziert, dass die Jacobi-Matrix $\frac{\partial \tilde{F}}{\partial (q,p)}$ der Abbildung $\tilde{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^n, (q, p) \mapsto (\tilde{F}_1(q, p), \dots, \tilde{F}_n(q, p))$ vollen Rang hat. Mit Bemerkung 2.46 nehmen wir o.B.d.A. an, dass $\tilde{F}_p := \frac{\partial \tilde{F}}{\partial p}$ invertierbar ist. Mit dem Satz über implizite Funktionen können wir $\tilde{F}(q, p) = f$ zumindest lokal für (q, p) in einer hinreichend kleinen Kugel $U_0 \subset U$ um die Null und $x \in \tilde{F}(U_0)$ nach p auflösen. Es ergibt sich

$$p = P(q, f) \quad \text{mit} \quad \tilde{F}(q, P(q, f)) = f \quad \text{und partiellen Ableitungen} \quad P_f = \tilde{F}_p^{-1}, \quad P_q = -\tilde{F}_p^{-1} \tilde{F}_q.$$

Die Involutivität $\{\tilde{F}_j, \tilde{F}_i\}_{\omega_0} = 0$ lautet in Matrixform einfach

$$\tilde{F}_p \tilde{F}_q^T - \tilde{F}_q \tilde{F}_p^T = 0.$$

Multipliziert man diese Gleichung von links mit \tilde{F}_p^{-1} und von rechts mit \tilde{F}_p^{T-1} , so ergibt sich $-P_q^T + P_q = 0$, also die Symmetrie von $P_q = \frac{\partial P}{\partial q}$. Aufgrund des Poincaré Lemmas gibt es also eine Funktion $S(q, f)$ mit $P = -\frac{\partial S}{\partial q}$. (Man fasse dazu P_i für festes f als Komponenten einer 1-Form $\nu := P_i dq^i$ auf \mathbb{R}^n auf. Dann ist ν wegen der Symmetrie von $P_q = \frac{\partial P}{\partial q}$ geschlossen und somit lokal exakt. Die Stammform ist dann $-S$.) Weiterhin ist $\frac{\partial^2 S}{\partial f \partial q} = -P_f = -\tilde{F}_p^{-1}$ invertierbar und somit S Erzeugende einer kanonischen Transformation (Fall 1). Es gilt dabei nach Konstruktion

$$p = P(q, f) = -\frac{\partial S}{\partial q}(q, f) \quad \text{und} \quad f = \tilde{F}(q, p),$$

und wir können

$$\tilde{G} := -\frac{\partial S}{\partial f}(q, f)$$

setzen. \square

2.58 Bemerkung. Die Wirkungen als Integrale

Es gibt auch eine geometrische Konstruktion der I 's, die für konkrete Rechnungen nützlich sein kann. Mit dem vorausgegangenem Satz wissen wir bereits, dass $\omega|_{M_\varepsilon}$ auf hinreichend kleinen Umgebungen M_ε von M_{I_0} exakt ist, da $\omega = \sum_j d\varphi^j \wedge dI^j = -d(\sum_j I_j d\varphi^j)$. Hier erinnere man sich nochmals daran, dass φ_j zwar nicht global definiert ist, $d\varphi^j$ aber schon.

Man kann nun die Wirkungsvariable, die ja nur bis auf additive Konstanten fixiert sind, allein durch Integration einer Stammform Θ von ω berechnen. Die vorherige Kenntnis der Wirkungs-

und Winkelvariablen (φ, I) ist nicht notwendig. Wir werden sie aber verwenden, um die entsprechende Integralformel für $\tilde{I} = I + c$ herzuleiten.

Betrachte auf M_I die geschlossenen Wege

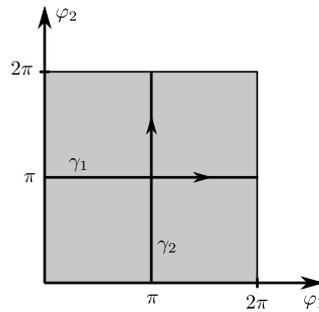
$$\gamma_k^I : [0, 1] \rightarrow M_f, \quad \gamma_k^I(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t), I_1, \dots, I_n)$$

mit $\varphi_k(t) = 2\pi t, \varphi_j(t) \equiv \pi$ für $j \neq k$.

Nun setze

$$\tilde{I}_k(I) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_k^I} \Theta,$$

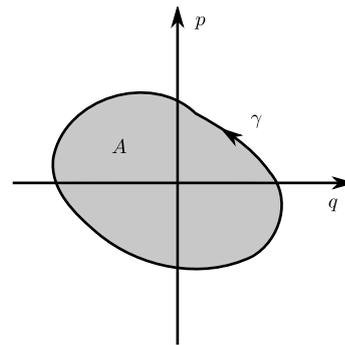
wobei $\omega = -d\Theta$ sei. Deformiert man γ_k^I stetig in M_I , so ändert sich der Wert von \tilde{I}_k nicht, da M_I Lagrangesch ist und somit $\Theta|_{M_I}$ geschlossen ist. Der Wert von \tilde{I}_k hängt also nur von der Homotopieklasse von γ_k^I ab und wir können einen beliebigen Weg in dieser Klasse verwenden, um \tilde{I}_k zu berechnen.



Wir betrachten ein 1-dimensionales Beispiel. Für $M = \mathbb{R}^2$ ist M_I einfach eine geschlossene Kurve in M und nach dem Satz von Stokes ist

$$\tilde{I} = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma^I} \Theta = -\frac{1}{2\pi} \int_{A^I} \omega$$

da $\partial A^I = \gamma^I$ und $d\Theta = -\omega$. Es ist $|\int_{A^I} \omega| = |A^I|$ gleich der von γ^I eingeschlossenen Fläche.



Wir zeigen nun, dass die Differenz $I - \tilde{I}$ konstant auf M_ε ist. Wir wissen, dass $\Theta = -I_j d\varphi^j + \alpha$ mit einer geschlossenen 1-Form α gelten muss. Dann ist

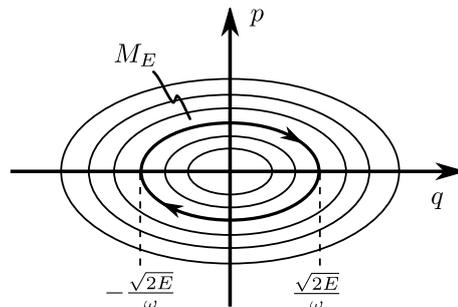
$$\tilde{I}_k(I) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_k^I} \Theta = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_k^I} (I_j d\varphi^j + \alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I_j d\varphi^j(\partial_{\varphi_k}) + \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_k^{I_0}} \alpha = I_k + c_k$$

mit einer Konstante c_k . Dass $\int_{\gamma_k^I} \alpha$ nicht von I abhängt, folgt sofort aus $d\alpha = 0$ und dem Satz von Stokes.

2.59 Beispiel. Harmonischer Oszillator

Sei $H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{\omega^2}{2}q^2$ auf $M = T^*\mathbb{R}$. Es ist $dH = 0$ nur bei $(q, p) = 0$. Also betrachten wir $U = \{(q, p) \mid H > 0\}$. Die Energieflächen $M_E = \{(q, p) \mid H = E\}$ sind konzentrische Ellipsen. Für die Wirkungsvariable ergibt sich wie erwartet

$$\begin{aligned} I(E) &= \frac{1}{2\pi} \oint_{M_E} \Theta = \frac{1}{2\pi} \oint_{M_E} p(E, q) dq \\ &= \frac{2}{2\pi} \int_{-\frac{\sqrt{2E}}{\omega}}^{+\frac{\sqrt{2E}}{\omega}} \sqrt{2E - \omega^2 q^2} dq = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^0 \sqrt{2E - \omega^2 \frac{2E}{\omega^2} \cos^2 \varphi} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2E}}{\omega} \sin \varphi \right) d\varphi \end{aligned}$$



$$= \frac{2E}{\pi\omega} \int_0^\pi \sin^2 \varphi \, d\varphi = \frac{E}{\omega}.$$

Die zugehörige Winkelvariable finden wir wieder mit Hilfe einer erzeugenden Funktion der Transformation $(q, p) \mapsto (\varphi, I)$. Wir können p lokal als Funktion $p(q, I) = \sqrt{2I\omega - \omega^2 q^2}$ schreiben und

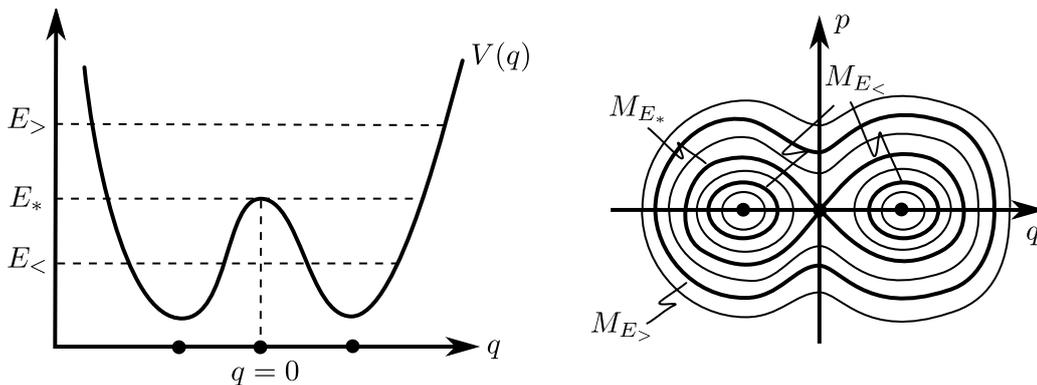
$$S(q, I) = - \int_0^q p(q', I) \, dq' = - \int_0^q \sqrt{2I\omega - \omega^2 q'^2} \, dq' = -I \arcsin \left(q \sqrt{\frac{\omega}{2I}} \right) - \frac{q}{2} \sqrt{2I\omega - q^2 \omega^2},$$

setzen (Fall 2). Dann ist $p = -\frac{\partial S}{\partial q}$ und die Winkelvariable schließlich

$$\varphi = -\frac{\partial S}{\partial I} = \arcsin \left(q \sqrt{\frac{\omega}{2I}} \right), \quad \text{also} \quad q = \sqrt{\frac{2I}{\omega}} \sin \varphi.$$

2.60 Beispiel. Das Doppelmuldenpotential

Sei nun $H = \frac{1}{2}p^2 + V(q)$ auf $M = T^*\mathbb{R}$ mit einem Doppelmuldenpotential $V(q)$ wie im Bild. Für $E < E_* = V(0)$ zerfällt M_E in zwei Zusammenhangskomponenten, die jeweils diffeomorph zur S^1 sind. Für $E > E_*$ hat M_E nur eine Zusammenhangskomponente, die ebenfalls wieder diffeomorph zu S^1 ist. Getrennt werden die beiden Bereiche des Phasenraums durch die Fläche M_{E_*} , die sogenannte Separatrix. Diese ist nicht diffeomorph zur S^1 . Da dH bei $(0, 0) \in M_{E_*}$ eine Nullstelle hat, steht dies nicht im Widerspruch zu Satz 2.51.



2.61 Bemerkung. Zur Bedeutung integrierbarer Systeme in der Physik

Integrierbare Systeme sind im wesentlichen die einzigen Systeme in der klassischen Mechanik, die man explizit lösen kann. Deshalb findet man in Büchern zur klassischen Mechanik oft ganze Kataloge von integrierbaren Systemen und deren Lösungen. Integrierbare Systeme sind auch der Ausgangspunkt der Störungstheorie, welche wir in den folgenden Abschnitten behandeln werden.

Schließlich basierten auch die ersten Schritte der Quantentheorie auf integrierbaren Systemen: im simpelsten Fall sagt man einfach, dass für ein “quantisiertes integrierbares System” nur Wirkungen $I_k = \hbar n_k$ mit $n_k \in \mathbb{N}$ erlaubt sind. Daraus ergibt sich dann direkt auch eine “Quantisierung” der Erhaltungsgrößen F_j und insbesondere der Energie H . So erhält man beispielsweise die erlaubten Energieniveaus im Wasserstoffatom (also $H(q, p) = \frac{1}{2}|p|^2 - \frac{1}{|q|}$ auf $T^*\mathbb{R}^3$), welche in guter Näherung die im Experiment beobachteten Spektrallinien erklären. Für den harmonischen Oszillator ergibt sich $E_n = \hbar\omega n$.

2.4 Das Mittelungsprinzip

Für $\dim M > 2$ ist wie gesagt Integrabilität die Ausnahme und auch viele einfache Modelle sind nicht integrierbar (beispielsweise das 3-Körper-Problem). In Anwendungen hat man aber häufig Systeme vorliegen, die “kleine Störungen” integrierbarer Systeme sind:

$$H_\varepsilon(I, \varphi) = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \varphi), \quad \text{mit } \varepsilon \ll 1.$$

Die entsprechenden Differentialgleichungen sind dann

$$\begin{aligned}\dot{I}_k &= 0 + \varepsilon f_k(I, \varphi) \\ \dot{\varphi}_\ell &= \omega_\ell(I) + \varepsilon g_\ell(I, \varphi),\end{aligned}$$

wobei wir diese Gleichungen zunächst allgemein betrachten, ohne anzunehmen, dass das System Hamiltonsch ist. Also $k = 1, \dots, m$ und $\ell = 1, \dots, n$.

Man spricht dann in diesem Zusammenhang von den **langsamen** I -Variablen und den **schnellen** φ -Variablen. In vielen Fällen interessiert einen dann auch nur die zeitliche Entwicklung der langsamen Variablen I .

Für die folgende Diskussion sei $U \subset \mathbb{R}^m$ und $M := U \times \mathbb{T}^n$ mit Koordinaten (I, φ) versehen. Es seien weiterhin $\omega \in C^\infty(U)$, $f \in C^\infty(M, \mathbb{R}^m)$ und $g \in C^\infty(M, \mathbb{R}^n)$. In diesem Sinne betrachten wir nun die bereits oben angegebenen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\dot{I} &= \varepsilon f(I, \varphi) \\ \dot{\varphi} &= \omega(I) + \varepsilon g(I, \varphi).\end{aligned}$$

Die **Idee des Mittelungsprinzips** ist folgende: Während φ_ℓ einmal \mathbb{T}^1 umläuft, ändert sich I kaum und man kann die rechte Seite von

$$\dot{I}_k = \varepsilon f_k(I, \varphi)$$

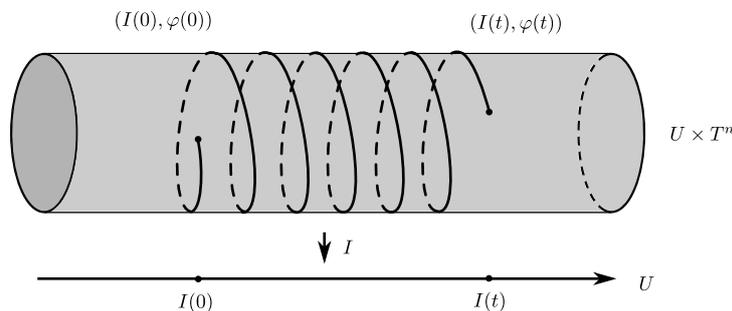
durch den Mittelwert

$$\varepsilon \langle f_k \rangle (I) := \frac{\varepsilon}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} f_k(I, \varphi) \, d^n \varphi$$

ersetzen. Die gemittelte Gleichung ist dann

$$\dot{J}_k = \varepsilon \langle f_k \rangle (J)$$

und enthält nur noch langsame Variable. Wir schreiben hier und im folgenden für die Lösung der gemittelten Gleichung $J(t)$ um sie von der Lösung $I(t)$ der ursprünglichen Gleichung zu unterscheiden.



Es stellt sich die Frage, ob $|I(t) - J(t)|$ klein bleibt und wenn ja, für wie lange.

2.62 Beispiel. Für $(I, \varphi) \in \mathbb{R} \times S^1$ sei $\omega = \text{const.}$, $f = f(\varphi)$ und $g = 0$. Dann lassen sich die Bewegungsgleichungen

$$\dot{I} = \varepsilon f(\varphi), \quad \dot{\varphi} = \omega$$

sofort lösen: es ist

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega t$$

und

$$\begin{aligned} I(t) &= I_0 + \varepsilon \int_0^t f(\varphi_0 + \omega s) ds = I_0 + \varepsilon \int_0^t (f(\varphi_0 + \omega s) - \langle f \rangle + \langle f \rangle) ds \\ &= I_0 + \varepsilon t \langle f \rangle + \varepsilon \int_0^t (f(\varphi_0 + \omega s) - \langle f \rangle) ds. \end{aligned}$$

Das gemittelte System ist $\dot{J}(t) = \varepsilon \langle f \rangle$ also

$$J(t) = I_0 + \varepsilon t \langle f \rangle.$$

In diesem Fall gilt also für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$

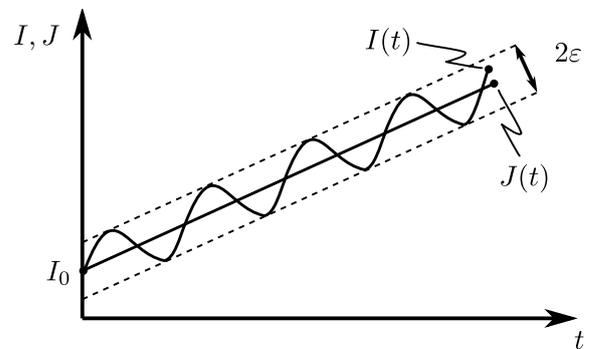
$$|I(t) - J(t)| = \varepsilon \left| \int_0^t (f(\varphi_0 + \omega s) - \langle f \rangle) ds \right| \leq \frac{\varepsilon}{\omega} \sup_{\alpha \in [0, 2\pi)} \left| \int_0^\alpha (f(\varphi) - \langle f \rangle) d\varphi \right| \leq \varepsilon C = \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Zwar schwankt $I(t)$ in diesem Beispiel kurzfristig um $\mathcal{O}(\varepsilon)$ um $J(t)$, dies trägt aber zur langfristigen Entwicklung nicht bei. Das Raummittel

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi$$

entspricht hier exakt dem Zeitmittel

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\varphi(t)) dt.$$



Man erwartet, dass auch im allgemeinen Fall das Mittelungsprinzip eine gute Näherung für gewisse Zeiten liefert, falls Raummittel und Zeitmittel von f übereinstimmen. Im Spezialfall $f(I, \varphi) = f(\varphi)$ ist das klar, denn

$$\begin{aligned} I(t) &= I_0 + \varepsilon \int_0^t f(\varphi(s)) ds = I_0 + \varepsilon t \left(\frac{1}{t} \int_0^t f(\varphi(s)) ds \right) \\ J(t) &= I_0 + \varepsilon t \langle f \rangle \end{aligned}$$

und somit

$$|I(t) - J(t)| = \varepsilon t \left| \frac{1}{t} \int_0^t f(\varphi(s)) ds - \langle f \rangle \right| =: \varepsilon t \delta(t).$$

Stimmen hier Raum- und Zeitmittel überein, ist also $\lim_{t \rightarrow \infty} \delta(t) = 0$, so gilt zumindest für Zeiten der Ordnung $\frac{1}{\varepsilon}$, dass $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |I(t) - J(t)| = 0$. Konvergiert das Zeitmittel hinreichend schnell, also $\delta(t) \leq \frac{C}{t}$, so hat man in diesem Fall auch wieder $|I(t) - J(t)| \leq \varepsilon C$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Die Gleichheit von Raum- und Zeitmittel gilt aber selbst in diesem Spezialfall nicht immer:

2.63 Beispiel. Sei $M = \mathbb{R} \times \mathbb{T}^2$ und

$$\dot{I} = \varepsilon(\cos(\varphi_1 - 2\varphi_2) + \sin \varphi_2) = \varepsilon f(\varphi_1, \varphi_2), \quad \dot{\varphi}_1 = 2, \quad \dot{\varphi}_2 = 1.$$

Dann gilt für das gemittelte System

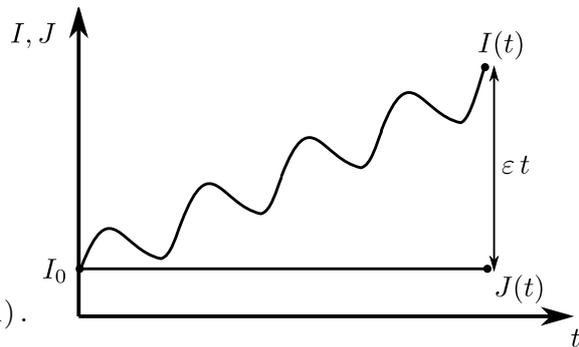
$$\dot{J} = \frac{\varepsilon}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{2\pi} d\varphi_2 f(\varphi_1, \varphi_2) = 0.$$

Andererseits ist die Lösung des vollen Systems mit Anfangsdaten $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$ aber

$$\varphi_1(t) = 2t \quad \text{und} \quad \varphi_2(t) = t$$

und

$$I(t) = I(0) + \varepsilon \int_0^t ds (1 + \sin s) = I(0) + \varepsilon(t - \cos t + 1).$$

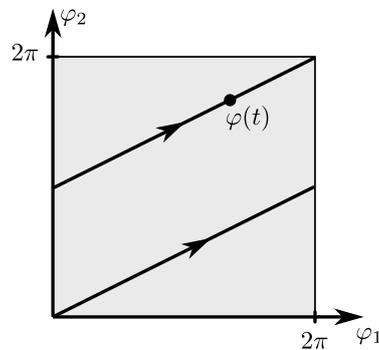


Es ist also $|J(t) - I(t)| = \varepsilon t - \varepsilon \cos t + \varepsilon$, die Differenz wächst mit t und für jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |J(t) - I(t)| = \infty.$$

Da die Bewegung $(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \in \mathbb{T}^2$ periodisch ist, gibt es in diesem Fall auch keinen Grund zu erwarten, dass Raum- und Zeitmittel von f identisch sind.

Ein hinreichendes Kriterium für die Gleichheit von Raum- und Zeitmittel auf dem Torus ist sicherlich, dass $\varphi(t)$ den Torus dicht ausfüllt. Das wiederum ist genau dann gegeben, wenn die Frequenzen ω_j rational unabhängig sind.



Die Gültigkeit dieser intuitiv klaren Aussagen wollen wir nun zeigen.

2.64 Definition. Rational unabhängige Frequenzen

Es seien $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ Winkelkoordinaten auf dem Torus \mathbb{T}^n . Dann heißt für $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathbb{R}^n$ der Fluss

$$\Phi_t^\omega : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n, \quad \varphi_0 \mapsto \varphi_0 + \omega t \text{ mod } 2\pi\mathbb{Z}^n$$

bedingt periodische Bewegung. Die Frequenzen $\omega_\ell \in \mathbb{R}$ heißen **rational unabhängig**, falls gilt:

$$\langle k, \omega \rangle_{\mathbb{R}^n} \neq 0 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}.$$

2.65 Bemerkung. Für $n = 1$ ist ω rational unabhängig falls $\omega \neq 0$. Für $n = 2$ sind ω_1, ω_2 rational unabhängig falls $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{Q}$.

2.66 Definition. Raum- und Zeitmittel

Sei $f : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

(a) Das **Raummittel** von f ist

$$\langle f \rangle := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} f(\varphi) d^n \varphi.$$

(b) Das **Zeitmittel** von f unter dem Fluss Φ_t^ω mit Startwert φ_0 ist

$$\langle f \rangle_{\omega, \varphi_0} := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\varphi_0 + \omega t) dt.$$

2.67 Satz. Gleichheit von Raum- und Zeitmittel für rational unabhängige Frequenzen

Ist $f : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so existieren Raum- und Zeitmittel. Sind zusätzlich die Frequenzen ω_ℓ rational unabhängig, so stimmen Raum- und Zeitmittel überein:

$$\langle f \rangle = \langle f \rangle_{\omega, \varphi_0} \quad \text{für alle } \varphi_0 \in \mathbb{T}^n .$$

2.68 Korollar. Rational unabhängige Orbits liegen dicht

Sind die Frequenzen rational unabhängig, so liegt jeder Orbit von Φ_t^ω dicht in \mathbb{T}^n .

Beweis. Übungsaufgabe. □

2.69 Bemerkung. Die rationale Unabhängigkeit ist auch ein notwendiges Kriterium dafür, dass Raum- und Zeitmittel für alle $f \in C^1(\mathbb{T}^n)$ übereinstimmen. Dazu zeigt man: gibt es ein $k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ mit $k \cdot \omega = 0$, so existiert ein glattes $f : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dessen Zeitmittel $\langle f \rangle_{\omega, \varphi_0}$ von φ_0 abhängt (Übungsaufgabe).

Wir zeigen nun Satz 2.67. Die Aussage des Satzes gilt für $f(\varphi) := e^{ik \cdot \varphi}$ mit $k \in \mathbb{Z}^n$. Für $k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ ($k = 0$ ist sowieso klar) gilt nämlich einerseits $\langle f \rangle = 0$, aber auch

$$\langle f \rangle_{\omega, \varphi_0} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{ik \cdot (\varphi_0 + \omega t)} dt = \begin{cases} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{e^{ik \cdot \varphi_0}}{T} \frac{e^{ik \cdot \omega T} - 1}{ik \cdot \omega} = 0 & \text{falls } k \cdot \omega \neq 0 \\ e^{ik \cdot \varphi_0} & \text{falls } k \cdot \omega = 0. \end{cases}$$

Wegen der Linearität der Abbildungen $f \mapsto \langle f \rangle_{\omega, \varphi_0}$ und $f \mapsto \langle f \rangle$ gilt die Aussage des Satzes auch für trigonometrische Polynome $f \in P(\mathbb{T}^n)$, also

$$f(\varphi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n, |k| < N} f_k e^{ik \cdot \varphi} .$$

Nun können wir mit Dichtheit argumentieren: Die Abbildungen $f \mapsto \langle f \rangle_{\omega, \varphi_0}$ und $f \mapsto \langle f \rangle$ sind stetige lineare Abbildungen von $(P(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_\infty)$ nach \mathbb{R} , denn

$$|\langle f \rangle - \langle g \rangle| \leq \|f - g\|_\infty \quad \text{und} \quad |\langle f \rangle_{\omega, \varphi_0} - \langle g \rangle_{\omega, \varphi_0}| \leq \|f - g\|_\infty .$$

Damit lassen sie sich eindeutig auf den Abschluss $\overline{P(\mathbb{T}^n)}^{\|\cdot\|_\infty} = C(\mathbb{T}^n)$ fortsetzen. Da sie für rational unabhängige Frequenzen auf der dichten Teilmenge $P(\mathbb{T}^n)$ übereinstimmen, stimmen sie dann auch auf dem Abschluss $C(\mathbb{T}^n)$ überein. (Dass die trigonometrischen Polynome dicht in $C(\mathbb{T}^n)$ liegen, sieht man z.B. so: sie liegen dicht in $(C^1(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_\infty)$, da die Fourierreihe einer stetig differenzierbaren Funktion gleichmäßig gegen die Funktion konvergiert. Die stetig differenzierbaren Funktionen liegen wiederum dicht in den stetigen Funktionen.)

2.70 Bemerkung. Virialsatz

Sei (M, ω) symplektisch und $H \in C^\infty(M)$ eine Hamiltonfunktion. Auf jeder kompakten Energieschale $M_E = \{x \in M \mid H(x) = E\}$ gilt, dass das Zeitmittel von $\{f, H\}$ für beliebige Funktionen $f \in C^\infty(M)$ verschwindet:

$$\langle \{f, H\} \rangle_* := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \{f, H\} \circ \Phi_t^{X_H} dt = 0 .$$

Der Beweis ist eine Übungsaufgabe. Wir untersuchen die Bedeutung dieser Aussage nun an Beispielen für den Fall $M = \mathbb{R}^{2n}$ und

$$H(q, p) = \frac{1}{2} p^2 + V(q) ,$$

wobei wir die Kompaktheit der jeweiligen Energieschale voraussetzen.

- (a) Für $f(q, p) = p_i$ folgt, dass das Zeitmittel der auf den Massenpunkt wirkenden Kraft $\{p_i, H\} = -\frac{\partial V}{\partial q_i}$ verschwindet. Wegen der Kompaktheit von M_E war das zu erwarten.
- (b) Für $f(q, p) = q_i$ folgt, dass das Zeitmittel des Impulses (also hier der Geschwindigkeit) $\{q_i, H\} = p_i$ verschwindet. Wegen der Kompaktheit von M_E war auch das zu erwarten.
- (c) Für $f(q, p) = \langle q, p \rangle_{\mathbb{R}^n} = \sum_{i=1}^n q_i p_i$ ist

$$\{f, H\}(q, p) = \langle p, p \rangle_{\mathbb{R}^n} - \langle q, \nabla V(q) \rangle_{\mathbb{R}^n} =: 2T(p) - \langle q, \nabla V(q) \rangle_{\mathbb{R}^n}.$$

Für das Coulombpotential $V(q) = -\frac{1}{|q|}$ ergibt sich $\langle q, \nabla V(q) \rangle_{\mathbb{R}^n} = -V(q)$ also

$$\langle \{f, H\} \rangle_* = \langle 2T(p) + V(q) \rangle_* = \langle H + T \rangle_* = E + \langle T \rangle_* = 0.$$

Die kinetische Energie ist also im Mittel $\langle T \rangle_* = -E$ (wobei hier $E < 0$ ist, sonst wäre M_E nicht kompakt), und die potentielle Energie ist im Mittel $\langle V \rangle_* = 2E$.

2.5 Störungstheorie integrierbarer Systeme und das KAM-Theorem

Wir kommen nun zur Störungstheorie integrierbarer Hamiltonscher Systeme. Dazu sei

$$H^\varepsilon(\varphi, I) := H_0(I) + \varepsilon H_1(\varphi, I)$$

eine Hamiltonfunktion auf dem Phasenraum $\mathbb{T}^n \times G$ mit $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Für den Störparameter $\varepsilon \in \mathbb{R}$ nimmt man implizit immer an, dass $|\varepsilon|$ klein genug ist. Die zugehörigen Hamiltonschen Gleichungen sind

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \omega(I) + \varepsilon \nabla_I H_1(\varphi, I) \\ \dot{I} &= -\varepsilon \nabla_\varphi H_1(\varphi, I) \end{aligned}$$

mit Frequenzvektor $\omega(I) := \nabla H_0(I)$. Das gemittelte System ist trivial, also $\langle \nabla_\varphi H_1(\cdot, I) \rangle = 0$, da

$$\int_{S^1} \partial_{\varphi_j} H_1(\varphi, I) d\varphi_j = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Wir erwarten nach dem bisher gesagten, dass zumindest für die Liouville-Tori M_I des integrierbaren Systems H_0 mit rational unabhängigen Frequenzen $\omega(I)$ das Mittelungsprinzip anwendbar ist, also, dass auch die Lösung $I(t)$ des gestörten Systems H^ε mit $I(0) = I$ für lange Zeiten nahe an $I(0)$ bleibt. Um dies zu zeigen, suchen wir eine kanonische Transformation

$$T_\varepsilon : (\varphi, I) \mapsto (\tilde{\varphi}, \tilde{I})$$

nahe der Identität so, dass die Hamiltonfunktion in den neuen Variablen keine Winkelabhängigkeit mehr im Term der Ordnung ε hat:

$$K^\varepsilon(\tilde{\varphi}, \tilde{I}) = H^\varepsilon \circ T_\varepsilon^{-1}(\tilde{\varphi}, \tilde{I}) \stackrel{!}{=} H_0(\tilde{I}) + \varepsilon K_1(\tilde{I}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Denn dann wäre $|\frac{d}{dt} \tilde{I}| = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ und somit

$$|I(t) - I(0)| \leq \underbrace{|I(t) - \tilde{I}(t)|}_{=\mathcal{O}(\varepsilon)} + \underbrace{|\tilde{I}(t) - \tilde{I}(0)|}_{=\mathcal{O}(\varepsilon^2 t)} + \underbrace{|\tilde{I}(0) - I(0)|}_{=\mathcal{O}(\varepsilon)} \leq C(\varepsilon + \varepsilon^2 t).$$

Wir hätten also zumindest gezeigt, dass $|I(t) - I(0)|$ auch für Zeiten der Ordnung ε^{-1} noch von der Ordnung ε ist.

2 Hamiltonsche Mechanik und symplektische Geometrie

Um eine solche kanonische Transformation zu konstruieren verwenden wir wieder die Methode der erzeugenden Funktion. Da wir ja nahe an der Identität liegen wollen, wählen wir Variante (3) und setzen

$$S(\tilde{\varphi}, I) = \tilde{\varphi} \cdot I + \varepsilon S_1(\tilde{\varphi}, I)$$

an, also

$$\begin{aligned}\tilde{I} &= I + \varepsilon D_1 S_1(\tilde{\varphi}, I) \\ \varphi &= \tilde{\varphi} + \varepsilon D_2 S_1(\tilde{\varphi}, I).\end{aligned}$$

Hier und im folgenden verwenden wir die Notation D_1 bzw. D_2 für den Gradienten bezüglich der ersten bzw. zweiten n Variablen. Einsetzen in die Hamiltonfunktion liefert

$$\begin{aligned}K^\varepsilon(\tilde{\varphi}, \tilde{I}) &= H^\varepsilon(\varphi(\tilde{\varphi}, \tilde{I}), I(\tilde{\varphi}, \tilde{I})) \\ &= H^\varepsilon\left(\tilde{\varphi} + \varepsilon D_2 S_1(\tilde{\varphi}, I), \tilde{I} - \varepsilon D_1 S_1(\tilde{\varphi}, I)\right) \\ &= H_0\left(\tilde{I} - \varepsilon D_1 S_1(\tilde{\varphi}, I)\right) + \varepsilon H_1(\tilde{\varphi}, I) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= H_0(\tilde{I}) - \varepsilon DH_0(\tilde{I}) \cdot D_1 S_1(\tilde{\varphi}, I) + \varepsilon H_1(\tilde{\varphi}, I) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= H_0(\tilde{I}) + \varepsilon\left(H_1(\tilde{\varphi}, I) - DH_0(I) \cdot D_1 S_1(\tilde{\varphi}, I)\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).\end{aligned}$$

Wir müssen also S so wählen, dass

$$H_1(\tilde{\varphi}, I) - \omega(I) \cdot D_1 S_1(\tilde{\varphi}, I) \quad (*)$$

unabhängig von $\tilde{\varphi}$ ist. (Es hängt zwar $I = I(\tilde{\varphi}, \tilde{I})$ von $\tilde{\varphi}$ ab, das ist aber wieder von höherer Ordnung.) Da H_1 und S_1 für festes I jeweils Funktionen auf dem Torus \mathbb{T}^n sind, liegt es nahe, die Fourierreihen

$$\begin{aligned}H_1(\tilde{\varphi}, I) &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^n} h_\ell(I) e^{i\ell \cdot \tilde{\varphi}} \\ S_1(\tilde{\varphi}, I) &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^n} s_\ell(I) e^{i\ell \cdot \tilde{\varphi}}\end{aligned}$$

zu betrachten. Mit

$$\omega(I) \cdot D_1 S_1(\tilde{\varphi}, I) = i \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^n} s_\ell(I) \omega(I) \cdot \ell e^{i\ell \cdot \tilde{\varphi}}$$

ergibt sich aus (*) die Bedingung

$$h_\ell(I) - i s_\ell(I) \omega(I) \cdot \ell = 0 \quad \text{für alle } \ell \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}.$$

Wir können diese Gleichungen genau dann für alle ℓ nach s_ℓ auflösen, wenn

$$\omega(I) \cdot \ell \neq 0 \quad \text{für alle } \ell \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\},$$

also wenn $\omega(I)$ rational unabhängig ist. Allerdings kann man diese Bedingung durch eine beliebig kleine Änderung von ω verletzen. Falls $D\omega$ vollen Rang hat, können wir dies auch durch eine beliebig kleine Änderung von I bewerkstelligen. In diesem Fall hat man also das Phänomen, dass resonante (d.h. rational abhängige) und nicht-resonante (d.h. rational unabhängige) Tori jeweils dicht liegen.

Wir setzen also voraus, dass für ein festes $I_0 \in G$ die Komponenten von $\omega(I_0) \in \mathbb{R}^n$ rational unabhängig sind und definieren $S_1(\tilde{\varphi}, I)$ durch die Fourierkoeffizienten

$$s_\ell := -i \frac{h_\ell(I)}{\omega(I_0) \cdot \ell}, \quad s_0 = 0.$$

Nun stellt sich die Frage, ob die entsprechende Fourierreihe für S konvergiert, und wenn ja, ob die dadurch definierte Funktion hinreichend glatt ist. Dazu erinnern wir uns an die folgenden Resultate aus der Fourieranalysis.

2.71 Lemma. Falls $c : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{C}$ für $d > r + n$, $r \in \mathbb{N}_0$, von der Ordnung

$$c(\ell) = \mathcal{O}(|\ell|^{-d})$$

ist, dann ist die durch

$$f(\varphi) := \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^n} c(\ell) e^{i\ell \cdot \varphi}$$

definierte Funktion $f \in C^r(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})$.

2.72 Lemma. Für $g \in C^k(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})$ mit Fourierdarstellung

$$g(\varphi) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^n} g_\ell e^{i\ell \cdot \varphi}$$

sind die Fourierkoeffizienten von der Ordnung

$$|g_\ell| = \mathcal{O}(|\ell|^{-k}).$$

Um nun hinreichend schnellen Abfall der Fourierkoeffizienten

$$s_\ell = i \frac{h_\ell(I)}{\omega(I_0) \cdot \ell}$$

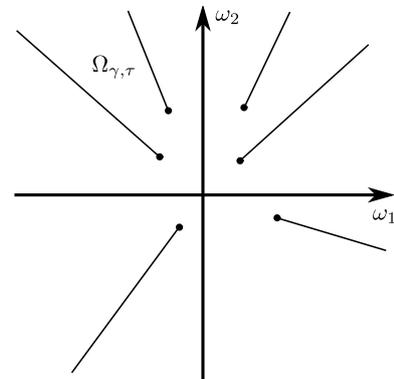
zu erhalten, müssen wir sowohl schnellen Abfall der h_ℓ , also Glattheit von H_1 fordern, aber auch zu schnellem Anstieg von $\ell \mapsto \frac{1}{\omega(I_0) \cdot \ell}$ ausschließen. Das führt zu der folgenden Definition.

2.73 Definition. Diophantische Frequenzen

Seien $\tau > 0$ und $\gamma > 0$. Die Menge der (γ, τ) -**diophantischen** Frequenzvektoren ist

$$\Omega_{\gamma, \tau} := \{\omega \in \mathbb{R}^n \mid |\langle \omega, \ell \rangle| \geq \gamma |\ell|^{-\tau} \text{ für alle } \ell \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}\}.$$

Es gilt offenbar, dass mit $\omega \in \Omega_{\gamma, \tau}$ auch $\alpha \omega \in \Omega_{\gamma, \tau}$ für alle $\alpha \geq 1$.



Bevor wir untersuchen, wie groß die Menge der diophantischen Frequenzen ist, überlegen wir uns zunächst, wie sich diese Bedingung auf die Regularität von S auswirkt.

2.74 Korollar. Regularität der erzeugenden Funktion

Sei $H_1 \in C_b^k(\mathbb{T}^n \times G, \mathbb{R})$ und $I_0 \in G$ so, dass $\omega(I_0) \in \Omega_{\gamma, \tau}$ für ein $\gamma > 0$ und $\tau \in \mathbb{N}$ mit $\tau < k - n - 1$. Dann ist die erzeugende Funktion $S(\tilde{\varphi}, I) = \tilde{\varphi} \cdot I + \varepsilon S_1(\tilde{\varphi}, I)$ mit

$$S_1(\tilde{\varphi}, I) = -i \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^n} \frac{h_\ell(I)}{\omega(I_0) \cdot \ell} e^{i\ell \cdot \tilde{\varphi}}$$

in $C_b^{k-\tau-n}(\mathbb{T}^n \times G, \mathbb{R})$. Weiterhin existiert eine Konstante C die nur von H_1 abhängt aber nicht von I_0 so, dass für jede partielle Ableitung $\partial^\alpha S_1$ von S_1 der Ordnung $|\alpha| \leq k - \tau - n$ gilt

$$\sup_{(\tilde{\varphi}, I) \in \mathbb{T}^n \times G} |\partial^\alpha S_1(\tilde{\varphi}, I)| < \frac{C}{\gamma}.$$

Beweis. Mit Lemma 2.72 ist

$$|s_\ell| = \left| i \frac{h_\ell(I)}{\omega(I_0) \cdot \ell} \right| \leq C |\ell|^{-k} \frac{|\ell|^\tau}{\gamma} = \frac{C}{\gamma} |\ell|^{-(k-\tau)}.$$

Mit Lemma 2.71 ist dann $S \in C_b^r$ für jedes $r \in \mathbb{N}$ mit $k - \tau > r + n$. Die Schranke an die Ableitungen $\partial^\alpha S_1$ folgt sofort aus obiger Abschätzung für die jeweils gliedweise differenzierten Reihen, welche dann immer noch absolut konvergieren. \square

Wir zeigen nun, dass für $\tau > n - 1$ Lebesgue fast alle $\omega \in \mathbb{R}^n$ eine diophantische Bedingung erfüllen, wobei γ aber beliebig klein sein kann.

2.75 Lemma. Maß der diophantischen Menge

Für $\tau > n - 1$ ist das Lebesguemaß der diophantischen Menge

$$B_{\gamma,\tau} = \Omega_{\gamma,\tau} \cap B$$

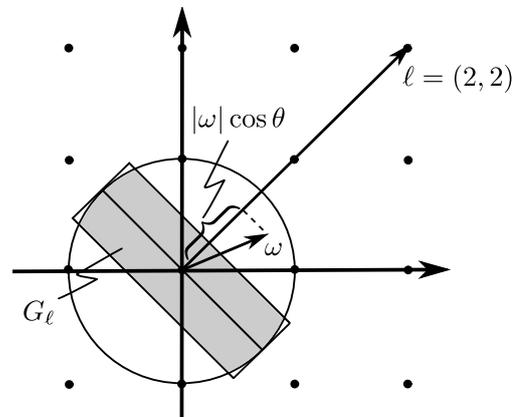
in der Vollkugel $B := \{\omega \in \mathbb{R}^n \mid |\omega| \leq 1\}$ für kleine Werte von γ groß: Es gibt ein $\alpha(\tau) < \infty$ mit

$$\lambda(B_{\gamma,\tau}) \geq \lambda(B) (1 - \gamma \alpha(\tau)).$$

Beweis. Sei $G_\ell := \{\omega \in B \mid |\langle \omega, \ell \rangle| < \gamma |\ell|^{-\tau}\}$, dann ist

$$\lambda(B_{\gamma,\tau}) \geq \lambda(B) - \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} \lambda(G_\ell).$$

Um das Volumen von G_ℓ abzuschätzen, stellen wir fest, dass $\langle \omega, \ell \rangle = |\omega| |\ell| \cos \theta$, wobei θ der Zwischenwinkel von ω und ℓ ist. Also ist $\omega \in G_\ell$ genau dann wenn $|\omega| |\cos \theta| < \gamma |\ell|^{-\tau-1}$. Damit gilt gemäß der Zeichnung, dass $\lambda(G_\ell) < 2c_{n-1} \gamma |\ell|^{-\tau-1}$, wobei c_k das Volumen der k -dimensionalen Vollkugel vom Radius eins bezeichnet.



Damit ergibt sich

$$\sum_{\ell \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} \lambda(G_\ell) \leq c_n \gamma \alpha(\tau) = \lambda(B) \gamma \alpha(\tau)$$

mit

$$\alpha(\tau) := 2 \frac{c_{n-1}}{c_n} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} |\ell|^{-\tau-1} < \infty.$$

\square

Wir zeigen nun, dass für die Tori M_I eines integrablen Systems mit rational unabhängigen Frequenzen $\omega(I)$ das Mittelungsprinzip bis zu Zeiten der Ordnung $\frac{1}{\varepsilon}$ anwendbar ist. Dies ist allerdings nur der erste Schritt hin zu viel stärkeren Aussagen.

2.76 Satz. Störungstheorie: erster Schritt

Seien $H_0, H_1 \in C_b^{2n+3}(\mathbb{T}^n \times G, \mathbb{R})$. Dann gibt es eine Konstante $C < \infty$ und zu jedem $I_0 \in G$ mit $\omega(I_0) = DH_0(I_0) \in \Omega_{\gamma, \tau=n}$ und $T > 0$ ein $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\varphi_0, I_0, T) > 0$ so, dass die Lösung $(\varphi(t), I(t))$ mit Anfangsdaten (φ_0, I_0) die Abschätzung

$$\sup_{0 \leq t \leq \frac{T}{\varepsilon}} |I(t) - I_0| \leq \varepsilon C T \frac{1 + \gamma}{\gamma^2} e^{CT \frac{1 + \gamma}{\gamma}} \quad \text{für alle } 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$$

erfüllt.

2.77 Bemerkungen. zum Satz

- (a) Wie erwartet wächst der Fehler mit schrumpfendem γ und schrumpft mit wachsendem γ .
- (b) Falls die Frequenzen $\omega = DH_0$ unabhängig variieren, d.h.

$$\det(D\omega)(I) \neq 0 \quad \text{für } I \in G,$$

so ist die Abbildung $I \mapsto \omega(I)$ zumindest lokal ein Diffeomorphismus. Mit Lemma 2.75 folgt dann, dass die zulässigen I_0 zumindest lokal volles Maß haben.

- (c) Tatsächlich folgt aus unserem Beweis sogar, dass auch für Startwerte in einer geeigneten ε -Umgebung eines nichtresonanten M_{I_0} das Mittelungsprinzip noch anwendbar ist. Allerdings hängt diese Umgebung eben auch von γ ab und wir wissen nicht, ob diese Umgebungen ganz G überdecken.

Beweis. Sei $I_0 \in G$ so dass $\omega(I_0) \in \Omega_{\gamma, \tau=n}$ und sei $S(\tilde{\varphi}, I) = \tilde{\varphi} \cdot I + \varepsilon S_1(\tilde{\varphi}, I_0)$, wie zuvor konstruiert. Beachte aber, dass wir in S_1 jetzt $I \equiv I_0$ gesetzt haben. Unter den genannten Voraussetzungen ist $S \in C_b^3(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n)$ und es existiert nach Korollar 2.74 ein $C < \infty$ unabhängig von I_0 so, dass

$$\|\partial^\alpha S_1\|_\infty := \sup_{\varphi \in \mathbb{T}^n} |\partial_\varphi^\alpha S_1(\varphi, I_0)| \leq \frac{C}{\gamma} \quad \text{und} \quad \|\partial^\alpha H_0\|_\infty \leq C$$

für alle Multiindizes $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq 3$. Im folgenden werden bei Bedarf C um einen festen Faktor unabhängig von ε, γ etc. vergrößern und diese neue Konstante wieder mit C bezeichnen.

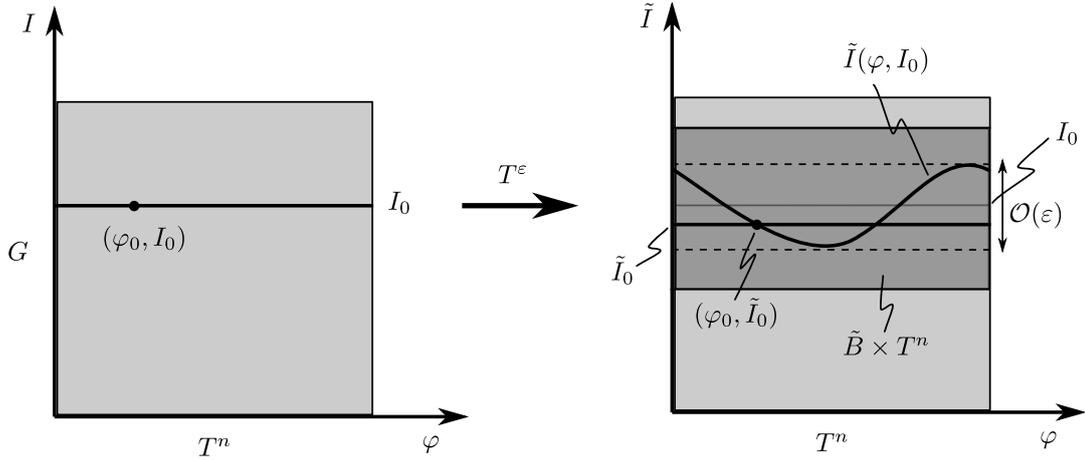
Sei nun $\varepsilon_0 > 0$ (abhängig von γ) so klein, dass für $\varepsilon \leq \varepsilon_0$

$$\begin{aligned} T_\varepsilon : \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \\ (\varphi, I) &\mapsto (\tilde{\varphi}, \tilde{I}^\varepsilon) = (\varphi, I + \varepsilon DS_1(\varphi, I_0)) \end{aligned}$$

ein Diffeomorphismus und somit eine kanonische Transformation ist. So ein $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\gamma)$ gibt es, da die Jacobimatrix von T_ε die Form $DT_\varepsilon = \text{Id} + \varepsilon J$ mit $\|J\| \leq \|D^2 S_1\|_\infty \leq C/\gamma$ hat. Wähle $\varphi_0 \in \mathbb{T}^n$ und setze $\tilde{I}_0^\varepsilon = \tilde{I}^\varepsilon(\varphi_0, I_0)$. Nun verkleinern wir $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\gamma, I_0, \varphi_0)$ soweit, dass $\tilde{I}_0^\varepsilon \in G$ für alle $\varepsilon < \varepsilon_0$, und weiter so, dass es ein $r_0 > 0$ gibt so, dass

$$\tilde{B} := \bigcup_{\varepsilon < \varepsilon_0} B_{r_0}(\tilde{I}_0^\varepsilon) \subset G.$$

2 Hamiltonsche Mechanik und symplektische Geometrie



Dann ist für $\varepsilon < \varepsilon_0$ und $(\tilde{\varphi}, \tilde{I}) \in \mathbb{T}^n \times \tilde{B}$

$$\begin{aligned} K^\varepsilon(\tilde{\varphi}, \tilde{I}) &:= H^\varepsilon(\varphi(\tilde{\varphi}, \tilde{I}), I(\tilde{\varphi}, \tilde{I})) = H_0(\tilde{I}) + \varepsilon \left(H_1(\tilde{\varphi}, I) - DH_0(\tilde{I}) \cdot DS_1(\tilde{\varphi}) \right) + R_1(\tilde{\varphi}, \tilde{I}) \\ &= H_0(\tilde{I}) + \varepsilon h_{\ell=0}(I_0) + R_1(\tilde{\varphi}, \tilde{I}) + R_2(\tilde{\varphi}, \tilde{I}) \end{aligned}$$

mit

$$R_1(\tilde{\varphi}, \tilde{I}) = H_0(\tilde{I} - \varepsilon DS_1(\tilde{\varphi})) - H_0(\tilde{I}) + \varepsilon DH_0(\tilde{I}) \cdot DS_1(\tilde{\varphi}) = \mathcal{O}(\varepsilon^2 \|DS_1\|_\infty^2 \|D^2H_0\|_\infty) = \mathcal{O}\left(\frac{\varepsilon^2}{\gamma^2}\right)$$

und

$$\begin{aligned} R_2(\tilde{\varphi}, \tilde{I}) &= \varepsilon \left(H_1(\tilde{\varphi}, I) - \omega(\tilde{I}) \cdot DS_1(\tilde{\varphi}) - h_{\ell=0}(I_0) \right) \\ &= \varepsilon \underbrace{\left(H_1(\tilde{\varphi}, I_0) - \omega(I_0) \cdot DS_1(\tilde{\varphi}) - h_{\ell=0}(I_0) \right)}_{=0} + \mathcal{O}\left(\frac{\varepsilon |I_0 - \tilde{I}|}{\gamma} + \varepsilon |I - I_0|\right) \\ &= \mathcal{O}\left(\frac{\varepsilon |I_0 - \tilde{I}_0^\varepsilon| + \varepsilon |\tilde{I}_0^\varepsilon - \tilde{I}|}{\gamma} + \varepsilon (|I - \tilde{I}| + |\tilde{I} - \tilde{I}_0^\varepsilon| + |\tilde{I}_0^\varepsilon - I_0|)\right) \\ &= \mathcal{O}\left(\frac{\varepsilon^2}{\gamma^2} + \frac{\varepsilon \delta}{\gamma} + \frac{\varepsilon^2}{\gamma} + \varepsilon \delta\right) =: \mathcal{O}(\varepsilon^2 g_1(\gamma) + \varepsilon \delta g_2(\gamma)) \end{aligned}$$

wobei wir $\delta := |\tilde{I} - \tilde{I}_0^\varepsilon|$ gesetzt haben. Hier schreiben wir $f = \mathcal{O}(g(\varepsilon, \gamma, \delta))$ wenn $\|f\|_\infty \leq Cg(\varepsilon, \gamma, \delta)$, wobei wir wie oben gesagt C bei Bedarf um einen konstanten Faktor vergrößern.

Für die Bewegungsgleichungen in den neuen kanonischen Koordinaten ergibt sich auf $\mathbb{T}^n \times \tilde{B}$

$$\frac{d}{dt} \tilde{I} = -\frac{\partial R_1(\tilde{\varphi}, \tilde{I})}{\partial \tilde{\varphi}} - \frac{\partial R_2(\tilde{\varphi}, \tilde{I})}{\partial \tilde{\varphi}} =: f(\tilde{\varphi}, \tilde{I})$$

mit

$$|f(\varphi, \tilde{I})| \leq C(\varepsilon^2 g_1(\gamma) + \varepsilon \delta g_2(\gamma)).$$

Sei nun $(\tilde{\varphi}(t), \tilde{I}(t))$ die Lösung mit Anfangsdaten $(\varphi_0, \tilde{I}_0^\varepsilon)$. Dann ist für $t \leq \frac{T}{\varepsilon}$

$$\begin{aligned} |\tilde{I}(t) - \tilde{I}_0^\varepsilon| &\leq \int_0^t |f(\tilde{\varphi}(s), \tilde{I}(s))| ds = C \int_0^t (\varepsilon^2 g_1(\gamma) + \varepsilon g_2(\gamma)) |\tilde{I}(s) - \tilde{I}_0^\varepsilon| ds \\ &\leq \varepsilon C T g_1(\gamma) + C \varepsilon g_2(\gamma) \int_0^t |\tilde{I}(s) - \tilde{I}_0^\varepsilon| ds. \end{aligned}$$

2.78 Lemma. Gronwall

Für $f, B \in C([0, T], [0, \infty))$ gelte für ein $A \geq 0$

$$f(t) \leq A + \int_0^t f(s)B(s)ds \quad \text{für } 0 \leq t \leq T.$$

Dann ist

$$f(t) \leq A \exp\left(\int_0^t B(s)ds\right) \quad \text{für } 0 \leq t \leq T.$$

Beweis. Es ist $f(t) \leq h(t) := A + \int_0^t f(s)B(s)ds$ und, falls $A > 0$,

$$\frac{h'(t)}{h(t)} = \frac{f(t)B(t)}{h(t)} \leq B(t).$$

Integration liefert

$$\int_0^t \frac{h'(s)}{h(s)} ds = \ln h(t) - \ln h(0) \leq \int_0^t B(s)ds$$

und Exponentieren

$$h(t) \leq \underbrace{h(0)}_{=A} \exp\left(\int_0^t B(s)ds\right).$$

Die Aussage für $A = 0$ folgt durch Limesbildung. □

Das Lemma liefert also

$$|\tilde{I}(t) - \tilde{I}_0| \leq \varepsilon CT g_1(\gamma) e^{CT g_2(\gamma)} \quad \text{für alle } 0 \leq t \leq \frac{T}{\varepsilon}.$$

Nun ist das Argument aber nur gültig, wenn $\tilde{I}(t)$ in \tilde{B} bleibt, was durch

$$\varepsilon CT g_1(\gamma) e^{CT g_2(\gamma)} < r_0 \quad \text{also} \quad \varepsilon < \frac{r_0 e^{-CT g_2(\gamma)}}{CT g_1(\gamma)}$$

sichergestellt wird. Entsprechend verkleinern wir $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\gamma, I_0, T)$ abermals. Nun gilt für die Lösung in den ursprünglichen Koordinaten

$$(I(t), \varphi(t)) = T_\varepsilon^{-1}(\tilde{\varphi}(t), \tilde{I}(t))$$

zum Anfangswert (φ_0, I_0) , dass

$$\begin{aligned} |I(t) - I_0| &\leq |I(t) - \tilde{I}(t)| + |\tilde{I}(t) - \tilde{I}_0| + |\tilde{I}_0 - I_0| \\ &\leq \frac{\varepsilon C}{\gamma} + \varepsilon CT g_1(\gamma) e^{CT g_2(\gamma)} \leq \varepsilon CT g_1(\gamma) e^{CT g_2(\gamma)} = \varepsilon CT \frac{1 + \gamma}{\gamma^2} e^{CT \frac{1 + \gamma}{\gamma}} \end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt C wieder vergrößert haben. □

Die physikalische Bedeutung von Sätzen dieser Art wollen wir uns am Beispiel des Sonnensystems überlegen: Da die Gesamtmasse der Planeten etwa $\varepsilon := 1/1000$ der Sonnenmasse beträgt, könnte durch diese Störung nach etwa $\frac{1}{\varepsilon} = 1000$ Jahren nur eine unbedeutende Änderung $\mathcal{O}(\varepsilon)$ der Erdbahn eintreten. Nach $\frac{1}{\varepsilon^2} = 10^6$ Jahren könnte sich die Bahn aber drastisch ändern. Deshalb iteriert man das Verfahren, um zu Aussagen für größere Zeiten zu kommen. Man kann zeigen, dass es eine kanonische Transformation analog zu der in Satz 2.76 konstruierten gibt, mit

$$K^\varepsilon(\tilde{I}, \tilde{\varphi}) = K(\tilde{I}) + \mathcal{O}(\varepsilon^n),$$

2 Hamiltonsche Mechanik und symplektische Geometrie

vorausgesetzt, H^ε ist hinreichend oft differenzierbar und I_0 gehört zu einem nicht-resonanten Torus. Ist H^ε reell analytisch, kann man sogar zu exponentiell kleinen Fehlern und exponentiell langen Zeiten kommen.

Andererseits gilt unter weiteren Voraussetzungen an H^ε (z.B. konvex), dass es Konstanten $A, B < 1$ und $C, D < \infty$ gibt so, dass

$$\|I(t) - I(0)\| \leq C\varepsilon^B \quad \text{für } T \leq D\varepsilon^{-\frac{1}{2}}e^{\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^A},$$

und zwar für **alle** $I(0) \in G$ (Nekhoroshev Theorem).

All diese Resultate zeigen, dass die Lösungen des gestörten Systems nahe an den Liouville-Tori des ungestörten integrablen Systems bleiben. Es stellt sich nun die Frage, ob die Tori durch die Störung nur deformiert werden, die gestörte Dynamik also immer noch auf Tori umläuft, die aber eben ε -Deformationen der ungestörten Tori sind. Dies wäre sicherlich dann der Fall, wenn das gestörte System selbst wieder integrabel ist. Lange Zeit erwartete man, dass kleine Störungen integrabler Systeme die Tori „zerstören“, falls das gestörte System nicht selbst integrabel ist. Dass dies nicht so ist, besagt das Theorem von Kolmogorov, Arnold und Moser (KAM). Wir werden das Resultat nur darstellen und diskutieren, aber nicht beweisen.

Es sei wieder

$$H^\varepsilon(\varphi, I) = H_0(I) + \varepsilon H_1(\varphi, I)$$

auf $\mathbb{T}^n \times G$, $G \subset \mathbb{R}^n$, H_0 sei analytisch und die Störung H_1 sei glatt. Ferner sei $I \mapsto \omega(I) = DH_0(I)$ nichtentartet, also $D\omega(I)$ invertierbar.

2.79 Satz. KAM-Theorem

Unter den obigen Bedingungen existiert ein $\varepsilon_0(\gamma) > 0$, so dass für $\varepsilon < \varepsilon_0$ alle Tori mit $\omega(I_0) \in \Omega_{\gamma,n}$ überleben. Das bedeutet, dass es eine kanonische Transformation T^ε auf einer Umgebung von M_{I_0} gibt mit

$$H^\varepsilon \circ (T^\varepsilon)^{-1}(\tilde{I}, \tilde{\varphi}) = K^\varepsilon(I_0) + f(\tilde{\varphi}, \tilde{I})$$

und

$$f(\cdot, I_0) = 0 \quad \text{und} \quad D_1 f(\cdot, I_0) = 0.$$

Insbesondere gilt also für jede Lösung $(\tilde{\varphi}(t), \tilde{I}(t))$ mit $\tilde{I}(0) = I_0$, dass $\tilde{I}(t) = I_0$.

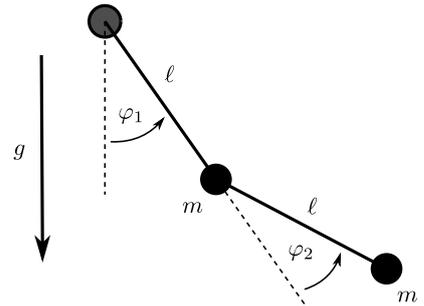
2.80 Bemerkung. Über die resonanten Tori, d.h. über M_I mit $\Omega(I) \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega_{\gamma,n}$ wird im Satz nichts ausgesagt. Dort können Tori überleben, falls H^ε integrabel ist oder sich durch die Störung auflösen.

Den Übergang von Integrabilität zu Chaos und zurück wollen wir nun am Beispiel des Doppelpendels bei verschiedenen Gesamtenergien nachvollziehen. Einen schönen Film zum Doppelpendel mit vielen weiteren Details gabs früher mal unter

<http://www.iwf.de/iwf/do/mkat/details.aspx?Signatur=C+1574>.

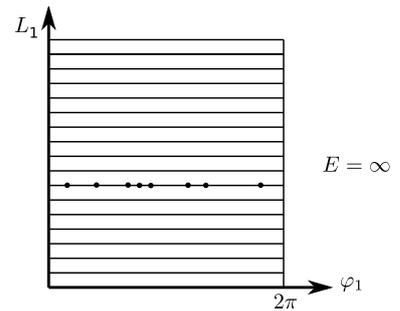
2.81 Beispiel. Das ebene Doppelpendel

Der Konfigurationsraum des Doppelpendels ist $(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{T}^2$, der Phasenraum also $P = T^*\mathbb{T}^2$. Schaltet man die Schwerkraft aus, oder macht die Energie $E \rightarrow \infty$ sehr groß, so ist das System integrabel, denn dann ist der Gesamt-Drehimpuls erhalten. Für endliche E ist aber H die einzige Erhaltungsgröße und die Dynamik lebt auf der ganzen Energieschale und man beobachtet chaotisches Verhalten.

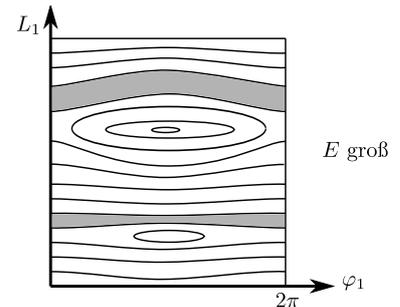


Um den Übergang von Integrabilität zum Chaos zu visualisieren, verwendet man sogenannte Poincaréschnitte. Zunächst führen wir die kanonischen Koordinaten $(\varphi_1, \varphi_2, L_1, L_2)$ auf dem Kotangentialbündel $P = T^*\mathbb{T}^2$ ein. Nun betrachten wir den Schnitt der Koordinatenebene $\varphi_2 = 0$ mit einer Energieschale $\{H(\varphi_1, \varphi_2, L_1, L_2) = E\}$, also eine zweidimensionale Fläche. Diese können wir mit den Koordinaten (φ_1, L_1) versehen. Ein Punkt in diesem ‘‘Poincaréschnitt’’ durch die Energieschale bestimmt bis auf das Vorzeichen von L_2 einen eindeutigen Phasenraumpunkt. Wenn wir festlegen, dass die Punkte im Schnitt immer zu Punkten mit $L_2 > 0$ gehören, so liefert uns der Hamiltonsche Fluss eine Abbildung von dem Schnitt in sich selbst, indem wir jeweils der Bahn die an einem Punkt startet so lange folgen, bis sie zum nächsten mal (mit $L_2 > 0$) den Schnitt durchstößt. Trägt man nun die Durchstoßpunkte verschiedener Bahnen ein, so erhält man ein qualitatives Bild der Dynamik.

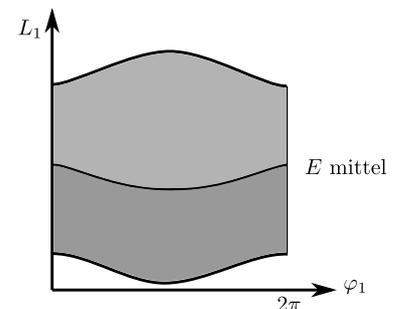
Für $g = 0$ (oder eben $E = \infty$) ist das System integrabel und die horizontalen Linien im Bild sind S^1 -Schnitte durch die \mathbb{T}^2 -Tori des integrablen Systems. Die Durchstoßpunkte einer einzelnen Trajektorie (angedeutet durch die Punkte im Bild) liegen dann alle auf einer $L_1 = \text{const.}$ Linie. Für resonante Tori liefert eine Bahn nur endlich viele Punkte, für nicht-resonante Tori liegen die Schnittpunkte jeder Bahn dicht.



Schaltet man g ein bzw. wählt man E groß aber endlich, so werden manche der Tori deformiert andere verschwinden ganz. Zwischen den Gebieten in denen die Tori überleben entstehen sogenannte Chaosbänder (grau). Diese bilden offene Teilmengen der Energieschale und Bahnen darin füllen die Gebiete flächig aus. Im Zentrum der geschlossenen Kurven im Bild liegen Resonanzen, das sind einzelne periodische Bahnen.



Senkt man die Energie weiter, so wachsen die Chaosbänder bis sie die ganze Energieschale überdecken. Der letzte überlebende KAM-Torus bei $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (goldener Schnitt) trennt die Energieschale allerdings noch in zwei Chaosgebiete, zwischen denen keine Übergänge möglich sind. Selbst wenn der letzte Torus verschwindet, sind in einem gewissen Energiebereich Übergänge zwischen den Chaosbändern selten.



Irgendwann tritt aber vollständiges Chaos ein und die Dynamik überdeckt die ganze Energieschale. Bei sehr kleinen Energien wird die Dynamik wieder fast integrabel (kleine Auslenkungen aus der Ruhelage).

3 Bemerkungen zur Lagrangeschen Mechanik

Unter bestimmten Umständen kann man die Lösungen der „klassischen Mechanik“ auch durch ein Variationsprinzip charakterisieren. Dieser Ansatz spielt in der Physik eine ebensowichtige Rolle wie die Hamiltonsche Formulierung. Wir wollen deshalb an dieser Stelle noch ein paar Hinweise zum Zusammenhang zwischen den beiden Formulierungen der klassischen Mechanik geben.

Der Konfigurationsraum eines mechanischen Systems sei zunächst $M = \mathbb{R}^n$ und $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine glatte Funktion, die sogenannte Lagrangefunktion. Für ein nichtrelativistisches Teilchen mit Masse $m > 0$ in einem Potential $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist beispielsweise

$$L(q, v) = \frac{1}{2}m|v|^2 - V(q),$$

also kinetische Energie minus potentielle Energie.

Für eine glatte Kurve $\gamma : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist die Wirkung $S(\gamma)$ definiert durch

$$S(\gamma) := \int_0^t L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds.$$

Man erhält dann die Bahnkurve $q(s)$ des Systems bei gegebener Anfangs- und Endkonfiguration q_0 und q_1 als denjenigen Weg γ , der unter den Nebenbedingungen $\gamma(0) = q_0$ und $\gamma(t) = q_1$ die Funktion $S(\gamma)$ lokal extremal macht. Um dies präzise zu formulieren, müssen wir zunächst einen Ableitungsbegriff für Funktionen auf ∞ -dimensionalen Räumen einführen.

3.1 Definition. Fréchet Ableitung

Seien X und Y Banachräume und $G \subset X$ ein Gebiet. Eine Abbildung $f : G \rightarrow Y$ heißt differenzierbar im Punkt x in G , wenn es eine stetige lineare Abbildung $A : X \rightarrow Y$ gibt so, dass

$$f(x + h) = f(x) + Ah + o(\|h\|)$$

für h in einer hinreichend kleinen Umgebung der Null.

Wie im endlichdimensionalen Fall ist A eindeutig bestimmt und heißt **Fréchet Ableitung** von f bei x bezeichnet mit $Df(x)$.

- 3.2 Bemerkung.** (a) Die Fréchet Differenzierbarkeit entspricht der totalen Differenzierbarkeit im endlich dimensional. Wie dort impliziert Fréchet Differenzierbarkeit die Stetigkeit der Abbildung.
- (b) Ein wichtiger Punkt in obiger Definition ist, dass die Stetigkeit von A gefordert wird. In unendlichdimensionalen normierten Räumen impliziert die Linearität einer Abbildung nämlich nicht die Stetigkeit.
- (c) Der Mittelwertsatz, der Satz über implizite Funktionen, der Satz über die Umkehrabbildung und die Aussagen über lokale Extrema mit und ohne Nebenbedingungen gelten analog auch für differenzierbare Funktionen auf Banachräumen.

Ohne Beweis stellen wir zunächst fest, dass der Raum der zweimal stetig differenzierbaren Pfade $X := \{\gamma : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \gamma \text{ ist zweimal stetig differenzierbar}\}$ mit der Norm

$$\|\gamma\|_X := \|\gamma\|_\infty + \|\dot{\gamma}\|_\infty + \|\ddot{\gamma}\|_\infty := \sup_{s \in [0, t]} \|\gamma(s)\|_{\mathbb{R}^n} + \sup_{s \in [0, t]} \|\dot{\gamma}(s)\|_{\mathbb{R}^n} + \sup_{s \in [0, t]} \|\ddot{\gamma}(s)\|_{\mathbb{R}^n}$$

3 Bemerkungen zur Lagrangeschen Mechanik

ein Banachraum ist, wobei die Punkte wieder die Zeitableitungen darstellen. Die oben definierte Wirkung ist damit eine Funktion auf X ,

$$S : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad \gamma \mapsto S(\gamma) := \int_0^t L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) \, ds.$$

Um die Ableitung DS von S zu bestimmen, stellen wir zunächst fest, dass für $h \in X$

$$\begin{aligned} S(\gamma + h) &= \int_0^t L(\gamma(s) + h(s), \dot{\gamma}(s) + \dot{h}(s)) \, ds \\ &= \int_0^t \left(L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) + \left\langle \left\langle \frac{\partial L}{\partial q}(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)), h(s) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)), \dot{h}(s) \right\rangle \right\rangle \right) \, ds \\ &\quad + O(\|h\|_X^2). \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} S(\gamma + h) - S(\gamma) &= \int_0^t \left(\left\langle \frac{\partial L}{\partial q}(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)), h(s) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)), \dot{h}(s) \right\rangle \right) \, ds + O(\|h\|_X^2) \\ &= \left\langle \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)), h(s) \right\rangle \Big|_0^t \\ &\quad + \int_0^t \left(\left\langle \frac{\partial L}{\partial q}(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) - \frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)), h(s) \right\rangle \right) \, ds + O(\|h\|_X^2). \end{aligned}$$

Die Ableitung $DS(\gamma) : X \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} DS(\gamma)h &= \left\langle \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)), h(t) \right\rangle - \left\langle \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(0), \dot{\gamma}(0)), h(0) \right\rangle \\ &\quad + \int_0^t \left(\left\langle \frac{\partial L}{\partial q}(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) - \frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)), h(s) \right\rangle \right) \, ds \end{aligned}$$

existiert also an jedem Punkt $\gamma \in X$ als stetige lineare Abbildung von X nach \mathbb{R} .

3.3 Definition. Kritischer Punkt

Sei $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $X_0 \subset X$ ein Unterraum. Es heißt dann γ_* kritischer Punkt von f bezüglich X_0 , falls

$$Df(\gamma_*) \Big|_{X_0} = 0, \quad \text{also} \quad Df(\gamma_*)h = 0 \quad \text{für alle } h \in X_0.$$

3.4 Proposition. Euler-Lagrange-Gleichungen der klassischen Mechanik

Sei

$$X_0 = \{h \in X \mid h(0) = h(t) = 0\}.$$

Dann ist $\gamma \in X$ kritischer Punkt für

$$S(\gamma) = \int_0^t L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) \, ds$$

bei festen Endpunkten, also bezüglich X_0 , genau dann, wenn

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) \right) - \frac{\partial L}{\partial q}(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) = 0 \quad \text{für alle } s \in [0, t].$$

Beweis. Das folgt aus obiger Rechnung, da für $h \in X_0$ die Randterme wegfallen. □

3.5 Beispiel. Für $L = \frac{1}{2}m|v|^2 - V(q)$ ergibt sich aus der Extremalität von

$$S(\gamma) = \int_0^t L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds$$

das Newtonsche Gesetz

$$0 = \frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) - \frac{\partial L}{\partial q}(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) = \frac{d}{ds}(m\dot{\gamma}(s)) + \nabla V(\gamma(s)) = m\ddot{\gamma}(s) + \nabla V(\gamma(s)).$$

Wir wollen nun das Konzept der Lagrangeschen Mechanik auf Mannigfaltigkeiten verallgemeinern. Sei also der Konfigurationsraum die Mannigfaltigkeit M und $\gamma : [0, t] \rightarrow M$ eine glatte Kurve. Dann ist $\gamma(s) \in M$ und $\dot{\gamma}(s) \in T_{\gamma(s)}M$ und L muss daher eine Funktion

$$L : TM \rightarrow \mathbb{R}$$

auf dem Tangentialbündel sein. Wie zuvor definiert man die Wirkung

$$S(\gamma) := \int_0^t L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds.$$

Nun ist das mit der Funktionalableitung etwas schwieriger, da die Menge der Kurven auf M kein Vektorraum mehr ist. Wie können wir „ $\gamma + h$ “ jetzt definieren?

Eine Möglichkeit ist die folgende: Sei $X \in \mathcal{T}_0^1(M)$ ein Vektorfeld, dann liefert $\Phi_h^X \circ \gamma : [0, t] \rightarrow M$ für kleines h eine zu γ benachbarte Kurve. In einer Bündelkarte (q, v) für TM hat

$$S(\Phi_h^X \circ \gamma) - S(\gamma) = \int_0^t (L(\Phi_h^X(\gamma(s)), \frac{d}{ds}\Phi_h^X(\gamma(s))) - L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s))) ds =$$

wieder die Form

$$\begin{aligned} &= h \int_0^t \left[\frac{\partial L}{\partial q}(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) \cdot X(\gamma(s)) + \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) \cdot \frac{d}{ds}X(\gamma(s)) \right] ds + \mathcal{O}(h^2) \\ &= h \int_0^t \left[\frac{\partial L}{\partial q}(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) - \frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) \right] \cdot X(\gamma(s)) ds + \mathcal{O}(h^2), \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt angenommen haben, dass $X(\gamma(0)) = X(\gamma(t)) = 0$ und somit die Randterme wegfallen. Man hat also in lokalen Koordinaten als Bedingung für Extremalität wieder

$$DS(\gamma)X = \int_0^t \left[\frac{\partial L}{\partial q}(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) - \frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) \right] \cdot X(\gamma(s)) ds = 0.$$

Geometrisch können wir das so interpretieren. Der „Tangentialraum“ an die „Mannigfaltigkeit“ C der Kurven in M läßt sich am Punkt $\gamma \in C$ durch die Vektorfelder $X : \gamma([0, t]) \rightarrow TM$ entlang der Kurve darstellen. Also $T_\gamma C \cong \mathcal{T}_0^1(\gamma([0, t]))$. Dann ist

$$DS(\gamma)(s) := \left(\frac{\partial L}{\partial q_j}(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) - \frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial v_j}(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) \right) dq^j \in T_{\gamma(s)}^*M$$

und

$$DS(\gamma) := \int_0^t DS(\gamma)(s) ds \in T_\gamma^*C.$$

3.6 Beispiel. Natürliche Systeme

Auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) kann man in natürlicher Weise Lagrangefunktionen der Form

$$L(q, v) = T_q(v) - V(q)$$

mit „kinetischer Energie“

$$T_q(v) = \frac{1}{2} g_q(v, v)$$

und „potentieller Energie“

$$V : M \rightarrow \mathbb{R}$$

definieren. Für solche Systeme liefert

$$T_q M \rightarrow T_q^* M, \quad v \mapsto \frac{\partial L}{\partial v_j}(q, v) dq^j = g_q(v, \cdot)$$

den durch die Metrik induzierten Isomorphismus zwischen Tangential- und Kotangentialraum.

Man kann aber $\frac{\partial L}{\partial v}$ auch ohne Metrik als Abbildung $\frac{\partial L}{\partial v} : TM \rightarrow T^*M$ auffassen. Es heißt dann $p := \frac{\partial L}{\partial v}(q, v) \in T_q^*M$ Impuls zur Geschwindigkeit $v \in T_q M$. Kartenunabhängig definiert man für $w \in T_q M$

$$\frac{\partial L}{\partial v}(q, v)(w) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{L(q, v + hw) - L(q, v)}{h}.$$

3.7 Definition. Faserableitung

Sei $L \in C^\infty(TM)$ und (q, v) eine Bündelkarte, dann ist durch

$$\phi_L : TM \rightarrow T^*M, \quad (q, v) \mapsto \left(q, \frac{\partial L(q, v)}{\partial v^j} dq^j \right)$$

eine Abbildung von TM nach T^*M definiert, welche die Fasern invariant lässt und nicht von der gewählten Karte abhängt. Es heißt

$$\frac{\partial L}{\partial v}(q, v) := \frac{\partial L(q, v)}{\partial v^j} dq^j \in T_q^*M$$

die **Faserableitung** von L .

Die Abbildung $\phi_L : TM \rightarrow T^*M$ wird im Allgemeinen kein oder nur ein lokaler Diffeomorphismus sein. Für natürliche Systeme ist $\phi_L(v) = g_q(v, \cdot)$ aber tatsächlich ein Diffeomorphismus und wir werden sehen, dass die Lagrangesche und die Hamiltonsche Formulierung dann äquivalent sind.

Zunächst überlegen wir uns, dass man mit Hilfe von ϕ_L jedes Hamiltonsche System auf T^*M in ein Hamiltonsches System auf TM übersetzen kann. Sei also $\phi_L : TM \rightarrow T^*M$ ein Diffeomorphismus und ω_0 die kanonische symplektische Form auf T^*M und $H \in C^\infty(T^*M)$ eine Hamiltonfunktion. Dann ist $\omega_L = \phi_L^* \omega_0$ eine symplektische Form auf TM und $H \circ \phi_L = E \in C^\infty(TM)$ eine „Hamiltonfunktion“ auf TM . Wie wir wissen, gilt

$$X_E = \phi_L^* X_H.$$

Es macht physikalisch keinen Unterschied, ob wir X_E oder X_H lösen, da ϕ_L die Fasern invariant lässt und somit die Zeitentwicklung der Konfiguration in beiden Fällen die gleiche ist:

$$\pi_M \Phi_t^{X_E} = \pi_M \phi_L^* \Phi_t^{X_H} = \phi_L^* \pi_M \Phi_t^{X_H} = \pi_M \Phi_t^{X_H}.$$

Nun stellt sich die Frage, wie ω_L aussieht und wie wir E wählen müssen, damit $\Phi_t^{X_E}$ Lösungen der Lagrangeschen Gleichungen erzeugt. Seien dazu

$$W : TM \rightarrow \mathbb{R}, \quad (q, v) \mapsto \left(\frac{\partial L}{\partial v^j}(q, v) dq^j \mid v \right) = \frac{\partial L(q, v)}{\partial v^k} v^k$$

und die Energiefunktion

$$E : TM \rightarrow \mathbb{R}, \quad E = W - L.$$

Die Langrangesche 1-Form ist

$$\Theta_L = \phi_L^* \Theta_0 = \phi_L^* p_i dq^i = \frac{\partial L}{\partial v^i} dq^i$$

und die symplektische Form

$$\omega_L = -\phi_L^* \omega_0 = -\phi_L^* d\Theta_0 = -d\phi_L^* \Theta_0 = -d\Theta_L = \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v^i} dq^i \wedge dq^j + \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i} dq^i \wedge dv^j.$$

Nun können wir $X_E = A^i \partial_{q^i} + B^i \partial_{v^i}$ aus

$$\omega_L(X_E, \cdot) = dE = \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v^k} v^k dq^j + \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^k} v^k dv^j - \frac{\partial L}{\partial q^j} dq^j$$

bestimmen und erhalten

$$X_E = v \partial_q + \frac{\left(\frac{\partial L}{\partial q} - v \frac{\partial^2 L}{\partial q \partial v} \right)}{\frac{\partial^2 L}{\partial v \partial v}} \partial_v,$$

wobei wir aus Gründen der Übersichtlichkeit die Indizes weglassen haben. Die Bewegungsgleichungen lauten

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{q}(t) \\ \ddot{q}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{q}(t) \\ \left(\frac{\partial L}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t)) - \dot{q}(t) \frac{\partial^2 L}{\partial q \partial v}(q(t), \dot{q}(t)) \right) / \frac{\partial^2 L}{\partial v \partial v}(q(t), \dot{q}(t)) \end{pmatrix}$$

und liefern wegen

$$\frac{\partial L}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t)) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v}(q(t), \dot{q}(t)) = \frac{\partial L}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t)) - \frac{\partial^2 L}{\partial v \partial v}(q(t), \dot{q}(t)) \ddot{q}(t) - \frac{\partial^2 L}{\partial q \partial v}(q(t), \dot{q}(t)) \dot{q}(t) = 0$$

tatsächlich Lösungen der Lagrange Gleichung.

3.8 Bemerkung. DGLen 2ter Ordnung auf Mannigfaltigkeiten

Vektorfelder auf TM , also $X : TM \rightarrow T(TM)$, mit der Eigenschaft, dass die Integralkurven $\gamma(t) = (q(t), v(t))$

$$\dot{q}(t) = v(t)$$

erfüllen, definieren Differentialgleichungen 2ter Ordnung. In jeder Bündelkarte muss das Vektorfeld also die Form

$$X(q, v) = v^j \partial_{q^j} + a^j(q, v) \partial_{v^j}$$

haben, wobei $a^j(q, v)$ die Beschleunigung ist.

Zusammenfassend lässt sich also die Lagrangesche Mechanik in Hamiltonscher Form auf dem Tangentialbündel (TM, ω_L) mit Energiefunktion $E = W - L$ schreiben, falls ϕ_L ein Diffeomorphismus ist, also falls

$$\frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i} \quad \text{invertierbar ist.}$$

In diesem Fall kann man dann aber auch gleich zur Hamiltonschen Formulierung auf (T^*M, ω_0) übergehen, wobei

$$H = E \circ \phi_L^{-1} = (W - L) \circ \phi_L^{-1} =: \mathcal{L}L$$

die so genannte Legendretransformierte von L ist.

3 Bemerkungen zur Lagrangeschen Mechanik

Startet man umgekehrt mit H auf T^*M und definiert

$$\phi_H : T^*M \rightarrow TM, \quad (q, p) \mapsto \left(q, \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_j} \partial_{q_j} \right)$$

einen Diffeomorphismus, so kann man mit

$$W^*(q, p) := \left(p \mid \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_j} \partial_{q_j} \right) = W \circ \phi_L^{-1}$$

auch wieder zurück,

$$\mathcal{L}H := (W^* - H) \circ \phi_H^{-1} = (W^* - H) \circ \phi_L = W - (W - L) = L.$$

Problematisch wird der Übergang von Lagrange zu Hamilton bzw. umgekehrt immer dann, wenn ϕ_L kein Diffeomorphismus ist. Das passiert typischerweise, wenn man die Dynamik von Eichfeldern beschreiben möchte.