

# Mathematik I für Physiker\*

Wintersemester 2013/14

Stefan Teufel  
Mathematisches Institut  
Uni Tübingen

31. Januar 2014

\* Diese Version des Skriptums ist nur zum Gebrauch parallel zum Besuch der Vorlesung gedacht. Das Studium des Skripts kann den Besuch der Vorlesung **nicht** ersetzen! Falls Sie Fehler finden, teilen Sie mir diese (auch die offensichtlichen) bitte mit!



# Inhaltsverzeichnis

<b>0</b>	<b>Einleitung: Besondere Zahlen, kleine Wunder und große Fragen</b>	<b>1</b>
0.1	Die Kreiszahl $\pi$ . . . . .	1
0.2	Die Eulersche Zahl $e$ . . . . .	2
0.3	Die imaginäre Einheit $i$ . . . . .	3
<b>1</b>	<b>Zahlen: natürliche, ganze, rationale, reelle</b>	<b>5</b>
1.1	Die Körperaxiome . . . . .	5
1.2	Die natürlichen Zahlen und vollständige Induktion . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Vollständigkeit und Konvergenz</b>	<b>11</b>
2.1	Vollständigkeit . . . . .	11
2.2	Folgen . . . . .	13
2.3	Mächtigkeit von Mengen und Abbildungen zwischen Mengen . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Elementare Funktionen und Stetigkeit</b>	<b>25</b>
3.1	Die Exponentialfunktion . . . . .	25
3.2	Polynome und rationale Funktionen . . . . .	30
3.3	Die trigonometrischen Funktionen . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Komplexe Zahlen</b>	<b>35</b>
4.1	Definitionen und elementare Eigenschaften . . . . .	35
4.2	Exponentialfunktion und Logarithmus im Komplexen . . . . .	37
4.3	Komplexe Wurzeln . . . . .	39
<b>5</b>	<b>Unendliche Reihen</b>	<b>41</b>
<b>6</b>	<b>Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit</b>	<b>51</b>
6.1	Grenzwerte von Funktionen . . . . .	51
6.2	Folgen von Funktionen . . . . .	55
<b>7</b>	<b>Eindimensionale Differentialrechnung</b>	<b>59</b>
7.1	Differenzierbarkeit und Ableitungsregeln . . . . .	59
7.2	Der Mittelwertsatz . . . . .	64
7.3	Der Satz von Taylor und Taylorreihen . . . . .	66
<b>8</b>	<b>Eindimensionale Integration</b>	<b>75</b>
8.1	Das Integral für Regelfunktionen . . . . .	75
8.2	Integrationsmethoden . . . . .	81
8.3	Uneigentliche Integrale . . . . .	87
8.4	Integration rationaler Funktionen . . . . .	89
<b>9</b>	<b>Fourierreihen</b>	<b>91</b>



# 0 Einleitung: Besondere Zahlen, kleine Wunder und große Fragen

## 0.1 Die Kreiszahl $\pi$

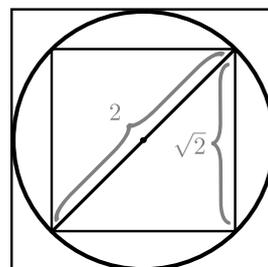
Wie Sie aus der Schule wissen, hat der Einheitskreis, also der Kreis mit Radius 1, den Umfang  $U = 2\pi$  und die Fläche  $F = \pi$ . **Aber wie bestimmt man  $\pi$ ?**

**Archimedes:** Man approximiere den Kreis durch regelmäßige  $n$ -Ecke von außen bzw. von innen:

$$u_n \leq 2\pi \leq U_n \quad , \quad f_n \leq \pi \leq F_n .$$

Für  $n = 4$  ergibt sich leicht

$$\left. \begin{array}{l} u_4 = 4\sqrt{2} \approx 5,7 \\ U_4 = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow 2,8 \leq \pi \leq 4 .$$



Für  $n = 96$  fand schon Archimedes

$$\left. \begin{array}{l} u_{96}/2 = 3\frac{10}{71} \\ U_{96}/2 = 3\frac{1}{7} \end{array} \right\} \Rightarrow 3,1408 \leq \pi \leq 3,1428 .$$

Es stellt sich nun die Frage, ob  $U_n - u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  gilt? Und wenn ja, gibt es genau eine Zahl  $\pi$  mit  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2\pi$  und  $U_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2\pi$ ?

Der Einfachheit halber betrachten wir an dieser Stelle die gleiche Fragestellung für  $\sqrt{2}$ . Definiert wird  $\sqrt{2}$  durch die Eigenschaft  $(\sqrt{2})^2 = 2$ . Aber was und wie groß ist  $\sqrt{2}$ ?

Ein erster Versuch ist  $x_0 = \frac{3}{2}$  also  $(x_0)^2 = \frac{9}{4} = 2,25$ . Das können wir mit folgender Beobachtung verbessern: da  $x_0 > \sqrt{2}$  ist, gilt  $\frac{2}{x_0} < \sqrt{2}$ . Es liegt also  $\sqrt{2}$  im Intervall  $(\frac{2}{x_0}, x_0)$  und ist tatsächlich das geometrische Mittel der beiden Randpunkte

$$\sqrt{\frac{2}{x_0} \cdot x_0} = \sqrt{2} .$$

Ersetzt man das geometrische Mittel durch das arithmetische Mittel

$$x_1 := \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{2}{x_0}\right) ,$$

so liefert  $2/x_0 < x_1 < x_0$  eine bessere Approximation an  $\sqrt{2}$  als der Startwert  $x_0$ :

$$x_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} + \frac{4}{3} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{9+8}{6} \right) = \frac{17}{12}$$

mit

$$(x_1)^2 = \frac{289}{144} \approx 2,0069 .$$

## 0 Einleitung: Besondere Zahlen, kleine Wunder und große Fragen

Diesen Schritt können wir nun beliebig oft wiederholen. Für  $x_2$  ergibt sich

$$x_2 = \frac{1}{2} \left( x_1 + \frac{2}{x_1} \right) = \frac{577}{408}, \quad \text{also} \quad (x_2)^2 = 2,000006,$$

und die allgemeine Vorschrift des “Babylonischen Algorithmus” lautet

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{2}{x_n} \right).$$

Unsere Fragen von oben können wir nun präzisieren:

- (a) Konvergiert die Folge  $x_n$  von Brüchen gegen eine Zahl  $\sqrt{2}$ ?
- (b) Wenn ja, ist  $\sqrt{2}$  auch ein Bruch?

Die Antwort auf (b) kannten schon die Griechen:  $\sqrt{2}$  **ist kein Bruch**, also nicht rational,  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ .

**Beweis durch Widerspruch:** Angenommen  $\sqrt{2}$  ist ein Bruch, also  $\sqrt{2} = \frac{q}{p}$  für  $q, p \in \mathbb{N}$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit (O.B.d.A.) nehmen wir  $q$  und  $p$  als teilerfremd an, da wir ja sonst kürzen könnten.

Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{q^2}{p^2} = 2 &\Rightarrow q^2 = 2p^2 \Rightarrow q^2 \text{ ist gerade} \Rightarrow q \text{ ist gerade} \\ &\Rightarrow q^2 \text{ ist durch 4 teilbar} \Rightarrow p^2 \text{ ist gerade} \Rightarrow p \text{ ist gerade} \\ &\Rightarrow p \text{ und } q \text{ sind beide durch 2 teilbar.} \end{aligned}$$

Dies steht aber im Widerspruch zur Annahme, dass  $q$  und  $p$  teilerfremd sind. Somit kann es solche  $q, p \in \mathbb{N}$  nicht geben und es gilt  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ .

Eine der **große Fragen** der Mathematik lautete: Was genau sind irrationale bzw. reelle Zahlen? Eine präzise Antwort wurde erst Ende des 19. Jahrhunderts von Cauchy und Dedekind gegeben.

## 0.2 Die Eulersche Zahl $e$

Wir betrachten als **Beispiel** die Verzinsung eines anfänglichen Kapitals  $K_{\text{anf}}$  mit dem Zinssatz  $x$ . Bei einmaliger Verzinsung zum Ende der Periode ergibt sich

$$K_{\text{end}} = (1 + x) \cdot K_{\text{anf}},$$

bei zweimaliger Verzinsung jeweils zur Mitte und zum Ende der Periode

$$K_{\text{end}} = \left(1 + \frac{x}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{x}{2}\right) \cdot K_{\text{anf}},$$

und bei  $n$ -maliger Verzinsung

$$K_{\text{end}} = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \cdot K_{\text{anf}}.$$

Was passiert im Limes kontinuierlicher Verzinsung, was ist also  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ ?

Wir werden zeigen, dass auch der Limes dieser Folge existiert und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n =: e^x$$

definieren. Die Eulersche Zahl ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =: e \approx 2,718$$

und sie ist (wie  $\pi$  und  $\sqrt{2}$ ) irrational, aber im Gegensatz zu  $\sqrt{2}$  nicht algebraisch, d.h. nicht Nullstelle eines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten.

Die so definierte Funktion  $x \mapsto e^x$  hat erstaunliche Eigenschaften. Beispielsweise läßt sich  $e^x$  als konvergente Potenzreihe schreiben,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots,$$

und die Ableitung erfüllt

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x.$$

### 0.3 Die imaginäre Einheit $i$

Man definiert die imaginäre Einheit  $i$  durch ihre Eigenschaft, dass  $i^2 = -1$ . Man schreibt deshalb auch  $i = \sqrt{-1}$ .

Da für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt, dass  $x^2 \geq 0$  ist, kann man  $i$  nicht durch bekannte Zahlen approximieren.

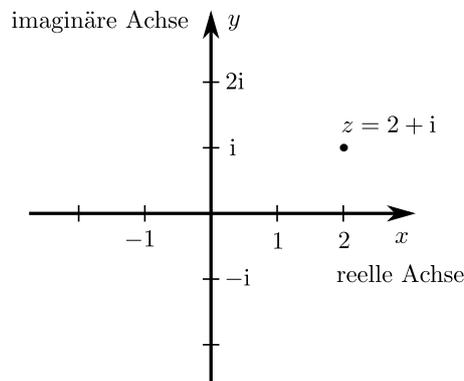
Das macht aber nichts: Man nimmt  $i$  einfach als neue Zahl hinzu und rechnet wie gewohnt weiter, beispielsweise ist

$$i + i = 2i, \quad 2 + i - (1 + 2i) = 1 - i, \quad \frac{2i}{i} = 2, \quad (3i) \cdot (2i) = 6i^2 = -6 \quad \text{usw.}$$

Das sieht zunächst sehr formal aus, man kann die neuen Zahlen aber visualisieren, indem man vom Zahlenstrahl zur sogenannten **Gaußschen Zahlenebene** übergeht. Eine **komplexe Zahl**

$$z = x + iy \quad \text{mit} \quad x, y \in \mathbb{R}$$

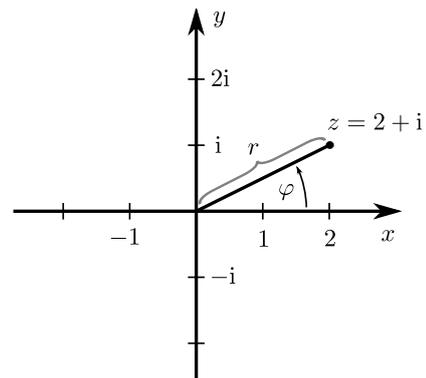
entspricht dann einem Punkt in der Ebene.



Einen Punkt in der Ebene, und somit jede komplexe Zahl, kann man aber auch mit Hilfe von **Polarkoordinaten** angeben,

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

mit  $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  und  $\varphi = \arctan \frac{y}{x}$ .



0 Einleitung: Besondere Zahlen, kleine Wunder und große Fragen

Ein **kleines Wunder** ist, dass all die hier besprochenen Zahlen auf sehr enge Weise zusammenhängen: es gilt nämlich die Eulersche Formel

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi},$$

die für  $\varphi = 2\pi$  die Gleichung

$$\boxed{1 = e^{2\pi i}}$$

liefert.

Das ist aber alles nur der Anfang. Es gibt noch viele großartige Entdeckungen, welche die Mathematik in den kommenden vier Semestern für Sie bereithält.

# 1 Zahlen: natürliche, ganze, rationale, reelle

Wir beginnen mit einer Wiederholung der üblichen Symbole:

$\mathbb{N}$	$= \{1, 2, 3, \dots\}$	<b>natürliche Zahlen</b>
$\mathbb{N}_0$	$= \{0, 1, 2, 3, \dots\}$	
$\mathbb{Z}$	$= \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$	<b>ganze Zahlen</b>
$\mathbb{Q}$	$= \{\text{Brüche } \frac{q}{p} \text{ mit } q, p \in \mathbb{Z} \text{ und } p \neq 0\} = \{\frac{q}{p} \mid q, p \in \mathbb{Z}, p \neq 0\}$	<b>rationale Zahlen</b>
$\mathbb{R}$	$= \text{“Zahlenkontinuum”}$	<b>reelle Zahlen</b>
$\mathbb{C}$	$= \text{“Zahlenebene”}$	<b>komplexe Zahlen</b>

Wir werden die reellen Zahlen nicht konstruieren, sondern ihre Existenz voraussetzen. Sie sind durch einige wenige Eigenschaften eindeutig charakterisiert und aus diesen “Axiomen” lassen sich alle weiteren Rechenregeln und Eigenschaften ableiten.

## 1.1 Die Körperaxiome

Auf der Menge  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen sind die Verknüpfungen

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} && \text{Addition} \\ \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} && \text{Multiplikation} \end{aligned}$$

erklärt. Sie haben die folgenden Eigenschaften:

### Addition

- |      |  |  |
|------|--|--|
| (A1) | $(a + b) + c = a + (b + c)$  | (Assoziativität)                               |
| (A2) | $a + b = b + a$  | (Kommutativität)                               |
| (A3) | Es existiert ein Element 0 mit der Eigenschaft, dass $a + 0 = a$ für jedes $a$ gilt. | (Existenz des neutralen Elements der Addition) |
| (A4) | Für jedes $a$ existiert das additive Inverse $-a$ mit $a + (-a) = 0$ .               | (Existenz des inversen Elements der Addition)  |

**1.1 Folgerungen.** Aus diesen Axiomen ergeben sich sofort folgende Aussagen:

- (a) Das Nullelement ist eindeutig bestimmt, denn haben 0 und 0' die Eigenschaft (A3), so ist

$$0' \stackrel{(A3)}{=} 0' + 0 \stackrel{(A2)}{=} 0 + 0' \stackrel{(A3)}{=} 0.$$

- (b) Die Gleichung  $a + x = b$  wird durch  $x = b - a := b + (-a)$  gelöst:

$$a + (b - a) \stackrel{(A2)}{=} (b - a) + a \stackrel{(A1)}{=} b + (-a + a) \stackrel{(A2)}{=} b + (a - a) \stackrel{(A4)}{=} b + 0 \stackrel{(A3)}{=} b.$$

- (c) Die Lösung in (b) ist eindeutig. (Übungsaufgabe)

## 1 Zahlen: natürliche, ganze, rationale, reelle

(d) Aus (b) und (c) folgt insbesondere, dass das inverse Element eindeutig bestimmt ist.

### Multiplikation

- |      |   |  |
|------|---|--|
| (M1) | $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$   | (Assoziativität)                                     |
| (M2) | $a \cdot b = b \cdot a$   | (Kommutativität)                                     |
| (M3) | Es existiert ein Element 1 mit der Eigenschaft, dass $a \cdot 1 = a$ für jedes $a$ gilt.      | (Existenz des neutralen Elements der Multiplikation) |
| (M4) | Für jedes $a \neq 0$ existiert das multiplikative Inverse $a^{-1}$ mit $a \cdot a^{-1} = 1$ . | (Existenz des inversen Elements der Multiplikation)  |

### 1.2 Folgerungen. (Übungsaufgaben):

- Auch das Einselement ist eindeutig bestimmt.
- Für jedes  $a \neq 0$  wird die Gleichung  $a \cdot x = b$  durch  $x = b \cdot a^{-1}$  gelöst.
- Die Lösung in (b) und insbesondere das multiplikative Inverse sind eindeutig.

### Distributivgesetz

$$(D) \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

### 1.3 Definition. Zahlenkörper

Eine mindestens zweielementige Menge  $\mathbb{K}$  mit Verknüpfungen  $+$  :  $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  und  $\cdot$  :  $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  welche die Axiome (A1)–(A4), (M1)–(M4) und (D) erfüllen, heißt **Körper** (englisch “field”).

**1.4 Bemerkung.** Sowohl die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  als auch die rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  bilden jeweils einen Körper. Da alle Regeln auch für  $\mathbb{C}$  gelten, bilden die komplexen Zahlen ebenfalls einen Körper. Es gibt auch Körper mit endlich vielen Elementen (siehe Übungen).

Der Sinn der “abstrakten Körperaxiome” liegt darin, dass man aus ihnen eine Vielzahl von Rechenregeln ableiten kann. Für  $\mathbb{R}$  sind Ihnen diese Regeln alle bekannt und scheinen trivial. Sobald man sie aber nur aus den Axiomen hergeleitet hat, kann man sicher sein, dass sie für alle Körper gelten.

### 1.5 Beispiele. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper.

(a) Für jedes  $a \in \mathbb{K}$  gilt  $a \cdot 0 = 0$ .

*Beweis.* Es gilt  $a \cdot 0 + a \cdot 0 \stackrel{(D)}{=} a \cdot (0 + 0) \stackrel{(A3)}{=} a \cdot 0$ . Also ist  $a \cdot 0$  Lösung der Gleichung  $a \cdot 0 + x = a \cdot 0$  und somit gemäß Folgerung 1.1 (b) und (c) gleich 0.  $\square$

(b) Für jedes  $a \in \mathbb{K}$  gilt  $(-1) \cdot a = -a$ .

*Beweis.* Es gilt  $0 \stackrel{1.5(a)}{=} a \cdot 0 \stackrel{(M2)}{=} 0 \cdot a \stackrel{(A4)}{=} (1 + (-1)) \cdot a \stackrel{(D)}{=} 1 \cdot a + (-1) \cdot a \stackrel{(M3)}{=} a + (-1) \cdot a$ . Wegen Folgerung 1.1 (d) ist also  $(-1) \cdot a$  gleich dem additiven Inversen von  $a$ .  $\square$

(c) Es gilt  $(-1) \cdot (-1) = 1$ .

*Beweis.* Nach (b) ist  $(-1) \cdot (-1) = -(-1)$ , also gleich dem Inversen von  $-1$ . Das ist aber gemäß Folgerung 1.1 (d) eindeutig und somit gleich 1.  $\square$

Wir führen an dieser Stelle einige nützliche Sprechweisen ein.

**1.6 Definition. Das Kartesische Produkt von Mengen**

Seien  $M$  und  $N$  Mengen, so bezeichnet man mit  $M \times N$  die Menge

$$M \times N := \{(m, n) \mid m \in M, n \in N\}$$

der geordneten Paare  $(m, n)$  mit  $m \in M$  und  $n \in N$ .

**Beachte:** Als Elemente des kartesischen Produkts  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  sind die Paare  $(5, 3)$  und  $(3, 5)$  verschieden,  $(5, 3) \neq (3, 5)$ . Als Teilmengen von  $\mathbb{N}$  gilt aber  $\{5, 3\} = \{3, 5\}$ .

**1.7 Definition. Gruppe**

Eine Menge  $G$  mit einer Verknüpfung  $\circ : G \times G \rightarrow G$  heißt **Gruppe**, falls gilt:

- (G1)  $(g \circ h) \circ j = g \circ (h \circ j)$  für alle  $g, h, j \in G$ . (Assoziativität)
- (G2) Es existiert ein neutrales Element  $e \in G$  mit  $g \circ e = e \circ g = g$  für alle  $g \in G$ . (Existenz der Eins)
- (G3) Zu jedem  $g \in G$  existiert ein  $g^{-1} \in G$  mit  $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$ . (Existenz des Inversen)

Falls weiterhin Kommutativität gilt,

- (G4)  $g \circ h = h \circ g$  für alle  $g, h \in G$ , (Kommutativität)

so heißt die Gruppe **abelsch**.

Ein Körper  $\mathbb{K}$  ist also eine abelsche Gruppe bezüglich der Addition  $+$  :  $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ , und  $\mathbb{K} \setminus \{0\}$  ( $\mathbb{K}$  ohne die Null) ist eine abelsche Gruppe bezüglich der Multiplikation  $\cdot$  :  $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ .

Nun weiter mit den Eigenschaften von  $\mathbb{R}$ . Reelle Zahlen sind angeordnet, d.h. für ein Paar  $(a, b)$  von reellen Zahlen  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt entweder  $a < b$  oder  $a = b$  oder  $a > b$ . Formal definiert man eine Relation  $R$  auf einer Menge  $M$  als Teilmenge des Kartesischen Produkts  $R \subset M \times M$ . Die Anordnungsrelation auf  $\mathbb{R}$  ist also  $R_{<} := \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid a < b\}$ . Damit gilt dann, dass  $a < b$  genau dann wenn  $(a, b) \in R_{<}$ .

**Anordnung**

Die Kleiner-Relation  $a < b$  ("a kleiner b"), auch als Größer-Relation  $b > a$  geschrieben, hat die folgenden Eigenschaften:

- (O1) Es gilt immer genau eine der Beziehungen  $a < b, a = b, a > b$ . (Trichotomie)
- (O2) Aus  $a < b$  und  $b < c$  folgt  $a < c$ . (Transitivität)
- (O3) Aus  $a < b$  folgt  $a + c < b + c$  für jedes  $c$ .
- (O4) Aus  $a < b$  und  $c > 0$  folgt  $ac < bc$ .

Wieder lassen sich die bekannten Rechenregeln für Ungleichungen aus diesen Anordnungsaxiomen herleiten.

**1.8 Beispiele.** (a) Aus  $a > 0$  folgt  $-a < 0$ . Denn  $0 = a - a \stackrel{(O3)}{>} 0 - a = -a$ .

(b) Aus  $a > 0$  folgt  $a^{-1} > 0$ .

*Beweis.* Angenommen,  $a^{-1} < 0$ . Dann wäre wegen (O4)  $1 = a \cdot a^{-1} < 0$ , was wegen  $1 > 0$  (Übungsaufgabe) ein Widerspruch ist.

Angenommen,  $a^{-1} = 0$ . Dann wäre  $1 = a \cdot a^{-1} = 0$ , was wiederum im Widerspruch zu  $1 > 0$  stünde.  $\square$

## 1 Zahlen: natürliche, ganze, rationale, reelle

(c) Aus  $a^2 \leq b^2$  für  $a, b > 0$  folgt  $a \leq b$ .

*Beweis.* Angenommen,  $a > b$ , dann wäre nach (O4)  $a^2 > a \cdot b$  und  $a \cdot b > b^2$ . Mit der Transitivität (O2) würde  $a^2 > b^2$  folgen, was wegen (O1) im Widerspruch zur Annahme  $a^2 \leq b^2$  steht.  $\square$

Ein Körper  $\mathbb{K}$  mit einer Relation  $R_{<} \subset \mathbb{K} \times \mathbb{K}$  welche die Axiome (O1)-(O4) erfüllt, heißt **angeordnet**. Der Körper  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen mit der üblichen " $<$ "-Relation ist also angeordnet. Die komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  sind nicht angeordnet, da  $0 < i$  mit (O4) implizieren würde, dass  $i \cdot 0 < i \cdot i$ , also  $0 < -1$ . Analog folgt aus  $0 < -i$  mit (O4), dass  $0 < (-i) \cdot (-i) = -1$ .

**1.9 Definition.** Eine Zahl  $a \in \mathbb{R}$  heißt positiv, falls  $a > 0$  ist. Sie heißt negativ, falls  $a < 0$  ist. Man schreibt  $a \leq b$  falls  $a < b$  oder  $a = b$ .

### 1.10 Definition. Betrag

Der **Betrag** einer reellen Zahl  $a$  ist die nichtnegative reelle Zahl  $|a|$  definiert durch

$$|a| := \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$

**1.11 Folgerungen.** Für alle  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt:

- (a)  $|a| \geq 0$  und  $|a| = 0$  nur für  $a = 0$ .
- (b)  $a \leq |a|$
- (c)  $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
- (d)  $a \cdot a = |a| \cdot |a|$
- (e)  $|a + b| \leq |a| + |b|$  (Dreiecksungleichung)
- (f)  $||a| - |b|| \leq |a - b|$  (Dreiecksungleichung von unten)

*Beweis.* (a) Fallunterscheidung:  $a > 0 \Rightarrow |a| = a > 0$ ,  $a < 0 \Rightarrow |a| = -a > 0$ ,  $a = 0 \Rightarrow |a| = a = 0$ .

(b) Fallunterscheidung:  $a > 0 \Rightarrow a = |a|$ ,  $a = 0 \Rightarrow a = |a|$ ,  $a < 0 \Rightarrow 0 < -a = |a| \stackrel{(O2)}{\Rightarrow} a < |a|$ .

(c) Fallunterscheidung ...

(d) Fallunterscheidung und 1.5 (c).

(e)  $|a + b|^2 \stackrel{(d)}{=} (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \stackrel{(b),(O3)}{\leq} a^2 + |2ab| + b^2 \stackrel{(c),(d)}{=} |a|^2 + 2|a| \cdot |b| + |b|^2 = (|a| + |b|)^2$ .  
Da  $|a| + |b| \geq 0$  und  $|a + b| \geq 0$ , folgt mit 1.8 (c) die Behauptung.

(f) Mit (e) ergibt sich  $|a| = |b + (a - b)| \leq |b| + |a - b|$ , also  $|a| - |b| \leq |a - b|$ . Analog folgt aus  $|b| = |a + (b - a)| \leq |a| + |a - b|$ , dass  $|b| - |a| \leq |a - b|$ , und somit die Behauptung.  $\square$

## 1.2 Die natürlichen Zahlen und vollständige Induktion

Die natürlichen Zahlen  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  spielen in vielerlei Hinsicht eine wichtige Rolle. Man kann sie als die kleinste induktive Teilmenge von  $\mathbb{R}$  definieren. Eine Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}$  heißt **induktiv**, falls

- (a)  $1 \in M$
- (b) aus  $x \in M$  folgt  $x + 1 \in M$ .

Da  $\mathbb{N}$  die kleinste induktive Menge ist, gilt das

**Induktionsprinzip**

Ist  $M$  eine induktive Teilmenge von  $\mathbb{N}$ , so ist  $M = \mathbb{N}$ .

Daraus leitet sich das wichtige **Beweisprinzip der vollständigen Induktion** ab:

Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  sei  $A(n)$  eine Aussage (die wahr oder falsch sein kann).

Kann man zeigen, dass

- (a)  $A(1)$  wahr ist (**Induktionsanfang**) und
- (b) aus der Gültigkeit von  $A(n)$  (**Induktionsannahme**) auch die Gültigkeit von  $A(n + 1)$  folgt (**Induktionsschritt**),

so ist  $A(n)$  wahr für jedes  $n \in \mathbb{N}$ . Denn  $M = \{n \in \mathbb{N} \mid A(n) \text{ ist wahr}\}$  ist dann eine induktive Teilmenge von  $\mathbb{N}$  und aufgrund des Induktionsprinzips gilt  $M = \mathbb{N}$ .

**1.12 Beispiel.** Als Beispiel beweisen wir die Formel

$$\sum_{k=1}^n k^2 := 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6} n(n + 1)(2n + 1).$$

*Beweis. durch Induktion:*

**Induktionsanfang:** Für  $n = 1$  besagt die Formel  $1 = 1$ , eine wahre Aussage.

**Induktionsannahme:** Es gelte die Formel für  $n$ , also

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6} n(n + 1)(2n + 1).$$

**Induktionsschritt:** Nachrechnen liefert

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^n k^2 + (n + 1)^2 \\ &\stackrel{\text{I. Ann.}}{=} \frac{1}{6} n(n + 1)(2n + 1) + (n + 1)^2 \\ &= \frac{1}{6} (n + 1)[n(2n + 1) + 6(n + 1)] \\ &= \frac{1}{6} (n + 1)[2n^2 + 7n + 6] \\ &= \frac{1}{6} (n + 1)(n + 2)(2n + 3) \\ &= \frac{1}{6} (n + 1)((n + 1) + 1)(2(n + 1) + 1), \end{aligned}$$

also die entsprechende Formel für  $n + 1$  statt  $n$ .

**Induktionsschluss:** Die Formel gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$ . □

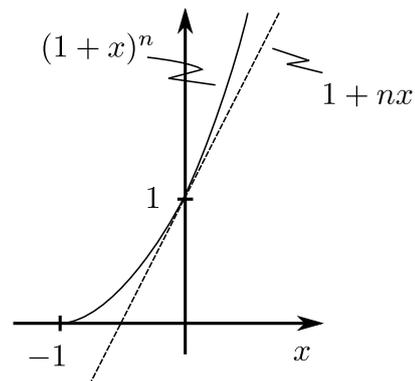
**1.13 Satz. Bernoullische Ungleichung**

Sei  $x \in \mathbb{R}$  mit  $x \geq -1$  und  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Ist  $n \geq 2$  und  $x \neq 0$ , so gilt sogar

$$(1 + x)^n > 1 + nx.$$





## 2 Vollständigkeit und Konvergenz

### 2.1 Vollständigkeit

Alle bisher besprochenen Eigenschaften von  $\mathbb{R}$  werden auch von  $\mathbb{Q}$  erfüllt.  $\mathbb{Q}$  ist ebenfalls ein angeordneter Körper. Wir haben zwar gezeigt, dass es keine Zahl in  $\mathbb{Q}$  gibt, deren Quadrat den Wert 2 hat. Aber ob es die in  $\mathbb{R}$  gibt, ist zunächst auch nicht klar.

Die Eigenschaft von  $\mathbb{R}$ , die uns fehlt, ist die Vollständigkeit. Dafür gibt es mindestens fünf in gewisser Hinsicht äquivalente Definitionen (Supremumsaxiom, Monotonieprinzip, Cauchy-Kriterium, Bolzano-Weierstraß, Intervallschachtelungsprinzip), die wir nach und nach kennenlernen werden. Die Vollständigkeit ist von zentraler Bedeutung, für die Analysis, da sie die Existenz von Grenzwerten sicherstellt (vgl.  $x_n \in \mathbb{Q}$ ,  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ).

#### 2.1 Definition. Beschränktheit

Eine Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}$  heißt **nach oben beschränkt**, falls es ein  $s \in \mathbb{R}$  gibt so, dass

$$x \leq s \quad \text{für jedes } x \in M.$$

Jedes solche  $s$  heißt **obere Schranke** an  $M$ .

Analog definiert man die Begriffe **nach unten beschränkt** und **untere Schranke**.

Wir führen die (Anordnungs-)Vollständigkeit ein über das

#### Supremumsaxiom:

Jede nach oben beschränkte Teilmenge  $M$  von  $\mathbb{R}$  besitzt eine kleinste obere Schranke in  $\mathbb{R}$ . Diese wird als **Supremum** von  $M$ , oder kurz  $\sup M$ , bezeichnet.

Es ist also  $s = \sup M$  eine obere Schranke von  $M$ , zu jedem  $t < s$  gibt es aber ein  $x \in M$  mit  $x > t$ . Denn sonst wäre ja  $t$  ebenfalls obere Schranke und gleichzeitig kleiner als  $s$ , im Widerspruch zur Definition von  $s$  als kleinster oberer Schranke.

Das **Infimum** einer nach unten beschränkten Menge definiert man analog als größte untere Schranke. Es ist  $\inf M = -\sup(-M)$ .

**2.2 Beispiele.** (a) Das halboffene Intervall  $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$  mit  $a < b$  hat das Supremum  $b$  und das Infimum  $a$ .

(b) Für  $M = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$  ist  $\sup M = 1$  und  $\inf M = 0$ .

(c)  $\mathbb{Q}$  erfüllt das Supremumsaxiom nicht, denn die Menge  $M = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$  hat keine kleinste obere Schranke in  $\mathbb{Q}$ . Denn jede obere Schranke  $s$  an  $M$  erfüllt  $s^2 > 2$  und unter diesen gibt es kein kleinstes Element, wie man sich beispielsweise an der in Abschnitt 0.1 konstruierten Folge  $x_n$  klarmacht. Es ist nämlich  $\sup\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\} = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ .

Aus dem Supremumaxiom ergibt sich zunächst die

#### Archimedische Eigenschaft von $\mathbb{R}$

Zu je zwei positiven Zahlen  $a, b > 0$  gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \cdot a > b$ .

Äquivalent dazu sind offenbar die Aussagen

## 2 Vollständigkeit und Konvergenz

Zu jeder positiven Zahl  $r > 0$  gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n > r$ ,  
bzw.

Zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $\frac{1}{n} < \varepsilon$ .

*Beweis.* Wir zeigen die zweite Aussage durch Widerspruch.

Sei  $r > 0$  gegeben. Angenommen, es gibt kein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n > r$ , d.h. die Menge  $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$  ist nach oben durch  $r$  beschränkt. Dann besitzt sie ein Supremum  $s := \sup \mathbb{N}$  und es gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$ , dass  $n + 1 \leq s$  also  $n \leq s - 1$ . Dann ist aber auch  $s - 1$  obere Schranke für  $\mathbb{N}$ , im Widerspruch zur Definition von  $s$  als kleinste obere Schranke.  $\square$

Daraus folgt nun, dass die rationalen Zahlen dicht in den reellen Zahlen liegen.

### 2.3 Satz. $\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$

In jedem nichtleeren Intervall  $(a, b) \subset \mathbb{R}$ , also  $a < b$ , liegt eine (und somit sogar unendlich viele) rationale Zahl. Man sagt,  $\mathbb{Q}$  liegt dicht in  $\mathbb{R}$ .

*Beweis.* Wähle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $\frac{1}{n} < \frac{b-a}{2}$  und  $m := \min\{m \in \mathbb{Z} \mid m > a \cdot n\}$ , dann ist

$$a < \frac{m}{n} < \frac{m+1}{n} = \frac{m-1}{n} + \frac{2}{n} < a + (b-a) = b.$$

$\square$

**2.4 Bemerkung.** Wir haben hier verwendet, dass die nach unten beschränkte Teilmenge von  $\mathbb{Z}$

$$\{m \in \mathbb{Z} \mid m > n \cdot a\}$$

ein Minimum, also ein kleinstes Element besitzt. Das ist zwar auch anschaulich klar, kann aber aus dem Induktionsprinzip gefolgert werden.

**2.5 Satz.** Jede nichtleere Teilmenge von  $\mathbb{N}$  und somit jede nach unten beschränkte Teilmenge von  $\mathbb{Z}$  enthält ein kleinstes Element.

*Beweis.* Sei  $M \subset \mathbb{N}$  nichtleer, also  $M \neq \emptyset$ . Angenommen,  $M$  enthält kein kleinstes Element, dann ist sicherlich  $1 \notin M$  also  $1 \in M^c := \mathbb{N} \setminus M$ . Per Induktion folgt nun aus  $\{1, 2, \dots, n\} \subset M^c$  auch  $n+1 \in M^c$ , da sonst ja  $n+1$  kleinstes Element von  $M$  wäre. Somit ist  $M^c = \mathbb{N}$  und  $M = \emptyset$ , was im Widerspruch zur Annahme  $M \neq \emptyset$  steht.  $\square$

**2.6 Bemerkung.** Im Beweis der Irrationalität von  $\sqrt{2}$  verwendet man, dass jeder Bruch vollständig gekürzt werden kann. Machen Sie sich klar, dass auch das eine Konsequenz des vorangegangenen Satzes ist.

**2.7 Bemerkung.** Für  $\mathbb{R}$  gilt die analoge Aussage nicht: Nicht jede nach unten beschränkte Teilmenge von  $\mathbb{R}$  hat ein kleinstes Element. Beispielsweise ist für

$$M = (0, 1) := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$$

zwar  $\inf M = 0$ , aber  $\inf M \notin M$ . Die Menge  $M$  hat kein kleinstes Element, das Minimum  $\min M$  der Menge existiert nicht.

**Wir merken uns also:** Jede nach oben (bzw. unten) beschränkte Teilmenge von  $\mathbb{R}$  hat ein Supremum (bzw. Infimum) aber nicht notwendigerweise ein Maximum (bzw. Minimum).

### 2.8 Satz. Existenz von $\sqrt{2}$

Die Zahl 2 hat eine positive reelle Quadratwurzel, d.h. es gibt ein  $q \in \mathbb{R}$  mit  $q > 0$  und  $q^2 = 2$ . (Entsprechend existiert zu jeder Zahl  $a > 0$  aus  $\mathbb{R}$  die  $n$ -te Wurzel, wobei  $n \in \mathbb{N}$ ).

*Beweis.* Sei  $M := \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$ .  $M$  ist nichtleer, (z.B.  $1 \in M$ ) und nach oben beschränkt (z.B. durch 2). Somit existiert  $q := \sup M \in \mathbb{R}$ . Wir zeigen  $q^2 = 2$ . Nach obigem gilt  $1 \leq q \leq 2$ .

Angenommen  $q^2 > 2$ . Dann gibt es einerseits wegen des Archimedischen Prinzips ein  $n \in \mathbb{N}$ , sodass  $\frac{1}{n} < q^2 - 2$  also  $q^2 > 2 + \frac{1}{n}$ . Aufgrund der Definition des Supremums gibt es andererseits ein  $x \in M$  mit  $x > q - \frac{1}{4n}$ . Insgesamt liefert das

$$x^2 > q^2 - \frac{q}{2n} + \frac{1}{16n^2} \stackrel{q \leq 2}{\geq} 2 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{16n^2} > 2,$$

also einen Widerspruch zu  $x \in M$ .

Angenommen  $q^2 < 2$ , also  $q^2 < 2 - \frac{1}{n}$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ . Wähle nun ein  $x \in \mathbb{R}$  mit  $q < x < q + \frac{1}{8n}$ , dann ist einerseits  $x \notin M$ , aber andererseits

$$x^2 < q^2 + \frac{q}{4n} + \frac{1}{64n^2} \stackrel{q \leq 2}{\leq} 2 - \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{64n}\right) \cdot \frac{1}{n} < 2,$$

also wiederum ein Widerspruch. Damit bleibt nur  $q^2 = 2$ . □

### 2.9 Bemerkung. Eindeutigkeit der reellen Zahlen

Durch die Körperaxiome (A1)–(A4), (M1)–(M4) und (D) sowie die Ordnungsaxiome (O1)–(O4) und schließlich die (Anordnungs-)Vollständigkeit (hier Supremumsaxiom) sind die reellen Zahlen bis auf “Isomorphie” eindeutig festgelegt. Sie bilden das Zahlenkontinuum und haben keine Löcher.

## 2.2 Folgen

Eine Folge  $(x_n)$  in  $\mathbb{R}$  (oder entsprechend in jeder beliebigen Menge  $M$ ) ist eine Zuordnung, die jedem  $n \in \mathbb{N}$  (oder  $\mathbb{N}_0$ ) ein Element  $x_n \in \mathbb{R}$  (oder allgemein  $x_n \in M$ ) zuordnet. Genau genommen ist also eine Folge  $(x_n)$  eine Abbildung (Funktion) von  $\mathbb{N}$  nach  $\mathbb{R}$ ,

$$(x_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R},$$

oder kurz  $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

Man schreibt auch oft  $(x_1, x_2, x_3, \dots)$ , also konkret z.B.

$$\left(\frac{1}{n}\right) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right)$$

oder

$$((-1)^n) = (-1, 1, -1, 1, -1, \dots).$$

Ein für die Analysis zentrales Konzept ist das der Konvergenz von Folgen. Man sagt eine reelle Folge  $(x_n)$  konvergiert gegen  $x \in \mathbb{R}$ , wenn die Folgenglieder beliebig nahe an  $x$  kommen und dort auch bleiben. Das ist nicht präzise genug, deshalb nun die mathematische Definition.

### 2.10 Definition. Folgenkonvergenz

Sei  $(x_n)$  eine reelle Folge. Wir sagen, dass  $(x_n)$  gegen  $x \in \mathbb{R}$  konvergiert und schreiben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad \text{oder} \quad x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$$

falls gilt:

Zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  so, dass für alle  $n \geq n_\varepsilon$  gilt  $|x - x_n| < \varepsilon$ .

## 2 Vollständigkeit und Konvergenz

Mit sogenannten **Quantoren**  $\exists$  „es existiert“ und  $\forall$  „für alle“ schreibt man abgekürzt

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_\varepsilon \quad |x_n - x| < \varepsilon.$$

Eine gegen 0 konvergente Folge wird auch als **Nullfolge** bezeichnet. Es ist also  $(x_n)$  eine Nullfolge, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_\varepsilon \quad |x_n| < \varepsilon.$$

### 2.11 Beispiele. Nullfolgen

- (a) Die Folge  $x_n = \frac{1}{n}$  ist eine Nullfolge, da man zu  $\varepsilon > 0$  beispielsweise  $n_\varepsilon = \lceil 1/\varepsilon \rceil + 1$  (für  $a \in \mathbb{R}$  ist  $\lceil a \rceil$  die kleinste ganze Zahl größer oder gleich  $a$ ) wählen kann. Für alle  $n \geq n_\varepsilon$  gilt dann nämlich

$$|x_n| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon.$$

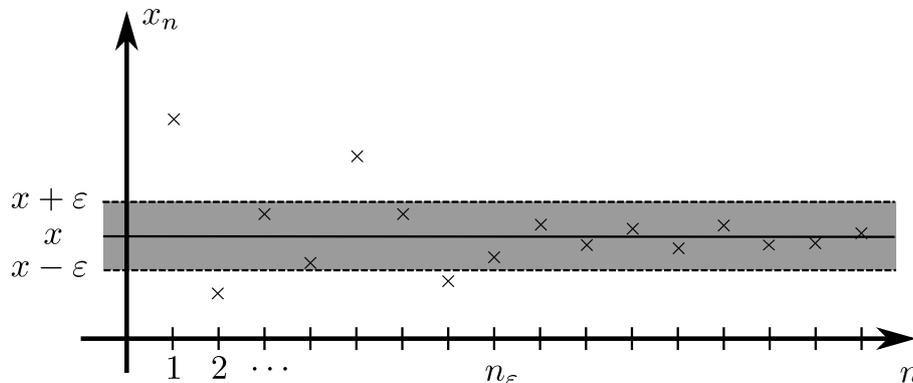
- (b) Die Folge

$$(x_n) = (1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, \dots) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 2^m \text{ für ein } m \in \mathbb{N}_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist keine Nullfolge, da es selbst zu  $\varepsilon = 1$  kein passendes  $n_\varepsilon$  gibt. Denn zu jedem  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  gibt es ein  $m \in \mathbb{N}$  mit  $n = 2^m \geq n_\varepsilon$  für welches dann gilt  $|x_n| = 1 \geq \varepsilon$ .

### 2.12 Merkregel. zur Folgenkonvergenz

Eine Folge  $(x_n)$  konvergiert gegen den Wert  $x$  falls gilt: Zu jedem  $\varepsilon$ -Schlauch (sei er auch noch so schmal) um den Grenzwert  $x$  muss es ein  $n_\varepsilon$  geben, so dass ab  $n_\varepsilon$  **alle** Folgenglieder  $x_n$  in diesem  $\varepsilon$ -Schlauch bleiben. Man sagt auch, dass schließlich alle Folgenglieder in dem  $\varepsilon$ -Schlauch liegen.



Lässt man in einer Folge  $(x_n)$  Glieder weg, so spricht man von einer **Teilfolge**, z.B. sind

$$(x_1, x_3, x_5, x_7, \dots) \quad \text{oder} \quad (x_1, x_4, x_9, x_{16}, \dots)$$

Teilfolgen von  $(x_n)$ . Man schreibt für eine Teilfolge von  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auch  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ , d.h. das  $k$ -te Folgenglied der Teilfolge ist das  $n_k$ -te Glied der ursprünglichen Folge. Z.B. ist  $(x_1, x_3, x_5, x_7, \dots) = (x_{2k-1})_{k \in \mathbb{N}}$ , also  $n_k = 2k - 1$ , oder  $(x_1, x_4, x_9, x_{16}, \dots) = (x_{k^2})_{k \in \mathbb{N}}$ , also  $n_k = k^2$ . Im Allgemeinen bezeichnet  $k \mapsto n_k$  eine streng monoton wachsende Funktion von  $\mathbb{N}$  nach  $\mathbb{N}$ .

Da man durch Verschieben jede konvergente Folge  $(x_n)$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  zu einer Nullfolge  $(x_n - x)$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - x) = 0$  machen kann, untersuchen wir zunächst Nullfolgen genauer.

### 2.13 Proposition. Eigenschaften von Nullfolgen

- (a) Ist  $(y_n)$  eine Nullfolge und gibt es ein  $N \in \mathbb{N}$  so, dass  $|x_n| \leq |y_n|$  für alle  $n \geq N$ , so ist auch  $(x_n)$  eine Nullfolge.

*Beweis.* Sei  $\varepsilon > 0$ . Wähle  $n_\varepsilon \geq N$  so, dass  $|y_n| < \varepsilon$  für alle  $n \geq n_\varepsilon$ . Dann gilt auch  $|x_n| \leq |y_n| < \varepsilon$  für alle  $n \geq n_\varepsilon$  und  $|x_n|$  ist eine Nullfolge.  $\square$

Insbesondere kann man endlich viele Glieder einer Nullfolge beliebig abändern und erhält immer noch eine Nullfolge.

- (b) Ist  $(x_n)$  eine Nullfolge, so ist für jedes  $c \in \mathbb{R}$  auch  $(cx_n)$  eine Nullfolge.

*Beweis.* Sei  $\varepsilon > 0$ . Wähle  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  so, dass  $|x_n| \leq \frac{\varepsilon}{|c|}$  für alle  $n \geq n_\varepsilon$ . Dann gilt  $|cx_n| < \varepsilon$  für alle  $n \geq n_\varepsilon$  und  $|cx_n|$  ist eine Nullfolge.  $\square$

- (c) Für  $|q| < 1$  ist  $(q^n)$  eine Nullfolge (für  $|q| \geq 1$  offensichtlich nicht, da  $|q^n| \geq 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ ).

*Beweis.* Sei  $|q| < 1$  also  $|q| = \frac{1}{1+h}$  für ein  $h > 0$ . Dann folgt aus der Bernoullischen Ungleichung

$$\frac{1}{|q^n|} = \frac{1}{|q|^n} = (1+h)^n \geq 1+nh > nh,$$

also  $|q^n| \leq \frac{1}{nh}$ , und die Aussage folgt mit (a), (b) und Beispiel 2.11 (a).  $\square$

- (d) Jede Teilfolge  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  einer Nullfolge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine Nullfolge.

*Beweis.* Sei  $\varepsilon > 0$  und wähle  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  so, dass  $|x_n| < \varepsilon$  für alle  $n \geq n_\varepsilon$ . Dann ist wegen  $n_k \geq k$  auch  $|x_{n_k}| < \varepsilon$  für alle  $k \geq n_\varepsilon$ .  $\square$

- (e) Mit  $(x_n)$  und  $(y_n)$  sind auch  $(x_n \pm y_n)$  Nullfolgen.

*Beweis.* Folgt aus der Dreiecksungleichung  $|x_n \pm y_n| \leq |x_n| + |y_n|$ .  $\square$

- (f) Ist  $(x_n)$  eine Nullfolge und  $(y_n)$  beschränkt, d.h. es gibt ein  $c \in \mathbb{R}$  mit  $|y_n| \leq c$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , so ist auch  $(x_n y_n)$  eine Nullfolge.

*Beweis.* Folgt aus  $|x_n y_n| \leq c|x_n|$ .  $\square$

- (g) Jede Nullfolge  $(x_n)$  ist beschränkt.

*Beweis.* Zu  $\varepsilon = 1$  existiert ein  $n_1$  mit  $|x_n| < 1$  für alle  $n \geq n_1$ . Also gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$ , dass  $|x_n| \leq \max\{1, |x_1|, |x_2|, \dots, |x_{n_1-1}|\}$ .  $\square$

- (h) Ist  $(x_n)$  eine Nullfolge, so ist auch  $(\sqrt[m]{|x_n|})$  eine Nullfolge.

*Beweis.* Sei  $\varepsilon > 0$  und  $n_\varepsilon$  so, dass  $|x_n| < \varepsilon^m$ . Dann ist  $\sqrt[m]{|x_n|} < \varepsilon$  für alle  $n \geq n_\varepsilon$ .  $\square$

## 2.14 Proposition. Eigenschaften konvergenter Folgen

- (a) Grenzwerte sind eindeutig, d.h. aus  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y$  folgt  $x = y$ .

*Beweis.* Angenommen,  $x \neq y$ . Setze  $\varepsilon = \frac{1}{2}|x - y| > 0$ , dann impliziert  $|x_n - x| < \varepsilon$  aber  $|x_n - y| > \varepsilon$ . Also kann  $(x_n)$  nicht gleichzeitig gegen  $x$  und gegen  $y$  konvergieren.  $\square$

- (b) Jede konvergente Folge ist beschränkt.

*Beweis.*  $|x_n| \leq |x_n - x| + |x|$  und  $|x_n - x|$  ist nach Proposition 2.13 (g) beschränkt.  $\square$

- (c) Konvergiert  $(x_n)$  gegen  $x$ , so ist  $(|x_n|)$  konvergent gegen  $|x|$ .

*Beweis.*  $\left| |x_n| - |x| \right| \leq |x_n - x|$ .  $\square$

- (d) Dreifolgensatz: Gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$  und  $x_n \leq y_n \leq z_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , so ist auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$ .

*Beweis.* Übungsaufgabe.  $\square$

## 2 Vollständigkeit und Konvergenz

(e) Ist  $M \subset \mathbb{R}$  beschränkt und  $s = \sup M$ , so gibt es eine Folge  $(x_n)$  in  $M$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = s$ .

*Beweis.* Zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  wähle  $x_n \in M$  mit  $x_n > s - \frac{1}{n}$ . So ein  $x_n$  gibt es immer, denn sonst wäre ja  $s - \frac{1}{n} < s = \sup M$  schon eine obere Schranke an  $M$ . Also ist  $s - \frac{1}{n} < x_n \leq s$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = s$  folgt aus (d).  $\square$

(f) Seien  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$  und  $a, b \in \mathbb{R}$ , dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (ax_n + by_n) = ax + by$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = xy.$$

Falls  $y \neq 0$  ist, so gilt auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}.$$

*Beweis.* Wir zeigen exemplarisch die letzte Aussage: Für  $n$  groß genug ist  $|y_n| > \frac{1}{2}|y|$  also  $y_n \neq 0$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \left| \frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y} \right| &= \left| \frac{x_n y - x y_n}{y_n y} \right| \leq \frac{2}{|y|^2} |x_n y - x y_n| \\ &= \frac{2}{|y|^2} |(x_n y - x y) + (x y - x y_n)| \\ &\leq \frac{2}{|y|^2} (|x_n - x| |y| + |y_n - y| |x|) \\ &= \frac{2}{|y|} |x_n - x| + \frac{2|x|}{|y|^2} |y_n - y| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

$\square$

(g) Jede Teilfolge einer konvergenten Folge konvergiert gegen den gleichen Grenzwert.

(h) Ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ , so ist für jedes  $m \in \mathbb{N}$  auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[m]{|x_n|} = \sqrt[m]{|x|}$ .

*Beweis.* Übungsaufgabe.  $\square$

Oft ist es nicht ganz einfach, die Konvergenz einer Folge direkt zu zeigen, insbesondere, wenn man den Grenzwert nicht kennt. Häufig genügt es aber auch zu wissen, dass die Folge überhaupt konvergiert und dafür zeigen wir einfache aber wichtige Kriterien.

### 2.15 Definition. Monotone Folgen

Eine Folge  $(x_n)$  heißt **monoton wachsend** (bzw. **fallend**), falls  $x_n \leq x_{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  (bzw.  $x_n \geq x_{n+1}$ ). Sie heißt **streng monoton** wachsend (bzw. fallend), falls sogar  $x_n < x_{n+1}$  (bzw.  $x_n > x_{n+1}$ ) für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt.

### 2.16 Satz. Monotoniekriterium

Jede monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge  $(x_n)$  in  $\mathbb{R}$  konvergiert gegen  $x := \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ .

*Beweis.* Zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es aufgrund der Definition des Supremums ein  $n_\varepsilon$  so, dass  $x - \varepsilon < x_{n_\varepsilon} \leq x$ . Da  $x_n$  monoton wächst, ist aber auch

$$x - \varepsilon < x_n \leq x \quad \text{für alle } n \geq n_\varepsilon,$$

woraus die Konvergenz folgt.  $\square$

**2.17 Bemerkung.** Da man bei einer Folge endlich viele Glieder beliebig abändern oder auch weglassen kann, ohne das Konvergenzverhalten zu ändern, reicht es beispielsweise die Monotonie der Folge ab einem endlichen  $N \in \mathbb{N}$  zu fordern. Man sagt dann auch, eine Eigenschaft (Monotonie, Positivität etc.) gilt für  $n$  groß genug.

**2.18 Beispiele.** (a) Für jedes  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  ist die Folge  $a_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$  ab einem hinreichend großen  $n$  streng monoton wachsend und beschränkt und somit konvergent:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} = \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(\frac{1 + \frac{x}{n+1}}{1 + \frac{x}{n}}\right)^{n+1} \\ &= \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 + \frac{\frac{x}{n+1} - \frac{x}{n}}{1 + \frac{x}{n}}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 - \frac{\frac{x}{n(n+1)}}{\frac{n+x}{n}}\right)^{n+1} \\ &= \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 + \underbrace{\frac{-x}{(n+1)(n+x)}}_{> -1 \text{ für } n > x-1}\right)^{n+1} \\ &\stackrel{\text{Bernoulli}}{>} \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 - \frac{x}{n+x}\right) = \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-1} = 1. \end{aligned}$$

Somit ist die Folge  $a_n$  ab einem hinreichend grossen  $n$  streng monoton wachsend. Weiterhin ist  $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$  beschränkt durch  $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}$ , da

$$\frac{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}} = \left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)\left(1 - \frac{x}{n}\right)\right)^n = \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n < 1$$

für  $n > |x|$ .

Schließlich ist  $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}$  für  $n$  groß genug monoton fallend, da ja  $\left(1 + \frac{(-x)}{n}\right)^n$  für  $n$  groß genug monoton wächst. Also ist  $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}$  und somit auch  $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$  beschränkt.

(b) Es gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ : Die Folge  $a_n = \sqrt[n]{n}$  ist nach unten beschränkt, denn  $a_n \geq 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , und monoton fallend für  $n$  groß genug, denn

$$\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^{n(n+1)} = \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \stackrel{\text{(a)}}{\leq} \frac{c}{n} < 1$$

für  $n$  groß genug. Also konvergiert  $(a_n)$  (und auch die Teilfolge  $(a_{2n})$ ) nach dem Monotoniekriterium, sagen wir gegen  $a$ . Wir zeigen nun, dass  $a = \sqrt{a}$  gilt, woraus dann  $a^2 = a$  und somit  $a = 1$  folgt.

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{2} \sqrt[2n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = 1 \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a}.$$

Bemerkung: Später folgern wir das aus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n} \ln n} = e^0 = 1.$$

Wir kommen nun zu einer alternativen Charakterisierung der Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$ , also der Idee, dass  $\mathbb{R}$  keine Lücken hat. Wir formulieren die Aussage als Satz, da sie eine Konsequenz aus dem Supremumsaxiom ist.

### 2.19 Satz. Intervallschachtelungsprinzip

Eine Folge von Intervallen  $[a_n, b_n] = \{x \in \mathbb{R} \mid a_n \leq x \leq b_n\}$  mit  $a_n < b_n$  und  $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  sowie  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$  heißt Intervallschachtelung.

Zu jeder Intervallschachtelung gibt es ein eindeutiges  $x \in \mathbb{R}$  mit  $x \in [a_n, b_n]$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Es gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x$ .

## 2 Vollständigkeit und Konvergenz

*Beweis.* Aus der Schachtelungseigenschaft  $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$  folgt sofort, dass  $(a_n)$  monoton wächst und  $(b_n)$  monoton fällt. Weiterhin ist

$$a_n < b_m \quad \text{für alle } n, m \in \mathbb{N},$$

denn aus  $a_n \geq b_m$  folgt entweder  $a_n \geq b_m \geq b_n$  falls  $n > m$  oder  $a_m \geq a_n \geq b_m$  falls  $n < m$ , beides ein Widerspruch zur Annahme, dass  $a_n < b_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Aufgrund des Monotoniekriteriums gilt also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a := \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b := \inf\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

mit

$$a \leq b.$$

Für jedes  $n$  gilt

$$0 \leq b - a \leq b_n - a_n,$$

was wegen  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$  schon  $b - a = 0$  impliziert. Mit  $x := b = a$  gilt dann

$$a_n \leq a = x = b \leq b_n, \quad \text{also} \quad x \in [a_n, b_n] \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Jedes  $\tilde{x} \in \mathbb{R}$  mit  $\tilde{x} \neq x$  liegt aber schließlich außerhalb von  $[a_n, b_n]$ : Falls  $\tilde{x} < x = a$ , dann gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $a_n > \tilde{x}$ , falls  $\tilde{x} > x = b$ , dann gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $b_n < \tilde{x}$ . Damit ist  $x$  eindeutig.  $\square$

Für eine reelle Zahl  $x > 0$  sei die **Dezimalbruchentwicklung** definiert durch

$$\begin{aligned} x_0 &:= \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k < x\} \\ x_1 &:= \max\{k \in \{0, 1, 2, \dots, 9\} \mid x_0 + k \cdot 10^{-1} < x\} \\ &\vdots \\ x_{n+1} &:= \max\{k \in \{0, \dots, 9\} \mid x_0 + x_1 \cdot 10^{-1} + \dots + x_n \cdot 10^{-n} + k \cdot 10^{-n-1} < x\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Es wird also jedem  $x > 0$  eine Folge  $(x_n)$  mit  $x_n \in \{0, \dots, 9\}$  für  $n \geq 1$  zugeordnet, die nicht ab einer Stelle identisch Null ist. (Warum?)

### 2.20 Korollar. Dezimalbruchentwicklung

Zu jeder Dezimalfolge  $(x_n)$ , also  $x_n \in \{0, \dots, 9\}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $x_n \neq 0$  für unendlich viele  $n \in \mathbb{N}$ , gibt es genau eine reelle Zahl  $x$  im Intervall  $(0, 1]$ , welche die Folge  $(x_n)$  als Dezimalbruchentwicklung hat.

*Beweis.* Durch  $(x_n)$  wird die Intervallschachtelung

$$a_n := x_1 \cdot 10^{-1} + \dots + x_n \cdot 10^{-n}, \quad b_n := a_n + 10^{-n}$$

definiert. Gemäß Satz 2.19 gilt also  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x$ . Da  $x_n \neq 0$  für unendlich viele  $n \in \mathbb{N}$  gilt, ist  $a_n < x \leq b_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Damit ergibt sich aber auch sofort die Behauptung, dass  $(x_n)$  die Dezimalbruchentwicklung von  $x$  ist.  $\square$

Man schreibt natürlich für die Dezimalbruchentwicklung einer reellen Zahl wieder

$$x = x_0, x_1 x_2 x_3 \dots$$

Nach obigem Satz gilt: Verschiedene Zahlen haben verschiedene Entwicklungen und verschiedene Entwicklungen stehen für verschiedene Zahlen. Allerdings ist die Entwicklung von 2 durch 1,9999... gegeben. Diese Feinheit werden wir aber in Zukunft ignorieren und statt 1,4999... wieder 1,5 schreiben.

**2.21 Bemerkung.** Analog definiert man  $b$ -adische Entwicklung für  $b \in \mathbb{N}, b \geq 2$ .

$$x = x_0 + x_1 \cdot b^{-1} + x_2 \cdot b^{-2} + \dots$$

Ein weiteres Konvergenzkriterium und eine weitere Charakterisierung der Vollständigkeit liefert das Konzept der Cauchyfolge.

### 2.22 Definition. Cauchyfolge

Eine Folge  $(x_n)$  in  $\mathbb{R}$  heißt **Cauchyfolge**, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  gibt, sodass für alle  $n, m \geq n_\varepsilon$  gilt  $|x_n - x_m| < \varepsilon$ . In Quantorenschreibweise

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geq n_\varepsilon \quad |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

In einer Cauchyfolge liegen also je zwei beliebige Folgenglieder ab einem  $n_\varepsilon$  höchstens  $\varepsilon$  voneinander entfernt.

**2.23 Bemerkung.** Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge: sei  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  so, dass  $|x - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$  für alle  $n \geq n_\varepsilon$ , dann gilt für alle  $n, m \geq n_\varepsilon$

$$|x_n - x_m| = |x_n - x + x - x_m| \leq |x_n - x| + |x - x_m| < \varepsilon.$$

### 2.24 Satz. Konvergenzkriterium von Cauchy

Jede Cauchyfolge in  $\mathbb{R}$  konvergiert.

Den Beweis holen wir gleich nach.

**2.25 Bemerkung.** Die Definition der Cauchyfolge kann man sofort auf Folgen in metrischen Räumen (das sind Räume, in denen ein Abstand  $d(x_n, x_m)$  zwischen Punkten definiert ist) verallgemeinern. Man sagt, ein metrischer Raum ist **vollständig**, falls jede Cauchyfolge in diesem Raum konvergiert. Die reellen Zahlen sind also auch gemäß dieser Definition vollständig.

Die im Supremumsaxiom ausgedrückte Ordnungsvollständigkeit von  $\mathbb{R}$  besagt mehr als die Vollständigkeit nach Cauchy, da sie auch die Archimedische Eigenschaft impliziert. Wir könnten allerdings das Supremumsaxiom durch die zwei Axiome ‘‘Cauchy Kriterium’’ und ‘‘Archimedische Eigenschaft’’ ersetzen.

**2.26 Lemma.** Jede Cauchyfolge ist beschränkt.

*Beweis.* Sei  $(x_n)$  eine Cauchyfolge,  $\varepsilon = 1$  und  $n_1$  so, dass  $|x_n - x_m| < 1$  für  $m, n \geq n_1$ . Dann gilt für  $n \geq n_1$

$$|x_n| = |x_n - x_{n_1} + x_{n_1}| \leq |x_n - x_{n_1}| + |x_{n_1}| < 1 + |x_{n_1}|,$$

also

$$|x_n| \leq \max\{|x_1|, \dots, |x_{n_1-1}|, 1 + |x_{n_1}|\}.$$

□

### 2.27 Definition. Häufungspunkt

Eine Zahl  $x$  heißt **Häufungspunkt** einer Folge  $(x_n)$ , falls  $(x_n)$  eine Teilfolge besitzt, die gegen  $x$  konvergiert.

**2.28 Beispiele.** (a) Die Folge

$$(x_n) = ((-1)^n) = (-1, 1, -1, 1, -1, \dots)$$

konvergiert zwar nicht, hat aber die Häufungspunkte 1 und  $-1$ .

## 2 Vollständigkeit und Konvergenz

(b) Eine konvergente Folge hat als einzigen Häufungspunkt ihren Grenzwert, da nach Proposition 2.14 (g) jede Teilfolge einer konvergenten Folge ebenfalls gegen den Grenzwert der ursprünglichen Folge konvergiert.

(c) Eine Folge kann sogar  $\infty$ -viele Häufungspunkte haben, z.B. ist für

$$(x_n) = (1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, 1, \dots)$$

jede natürliche Zahl ein Häufungspunkt.

(d) Manche Folgen haben gar keinen Häufungspunkt, z.B.

$$(x_n) = (n) = (1, 2, 3, 4, \dots).$$

### 2.29 Merksregel. Konvergenz und Häufungspunkt

Eine Folge  $(x_n)$  konvergiert gegen  $x$ , wenn in jeder  $\varepsilon$ -Umgebung von  $x$  schließlich alle Folgenglieder liegen.

Eine Folge  $(x_n)$  hat  $x$  als Häufungspunkt, wenn in jeder  $\varepsilon$ -Umgebung von  $x$  unendlich-viele Folgenglieder liegen.

### 2.30 Satz. Bolzano-Weierstraß

Jede beschränkte Folge  $(x_n)$  in  $\mathbb{R}$  hat mindestens einen Häufungspunkt.

*Beweis.* Da  $(x_n)$  beschränkt, gibt es ein Intervall  $[a, b]$  in dem die Folge enthalten ist, also  $x_n \in [a, b]$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Halbiert man das Intervall gemäß  $[a, b] = [a, \frac{a+b}{2}] \cup [\frac{a+b}{2}, b]$ , so sind in mindestens einem der Teilintervalle unendlich-viele Folgenglieder enthalten. Wir nennen diese Teilintervall  $I_1$  und setzen  $n_1 := \min\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in I_1\}$ . Nun wiederholen wir diesen Schritt rekursiv: im  $k$ -ten Schritt wird das zuvor definierte Intervall  $I_k$ , welches unendlich-viele Folgenglieder enthält, halbiert. Mindestens eines der Teilintervalle, nennen wir es  $I_{k+1}$ , enthält wieder unendlich-viele Folgenglieder und wir setzen  $n_{k+1} := \min\{n \in \mathbb{N} \mid n > n_k \text{ und } x_n \in I_{k+1}\}$ .

Die Intervallfolge  $I_k$  ist eine Intervallschachtelung, die nach Satz 2.19 genau einen Punkt enthält  $x$ , gegen den die Teilfolge  $(x_{n_k})$  dann konvergiert.  $\square$

Nun können wir den Beweis des Cauchyriteriums, Satz 2.24 nachreichen.

*Beweis. des Cauchyriteriums.* Nach Lemma 2.26 ist jede Cauchyfolge beschränkt und hat somit einen Häufungspunkt  $x$ , d.h. eine gegen  $x$  konvergente Teilfolge. Die Konvergenz einer Teilfolge  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  einer Cauchyfolge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $x$  impliziert aber die Konvergenz der ganzen Folge gegen  $x$ . Das sieht man so:

Sei  $\varepsilon > 0$ . Da  $(x_n)$  Cauchy ist, gibt es ein  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  so, dass  $|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$  für alle  $n, m \geq n_\varepsilon$ . Da  $(x_{n_k})$  gegen  $x$  konvergiert, existiert ein  $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$  so, dass  $n_{k_\varepsilon} \geq n_\varepsilon$  und  $|x_{n_{k_\varepsilon}} - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Dann ist für alle  $n \geq n_\varepsilon$

$$|x_n - x| = |x_n - x_{n_{k_\varepsilon}} + x_{n_{k_\varepsilon}} - x| \leq |x_n - x_{n_{k_\varepsilon}}| + |x_{n_{k_\varepsilon}} - x| < \varepsilon.$$

$\square$

### 2.31 Definition. Divergente Folgen

Eine Folge  $(x_n)$  die nicht konvergiert, heißt **divergent**. Sie heißt **bestimmt divergent** und man schreibt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty,$$

falls

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists n_M \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_M \quad x_n \geq M \quad \text{bzw.} \quad x_n \leq M.$$

Eine Folge divergiert bestimmt gegen Unendlich, wenn für jedes (noch so große)  $M \in \mathbb{R}$  gilt, dass schließlich alle Folgenglieder größer als  $M$  sind.

**2.32 Beispiel.** Die Folge  $(x_n) = (n) = (1, 2, 3, 4, \dots)$  ist bestimmt divergent gegen Unendlich.

## 2.3 Mächtigkeit von Mengen und Abbildungen zwischen Mengen

### 2.33 Definition. Endliche Mengen

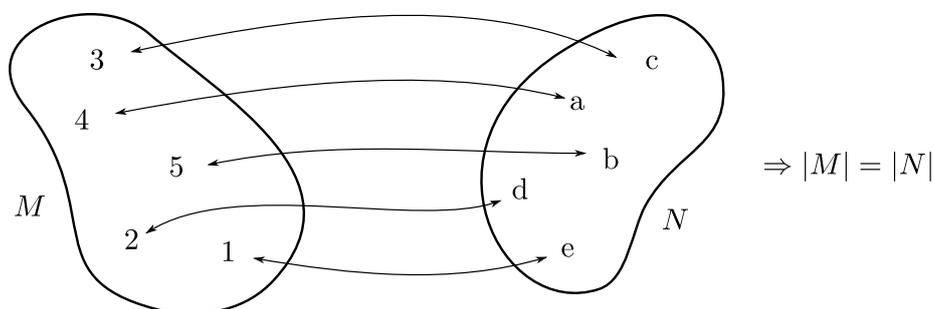
Eine Menge  $M$  heißt **endlich**, falls sie endlich viele Elemente enthält. Ihre Mächtigkeit  $|M|$  ist dann die Zahl ihrer Elemente,  $|M| \in \mathbb{N}_0$ .

**2.34 Beispiele.** (a) Die leere Menge  $\emptyset$  enthält keine Elemente, es gilt also  $|\emptyset| = 0$ .

(b) Die Menge  $M = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 \leq 10\}$  hat Mächtigkeit  $|M| = 3$ .

Bei unendlichen Mengen ist die Frage nach der Mächtigkeit nicht ganz so offensichtlich zu beantworten. Was ist beispielsweise mit  $|\mathbb{N}|$  und  $|\mathbb{R}|$ ? Sicherlich ist  $|\mathbb{N}| = \infty$  und  $|\mathbb{R}| = \infty$ , aber gilt auch  $|\mathbb{N}| = |\mathbb{R}|$  und macht die Frage überhaupt Sinn?

Klar, zwei Mengen sind gleichmächtig, falls wir eine eins-zu-eins Zuordnung zwischen ihren Elementen finden können:



### 2.35 Definition. Funktion/Abbildung

Eine Funktion oder Abbildung

$$f : M \rightarrow N, x \mapsto f(x),$$

ordnet **jedem** Element  $x \in M$  ein Element  $f(x) \in N$  zu.

Dabei können zwei verschiedene  $x, x' \in M$ ,  $x \neq x'$ , auf dasselbe  $y \in N$  abgebildet werden, also  $f(x) = f(x') = y$ . Es kann aber auch Werte  $y \in N$  geben, auf die kein  $x \in M$  abgebildet wird, also  $f(x) \neq y$  für alle  $x \in M$ .

Wir nennen  $M$  den Definitions- oder Urbildbereich,  $N$  die Zielmenge und

$$\text{Bild} f := \{y \in N \mid \text{es gibt ein } x \in M \text{ mit } y = f(x)\} \subset N$$

das Bild von  $f$ .

Eine Funktion  $f : M \rightarrow N$  heißt **injektiv**, falls jeder Wert  $y \in N$  höchstens einmal angenommen wird. Also

$$\begin{aligned} f \text{ ist injektiv} &\Leftrightarrow f(x) = f(x') \text{ impliziert } x = x' \\ &\Leftrightarrow x \neq x' \text{ impliziert } f(x) \neq f(x'). \end{aligned}$$

Eine Funktion  $f : M \rightarrow N$  heißt **surjektiv**, falls jeder Wert  $y \in N$  mindestens einmal angenommen wird. Also

$$\begin{aligned} f \text{ ist surjektiv} &\Leftrightarrow \forall y \in N \exists x \in M \text{ mit } f(x) = y \\ &\Leftrightarrow \text{Bild} f = N. \end{aligned}$$

Eine Funktion  $f : M \rightarrow N$  heißt **bijektiv**, falls sie injektiv und surjektiv ist, falls also jeder Wert  $y \in N$  genau einmal angenommen wird. Eine Bijektion ist somit eine eins-zu-eins Zuordnung der Elemente von  $M$  und  $N$ .

## 2 Vollständigkeit und Konvergenz

- 2.36 Beispiele.** (a) Die Funktion  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $z \mapsto f(z) = z^2$  ist weder injektiv, da  $f(z) = f(-z)$ , noch surjektiv, da  $\text{Bild} f \neq \mathbb{Z}$ .
- (b) Die Funktion  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $n \mapsto f(n) = n^2$  ist injektiv, da für  $n, m \in \mathbb{N}$  aus  $n^2 = m^2$  schon  $n = m$  folgt. Wegen  $\text{Bild} f \neq \mathbb{N}$  ist  $f$  wieder nicht surjektiv.
- (c) Die Funktion  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $z \mapsto f(z) = -z$  ist injektiv und surjektiv, also bijektiv.

### 2.37 Bemerkung. Umkehrabbildung

Offenbar existiert zu  $f : M \rightarrow N$  genau dann eine Umkehrabbildung  $f^{-1} : N \rightarrow M$  mit

$$(f^{-1} \circ f)(x) := f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{für alle } x \in M$$

und

$$(f \circ f^{-1})(y) := f(f^{-1}(y)) = y \quad \text{für alle } y \in N,$$

falls  $f$  bijektiv ist.

**Achtung:** Die Umkehrabbildung  $f^{-1}$  ist nicht zu verwechseln mit der Funktion  $\frac{1}{f}$ , welche für  $f : M \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$  definiert ist durch  $\frac{1}{f} : M \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$ .

### 2.38 Definition. Gleichmächtige Mengen

Zwei Mengen  $M$  und  $N$  heißen gleichmächtig,  $|M| = |N|$ , falls es eine Bijektion  $f : M \rightarrow N$  gibt.

**2.39 Beispiel.** Die Mengen  $M = \mathbb{N}$  und  $N = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ gerade}\}$  sind gleichmächtig, da  $f : M \rightarrow N$ ,  $n \mapsto f(n) = 2n$  bijektiv ist.

### 2.40 Definition. Abzählbar unendliche Mengen

Eine Menge  $M$  heißt **abzählbar unendlich**, falls sie die gleiche Mächtigkeit wie die natürlichen Zahlen hat, also  $|M| = |\mathbb{N}|$  gilt.

Eine Menge  $M$  heißt **abzählbar**, falls  $|M| = |\mathbb{N}|$  oder  $|M| \in \mathbb{N}_0$ .

Offenbar ist  $M$  genau dann abzählbar, falls sich  $M$  als Folge  $M = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  schreiben lässt.

### 2.41 Satz. Abzählbarkeit der rationalen Zahlen

Die Menge  $\mathbb{Q}$  der rationalen Zahlen ist abzählbar.

*Beweis.* **Cantors Diagonaltrick Nummer 1:** Das folgende Schema liefert eine „Abzählung“  $(q_1, q_2, q_3, \dots)$  der positiven rationalen Zahlen, wobei kürzbare Brüche weggelassen werden,

$$\begin{array}{cccccc}
 \frac{1}{1} & & \frac{2}{1} & \rightarrow & \frac{3}{1} & & \frac{4}{1} & \rightarrow & \frac{5}{1} & \dots \\
 \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow \\
 \frac{1}{2} & & \frac{2}{2} & & \frac{3}{2} & & \frac{4}{2} & & \frac{5}{2} & \dots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \\
 \frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & & \frac{3}{3} & & \frac{4}{3} & & \frac{5}{3} & \dots \\
 \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow \\
 \frac{1}{4} & & \frac{2}{4} & & \frac{3}{4} & & \frac{4}{4} & & \frac{5}{4} & \dots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \\
 \frac{1}{5} & & \frac{2}{5} & & \frac{3}{5} & & \frac{4}{5} & & \frac{5}{5} & \dots \\
 \downarrow & \nearrow & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \dots
 \end{array}$$

also  $(q_1, q_2, q_3, \dots) = (1, \frac{1}{2}, 2, 3, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 4, 5, \frac{1}{5}, \dots)$ . In der  $k$ -ten Zeile steht hier die Folge  $(\frac{n}{k})_{n \in \mathbb{N}}$ . Somit ist sichergestellt, dass jeder positive Bruch in der so konstruierten Folge  $(q_1, q_2, q_3, \dots)$  vorkommt. Eine Abzählung von  $\mathbb{Q}$  erhält man dann durch  $(0, q_1, -q_1, q_2, -q_2, \dots)$ .  $\square$

**2.42 Satz.** Die Vereinigung abzählbar vieler abzählbarer Mengen ist wieder abzählbar.

*Beweis.* Cantors Diagonaltrick Nummer 1. □

**2.43 Satz. Überabzählbarkeit von  $\mathbb{R}$**

Die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  sind nicht abzählbar, man sagt, sie sind überabzählbar.

*Beweis.* Cantors Diagonaltrick Nummer 2: Wir zeigen, dass schon das Intervall  $(0, 1) \subset \mathbb{R}$  nicht abzählbar ist. Angenommen, es existiert eine Abzählung von  $(0, 1)$ , also  $(0, 1) = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ . In Dezimalbruchentwicklung schreiben wir

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, x_{11} x_{12} x_{13} x_{14} \cdots \\ x_2 &= 0, x_{21} x_{22} x_{23} x_{24} \cdots \\ x_3 &= 0, x_{31} x_{32} x_{33} x_{34} \cdots \\ x_4 &= 0, x_{41} x_{42} x_{43} x_{44} \cdots \end{aligned}$$

Die Zahl  $y = 0, y_1 y_2 y_3 \dots$  mit der Dezimalbruchentwicklung

$$y_n = \begin{cases} 1 & \text{falls } x_{nn} \neq 1 \\ 2 & \text{falls } x_{nn} = 1 \end{cases}$$

liegt im Intervall  $(0, 1)$ , kommt aber in obigem Schema nicht vor. Das steht im Widerspruch zur Annahme  $(0, 1) = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ . □

**2.44 Bemerkung. Kontinuumshypothese von Cantor (1878)**

Die Kontinuumshypothese besagt, dass jede Teilmenge von  $\mathbb{R}$  entweder abzählbar oder gleichmächtig zu  $\mathbb{R}$  ist, also für jedes  $M \subset \mathbb{R}$  gilt, dass entweder  $|M| < \infty$  oder  $|M| = |\mathbb{N}|$  oder  $|M| = |\mathbb{R}|$ .

Kurt Gödel (1938): die Kontinuumshypothese läßt sich aus den üblichen Axiomen der Mengenlehre (Zermelo-Fraenkel-Axiome) heraus nicht widerlegen.

Paul Cohen (1960): die Kontinuumshypothese läßt sich mit Hilfe den üblichen Axiome der Mengenlehre (Zermelo-Fraenkel-Axiome) nicht beweisen.

Die Kontinuumshypothese ist also innerhalb der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre nicht entscheidbar.



# 3 Elementare Funktionen und Stetigkeit

## 3.1 Die Exponentialfunktion

Wie wir im letzten Abschnitt gezeigt haben, konvergieren die Folgen  $(1 + \frac{x}{n})^n$  und  $(1 - \frac{x}{n})^{-n}$  gegen denselben Grenzwert und wir definieren die Exponentialfunktion zunächst durch

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \exp(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}.$$

### 3.1 Satz. Exponentialgesetz

Es gilt

(a)  $\exp(0) = 1$

(b)  $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}$

Daraus folgt sofort, dass  $\exp(x) > 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  und  $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$  (Übung)

*Beweis.* Teil (a) ist offensichtlich. Für (b) stellen wir fest, dass

$$\exp(x + y) - \exp(x) \exp(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left( \left(1 + \frac{x+y}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n \right)}_{(*)}.$$

Der Ausdruck (\*) hat die Form

$$c^n - (ab)^n = (c - ab) \sum_{k=1}^n c^{n-k} \cdot (ab)^{k-1} \quad (\text{vgl. Übung 11 b})$$

wobei

$$|ab| \leq \left(1 + \frac{|x|}{n}\right) \left(1 + \frac{|y|}{n}\right), \quad |c| \leq 1 + \frac{|x|}{n} + \frac{|y|}{n} \leq \left(1 + \frac{|x|}{n}\right) \left(1 + \frac{|y|}{n}\right)$$

und

$$c - ab = -\frac{xy}{n^2}.$$

Also gilt

$$|c^{n-k} (ab)^{k-1}| \leq \left(1 + \frac{|x|}{n}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{|y|}{n}\right)^{n-1} \leq \left(1 + \frac{|x|}{n}\right)^n \left(1 + \frac{|y|}{n}\right)^n \leq \exp(|x|) \exp(|y|)$$

und somit

$$|(*)| \leq \frac{|x||y|}{n^2} \cdot n \cdot \exp(|x|) \exp(|y|) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

□

### 3.2 Definition und Satz. Die Eulersche Zahl

Die Eulersche Zahl  $e$  ist definiert durch

$$e := \exp(1).$$

Es gilt  $\exp(x) = e^x$  für jede rationale Zahl  $x \in \mathbb{Q}$ , d.h.

$$\left(\exp\left(\frac{q}{p}\right)\right)^p = (\exp(1))^q.$$

### 3 Elementare Funktionen und Stetigkeit

*Beweis.* Übungsaufgabe. □

Daher liegt es nahe, für jede reelle Zahl  $x \in \mathbb{R}$

$$e^x := \exp(x)$$

zu definieren.

#### 3.3 Satz. Eigenschaften der Exponentialfunktion

- (a)  $e^0 = 1$  und  $e^{x+y} = e^x e^y$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}$ .
- (b)  $e^x > 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .
- (c)  $e^x > 1 + x$  für  $x \neq 0$ .
- (d)  $e^x$  ist streng monoton wachsend, d.h. aus  $x < y$  folgt  $e^x < e^y$ .
- (e)  $e^x$  wächst schneller als jede Potenz von  $x$ , d.h. für jedes  $n \in \mathbb{N}$  und jedes  $c \geq 0$  gibts es ein  $x_0 \in \mathbb{R}$  so, dass  $e^x > cx^n$  für  $x > x_0$ .
- (f)  $e^{-x}$  fällt schneller als jede inverse Potenz von  $x$ , d.h. für jedes  $n \in \mathbb{N}$  und jedes  $c > 0$  gibt es ein  $x_0 \in \mathbb{R}$  so, dass  $e^{-x} < cx^{-n}$  für  $x > x_0$ .
- (g) Für  $|x| < 1$  ist  $|e^x - 1| \leq \frac{|x|}{1-|x|}$ .

*Beweis.* (a) und (b) wurden schon gezeigt.

- (c) Für  $x > -1$  (außer  $x = 0$ ) ist  $n \mapsto (1 + \frac{x}{n})^n$  ab  $n = 1$  streng monoton wachsend (vgl. Beispiel 2.18 (a)), also

$$1 + x = (1 + \frac{x}{1})^1 < (1 + \frac{x}{n})^n < e^x.$$

Für  $x \leq -1$  ist  $1 + x \leq 0 < e^x$ .

- (d) Nach (b) und (c) ist  $e^x > 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  und  $e^x > 1$  falls  $x > 0$ . Für  $x < y$  folgt daher

$$e^y - e^x = e^x(e^{y-x} - 1) > 0.$$

- (e) Sei  $\tilde{c} := c^{\frac{1}{2n}}$ . Für  $x > 4n^2\tilde{c} =: x_0$  ist  $\sqrt{x} > 2n\sqrt{\tilde{c}}$  also  $\frac{x}{2n} > \sqrt{\tilde{c}}\sqrt{x}$ . Somit gilt

$$e^x > (1 + \frac{x}{2n})^{2n} > (1 + \sqrt{\tilde{c}x})^{2n} > (\sqrt{\tilde{c}x})^{2n} = cx^n.$$

- (f) Folgt sofort aus (e)

- (g) Da  $(1 - \frac{x}{n})^{-n}$  für  $x < 1$  streng monoton gegen  $e^x$  fällt, ist  $e^x \leq \frac{1}{1-x}$ , also  $e^x - 1 \leq \frac{x}{1-x}$ , was für  $x \geq 0$  die Behauptung ist. Für  $-1 < x < 0$  ist nach (c)  $1 - e^x \leq -x = |x| < \frac{|x|}{1-|x|}$ . □

#### 3.4 Definition. Monotone Funktionen

Eine reelle Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  auf einer Teilmenge  $D \subseteq \mathbb{R}$  heißt **monoton wachsend (fallend)**, falls aus  $x < y$  folgt, dass  $f(x) \leq f(y)$ . Sie heißt **streng monoton wachsend (fallend)**, falls aus  $x < y$  folgt, dass  $f(x) < f(y)$ .

**3.5 Bemerkung.** Streng monotone Funktionen sind injektiv. Denn sei  $f(x) = f(y)$ , dann kann weder  $x < y$  noch  $x > y$  gelten. Also folgt  $x = y$ .

Wir wissen also, dass  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x\}$  injektiv ist. Falls  $\exp$  auch surjektiv ist, so können wir die Umkehrfunktion  $\ln = \exp^{-1}(0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definieren. Surjektivität ist eigentlich klar, da einerseits  $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} = 0$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} e^n = \infty$  und andererseits  $e^x$  keine „Sprünge“ hat, also stetig ist.

Umgangssprachlich heißt eine Funktion  $f$  stetig, wenn sich der Wert  $f(x)$  mit  $x$  kontinuierlich ändert, oder anders gesagt, wenn man den Graphen in einem Zug zeichnen kann.

### 3.6 Definition. Folgenstetigkeit

Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  auf einer Teilmenge  $D \subseteq \mathbb{R}$  heißt stetig im Punkt  $x_0 \in D$ , wenn für jede Folge  $(x_n)$  in  $D$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  gilt, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Die Funktion  $f$  heißt stetig, falls sie in allen Punkten  $x_0 \in D$  stetig ist.

**3.7 Bemerkung.** Folgenstetigkeit bedeutet also, dass man den Limes in die Funktion ziehen kann, also für gegen ein  $x_0 \in D$  konvergente Folgen  $(x_n)$  in  $D$  gilt, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n).$$

**3.8 Beispiele.** (a) Die Funktion  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}$  ist stetig, da für  $x_n \rightarrow x_0 \neq 0$  gilt, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x_0}$ .

(b) Die Funktion

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

ist nicht stetig, da für  $x_n = -\frac{1}{n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = 0 \neq g(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = f(0) = 1$$

gilt.

**3.9 Satz.** Die Exponentialfunktion ist stetig.

*Beweis.* Sei  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ . Dann gilt für  $|x_n - x_0| < 1$ , dass

$$|e^{x_n} - e^{x_0}| = e^{x_0} |e^{x_n - x_0} - 1| \leq e^{x_0} \frac{|x_n - x_0|}{1 - |x_n - x_0|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

□

### 3.10 Satz. Zwischenwertsatz

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $f(a) < f(b)$ . Dann gibt es zu jedem Zwischenwert  $y_0 \in (f(a), f(b))$  mindestens ein Urbild  $x_0 \in (a, b)$  mit  $f(x_0) = y_0$ .

Die analoge Aussage gilt für  $f(b) < f(a)$ .

*Beweis.* Sei  $f(a) < y_0 < f(b)$  und

$$M := \{x \in [a, b] \mid f(x) < y_0\}.$$

Dann ist  $\{a\} \in M \neq \emptyset$  und  $M$  ist durch  $b$  nach oben beschränkt. Also existieren  $x_0 := \sup M$  und eine Folge  $(x_n)$  in  $M \subset [a, b]$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ .

Wegen der Stetigkeit von  $f$  und  $f(x_n) < y_0$  gilt nun

$$f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq y_0$$

### 3 Elementare Funktionen und Stetigkeit

und somit insbesondere  $x_0 < b$ . Da andererseits  $x_0 + \frac{1}{n} \notin M$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $x_0 + \frac{1}{n} \in [a, b]$  für  $n$  groß genug, folgt wiederum aus der Stetigkeit von  $f$ , dass  $f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_0 + \frac{1}{n}) \geq y_0$ . Also muss  $f(x_0) = y_0$  gelten.  $\square$

#### 3.11 Satz. über die Umkehrfunktion

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und streng monoton wachsend. Dann bildet  $f$  das Intervall  $[a, b]$  bijektiv auf das Intervall  $[f(a), f(b)]$  ab.

Die Umkehrfunktion

$$\begin{aligned} f^{-1} : [f(a), f(b)] &\rightarrow [a, b] \\ y &\mapsto x \in [a, b] \text{ mit } f(x) = y, \end{aligned}$$

ist ebenfalls stetig und streng monoton wachsend.

Die analoge Aussage gilt für streng monoton fallende Funktionen.

*Beweis.* Setze  $A := f(a)$  und  $B := f(b)$ . Aus  $a < x < b$  folgt  $A < f(x) < B$  für alle  $x \in (a, b)$ , also insbesondere  $A < B$ . Wegen der strengen Monotonie ist  $f$  injektiv und aus dem Zwischenwertsatz folgt, dass  $f$  jeden Wert zwischen  $A$  und  $B$  annimmt, d.h.

$$f : [a, b] \rightarrow [A, B]$$

ist bijektiv. Somit existiert die Umkehrfunktion  $f^{-1} : [A, B] \rightarrow [a, b]$ .

**$f^{-1}$  ist streng monoton wachsend:** Sei  $y < z$ . Wäre  $f^{-1}(y) \geq f^{-1}(z)$  so folgte aus der Monotonie von  $f$ , dass

$$y = f(f^{-1}(y)) \geq f(f^{-1}(z)) = z,$$

ein Widerspruch.

**$f^{-1}$  ist stetig in  $y_0 \in [A, B]$ :** Zunächst bemerken wir, dass  $(f^{-1}(y_0 + \frac{1}{n}))_{n \in \mathbb{N}}$  monoton fällt und durch  $f^{-1}(y_0)$  nach unten beschränkt ist und somit gegen ein  $x_0 \in [a, b]$  konvergiert. Mit der Stetigkeit von  $f$  folgt daraus

$$f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(f^{-1}(y_0 + \frac{1}{n})) = y_0,$$

d.h. es gilt  $f^{-1}(y_0) = x_0$ . Entsprechend folgt

$$f^{-1}(y_0 - \frac{1}{n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f^{-1}(y_0) = x_0.$$

Für  $y_0 = A$  macht nur die erste Aussage Sinn, für  $y_0 = B$  nur die zweite. Man nennt das dann "rechtsseitige" bzw. "linksseitige" Stetigkeit.

Sei nun  $(y_n)$  eine Folge in  $[A, B]$  mit  $y_n \rightarrow y_0$ . Für jedes  $\varepsilon > 0$  existiert nach der Vorbemerkung ein  $N \in \mathbb{N}$  mit

$$f^{-1}(y_0) - f^{-1}(y_0 - \frac{1}{N}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

und

$$f^{-1}(y_0 + \frac{1}{N}) - f^{-1}(y_0) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Außerdem gibt es ein  $N' \in \mathbb{N}$  mit  $N' \geq N$  und

$$|y_n - y_0| < \frac{1}{N'} \quad \text{für alle } n \geq N'.$$

Da  $f^{-1}$  streng monoton steigt, gilt für  $n \geq N'$

$$\begin{aligned} |f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)| &\leq |f^{-1}(y_0 + \frac{1}{N'}) - f^{-1}(y_0 - \frac{1}{N'})| \\ &\leq |f^{-1}(y_0 + \frac{1}{N'}) - f^{-1}(y_0)| + |f^{-1}(y_0) - f^{-1}(y_0 - \frac{1}{N'})| < \varepsilon, \end{aligned}$$

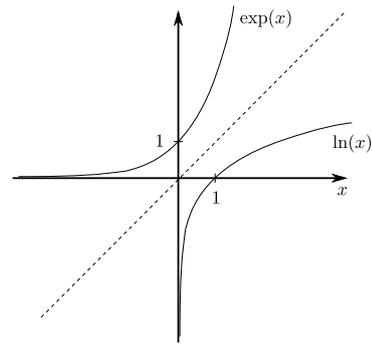
d.h.  $f^{-1}(y_n) \rightarrow f^{-1}(y_0)$ .  $\square$

### 3.12 Definition und Satz. Die Logarithmusfunktion

Die Exponentialfunktion  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  ist bijektiv und stetig. Die Umkehrfunktion wird mit

$$\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln(x)$$

bezeichnet. Die Logarithmusfunktion  $\ln$  ist streng monoton wachsend und stetig.



*Beweis.* Die Exponentialfunktion ist streng monoton wachsend, also injektiv. Nach Satz 3.3 (e) und (f) gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} e^n = \infty$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} = 0$ . Also existieren zu  $y_0 \in (0, \infty)$  Werte  $n_+, n_- \in \mathbb{N}$  mit  $e^{-n_-} < y_0 < e^{n_+}$ . Da  $\exp$  stetig ist, existiert nach dem Zwischenwertsatz  $x_0 \in (-n_-, n_+)$  mit  $\exp(x_0) = y_0$ . Also ist  $\exp$  surjektiv und somit bijektiv.

Der Satz über die Umkehrfunktion besagt nun, dass der Logarithmus  $\ln$  auf jedem endlichen abgeschlossenen Intervall und somit auf ganz  $(0, \infty)$  stetig und streng monoton wachsend ist.  $\square$

### 3.13 Korollar. Eigenschaften des Logarithmus

(a) Es gilt  $e^{\ln y} = y$  für alle  $y > 0$  und  $\ln(e^x) = x$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Insbesondere ist  $\ln 1 = 0$  und  $\ln e = 1$ .

(b) Für  $a, b > 0$  gilt

$$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b) \quad \text{und} \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b).$$

(c) Für  $x > 0$  und  $n \in \mathbb{N}$  ist  $\ln(x^n) = n \ln(x)$ .

(d) Für  $x > -1$  und  $x \neq 0$  ist  $\ln(1+x) < x$ .

(e) Der Logarithmus wächst langsamer als jede Potenz  $x^{\frac{1}{n}}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , für  $x \rightarrow \infty$ , d.h.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall c > 0 \quad \exists x_0 \in (0, \infty) \quad \forall x > x_0 \quad \ln x < cx^{\frac{1}{n}}.$$

(f) Der Logarithmus fällt langsamer als jede Potenz  $x^{-\frac{1}{n}}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , für  $x \rightarrow 0$ , d.h.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall c > 0 \quad \exists x_0 \in (0, \infty) \quad \forall x < x_0 \quad \ln x > -cx^{-\frac{1}{n}}.$$

*Beweis.* (a) ist klar, da  $\ln$  die Umkehrfunktion zu  $\exp$  ist. (b)-(d) werden in den Übungen gezeigt. Zu (e): Da  $\exp$  streng monoton ist gilt

$$\ln x < cx^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow \exp(\ln x) < \exp\left(cx^{\frac{1}{n}}\right) \Leftrightarrow x < \exp\left(\underbrace{cx^{\frac{1}{n}}}_y\right) \Leftrightarrow \frac{1}{c^n} y^n < e^y.$$

Damit läßt sich die Aussage (und analog auch (f)) auf Satz 3.3 (e) zurückführen.  $\square$

### 3.14 Definition und Satz. Reelle Exponenten

Für  $x > 0$  und  $y \in \mathbb{R}$  setzen wir

$$x^y := e^{y \ln x}.$$

Für  $y \in \mathbb{Q}$  stimmt das mit der üblichen Definition  $x^{\frac{q}{p}} = \sqrt[p]{x^q}$  überein.

Für  $x, y > 0$  und  $r, s \in \mathbb{R}$  gelten

$$(x \cdot y)^r = x^r y^r, \quad (x^r)^s = x^{r \cdot s}, \quad x^{r+s} = x^r x^s.$$

Insbesondere ist also  $x^0 = 1$  und  $x^{-r} = \frac{1}{x^r}$ .

### 3 Elementare Funktionen und Stetigkeit

*Beweis.* Übungen. □

**3.15 Bemerkung.** So wie man den „Logarithmus naturalis“  $\ln$  als Umkehrfunktion zu  $e^x$  definiert, kann man den Logarithmus  $\log_a$  zur Basis  $a > 1$  als Umkehrfunktion von  $a^x$  definieren.

Es gilt dann

$$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a},$$

denn  $\ln a^x = \ln e^{x \ln a} = x \ln a$ .

## 3.2 Polynome und rationale Funktionen

Einige Möglichkeiten aus gegebenen Funktionen  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  neue Funktionen zusammensetzen sind

$$\begin{aligned} f + g : D &\rightarrow \mathbb{R}, & x &\mapsto f(x) + g(x) \\ f \cdot g : D &\rightarrow \mathbb{R}, & x &\mapsto f(x) \cdot g(x) \\ \lambda f : D &\rightarrow \mathbb{R}, & x &\mapsto \lambda \cdot f(x), \quad \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

und

$$\frac{f}{g} : D \setminus \{x \in D \mid g(x) = 0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Die Nullfunktion auf  $D$  ist  $0 : D \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 0$ . Dementsprechend bedeutet  $f \neq 0$  lediglich, dass es mindestens ein  $x \in D$  gibt mit  $f(x) \neq 0$ .

Für  $f : D \rightarrow M$  und  $g : M \rightarrow N$  ist die Komposition  $g \circ f : D \rightarrow N$  gegeben durch  $x \rightarrow (g \circ f)(x) := g(f(x))$ .

Besonders einfache Funktionen sind die **Monome**

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^n \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0.$$

Durch Zusammensetzen erhält man **Polynome**

$$x \mapsto a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n =: p(x).$$

Ist  $a_n \neq 0$  so heißt  $n$  der Grad von  $p$ . Der Grad einer konstanten Funktion ist also 0. Wir nehmen im folgenden immer implizit an, dass ein Polynom gegeben in der Form  $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  auch tatsächlich Grad  $n$  hat, also  $a_n \neq 0$  ist.

**3.16 Satz.** Sind zwei Polynome  $p(x) = a_0 + \dots + a_nx^n$  und  $q(x) = b_0 + \dots + b_mx^m$  als Funktionen gleich, d.h.  $p(x) = q(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ , so gilt

$$n = m \quad \text{und} \quad a_j = b_j \quad \text{für alle } j = 0, \dots, n.$$

*Beweis.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $n \geq m$ . Auch  $r := p - q$  ist ein Polynom, hat also die Form  $r(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n$ . Zu zeigen ist  $c_0 = c_1 = \dots = c_n = 0$ . Nach Voraussetzung gilt  $r(x) = 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  und es folgt  $c_0 = r(0) = 0$ . Für  $x \neq 0$  ist dann aber auch

$$0 = \frac{r(x)}{x} = c_1 + c_2x + \dots + c_nx^{n-1}$$

und für  $(x_k)$  mit  $x_k \neq 0$  und  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$  folgt

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} (c_1 + c_2x_k + \dots + c_nx_k^{n-1}) = c_1.$$

Der Rest folgt durch Induktion. □

**3.17 Bemerkung.** Tatsächlich reicht es schon, dass zwei Polynome auf einer abzählbar unendlichen Menge mit Häufungspunkt übereinstimmen, um ihre Gleichheit zu folgern.

Offenbar sind Summen und Produkte von Polynomen wieder Polynome. Sei  $p(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$  und  $q(x) = \sum_{j=0}^m b_j x^j$  dann ist

$$p(x) + q(x) = \sum_{j=0}^{\max\{n,m\}} (a_j + b_j) x^j$$

und

$$p(x) \cdot q(x) = \sum_{j=0}^{n+m} c_j x^j \quad \text{mit} \quad c_j = \sum_{\mu+\nu=j} a_\mu b_\nu = \sum_{k=0}^j a_k b_{j-k}.$$

Dabei setzen wir  $a_{n+1} = a_{n+2} = \dots = 0 = b_{m+1} = \dots$ . Es gilt also

$$\text{Grad}(p \cdot q) = \text{Grad}(p) + \text{Grad}(q).$$

**Rationale Funktionen** sind von der Form

$$x \mapsto \frac{p_1(x)}{p_2(x)}$$

wobei  $p_1$  und  $p_2$  Polynome und  $p_2 \neq 0$  ist (also nicht die Nullfunktion). Als Definitionsbereich kommt zunächst nur  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid p_2(x) \neq 0\}$  in Frage. Aber für  $p_1(x) = 1 - x^2$  und  $p_2 = (1 + x)$  ist das unbefriedigend,

$$\frac{p_1(x)}{p_2(x)} = \frac{1 - x^2}{1 + x} = 1 - x \quad \text{für} \quad x \neq -1,$$

da die Singularität hebbar ist.

### 3.18 Satz. Polynomdivision

Sind  $p_1$  und  $p_2$  Polynome und  $\text{Grad}(p_2) \geq 1$ , so gibt es eindeutig bestimmte Polynome  $q$  und  $r$  mit

$$p_1 = p_2 \cdot q + r \quad \text{und} \quad \text{Grad}(r) < \text{Grad}(p_2).$$

**3.19 Bemerkung.** Das ist analog zur Division mit Rest in  $\mathbb{N}$ : für je zwei natürliche Zahlen  $n_1$  und  $n_2$  gibt es eindeutig bestimmte Zahlen  $q, r \in \mathbb{N}_0$  mit

$$n_1 = n_2 \cdot q + r \quad \text{und} \quad r < n_2,$$

also  $n_1 : n_2 = q$  Rest  $r$ .

*Beweis.* Skizze: Man dividiert wie bei natürlichen Zahlen, beispielsweise

$$\begin{array}{r} (10x^3 + 5x^2 + 3x - 4) : (2x^2 + 2x - 1) = 5x - \frac{5}{2} + \frac{13x - \frac{13}{2}}{2x^2 + 2x - 1} \\ \underline{-10x^3 - 10x^2 + 5x} \\ -5x^2 + 8x - 4 \\ \underline{5x^2 + 5x - \frac{5}{2}} \\ 13x - \frac{13}{2} \end{array}$$

also  $p_1 = p_2 \cdot (5x - \frac{5}{2}) + (13x - \frac{13}{2})$ . Die Eindeutigkeit folgt so: Ist  $p_1 = p_2 q + r = p_2 \tilde{q} + \tilde{r}$ , also  $p_2(q - \tilde{q}) = r - \tilde{r}$ , so wäre bei  $q \neq \tilde{q}$  der Grad der rechten Seite mindestens  $\text{Grad}(p_2)$ , aber  $\text{Grad}(r - \tilde{r}) < \text{Grad}(p_2)$ . Also gilt  $q = \tilde{q}$  und somit auch  $r = \tilde{r}$ .  $\square$

### 3 Elementare Funktionen und Stetigkeit

**3.20 Definition.** Man sagt “ $p_2$  teilt  $p_1$ ”, falls  $p_2 \neq 0$  und  $p_1 = p_2 \cdot q$  für ein Polynom  $q$ . Man schreibt dann  $p_2 \mid p_1$ .

Es gelten die folgenden Aussagen

- (a) Aus  $p_3 \mid p_2$  und  $p_2 \mid p_1$  folgt  $p_3 \mid p_1$ , denn aus  $p_2 = p_3 \cdot q$  und  $p_1 = p_2 \cdot \tilde{q}$  folgt  $p_1 = p_3(q \cdot \tilde{q})$ .
- (b) Aus  $p \mid p_1$  und  $p \mid p_2$  folgt, dass  $p \mid (q_1 p_1 + q_2 p_2)$  für beliebige Polynome  $q_1, q_2$ .
- (c) Gilt  $p_2 \mid p_1$  und  $p_1 \neq 0$ , so ist  $\text{Grad}(p_2) \leq \text{Grad}(p_1)$ .
- (d) Aus  $p_2 \mid p_1$  und  $p_1 \mid p_2$  folgt  $p_1 = c p_2$  für ein  $c \neq 0$ .

Eine Zahl  $\lambda$  heißt **Nullstelle** von  $p$ , falls  $p(\lambda) = 0$ . Es gilt (Übungsaufgabe)

$$p(\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - \lambda) \mid p.$$

Es heißt  $\lambda$  eine  **$k$ -fache Nullstelle** von  $p$ , falls  $(x - \lambda)^k \mid p$ , aber nicht  $(x - \lambda)^{k+1} \mid p$ , also falls

$$p(x) = (x - \lambda)^k q(x)$$

für ein Polynom  $q$  mit  $q(\lambda) \neq 0$ .

**3.21 Bemerkung.** Offenbar hat ein Polynom  $p$  vom Grade  $n$  höchstens  $n$  verschiedene Nullstellen.

**3.22 Bemerkung.** Man kann rationale Funktionen  $\frac{p_1(x)}{p_2(x)}$  kürzen, falls  $p_1$  und  $p_2$  einen gemeinsamen Teiler haben, also insbesondere dann, wenn sie gemeinsame Nullstellen haben.

### 3.23 Satz. Stetigkeit von Summen und Produkten von Funktionen

Sind  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so sind auch

$$\begin{aligned} f + g : D &\rightarrow \mathbb{R}, & x &\mapsto f(x) + g(x) \\ f \cdot g : D &\rightarrow \mathbb{R}, & x &\mapsto f(x) \cdot g(x) \\ \lambda f : D &\rightarrow \mathbb{R}, & x &\mapsto \lambda \cdot f(x), \quad \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

und

$$\frac{f}{g} : D \setminus \{x \in D \mid g(x) = 0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}.$$

stetig. Insbesondere sind also Polynome und rationale Funktionen stetig.

*Beweis.* Sei  $(x_n)$  eine Folge in  $D$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ . Dann ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f + g)(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) + g(x_n)) \stackrel{(1)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) \stackrel{(2)}{=} f(x_0) + g(x_0) = (f + g)(x_0).$$

Bei (1) haben wir verwendet, dass Summen konvergenter Folgen nach Proposition 2.14 (f) wieder konvergent sind, oder anders ausgedrückt, dass die Abbildung  $+$  :  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto x + y$  stetig ist. Schritt (2) ist einfach die Stetigkeit von  $f$  und  $g$ .

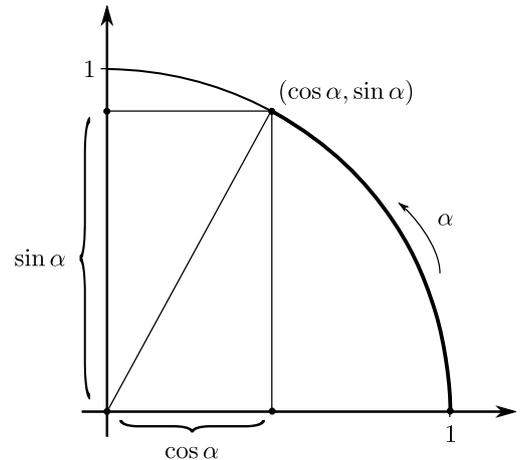
Die anderen Aussagen zeigt man analog. □

### 3.3 Die trigonometrischen Funktionen

Wir definieren die trigonometrischen Funktionen zunächst geometrisch am Einheitskreis

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Im Bogenmaß ist der Winkel  $\alpha$  gleich der Länge des entsprechenden Kreisbogens im Einheitskreis.



Man definiert

$$\sin \alpha := \frac{\text{Länge der Gegenkathete}}{\text{Länge der Hypothenuse}} = y\text{-Koordinate des Punktes auf dem Einheitskreis}$$

und

$$\cos \alpha := \frac{\text{Länge der Ankathete}}{\text{Länge der Hypothenuse}} = x\text{-Koordinate des Punktes auf dem Einheitskreis.}$$

Plots von Funktionsgraphen von Sinus und Kosinus sowie von allen weiteren in diesem Kapitel definierten Funktionen finden Sie beispielsweise auf Wikipedia.

Aus der geometrischen Anschauung ergeben sich folgende Aussagen:

- (a) Pythagoras:  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  (wobei  $\sin^2 \alpha := (\sin \alpha)^2$ ).
- (b) Symmetrie:  $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ , der Sinus ist ungerade  
 $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ , der Kosinus ist gerade.
- (c) Periodizität:  $\sin(\alpha + 2\pi n) = \sin \alpha$  für alle  $n \in \mathbb{Z}$ .  
 $\cos(\alpha + 2\pi n) = \cos \alpha$  für alle  $n \in \mathbb{Z}$ .
- (d) Die Abbildungen

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$$

und

$$\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$$

sind stetig und bijektiv.

Damit können wir die Umkehrfunktionen  $\arcsin = \sin^{-1}$  und  $\arccos = \cos^{-1}$

$$\begin{aligned} \arcsin : [-1, 1] &\rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \arccos : [-1, 1] &\rightarrow [0, \pi] \end{aligned}$$

definieren.

Weiterhin gelten die **Additionstheoreme**

$$\begin{aligned} \cos(\varphi + \psi) &= \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \\ \sin(\varphi + \psi) &= \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi \end{aligned}$$

### 3 Elementare Funktionen und Stetigkeit

und die **Halbwinkelformeln**

$$1 - \cos \varphi = 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

$$1 + \cos \varphi = 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Die Additionstheoreme liest man aus dieser Figur ab:

$$\overline{QA} = \overline{QB} \cdot \cos \varphi = \sin \psi \cos \varphi$$

$$\overline{AR} = \overline{BS} = \overline{OB} \cdot \sin \varphi = \cos \psi \sin \varphi$$

$$\overline{OS} = \overline{OB} \cdot \cos \varphi = \cos \psi \cos \varphi$$

$$\overline{RS} = \overline{AB} = \overline{QB} \cdot \sin \varphi = \sin \psi \sin \varphi$$

also

$$\cos(\varphi + \psi) = \overline{OR} = \overline{OS} - \overline{RS} = \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi$$

$$\sin(\varphi + \psi) = \overline{QR} = \overline{QA} + \overline{AR} = \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi$$

Die Halbwinkelformeln sind Übungsaufgaben.

Man definiert noch die **Tangensfunktion**,

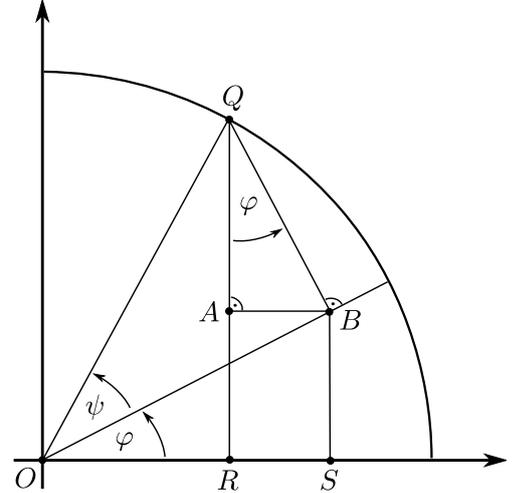
$$\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

und den **Kotangens**,

$$\cot : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\tan \alpha}.$$

Der **Tangens** wächst streng monoton und ist surjektiv, also bijektiv. Die Umkehrfunktion heißt **Arcustangens**,

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad \arctan = \tan^{-1}.$$



# 4 Komplexe Zahlen

## 4.1 Definitionen und elementare Eigenschaften

Historisch wurde die neue Zahl  $i$ , die imaginäre Einheit mit  $i^2 = -1$ , eingeführt, um Rechnungen ausführen zu können, bei denen in Zwischenschritten aus negativen Zahlen Wurzeln gezogen werden mussten

Eine modernere Sichtweise ist es,  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  als Körper aufzufassen: Mit der üblichen Vektorschreibweise  $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  für  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  ist es klar, wie man die Addition zu definieren hat:

$$z_1 + z_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{A})$$

Diese Addition von Vektoren ist kommutativ, assoziativ, hat das neutrale Element  $(0, 0)$ , und das zu  $(x_1, x_2)$  inverse Element ist  $(-x_1, -x_2)$ . Geometrisch entspricht die Addition dem Aneinandersetzen von Vektoren.

Da wir  $z = (x, y)$  mit  $z = x + iy$  identifizieren wollen, legt

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \quad (\text{M})$$

die Multiplikation  $\cdot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$

nahe. Diese Multiplikation in  $\mathbb{R}^2$  ist kommutativ (offensichtlich), assoziativ (nachrechnen oder aus geometrischer Interpretation folgern), hat das neutrale Element  $(1, 0)$ , und das Inverse zu  $(x, y)$  ist  $\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$ . Das Distributivgesetz gilt ebenfalls.

Es bildet also die Zahlenebene  $\mathbb{R}^2$  mit der Addition (A) und der Multiplikation (M) einen Körper, den Körper der komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$ . Insbesondere gelten dieselben algebraischen Rechenregeln wie für reelle Zahlen.

Für  $z \in \mathbb{C}$  schreiben wir statt  $z = (x, y)$  nun  $z = x + iy$ , was im Sinne von

$$(x, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0)$$

zu lesen ist. Es gilt

$$i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0).$$

Wenn wir reelle Zahlen  $x$  mit den Punkten  $(x, 0)$  in  $\mathbb{C}$  identifizieren, so setzt das Rechnen in  $\mathbb{C}$  das Rechnen in  $\mathbb{R}$  fort,

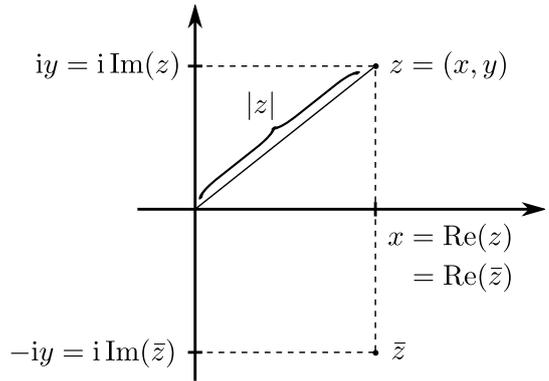
$$\begin{aligned} (x_1, 0) + (x_2, 0) &= (x_1 + x_2, 0) \\ (x_1, 0) \cdot (x_2, 0) &= (x_1x_2, 0). \end{aligned}$$

## 4 Komplexe Zahlen

Nun noch einige Definitionen:

Für  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  heißen

- $\operatorname{Re} z = x$  der Realteil
- $\operatorname{Im} z = y$  der Imaginärteil
- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  der Betrag
- $\bar{z} = x - iy$  das komplex Konjugierte von  $z$ .



### 4.1 Beispiel.

$$z = \frac{2+i}{1+i} = \frac{(2+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2+i-2i-i^2}{1-i^2} = \frac{3-i}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i,$$

also

$$\operatorname{Re} z = \frac{3}{2}, \quad \operatorname{Im} z = -\frac{1}{2}, \quad |z| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}, \quad \bar{z} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i.$$

### 4.2 Bemerkung. Einfache Folgerungen

Für  $z, w \in \mathbb{C}$  gelten die folgenden Beziehungen:

- $|z|^2 = z\bar{z}$
- $|z| = |\bar{z}|$
- $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$  und  $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$
- $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$  und  $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$
- $|zw| = |z||w|$
- $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$  und  $\overline{z\bar{w}} = \bar{z}w$
- $\overline{\bar{z}} = z$
- Die Dreiecksungleichung  $|z+w| \leq |z| + |w|$

*Beweis.* (a) bis (g) sind einfache Übungsaufgaben. Die Dreiecksungleichung folgt aus

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) = |z|^2 + |w|^2 + z\bar{w} + \bar{z}w \\ &= |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) \leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z\bar{w}| \\ &= |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| = (|z| + |w|)^2. \end{aligned}$$

□

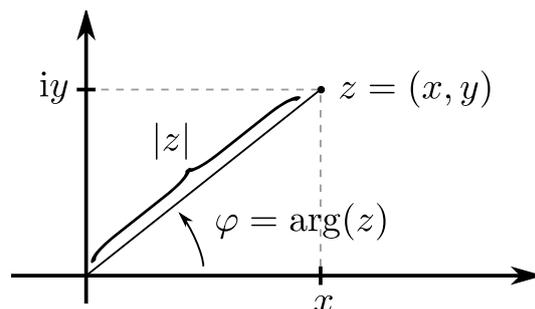
Weiter in den Definitionen. Statt durch kartesische Koordinaten  $(x, y)$  kann man Punkte in der Ebene auch durch Polarkoordinaten  $(r, \varphi)$  charakterisieren. Für eine komplexe Zahl  $z = x + iy$  definiert man daher das **Argument** von  $z$ , kurz  $\arg(z) \in (-\pi, \pi]$  als den Winkel zwischen dem Vektor  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  und der positiven reellen Achse.

Es ist also

$$x = |z| \cos \varphi \quad y = |z| \sin \varphi$$

und

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

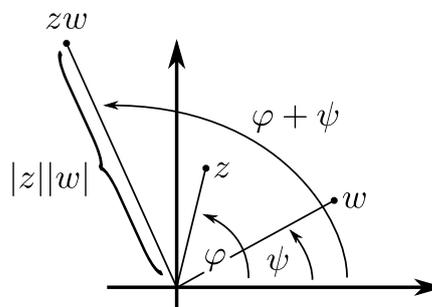


## 4.2 Exponentialfunktion und Logarithmus im Komplexen

Für die Multiplikation komplexer Zahlen  $z, w \in \mathbb{C}$  ergibt sich dann mit  $\varphi = \arg(z)$  und  $\psi = \arg(w)$

$$\begin{aligned} z \cdot w &= |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) \cdot |w|(\cos \psi + i \sin \psi) \\ &= |z||w|((\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi) + i(\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi)) \\ &= |z||w|(\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi)). \end{aligned}$$

Es werden also die Beträge multipliziert und die Winkel addiert. Damit entspricht die komplexe Multiplikation geometrisch einer **Drehstreckung**! Genauer: Multiplikation mit  $z$  operiert auf der Zahlenebene als Drehung um den Winkel  $\varphi = \arg(z)$  und Streckung um den Faktor  $|z|$ .



## 4.2 Exponentialfunktion und Logarithmus im Komplexen

### 4.3 Definition. Die komplexe Exponentialfunktion

Die komplexe Exponentialfunktion ist durch

$$\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z = x + iy \mapsto \exp(z) = e^z := e^x(\cos y + i \sin y)$$

definiert. Sie setzt offenbar die reelle Exponentialfunktion fort, d.h. für  $y = 0$  ist  $e^{x+i0} = e^x$ , und erfüllt das Exponentialgesetz

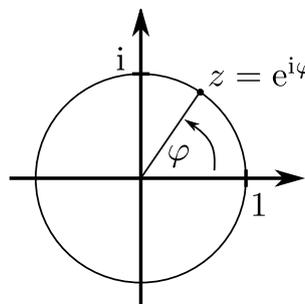
$$\begin{aligned} e^z e^w &= e^{x+iy} e^{u+iv} = e^x e^u (\cos y + i \sin y)(\cos v + i \sin v) \\ &= e^{x+u} (\cos(y+v) + i \sin(y+v)) = e^{z+w}. \end{aligned}$$

Insbesondere liegt also für  $\varphi \in \mathbb{R}$

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

auf dem Einheitskreis, d.h.  $|e^{i\varphi}| = 1$ . Für  $z \in \mathbb{C}$  mit  $\varphi = \arg z$  ist

$$z = |z| e^{i\varphi}$$



Diese Polardarstellung ist für  $z \neq 0$  eindeutig, falls man  $\varphi$  auf ein halboffenes Intervall der Länge  $2\pi$ , z.B. auf  $[0, 2\pi)$  oder  $(-\pi, \pi]$ , einschränkt. Es gilt aber offensichtlich

$$e^{i(\varphi+2\pi n)} = e^{i\varphi} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}.$$

Damit ist

$$\exp : \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid x \in \mathbb{R}, y \in (-\pi, \pi]\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

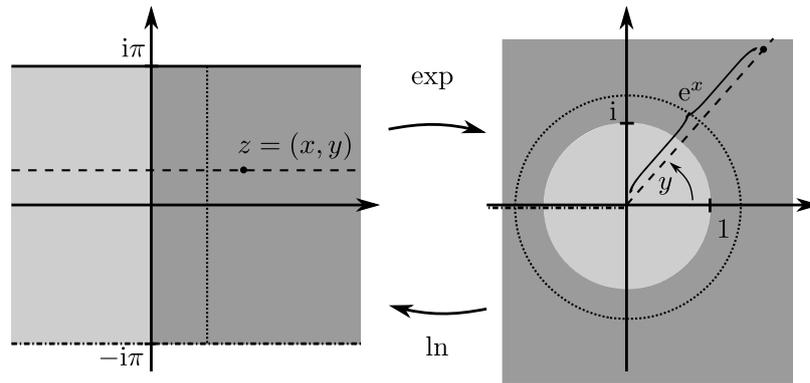
bijektiv. Die Umkehrfunktion ist der **komplexe Logarithmus**,

$$\ln : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid x \in \mathbb{R}, y \in (-\pi, \pi]\}$$

der explizit durch

$$\ln(w) = \ln |w| + i \arg(w)$$

gegeben ist.



Da  $\arg : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow (-\pi, \pi]$  auf der negativen reellen Achse einen Sprung hat, also unstetig ist, springt dort auch der Logarithmus. Man spricht von einem Schnitt (engl. “cut”) bei  $(-\infty, 0]$  durch die komplexe Ebene. Den Definitionsbereich des Logarithmus nennt man dann auch die “geschlitzte Ebene”.

Man kann den Logarithmus auch zu jedem anderen Streifen der Breite  $2\pi$  definieren, indem man  $\arg : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow (\alpha, \alpha + 2\pi]$  undefiniert. Den Schnitt kann man dann auf jede beliebige Halbgerade legen, die im Ursprung beginnt. Er ist dann wieder die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion eingeschränkt auf den entsprechenden Streifen. Die obige Wahl nennt man Hauptzweig des Logarithmus.

#### 4.4 Bemerkung. Der Definitionsbereich des Logarithmus als Riemannsche Fläche

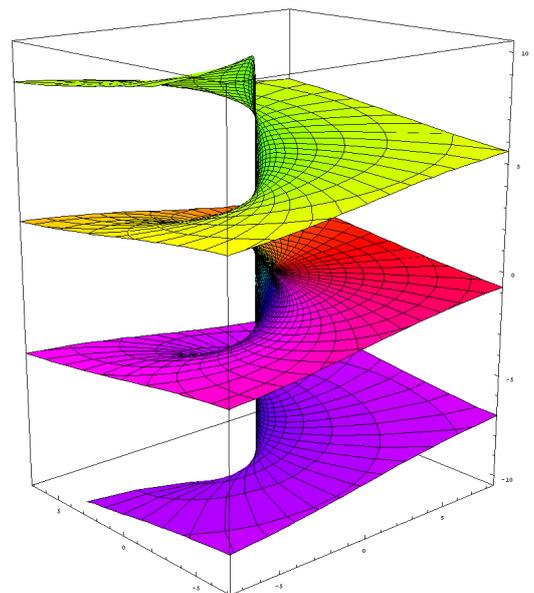
Da die Exponentialfunktion auf ganz  $\mathbb{C}$  stetig ist, aber nur Streifen der Form

$$S_n := \{z = x + iy \mid x \in \mathbb{R}, y \in (2\pi n, 2\pi(n + 1))\}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

bijektiv auf  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  abbildet, stellt man sich vor, dass  $\exp$  die disjunkte Vereinigung solcher Streifen auf die disjunkte Vereinigung der Bilder abbildet, also

$$\exp : \mathbb{C} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} S_n \rightarrow \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} \exp(S_n).$$

Auf der rechten Seite steht jetzt die disjunkte Vereinigung von geschlitzten Ebenen, also  $\mathbb{N}$  Kopien von  $\mathbb{C}$  mit Schnitt. Nun ist aber aus Sicht der Funktion  $\exp$  die Wahl der Streifen völlig beliebig und insbesondere ist  $\exp$  an den Übergängen von  $S_n$  nach  $S_{n+1}$  stetig. Deshalb stellt man sich die Bilder der Streifen, also die geschlitzten Ebenen  $\exp(S_n)$  und  $\exp(S_{n+1})$  an den entsprechenden Stellen “aneinandergeklebt” vor. Der natürliche Definitionsbereich des Logarithmus ist die “Spirale”, die man aus den abzählbar unendlich vielen verklebten Ebenen erhält. Man nennt so eine Fläche eine “Riemannsche Fläche”.



### 4.3 Komplexe Wurzeln

#### 4.5 Bemerkung. Die Wurzel im Komplexen

Zu jeder komplexen Zahl  $z \neq 0$  existieren genau  $n$  verschiedene  $n$ -te Wurzeln:

Sei  $z = |z| e^{i\varphi}$ , dann sind

$$w_1 = \sqrt[n]{|z|} e^{i\frac{\varphi}{n}}, \quad w_2 = \sqrt[n]{|z|} e^{i\frac{\varphi+2\pi}{n}}, \quad \dots, \quad w_n = \sqrt[n]{|z|} e^{i\frac{\varphi+2\pi(n-1)}{n}}$$

alle verschieden und es gilt

$$(w_j)^n = \left( \sqrt[n]{|z|} e^{i\frac{\varphi+2\pi(j-1)}{n}} \right)^n = |z| e^{i(\varphi+2\pi(j-1))} = z.$$

Es bezeichnet  $\sqrt[n]{|z|}$  hier immer die eindeutige positive reelle  $n$ -te Wurzel. Die Zahlen

$$1, \quad e^{i\frac{2\pi}{n}}, \quad e^{i\frac{4\pi}{n}}, \quad \dots, \quad e^{i\frac{2\pi(n-1)}{n}}$$

sind die  $n$  verschiedenen  $n$ -ten Wurzeln von 1 und heißen die  $n$ -ten Einheitswurzeln.

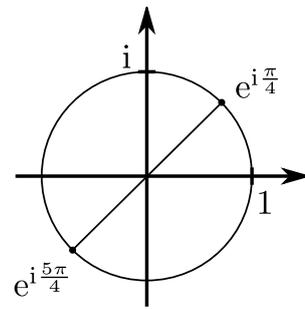
#### 4.6 Beispiele. Komplexe Wurzeln

- (a) Die beiden Quadratwurzeln von  $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$  sind

$$(\sqrt{i})_1 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$$

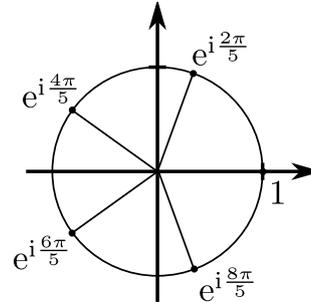
und

$$(\sqrt{i})_2 = e^{i\frac{5\pi}{4}} = -(\sqrt{i})_1.$$



- (b) Die 5-ten Wurzeln von 1 sind

$$1, \quad e^{i\frac{2\pi}{5}}, \quad e^{i\frac{4\pi}{5}}, \quad e^{i\frac{6\pi}{5}}, \quad e^{i\frac{8\pi}{5}}.$$



#### 4.7 Bemerkung. Die Riemannsche Fläche der Wurzelfunktion

Die  $n$ -te Wurzelfunktion ist lokal die Umkehrfunktion zu

$$z \mapsto z^n.$$

Allerdings ist  $z \mapsto z^n$  nur auf Sektoren der Form

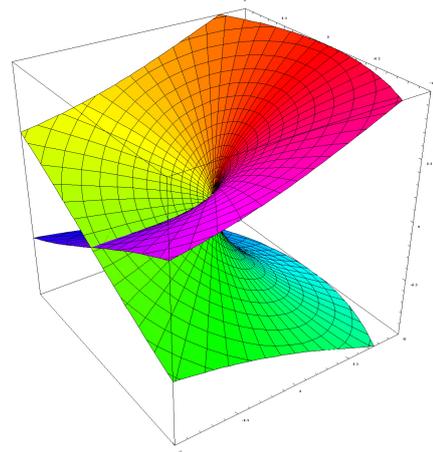
$$T_\alpha := \{z = |z|e^{i\varphi} \mid |z| \geq 0, \quad \varphi \in (\alpha, \alpha + \frac{2\pi}{n})\} \subset \mathbb{C}$$

bijektiv. Das Bild eines solchen Sektors ist wieder eine geschlitzte Ebene: für  $n = 2$  und  $\alpha = -\frac{\pi}{2}$  ist beispielsweise

$$\{z = |z|e^{i\varphi} \mid |z| \geq 0, \quad \varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\}$$

einfach die rechte Halbebene, welche unter  $z \mapsto z^2$  bijektiv auf ganz  $\mathbb{C}$  abgebildet wird. Die Umkehrfunktion wird der Hauptzweig der Wurzel genannt und ist auf dem Schnitt  $(-\infty, 0)$  wieder unstetig.

Es bildet also  $z \mapsto z^n$  die  $n$  disjunkten Sektoren  $T_j \frac{2\pi}{n}$  bijektiv auf geschlitzte Ebenen ab, welche man wie beim Logarithmus an den Schnitten entsprechen verkleben kann. Man erhält so als den natürlichen Definitionsbereich der Wurzelfunktion wieder entsprechende Riemannsche Flächen. Im Bild ist die Riemannsche Fläche der Quadratwurzel skizziert.



**4.8 Bemerkung. Komplexe Exponenten und Basen**

Für  $x \in \mathbb{R}$  mit  $x > 0$  kann man mit Hilfe der komplexen Exponentialfunktion und des reellen Logarithmus  $x^w := \exp(w \ln(x))$  für komplexe Exponenten  $w \in \mathbb{C}$  definieren. Man kann  $z \mapsto z^w$  mit Hilfe des komplexen Logarithmus aber auch für komplexe Basen definieren: Für  $z \neq 0$  setzt man wieder

$$z^w := e^{w \ln z}.$$

Der Wert von  $z^w$  hängt allerdings von der Wahl des Zweiges für den Logarithmus ab. Beispielsweise gibt es für  $z^{\frac{1}{n}}$  mit  $n \in \mathbb{N}$  genau die  $n$  verschiedenen Möglichkeiten, die wir zuvor besprochen haben.

Die oben beschriebene Standardwahl für reelles und positives  $x > 0$  entspricht dem Hauptzweig des Logarithmus.

**4.9 Bemerkung. Komplexe Polynome**

Die Ergebnisse aus Abschnitt 3.2 lassen sich alle eins-zu-eins auf komplexe Polynome

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$$

mit Koeffizienten  $a_j \in \mathbb{C}$  und  $z \in \mathbb{C}$  übertragen.

Im komplexen gilt aber sogar der

**4.10 Satz. Fundamentalsatz der Algebra**

Jedes komplexe Polynom

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$$

vom Grad  $n \geq 1$  hat mindestens eine Nullstelle  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

Es ist also  $p(z) = (z - \lambda)q(z)$  mit Grad  $q = n - 1$ . Induktiv ergibt sich

$$p(z) = a_n \cdot (z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_n),$$

es "zerfällt" also jedes Polynom über  $\mathbb{C}$  in Linearfaktoren. Fasst man die gleichen Nullstellen zusammen und bezeichnet mit  $k_j$  die Vielfachheit von  $\lambda_j$ , so schreibt man auch

$$p(z) = a_n \cdot (z - \lambda_1)^{k_1} \cdots (z - \lambda_m)^{k_m}$$

wobei  $k_1 + \dots + k_m = n$  ist.

Einen eleganten Beweis des Fundamentalsatzes werden wir im dritten Teil der Vorlesungsreihe nachliefern.

## 5 Unendliche Reihen

Sei  $(x_n)$  eine reelle oder komplexe Folge. Man möchte der „unendlichen Summe“ (= Reihe)

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_1 + x_2 + x_3 + \dots$$

einen Wert zuordnen. Es ist aber zunächst nur für jedes  $m \in \mathbb{N}$

$$s_m := \sum_{n=1}^m x_n = x_1 + \dots + x_m,$$

die sogenannte  $m$ -te Partialsumme, definiert.

### 5.1 Definition. Reihenkonvergenz

Man sagt, die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  konvergiert bzw. divergiert, wenn die Folge  $(s_m)$  der Partialsummen konvergiert bzw. divergiert. Konvergiert die Partialsummenfolge (oder divergiert sie bestimmt), so nennt man

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n := \lim_{m \rightarrow \infty} s_m$$

den Wert oder die Summe der Reihe.

**5.2 Beispiele.** (a) Sei  $x_n = 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , dann ist  $s_m = m$  für alle  $m \in \mathbb{N}$ . Die Partialsummenfolge divergiert also bestimmt und es ist  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{m \rightarrow \infty} s_m = +\infty$ .

(b) Sei  $x_n = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , dann ist  $s_m = 0$  für alle  $m \in \mathbb{N}$ . Die Partialsummenfolge konvergiert also gegen 0 und es ist  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{m \rightarrow \infty} s_m = 0$ .

(c) Sei  $x_n = (-1)^n$ , dann ist

$$s_m = \begin{cases} 0 & \text{falls } m \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } m \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Also ist mit  $(s_m)$  auch  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  divergent.

**5.3 Bemerkung.** Reihen sind also nichts anderes als etwas anders aufgeschriebene Folgen:

$$\begin{array}{lcl} \text{Reihe } \sum_{n=1}^{\infty} x_n & \longrightarrow & \text{Folge } s_m = \sum_{n=1}^m x_n \\ \text{Folge } s_m & \longrightarrow & \text{Reihe } x_n = s_n - s_{n-1} \end{array}$$

**5.4 Beispiel.** Die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$  ist konvergent und hat den Wert 1, denn wegen

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

ist jede Partialsumme eine Teleskopsumme und

$$s_m = \sum_{n=1}^m \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots + \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} = 1 - \frac{1}{m+1} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 1.$$

**5.5 Definition und Satz. Die geometrische Reihe**Die **geometrische Reihe**

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n, \quad q \in \mathbb{C},$$

konvergiert genau dann, wenn  $|q| < 1$  ist. In diesem Fall ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

*Beweis.* Laut Übung 11 a) ist für  $q \neq 1$ 

$$s_m = \sum_{n=0}^m q^n = \frac{1-q^{m+1}}{1-q}.$$

Also ist für  $|q| < 1$  wegen  $\lim_{m \rightarrow \infty} q^{m+1} = 0$ 

$$\lim_{m \rightarrow \infty} s_m = \frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n.$$

Für  $|q| \geq 1$  bilden die Folgenglieder  $q^n$  keine Nullfolge, die Reihe kann also nicht konvergieren (vgl. Satz 5.8 (b)).  $\square$ **5.6 Satz. Die harmonische Reihe**Die **harmonische Reihe**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

ist divergent, es gilt  $\lim_{m \rightarrow \infty} s_m = +\infty$ .*Beweis.* Als Spezialfall des später noch zu zeigenden Verdichtungskriteriums finden wir, dass

$$\begin{aligned} s_{2^m} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \frac{1}{2^{m-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^m}\right) \\ &> 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + 2^{m-1} \frac{1}{2^m} \\ &= 1 + \frac{m}{2}. \end{aligned}$$

 $\square$ **5.7 Bemerkung.** Die Partialsummenfolge  $\sum_{n=1}^m \frac{1}{n}$  der harmonischen Reihe divergiert aber sehr langsam, da die Inkremente immer kleiner werden ( $\frac{1}{n}$  ist eine Nullfolge!). Es ist

$$\sum_{n=1}^m \frac{1}{n} \approx \int_1^m \frac{1}{x} dx = \ln(m),$$

und, wie wir wissen, wächst der Logarithmus sehr langsam.

**5.8 Satz. Eigenschaften konvergenter Reihen**(a) Aus  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x$  und  $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = y$  folgt für  $a, b \in \mathbb{C}$ , dass  $\sum_{n=1}^{\infty} (ax_n + by_n) = ax + by$ .

- (b) Ist die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  konvergent, so ist  $(x_n)$  eine Nullfolge.  
 Eine notwendige Bedingung für die Konvergenz einer Reihe ist also, dass die Summandenfolge eine Nullfolge ist. Dass diese Bedingung nicht hinreichend ist, haben wir am Beispiel der harmonischen Reihe gesehen.
- (c) Die Abänderung endlich vieler Glieder in einer Reihe ändert nichts am Konvergenzverhalten (aber im Allgemeinen natürlich am Wert).

*Beweis.* (a) Seien  $(s_m), (t_m)$  und  $(u_m)$  die Partialsummenfolgen zu  $\sum x_n, \sum y_n$  und  $\sum(ax_n + by_n)$ . Dann gilt

$$u_m = a s_m + b t_m,$$

woraus die Behauptung folgt.

- (b) Ist  $(s_m)$  konvergent und somit Cauchy, so gilt

$$x_n = s_n - s_{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

- (c) Klar, denn die Partialsummenfolge wird für hinreichend große  $m$  nur um eine Konstante verschoben. □

Aus den Konvergenzkriterien für (reelle) Folgen ergeben sich sofort Konvergenzkriterien für (reelle) Reihen.

### 5.9 Satz. Monotoniekriterium

Sind alle bis auf endlich viele  $x_n \geq 0$  und ist die Partialsummenfolge nach oben beschränkt, so ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \quad \text{konvergent.}$$

*Beweis.* Ab einem hinreichend großen  $m$  ist  $s_m$  monoton wachsend und beschränkt, also konvergent. □

### 5.10 Satz. Cauchy-Kriterium

Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$  ist genau dann konvergent, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  gibt, so dass

$$\left| \sum_{k=n+1}^m x_k \right| < \varepsilon \quad \text{für alle } m, n \geq n_\varepsilon.$$

*Beweis.* Wegen  $\sum_{k=n+1}^m x_k = s_m - s_n$  bedeutet die Bedingung, dass  $(s_m)$  eine Cauchyfolge ist. □

### 5.11 Definition. Absolute Konvergenz von Reihen

Die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  heißt **absolut konvergent**, wenn  $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$  konvergiert.

**5.12 Lemma.** Jede absolut konvergente Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  ist konvergent.

*Beweis.* Übungsaufgabe. □

### 5.13 Lemma. Majorantenkriterium

Sei  $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$  konvergent und  $|x_n| \leq y_n$  für  $n$  groß genug. Dann ist  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  absolut konvergent.

*Beweis.* Übungsaufgabe. □

**5.14 Satz. Umordnungssatz**

Ist  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  absolut konvergent, so ist auch jede Umordnung absolut konvergent und hat die gleiche Summe.

*Beweis.* Sei  $(y_n)$  eine Umordnung von  $(x_n)$ , d.h.  $y_n = x_{f(n)}$  für eine Bijektion  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ . Wähle  $N(m)$  so, dass  $\{y_1, \dots, y_m\} \subset \{x_1, \dots, x_{N(m)}\}$ . Dann ist

$$\sum_{n=1}^m |y_n| \leq \sum_{n=1}^{N(m)} |x_n| \leq \tilde{s} := \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$$

für alle  $m \in \mathbb{N}$ . Daraus folgt mit dem Monotoniekriterium die Konvergenz von  $\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|$  und somit die absolute Konvergenz der umgeordneten Reihe.

Sei nun  $s := \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ . Zu  $\varepsilon > 0$  wähle  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  so, dass  $\sum_{n=n_\varepsilon}^{\infty} |x_n| < \frac{\varepsilon}{3}$ , und  $m_\varepsilon = m_\varepsilon(n_\varepsilon) \in \mathbb{N}$  so, dass  $\{x_1, \dots, x_{n_\varepsilon}\} \subset \{y_1, \dots, y_{m_\varepsilon}\}$ .

Dann gilt für  $m \geq m_\varepsilon$ , dass

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^m y_n - s \right| &\leq \left| \sum_{n=1}^m y_n - \sum_{n=1}^{m_\varepsilon} y_n \right| + \left| \sum_{n=1}^{m_\varepsilon} y_n - \sum_{n=1}^{n_\varepsilon} x_n \right| + \left| \sum_{n=1}^{n_\varepsilon} x_n - s \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

Also gilt  $\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m y_n = s$ . □

**5.15 Satz. Leibniz-Kriterium für alternierende Reihe**

Ist  $(x_n)$  eine monoton fallende Nullfolge, so ist die alternierende Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n$$

konvergent. Für die Summe  $s$  und die Partialsumme  $s_m$  gilt

$$|s - s_m| \leq x_{m+1} \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}.$$

*Beweis.* Für die Partialsummen gilt (O.B.d.A.  $m \leq l$ )

$$|s_l - s_m| = \left| \sum_{n=m+1}^l (-1)^n x_n \right| \leq x_{m+1} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Also ist  $(s_m)$  eine Cauchyfolge und für  $l \rightarrow \infty$  folgt die zweite Behauptung. □

**5.16 Beispiel.** Die alternierende harmonische Reihe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

ist demnach konvergent, sagen wir gegen  $s$  (Später werden wir sehen, dass  $s = \ln 2$ ).

Wir können aber leicht durch Umordnen eine Reihe erzeugen, deren Grenzwert ein beliebiges  $c \in \mathbb{R}$  ist: solange  $s_m < c$ , addiere positive Glieder. Da die Reihe  $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots$  der positiven Glieder divergiert, wird irgendwann  $s_m \geq c$  gelten. Dann addiere negative Glieder, bis wieder  $s_m < c$  usw.

### 5.17 Satz. Riemannscher Umordnungssatz

Sei  $(x_n)$  eine Folge in  $\mathbb{R}$  und  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  konvergent. Falls  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  absolut konvergiert, so hat jede Umordnung die gleiche Summe. Andernfalls existiert zu jedem  $c \in \mathbb{R}$  eine Umordnung mit  $\sum_{n=1}^{\infty} x_{f(n)} = c$ .

Wir zeigen nun zwei sehr nützliche Konvergenzkriterien für Reihen, die beide aus einer Anwendung des Majorantenkriteriums auf die geometrische Reihe hervorgehen.

Die Idee des Wurzelkriteriums ist die folgende: Ist  $\sqrt[n]{|x_n|} \leq q < 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , so ist  $|x_n| \leq q^n$  und somit  $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$  konvergent. Allerdings reicht es natürlich, wenn  $\sqrt[n]{|x_n|} \leq q$  für alle bis auf endlich viele  $n$  gilt, also, wenn alle Häufungspunkte der Folge  $(\sqrt[n]{|x_n|})$  echt kleiner als 1 sind.

### 5.18 Definition. Limes superior und Limes inferior

Sei  $(x_n)$  eine beschränkte Folge in  $\mathbb{R}$ . Der **Limes superior** von  $(x_n)$  ist der größte Häufungspunkt von  $(x_n)$  und wird mit

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ ist Häufungspunkt von } (x_n)\}$$

bezeichnet. Analog definiert man den **Limes inferior** als den kleinsten Häufungspunkt.

Auf unbeschränkte Folgen verallgemeinert man das so: Ist  $(x_n)$  nicht nach oben beschränkt, so setzt man  $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n := \infty$ . Ist  $(x_n)$  nach oben beschränkt aber nicht nach unten, so ist  $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$  gleich dem größten Häufungspunkt, falls dieser existiert, und  $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ , falls  $(x_n)$  keine Häufungspunkte hat. Analog verallgemeinert man den Limes inferior.

**5.19 Proposition.** Sei  $(x_n)$  eine Folge. Dann gilt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup\{x_n \mid n \geq k\} \quad \text{und} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \inf\{x_n \mid n \geq k\}.$$

*Beweis.* Übungsaufgabe. □

Ist  $\limsup_{n \rightarrow \infty} |x_n| = q$ , so gilt offenbar für jedes  $\varepsilon > 0$ , dass  $|x_n| < q + \varepsilon$  bis auf endlich viele  $n \in \mathbb{N}$ .

### 5.20 Satz. Wurzelkriterium

Die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  ist absolut konvergent, wenn

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|} < 1$$

ist. Sie ist divergent, wenn

$$\sqrt[n]{|x_n|} \geq 1 \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}$$

gilt.

*Beweis.* Ist  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|} = \tilde{q} < 1$ , so gilt  $\sqrt[n]{|x_n|} \leq \frac{1+\tilde{q}}{2} =: q < 1$  und somit

$$|x_n| \leq q^n$$

für alle bis auf endlich viele  $n \in \mathbb{N}$ . Also wird  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  durch die geometrische Reihe majorisiert und ist absolut konvergent.

Ist andererseits  $\sqrt[n]{|x_n|} \geq 1$  für unendlich viele  $n \in \mathbb{N}$ , so ist  $|x_n|$  keine Nullfolge und die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  mit Satz 5.8 b) divergent. □

**5.21 Satz. Quotientenkriterium**

Die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  ist absolut konvergent, wenn

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| < 1$$

gilt, und sie ist divergent, wenn

$$\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| \geq 1 \quad \text{für fast alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dabei sei (nur hier!)  $\frac{0}{0} := 0$  und  $\frac{x}{0} = \infty$  für  $x > 0$ .

*Beweis.* Ist  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \tilde{q} < 1$ , so existiert zu  $q = \frac{\tilde{q}+1}{2}$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit

$$|x_{n+1}| \leq q \cdot |x_n| \quad \text{für alle } n \geq n_0,$$

woraus

$$|x_n| \leq |x_{n_0}| \cdot q^{n-n_0} \quad \text{für alle } n \geq n_0$$

folgt. Also wird  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  durch die geometrische Reihe majorisiert und ist absolut konvergent.

Gilt andererseits  $\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} \geq 1$  für  $n \geq n_0$ , so ist  $|x_n| \geq |x_{n_0}| > 0$  für  $n \geq n_0$  und somit  $(x_n)$  keine Nullfolge.  $\square$

**5.22 Beispiel. Die Exponentialreihe**

Die Exponentialreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

ist für jedes  $z \in \mathbb{C}$  absolut konvergent, da

$$\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \left| \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{z^n} \right| = \left| \frac{z}{n+1} \right| \leq \frac{1}{2} < 1$$

für  $n \geq 2|z|$ .

**5.23 Definition. Potenzreihen**

Sei  $(x_n)$  eine Folge in  $\mathbb{C}$ , so heißt

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n$$

eine **Potenzreihe**.

Später werden wir Funktionen, wie z.B. die Exponentialfunktion durch Potenzreihen ausdrücken:

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

**5.24 Definition und Satz. Konvergenzradius**

Die Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n$  hat den **Konvergenzradius**

$$\rho := \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|x_n|}},$$

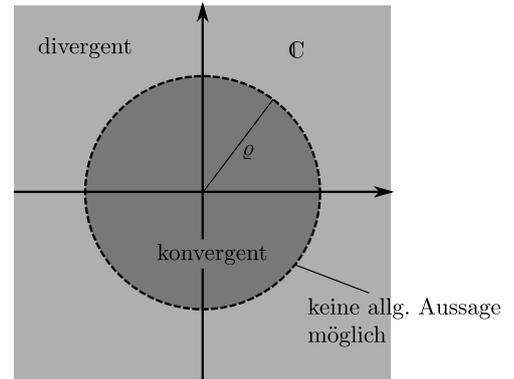
wobei  $\rho := \infty$  falls  $\limsup \sqrt[n]{|x_n|} = 0$  und  $\rho := 0$  falls  $\limsup \sqrt[n]{|x_n|} = \infty$ .

Die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n$

- (a) konvergiert absolut für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| < \varrho$
- (b) divergiert für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| > \varrho$ .

Für  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| = \varrho$  ist keine allgemeine Konvergenzaussage möglich.

Der Konvergenzbereich einer Potenzreihe ist also **immer** eine Kreisscheibe.



*Beweis.* Sei  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| < \varrho$ , also auch  $|z| \leq \varrho' < \varrho$  für ein geeignetes  $\varrho'$ . Nun ist

$$\limsup \sqrt[n]{|x_n||z|^n} = |z| \limsup \sqrt[n]{|x_n|} = |z| \frac{1}{\varrho} \leq \frac{\varrho'}{\varrho} < 1.$$

Mit dem Wurzelkriterium ist  $\sum x_n z^n$  also absolut konvergent.

Ist  $|z| > \varrho$ , also  $|z| \geq \varrho' > \varrho$  für ein geeignetes  $\varrho'$ , so ist

$$\limsup \sqrt[n]{|x_n||z|^n} \geq \frac{\varrho'}{\varrho} > 1$$

und somit  $\sqrt[n]{|x_n|} \geq 1$  für unendlich viele  $n$ . Mit dem Wurzelkriterium ist  $\sum x_n z^n$  also divergent.  $\square$

### 5.25 Beispiel. zum Verhalten bei $|z| = \varrho$ .

Die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$  hat den Konvergenzradius  $\varrho = 1$ , da  $\limsup \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$ . Sie divergiert für  $z = 1$  (harmonische Reihe) und konvergiert für  $z = -1$  (alternierende harmonische Reihe).

### 5.26 Satz. Cauchyscher Verdichtungssatz

Sei  $(x_n)$  eine monoton fallende nichtnegative Folge, also  $0 \leq x_{n+1} \leq x_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Dann konvergiert die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  genau dann, wenn die verdichtete Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k x_{2^k}$$

konvergiert.

*Beweis.* Gruppiert man jeweils  $2^k$  Terme und schätzt sie durch  $2^k$ -mal dem kleinsten ab, so erhält man eine untere Schranke

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2^n} x_k &= x_1 + x_2 + (x_3 + x_4) + (x_5 + x_6 + x_7 + x_8) + \cdots + (x_{2^{n-1}+1} + \cdots + x_{2^n}) \\ &\geq \frac{1}{2}x_1 + x_2 + 2x_4 + 4x_8 + \cdots + 2^{n-1}x_{2^n} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n 2^k x_{2^k} \end{aligned}$$

an die Partialsummen. Die selbe Idee liefert auch die obere Schranke,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} x_k &= x_1 + (x_2 + x_3) + (x_4 + x_5 + x_6 + x_7) + \cdots + (x_{2^{n-1}} + \cdots + x_{2^n-1}) \\ &\leq x_1 + 2x_2 + 4x_4 + \cdots + 2^{n-1}x_{2^{n-1}} = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k x_{2^k}. \end{aligned}$$

## 5 Unendliche Reihen

Die Partialsummen von  $\sum 2^k x_{2^k}$  sind also genau dann beschränkt, wenn die Partialsummen von  $\sum x_k$  beschränkt sind. Das Monotomiekriterium impliziert dann die Aussage des Satzes.  $\square$

**5.27 Beispiel.** Die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , ist genau dann konvergent, wenn  $\alpha > 1$  ist. Die verdichtete Reihe ist nämlich

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} (2^{1-\alpha})^k =: \sum_{k=0}^{\infty} q^k$$

mit  $q = 2^{1-\alpha}$ . Es ist  $q < 1$  genau dann wenn  $\alpha > 1$ .

Summiert man Folgen mit zwei Indices, also  $x_{kl} \in \mathbb{C}$ ,  $k, l \in \mathbb{N}$ , so spricht man von **Doppelreihen**. Es stellt sich die Frage, wie man

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} x_{kl}$$

definieren soll, da es ja jetzt keine kanonische Partialsummenfolge mehr gibt. Verschiedene Möglichkeiten wären

- (a)  $\sum_{k=1}^{\infty} \left( \sum_{l=1}^{\infty} x_{kl} \right)$  falls  $y_k := \sum_{l=1}^{\infty} x_{kl}$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$  konvergieren.
- (b)  $\sum_{l=1}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^{\infty} x_{kl} \right)$  falls  $z_l := \sum_{k=1}^{\infty} x_{kl}$  und  $\sum_{l=1}^{\infty} z_l$  konvergieren.
- (c) Man durchläuft die  $x_{kl}$  mit Hilfe einer Folge,  $(x_{f(n)})$ , wobei  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  bijektiv ist (vgl. Cantors Diagonaltrick 1) und betrachtet  $\sum_{n=1}^{\infty} x_{f(n)}$ .

Der folgende Satz besagt, dass für absolut konvergente Reihen die Veränderung der Summationsreihenfolge wieder keine Rolle spielt.

### 5.28 Satz. Großer Umordnungssatz

Für jede Doppelfolge  $(x_{kl})$  in  $\mathbb{C}$  sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a)  $\sum_{n=1}^{\infty} |x_{f(n)}|$  konvergiert für eine Anordnung  $f$ .
- (b)  $\sum_{n=1}^{\infty} |x_{f(n)}|$  konvergiert für jede Anordnung  $f$ .
- (c)  $\sum_{k=1}^{\infty} \left( \sum_{l=1}^{\infty} |x_{kl}| \right)$  konvergiert.
- (d)  $\sum_{l=1}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^{\infty} |x_{kl}| \right)$  konvergiert.

Ist eine (und somit alle) dieser vier Aussagen erfüllt, so gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( \sum_{l=1}^{\infty} x_{kl} \right) = \sum_{l=1}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^{\infty} x_{kl} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} x_{f(n)}$$

für jede Anordnung  $f$ .

**5.29 Merkregel.** Ist eine Doppelreihe absolut konvergent, so kann man die Summationsreihenfolge beliebig verändern, ohne den Grenzwert zu ändern.

**5.30 Beispiel.** Ist eine Doppelreihe **nicht** absolut konvergent, so kann die Vertauschung der Summationsreihenfolge das Ergebnis verändern:

Sei

$$x_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{falls } k = l \\ -1 & \text{falls } k = l - 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{l} \\ \begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \\ \downarrow k \end{array}$$

Dann ist  $\sum_{k=1}^{\infty} \left( \sum_{l=1}^{\infty} x_{kl} \right) = 0$  aber  $\sum_{l=1}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^{\infty} x_{kl} \right) = 1$ . Der Satz findet keine Anwendung, da die Reihe nicht absolut konvergiert,  $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} |x_{kl}| = \infty$ .

*Beweis.* des Umordnungssatzes:

Die Äquivalenz von (a) und (b) ist einfach der Umordnungssatz, Satz 5.14, da  $\sum |x_{f(n)}|$  und  $\sum |x_{\tilde{f}(n)}|$  Umordnungen derselben absolut konvergenten Reihe sind.

Die Äquivalenz von (c) und (d) sieht man so: Es gelte (c), dann ist auch  $\sum_{k=1}^{\infty} |x_{kl}| < \infty$  für jedes  $l$  und für jedes  $L \in \mathbb{N}$  ist

$$\sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^{\infty} |x_{kl}| = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \sum_{l=1}^L |x_{kl}| \right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left( \sum_{l=1}^{\infty} |x_{kl}| \right) < \infty. \quad (*)$$

Mit dem Monotoniekriterium folgt, dass auch

$$\sum_{l=1}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^{\infty} |x_{kl}| \right)$$

konvergiert.

Wegen (\*) ist aber  $\sum_{l=1}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^{\infty} |x_{kl}| \right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left( \sum_{l=1}^{\infty} |x_{kl}| \right)$ , und die umgekehrte Ungleichung folgt aus Symmetrie, also

$$\sum_{l=1}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^{\infty} |x_{kl}| \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \sum_{l=1}^{\infty} |x_{kl}| \right).$$

Für Folgen mit  $x_{kl} \geq 0$  gilt dann auch der zweite Teil der Behauptung, nämlich

$$\sum_{l=1}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^{\infty} x_{kl} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \sum_{l=1}^{\infty} x_{kl} \right).$$

Für  $x_{kl} \in \mathbb{R}$  setze

$$x_{kl,+} = \max\{0, x_{kl}\} \quad \text{und} \quad x_{kl,-} = \max\{0, -x_{kl}\}$$

also  $x_{kl} = x_{kl,+} - x_{kl,-}$ . Es ist dann

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} x_{kl,\pm} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} |x_{kl}| < \infty,$$

also mit dem Resultat für positive Folgen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} x_{kl,\pm} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} x_{kl,\pm}.$$

Die Behauptung folgt nun durch Subtraktion:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left( \sum_{l=1}^{\infty} x_{kl} \right) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left( \sum_{l=1}^{\infty} x_{kl,+} - \sum_{l=1}^{\infty} x_{kl,-} \right) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} x_{kl,+} - \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} x_{kl,-} \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^{\infty} x_{kl} \right). \end{aligned}$$

Für komplexe  $x_{kl}$  zerlegt man analog in Real- und Imaginärteil. Die Äquivalenz von (a) und (c) ist etwas mühselig zu zeigen und wird später aus einem viel allgemeineren Resultat, dem Satz von Fubini, folgen.  $\square$

**5.31 Korollar. Das Cauchy-Produkt von Reihen**

Sind die Reihen  $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$  und  $y = \sum_{k=1}^{\infty} y_k$  absolut konvergent, so ist auch die Reihe

$$\sum_{m=1}^{\infty} z_m$$

mit den Gliedern

$$z_m = x_1 y_m + x_2 y_{m-1} + \dots + x_m y_1$$

$$= \sum_{n+k=m+1} x_n y_k = \sum_{n=1}^m x_n y_{m+1-n}$$

absolut konvergent, und es gilt

$$x \cdot y = \sum_{m=1}^{\infty} z_m.$$

*Beweis.*

$$x \cdot y = x \cdot \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^K y_k = \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^K x y_k = \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^K \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_k = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{z}_{nk} \quad (*)$$

mit  $\tilde{z}_{nk} = x_n y_k$ . Nun ist aber  $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^m x_n y_{m+1-n} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^m \tilde{z}_{n,m+1-n}$  eine Umordnung von (\*) und hat nach Satz 5.28 denselben Grenzwert.  $\square$

**5.32 Beispiel. Die Exponentialreihe**

Die Exponentialreihe  $E(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$  ist nach Beispiel 5.22 absolut konvergent. Daher gilt

$$E(z)E(w) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^m \frac{z^n}{n!} \cdot \frac{w^{m-n}}{(m-n)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \underbrace{\sum_{n=0}^m \binom{m}{n} z^n w^{m-n}}_{(z+w)^m}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(z+w)^m}{m!} = E(z+w).$$

Also erfüllt  $E(z)$  das Exponentialgesetz. Wir zeigen später, dass tatsächlich  $E(z) = \exp(z)$  gilt.

# 6 Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit

## 6.1 Grenzwerte von Funktionen

**6.1 Erinnerung.** Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 1 \\ 1 & \text{falls } x \geq 1 \end{cases}$$

ist bei  $x = 0$  nicht stetig, da

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = 0 \neq \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 1.$$

Der Limes  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  existiert also nicht in dem Sinne, dass für jede Folge  $(x_n)$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  auch der Limes  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$  existiert.

## 6.2 Definition. Der Abschluss

Für  $D \subset \mathbb{R}$  definieren wir den **Abschluss** in  $\mathbb{R}$  durch

$$\begin{aligned} \bar{D} &:= \{w \in \mathbb{R} \mid \text{für jedes } \delta > 0 \text{ gibt es ein } z \in D \text{ mit } |z - w| < \delta\} \\ &= \{w \in \mathbb{R} \mid B_\delta(w) \cap D \neq \emptyset \text{ für alle } \delta > 0\}, \end{aligned}$$

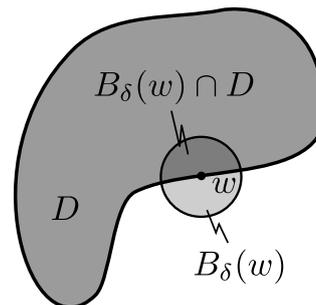
wobei  $B_\delta(w) := \{z \in \mathbb{R} \mid |z - w| < \delta\}$  das offene  $\delta$ -Intervall um  $w \in \mathbb{R}$  ist.

Für  $D \subset \mathbb{C}$  definieren wir den **Abschluss** in  $\mathbb{C}$  völlig analog durch

$$\begin{aligned} \bar{D} &:= \{w \in \mathbb{C} \mid \text{für jedes } \delta > 0 \text{ gibt es ein } z \in D \text{ mit } |z - w| < \delta\} \\ &= \{w \in \mathbb{C} \mid B_\delta(w) \cap D \neq \emptyset \text{ für alle } \delta > 0\}, \end{aligned}$$

wobei  $B_\delta(w) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - w| < \delta\}$  jetzt der offene  $\delta$ -Ball bzw. die offene Kreisscheibe um  $w \in \mathbb{C}$  ist.

Als Übungsaufgabe zeigt man leicht, dass  $w \in \bar{D}$  genau dann gilt, wenn es eine Folge  $(z_n)$  in  $D$  gibt mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = w$ .



**6.3 Beispiele.** Der Abschluss eines offenen Intervalls ist das abgeschlossene Intervall, z.B.  $\overline{(0, 1)} = [0, 1]$ , und der Abschluss einer offenen Kreisscheibe ist die abgeschlossene Kreisscheibe, z.B.  $\overline{B_\delta(0)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \delta\}$ .

## 6.4 Definition. Grenzwerte von Funktionen

Sei  $D \subset \mathbb{C}$  der Definitionsbereich der Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ . Der Grenzwert von  $f$  an der Stelle  $z_0 \in \bar{D}$  ist  $w \in \mathbb{C}$ , geschrieben

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w,$$

wenn gilt:

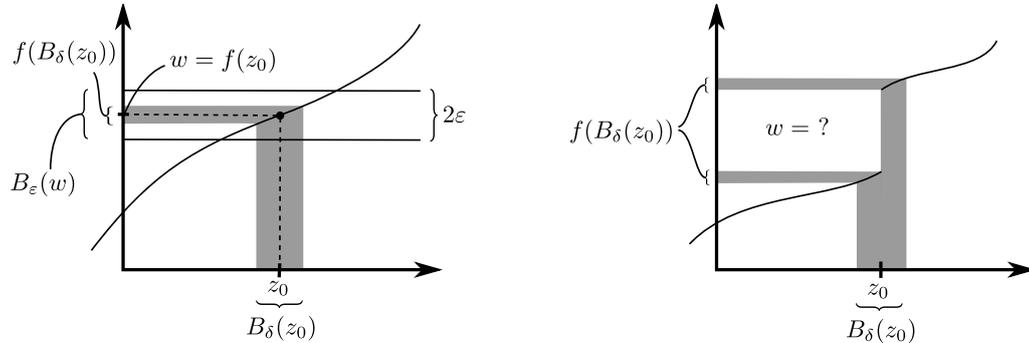
für alle  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $\delta > 0$  so, dass für alle  $z \in D$  mit  $|z - z_0| < \delta$  gilt, dass  $|f(z) - w| \leq \varepsilon$ .

## 6 Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit

Mit Quantoren schreibt sich das

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall z \in D : |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w| \leq \varepsilon.$$

Falls  $z_0 \in D$  liegt, muss also insbesondere  $f(z_0) = w$  sein, da dann  $|f(z_0) - w| < \varepsilon$  für alle  $\varepsilon > 0$  gelten muss.



Nochmals anders formuliert gilt also  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w$  genau dann wenn:

Zu jedem  $\varepsilon$ -Ball  $B_\varepsilon(w)$  um  $w$  gibt es einen  $\delta$ -Ball  $B_\delta(z_0)$  um  $z_0$ , so dass  $f(B_\delta(z_0) \cap D) \subset B_\varepsilon(w)$ .

Für  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  sagen wir

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \pm\infty,$$

wenn

$$\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall z \in D : |z - z_0| < \delta \Rightarrow \pm f(z) > M.$$

Für  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  sagen wir

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c, \quad c \in \mathbb{C},$$

falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists R \in \mathbb{R} : x > R \Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon,$$

und für  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm\infty \quad \text{falls} \quad \forall M > 0 \quad \exists R \in \mathbb{R} : x > R \Rightarrow \pm f(x) > M.$$

**6.5 Beispiel.** Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}$  mit Definitionsbereich  $D = (0, \infty)$ . Dann ist einerseits  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$ , da für  $M > 0$  und  $\delta = \frac{1}{M}$  gilt

$$f(x) > f(\delta) = M \quad \text{falls} \quad x < \delta.$$

Andererseits ist  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ , da für  $\varepsilon > 0$  und  $R = \frac{1}{\varepsilon}$  gilt, dass

$$|f(x) - 0| = |f(x)| < \varepsilon \quad \text{falls} \quad x > R.$$

Wir sehen nun leicht, dass der Grenzwert einer Funktion  $f$  bei  $z_0$  gleich  $w$  ist, wenn für jede Folge  $z_n \rightarrow z_0$  in  $D$  gilt, dass  $f(z_n) \rightarrow w$ .

**6.6 Proposition.** Für  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  und  $z_0 \in \overline{D}$  sind äquivalent:

- Der Grenzwert  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  existiert.
- Für jede Folge  $(z_n)$  in  $D$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$  existiert der Limes  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n)$ .

Falls eine der Aussagen und somit beide erfüllt sind, so gilt für jede Folge  $(z_n)$  in  $D$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$ , dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z).$$

*Beweis.* Zu zeigen ist

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall z \in D : |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w| < \varepsilon \\ \iff & \text{(b')} \quad \forall (z_n) \text{ in } D \text{ mit } \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0 \text{ gilt } \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = w, \end{aligned}$$

da (b) impliziert, dass alle Grenzwerte  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n)$  übereinstimmen müssen: seien  $(x_n)$  und  $(y_n)$  zwei solche Folgen, dann konvergiert auch  $(z_n) := (x_1, y_1, x_2, y_2, \dots)$  gegen  $z_0$ . Da  $(f(x_n))$  und  $(f(y_n))$  Teilfolgen von  $(f(z_n))$  sind, müssen sie beiden den gleichen Limes wie  $(f(z_n))$  haben. Wir zeigen also die Äquivalenz von (a) und (b').

(a) $\Rightarrow$ (b'): Sei  $\lim z_n = z_0$  und wähle zu  $\varepsilon > 0$  ein passendes  $\delta$  nach (a). Wähle nun  $n_0 \in \mathbb{N}$  so, dass  $|z_n - z_0| < \delta$  für  $n \geq n_0$ . Dann ist  $|f(z_n) - w| < \varepsilon$  für  $n \geq n_0$ , also  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = w$ .

(b') $\Rightarrow$ (a): Angenommen (a) ist falsch, also

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists z \in D : |z - z_0| < \delta \text{ aber } |f(z) - w| \geq \varepsilon.$$

Wähle zu  $\delta = \frac{1}{n}$  ein entsprechendes  $z_n \in D$  mit  $|z_n - z_0| < \frac{1}{n}$ , aber  $|f(z_n) - w| \geq \varepsilon$ . Dann ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$  aber  $\lim f(z_n) \neq w$ , im Widerspruch zur Annahme, dass (b') gilt.  $\square$

### 6.7 Korollar. Äquivalente Charakterisierungen von Stetigkeit

Für  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  und  $z_0 \in D$  sind äquivalent

- (a)  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$
- (b)  $f$  ist stetig bei  $z_0$  im Sinne von Folgenstetigkeit, Definition 3.6

Man nennt (a) manchmal auch  $\varepsilon$ - $\delta$ -Definition von Stetigkeit, da

$$f \text{ ist stetig bei } z_0 \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall z \in D : |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

**6.8 Beispiele.** (a) Sei  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ . Wegen  $|\sin x| \leq |x| \leq |\tan x|$  für  $|x| < \frac{\pi}{2}$  gilt für  $(x_n)$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ , dass

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\tan x_n} \cdot \frac{\sin x_n}{x_n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x_n}{x_n} \leq 1,$$

also  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x_n}{x_n} = 1$ , oder äquivalent

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Man kann also die Funktion  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$  **stetig** auf ganz  $\mathbb{R}$  fortsetzen, indem man  $f(0) = 1$  definiert.

**Bemerkung:** Später werden wir sehen, dass  $\frac{\sin x}{x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \dots \rightarrow 1$ .

- (b) Die Funktion  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$  hat keinen Grenzwert bei  $x = 0$ , da für  $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}(2n-1)}$  zwar  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  aber

$$f(x_n) = (-1)^{n+1}$$

offenbar nicht konvergiert. Man kann also die Funktion  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$  **nicht** stetig auf ganz  $\mathbb{R}$  fortsetzen.

### 6.9 Erinnerung. Nochmals nachlesen!

Für stetige Funktionen  $f : \mathbb{R} \supset D \rightarrow \mathbb{R}$  gelten

- der Zwischenwertsatz, Satz 3.10
- der „Umkehrsatz“, Satz 3.11.

Für beliebige stetige Funktionen gilt

## 6 Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit

- Summen und Produkte stetiger Funktionen sind stetig, Satz 3.23,
- Kompositionen  $g \circ f$  stetiger Funktionen sind stetig, Übung 18 (b).

### 6.10 Definition. Beschränkte, offene, abgeschlossene, kompakte Teilmengen von $\mathbb{C}$

Eine Teilmenge  $D \subset \mathbb{R}$  bzw.  $D \subset \mathbb{C}$  heißt

- (i) **beschränkt**, falls ein  $R > 0$  existiert so, dass  $|z| < R$  für alle  $z \in D$  gilt,
- (ii) **offen**, falls es zu jedem  $z \in D$  ein  $\delta > 0$  gibt so, dass  $B_\delta(z) \subset D$ ,
- (iii) **abgeschlossen**, falls  $\mathbb{R} \setminus D$  bzw.  $\mathbb{C} \setminus D$  offen ist,
- (iv) **kompakt**, falls  $D$  abgeschlossen und beschränkt ist.

**6.11 Beispiele.** • Das Intervall  $(0, 1)$  ist beschränkt (offenbar) und offen in  $\mathbb{R}$ , da für  $0 < x < 1$  und  $\delta := \min\{x, 1 - x\}$  gilt, dass  $B_\delta(x) = (x - \delta, x + \delta) \subset (0, 1)$ .

- Das Intervall  $[0, 1]$  ist beschränkt und abgeschlossen in  $\mathbb{R}$ , da  $\mathbb{R} \setminus [0, 1] = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$  offen ist. Also ist  $[0, 1]$  kompakt.
- Für  $D \subset \mathbb{C}$  ist der Abschluss  $\overline{D}$  abgeschlossen. (siehe unten)
- Die Kreisscheibe  $B_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$  ist offen, denn für  $z \in B_R$  sei  $\delta = R - |z|$ . Dann ist  $B_\delta(z) \subset B_R(0)$ , da für  $w \in B_\delta(z)$  gilt, dass  $|w| = |w - z + z| \leq |w - z| + |z| < \delta + |z| = R$ .
- Beliebige Vereinigungen offener Mengen sind offen: seien  $M_\alpha \subset \mathbb{C}$  offene Mengen und  $M = \cup_\alpha M_\alpha$ . Zu  $z \in M$  gibt es ein  $\alpha$  so, dass  $z \in M_\alpha$ . Da  $M_\alpha$  offen ist, gibt es ein  $\delta > 0$  so, dass  $B_\delta(z) \subset M_\alpha$ . Dann ist aber auch  $B_\delta(z) \subset M$ .

**Warnung:** Die meisten Mengen sind weder abgeschlossen noch offen, z.B.  $[0, 1)$ .

**6.12 Bemerkung.** Die leere Menge ist offen (per Definition) und abgeschlossen, da  $\mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}$  offen ist. Demnach sind auch  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$  jeweils offen und abgeschlossen in sich.

**6.13 Proposition.** Für  $D \subset \mathbb{C}$  sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a)  $D$  ist abgeschlossen
- (b)  $D = \overline{D}$
- (c) Für jede Folge  $(z_n)$  in  $D$  mit  $\lim z_n = z_0$  gilt, dass  $z_0 \in D$ .

*Beweis.* Übung □

### 6.14 Satz. Bolzano-Weierstraß in $\mathbb{C}$

Jede beschränkte Folge  $(z_n)$  in  $\mathbb{C}$  hat mindestens einen Häufungspunkt.

*Beweis.*  $\operatorname{Re}(z_n)$  ist eine beschränkte Folge in  $\mathbb{R}$  und hat somit einen Häufungspunkt. Sei  $\operatorname{Re}(z_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Teilfolge. Dann hat  $\operatorname{Im}(z_{n_k})$  als beschränkte Folge in  $\mathbb{R}$  einen Häufungspunkt. Sei  $\operatorname{Im}(z_{n_{k_m}})_{m \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Teilfolge. Dann konvergiert  $(z_{n_{k_m}})_{m \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{C}$ , da Real- und Imaginärteil konvergieren. □

**6.15 Korollar.** Jede Folge  $(z_n)$  in einem Kompaktum  $K \subset \mathbb{C}$  hat eine in  $K$  konvergente Teilfolge.

*Beweis.* Da  $K$  beschränkt ist, hat  $(z_n)$  einen Häufungspunkt. Da  $K$  abgeschlossen ist, liegt dieser in  $K$ . □

### 6.16 Satz. vom Maximum

Sei  $K \subset \mathbb{C}$  kompakt und  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann ist  $f$  beschränkt und nimmt sein Supremum und sein Infimum an, hat also ein Maximum und ein Minimum.

*Beweis. Beschränktheit:* Angenommen,  $f$  ist unbeschränkt. Dann existiert eine Folge  $(z_n)$  in  $K$  mit  $|f(z_n)| \geq n$ . Da  $K$  kompakt ist existiert eine konvergente Teilfolge  $(z_{n_k})$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} z_{n_k} = z_0 \in K$ . Da  $f$  stetig ist, gilt  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(z_{n_k}) = f(z_0)$ , also  $f(z_{n_k}) \leq n_k$  für  $k$  groß genug, ein Widerspruch!

**Existenz des Maximums:** Da  $\text{Bild} f = \{f(z) \mid z \in K\} \subset \mathbb{R}$  beschränkt ist, existiert das Supremum  $\sup f := \sup \text{Bild} f$ . Somit gibt es eine Folge  $(z_n)$  aus  $K$  mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \sup f.$$

Da  $K$  kompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge  $(z_{n_k})$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} z_{n_k} =: z_{\max}$ . Aufgrund der Stetigkeit ist

$$f(z_{\max}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(z_{n_k}) = \sup f.$$

□

**6.17 Bemerkung.** Auf unbeschränkten oder offenen Gebieten gilt die Aussage nicht. So ist

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

zwar stetig und beschränkt, nimmt aber sein Supremum nicht an:  $\sup\{\arctan x \mid x \in \mathbb{R}\} = \frac{\pi}{2}$  aber  $\arctan x \neq \frac{\pi}{2}$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Andererseits ist

$$f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x},$$

zwar stetig, aber dennoch unbeschränkt.

### 6.18 Satz. Stetige Bilder kompakter Mengen sind kompakt

Sei  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  stetig. Ist  $K \subset \mathbb{C}$  kompakt, so ist auch  $f(K) = \{f(z) \mid z \in K\}$  kompakt.

*Beweis.* Nach Satz 6.16 ist  $f(K)$  beschränkt, wir müssen also noch die Abgeschlossenheit zeigen. Sei dazu  $(w_n)$  eine konvergente Folge in  $f(K)$  mit  $\lim w_n = w$ . Nach Proposition 6.13 ist  $w \in f(K)$  zu zeigen. Sei  $(z_n)$  in  $K$  so, dass  $f(z_n) = w_n$ . Da  $K$  kompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge  $(z_{n_k})$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} z_{n_k} = z_0 \in K$ . Wegen der Stetigkeit von  $f$  gilt aber

$$w = \lim_{k \rightarrow \infty} w_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} f(z_{n_k}) = f(z_0).$$

also  $w \in f(K)$

□

## 6.2 Folgen von Funktionen

Wir betrachten nun Folgen, deren Elemente Funktionen sind.

### 6.19 Definition. Punktweise und gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen

Sei  $(f_n)$  eine Folge von Funktionen  $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion. Wir sagen

(a)  $(f_n)$  **konvergiert punktweise** gegen  $f$ , falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in D.$$

(b)  $(f_n)$  **konvergiert gleichmäßig** gegen  $f$ , falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = 0,$$

## 6 Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit

oder kürzer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0,$$

mit der Supremumsnorm

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in D} |f(x)| := \sup\{|f(x)| \mid x \in D\}.$$

**6.20 Bemerkung.** In Quantorenschreibweise gilt also

$$f_n \rightarrow f \text{ punktweise} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \forall x \in D \exists n_{\varepsilon, x} \in \mathbb{N} \forall n \geq n_{\varepsilon, x} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

und

$$f_n \rightarrow f \text{ gleichmäßig} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall x \in D \forall n \geq n_\varepsilon |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Offenbar impliziert die gleichmäßige Konvergenz auch die punktweise Konvergenz, die Umkehrung gilt aber nicht: Sei  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x^n$ . Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{falls } x = 1 \end{cases}$$

punktweise. Wegen  $f_n(\sqrt[n]{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}$  ist  $\|f_n - f\|_\infty \geq \frac{1}{2}$  und somit konvergiert  $f_n$  nicht gleichmäßig gegen  $f$ .

Dieses Beispiel zeigt auch, dass der punktweise Limes stetiger Funktionen nicht notwendigerweise stetig ist. Es gilt aber:

### **6.21 Satz. Gleichmäßige Grenzwerte stetiger Funktionen sind stetig**

Es sei  $(f_n)$  eine Folge stetiger Funktionen  $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$ , die gleichmäßig gegen  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  konvergiert. Dann ist auch  $f$  stetig.

*Beweis.* Sei  $z_0 \in D$ . Wir müssen zeigen, dass  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ , also dass

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall z \in D : |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Sei also  $\varepsilon > 0$  gegeben. Wie bekommen wir ein passendes  $\delta$ ? In der Aufspaltung

$$|f(z) - f(z_0)| \leq |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(z_0)| + |f_n(z_0) - f(z_0)|$$

sind der erste und der letzte Term klein für  $n$  groß genug, und zwar unabhängig von  $z \in D$ , da  $f_n$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert. Der zweite Term ist klein für  $|z - z_0|$  klein genug, da jedes  $f_n$  stetig ist. **Also:** Wähle  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  so, dass

$$|f(z) - f_n(z)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für alle } n \geq n_\varepsilon \text{ und für alle } z \in D.$$

So ein  $n_\varepsilon$  gibt es, da  $f_n$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert. Dann wähle  $\delta > 0$  so, dass

$$|f_{n_\varepsilon}(z) - f_{n_\varepsilon}(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für alle } z \in D \text{ mit } |z - z_0| < \delta.$$

So ein  $\delta$  gibt es, da  $f_{n_\varepsilon}$  stetig ist. Insgesamt folgt für  $z \in D$  mit  $|z - z_0| < \delta$ , dass

$$|f(z) - f(z_0)| \leq |f(z) - f_{n_\varepsilon}(z)| + |f_{n_\varepsilon}(z) - f_{n_\varepsilon}(z_0)| + |f_{n_\varepsilon}(z_0) - f(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Also ist  $f$  stetig. □

**6.22 Korollar. Potenzreihen konvergieren gleichmäßig**

Die Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n$  habe positiven Konvergenzradius  $\rho$ . Dann ist die Funktion

$$f : B_\rho(0) \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n$$

stetig und die Folge  $(f_m)$  der Polynome  $f_m(z) = \sum_{n=0}^m x_n z^n$  konvergiert gleichmäßig gegen  $f$  auf jedem Kompaktum in  $B_\rho(0)$ .

*Beweis.* Wir zeigen die zweite Aussage, aus der dann die erste mit Satz 6.21 folgt. Sei  $K \subset B_\rho(0)$  kompakt, dann ist  $K \subset B_\tau(0)$  für ein  $\tau < \rho$ . (Sonst gäbe es eine Folge  $(z_n)$  in  $K$  mit  $|z_n| \rightarrow \rho$ , die dann aufgrund der Kompaktheit von  $K$  einen Häufungspunkt  $z$  in  $K$  hätte mit  $|z| = \rho$ , im Widerspruch zu  $K \subset B_\rho(0)$ .) Also gilt

$$\sup_{z \in K} |f(z) - f_m(z)| = \sup_{z \in K} \left| \sum_{n=m+1}^{\infty} x_n z^n \right| \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} |x_n| \tau^n \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

□



# 7 Eindimensionale Differentialrechnung

## 7.1 Differenzierbarkeit und Ableitungsregeln

### 7.1 Erinnerung. Das Tangentenproblem

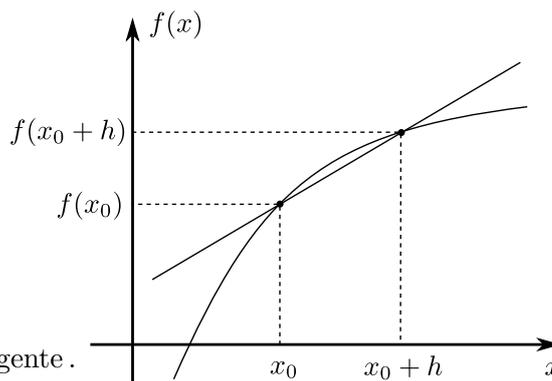
Wann hat eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine eindeutig bestimmte Tangente im Punkt  $x_0$  und welche Steigung hat diese?

Approximation durch Differenzenquotienten:

$$\text{Steigung der Sekante} = \frac{\Delta f}{\Delta x} := \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Für  $h \rightarrow 0$  erhält man den Differentialquotienten:

$$\frac{df}{dx}(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \text{Steigung der Tangente.}$$



### 7.2 Definition. Differenzierbarkeit in einem Punkt

Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall. Eine Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  heißt im Punkt  $x_0 \in I$  **differenzierbar**, wenn der Grenzwert

$$f'(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (*)$$

existiert. Dann heißt  $f'(x_0)$  die **Ableitung** von  $f$  an der Stelle  $x_0$ . Man schreibt dafür auch

$$\frac{d}{dx}f(x_0) \quad \text{oder} \quad \frac{df}{dx}(x_0) \quad \text{oder} \quad \left. \frac{df}{dx}(x) \right|_{x=x_0}.$$

**7.3 Bemerkung.** In (\*) ist gemeint, dass die Funktion  $x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  von  $I \setminus \{x_0\}$  nach  $\mathbb{C}$  einen Grenzwert bei  $x_0$  im Sinne von Definition 6.4 hat.

Wegen Proposition 6.6 ist das genau dann der Fall, wenn der Limes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$$

für jede Folge  $(x_n)$  in  $I \setminus \{x_0\}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  existiert.

### 7.4 Satz. Lineare Approximierbarkeit

Eine Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  ist in  $x_0 \in I$  genau dann differenzierbar, wenn gilt

$$(*) \quad f(x) = \underbrace{f(x_0)}_{\text{konstant}} + a \cdot \underbrace{(x - x_0)}_{\text{linear}} + \underbrace{\varphi_{x_0}(x - x_0)}_{\text{Rest}}$$

für ein  $a \in \mathbb{C}$  und eine Funktion  $\varphi_{x_0} : \{h \in \mathbb{R} \mid h + x_0 \in I\} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi_{x_0}(h)}{h} = 0.$$

Der „Restterm“  $\varphi_{x_0}$  geht für  $x \rightarrow x_0$  also schneller als linear gegen Null.

## 7 Eindimensionale Differentialrechnung

*Beweis.* Ist  $f$  in  $x_0$  differenzierbar, so gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Für  $\varphi_{x_0}(h) := f(x_0 + h) - f(x_0) - h \cdot f'(x_0)$  gilt somit

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi_{x_0}(h)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi_{x_0}(x - x_0)}{x - x_0} = \left( \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) - f'(x_0) = 0.$$

Also gilt (\*) mit  $a = f'(x_0)$ .

Ist umgekehrt  $f$  in  $x_0$  linear approximierbar, so gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi_{x_0}(x - x_0)}{x - x_0} = a,$$

d.h.  $f$  ist differenzierbar bei  $x_0$  mit  $f'(x_0) = a$ . □

### 7.5 Definition. Differenzierbare Funktionen

Eine Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  heißt differenzierbar, falls sie in jedem Punkt  $x_0 \in I$  differenzierbar ist.

### 7.6 Satz. Differenzierbare Funktionen sind stetig

Ist  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  differenzierbar in  $x_0$ , so ist  $f$  stetig in  $x_0$ .

*Beweis.* Aus der linearen Approximierbarkeit folgt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x_0) + a(x - x_0) + \varphi_{x_0}(x - x_0)) = f(x_0).$$

Also ist  $f$  stetig in  $x_0$ . □

**7.7 Beispiele.** (a) Die konstante Funktion  $f(x) \equiv c$  hat überall die Ableitung 0, da

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{0}{x - x_0} = 0.$$

(b) Die Identität  $f(x) = x$  hat überall die Ableitung 1, da

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 1 = 1.$$

(c) Die Funktion  $f(x) = x^2$  hat die Ableitung

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = 2x_0.$$

### 7.8 Satz. Ableitung der Exponentialfunktion

Die Exponentialfunktion  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  hat in jedem Punkt  $x \in \mathbb{R}$  die Ableitung  $\exp(x)$ .

*Beweis.* Wir zeigen zunächst  $(e^x)'|_{x=0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 = e^0$  und folgern danach  $(e^x)' = e^x$  aus dem Exponentialgesetz.

In Satz 3.3 wurde gezeigt, dass  $e^x \geq 1 + x$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  und  $|e^x - 1| \leq \frac{|x|}{1 - |x|}$  für  $|x| < 1$ . Man mache sich klar, dass daraus für  $|x| < 1$

$$\frac{1}{1 + |x|} \leq \frac{e^x - 1}{x} \leq \frac{1}{1 - |x|}$$

folgt. Also ist

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

und für  $x_0 \in \mathbb{R}$  gilt damit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^{x-x_0} - 1}{x - x_0} = e^{x_0}.$$

□

### 7.9 Beispiel. Die Betragsfunktion

Die Betragsfunktion  $\text{abs}: x \mapsto |x|$  ist für  $x \neq 0$  differenzierbar

$$\text{abs}'(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

Im Punkt  $x = 0$  ist sie nicht differenzierbar, da

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = -1.$$

Um zusammengesetzte Funktionen bequem differenzieren zu können, benötigen wir noch die bekannten Ableitungsregeln.

### 7.10 Satz. Ableitungsregeln

Seien  $f, g: I \rightarrow \mathbb{C}$  differenzierbar (in  $x_0$ ). Dann gilt:

(a) Für  $a, b \in \mathbb{C}$  ist  $af + bg: I \rightarrow \mathbb{C}$  differenzierbar (in  $x_0$ ) und es gilt

$$(af + bg)' = af' + bg'. \quad \text{Linearität der Ableitung}$$

(b)  $f \cdot g$  ist differenzierbar (in  $x_0$ ) und es gilt

$$(f \cdot g)' = f'g + f \cdot g'. \quad \text{Produktregel}$$

(c) Dort wo  $g(x) \neq 0$  ist, gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}. \quad \text{Quotientenregel}$$

*Beweis.* (a) Das folgt aus Proposition 2.14 (f).

(b) Da  $f$  insbesondere auch stetig ist, folgt die Behauptung, indem man in

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = f(x) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + g(x_0) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

den Limes  $x \rightarrow x_0$  bildet.

(c) Zunächst ist  $\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$ , da analog zu (b)

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \frac{1}{g(x_0)g(x)} \frac{g(x_0) - g(x)}{x - x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

gilt. Mit der Produktregel folgt dann sofort

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = f' \cdot \frac{1}{g} + f \left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

□

**7.11 Satz. Kettenregel**

Seien  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar mit  $g(J) \subset I$ . Dann ist auch  $f \circ g : J \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und es gilt

$$(f \circ g)'(x) = (f' \circ g)(x) \cdot g'(x) \quad \left( := f'(g(x)) g'(x) \right)$$

*Beweis.* Sei zunächst  $g'(x_0) \neq 0$ . Da  $g'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$  ist, muss für  $x$  hinreichend nahe bei  $x_0$  (aber  $x \neq x_0$ ) gelten, dass  $g(x) \neq g(x_0)$ . Also gilt für  $x$  nahe bei  $x_0$

$$\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = \underbrace{\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)}}_{\rightarrow f'(g(x_0))} \underbrace{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{\rightarrow g'(x_0)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0),$$

da  $g(x) \rightarrow g(x_0)$  für  $x \rightarrow x_0$ . Sei nun  $g'(x_0) = 0$ . Da  $f$  im Punkt  $g(x_0)$  differenzierbar ist gilt für  $y$  nahe bei  $g(x_0)$

$$\left| \frac{f(y) - f(g(x_0))}{y - g(x_0)} \right| \leq L, \quad (\text{d.h. } f \text{ ist Lipschitz-stetig})$$

also

$$|f(y) - f(g(x_0))| \leq L|y - g(x_0)|,$$

und somit

$$\left| \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} \right| \leq \frac{L|g(x) - g(x_0)|}{|x - x_0|} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0.$$

Dass die Lipschitz-Stetigkeit aus der Differenzierbarkeit folgt, ist eine Übungsaufgabe.  $\square$

**7.12 Satz. Die Ableitung der Umkehrfunktion**

Es sei  $f : I \rightarrow J$  stetig und bijektiv,  $I, J \subset \mathbb{R}$  Intervalle. Es sei  $f$  differenzierbar in  $x_0 \in I$  mit  $f'(x_0) \neq 0$ . Dann ist die Inverse  $f^{-1} : J \rightarrow I$  differenzierbar in  $y_0 := f(x_0) \in J$  mit

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

*Beweis.* (a) **Graphisch:** Eine Spiegelung an der Diagonalen invertiert die Steigung.

(b) **Analytisch:** Mit Satz 3.11 ist  $f^{-1} : J \rightarrow I$  ebenfalls stetig. Für jede Folge  $(y_n)$  in  $J$  mit  $y_n \rightarrow y_0, y_n \neq y_0$ , gilt daher  $x_n := f^{-1}(y_n) \in I, x_n \neq x_0$  und  $x_n \rightarrow f^{-1}(y_0) = x_0$ . Da  $f$  in  $x_0$  differenzierbar ist, folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)}{y_n - y_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

$\square$

Nun können wir die uns bisher bekannten Funktionen differenzieren:

**7.13 Beispiele.** (a) Für  $f_n(x) := x^n, n \in \mathbb{N}_0$ , gilt

$$f'_0(x) = 0 \quad \text{und} \quad f'_n(x) = nx^{n-1} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

**Beweis durch Induktion:** Die Fälle  $n = 0, 1, 2$  haben wir bereits gezeigt. Der Schritt  $n \Rightarrow n + 1$  folgt aus der Produktregel:

$$f'_{n+1} = (xf_n)' = 1f_n + xf'_n = f_n + xnf_{n-1} = (n+1)x^n.$$

Für Polynome  $p(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$  gilt also

$$p'(x) = \sum_{j=1}^n a_j j x^{j-1} = \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1} (j+1) x^j.$$

(b) Die **Logarithmusfunktion**  $\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  hat mit Satz 7.12 die Ableitung

$$\ln'(y) = \frac{1}{\exp'(\ln(y))} = \frac{1}{\exp(\ln(y))} = \frac{1}{y}.$$

(c) Die Ableitung von **Sinus und Kosinus**.

Wir wissen bereits, dass  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ , und aus

$$0 \leq 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \leq 2 \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2}$$

folgt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0.$$

Mit Hilfe der Additionstheoreme folgt dann

$$\begin{aligned} \sin'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \cos x \frac{\sin h}{h} + \sin x \frac{\cos h - 1}{h} \right) = \cos x \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \cos'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( -\sin x \frac{\sin h}{h} + \cos x \frac{\cos h - 1}{h} \right) = -\sin x. \end{aligned}$$

(d) Für  $\arcsin : (-1, 1) \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  ergibt sich

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'(\arcsin y)} = \frac{1}{\cos(\arcsin y)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin y)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}},$$

da  $\cos x > 0$  für  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ .

(e) Für  $\arccos : (-1, 1) \rightarrow (0, \pi)$  zeigen Sie in den Übungen, dass  $\arccos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ .

(f) Ebenfalls in den Übungen wird  $\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$  mit Hilfe der Quotientenregel gezeigt.

(g) Schließlich gilt für  $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\arctan' y = \frac{1}{\tan'(\arctan y)} = (1 + \tan^2(\arctan y))^{-1} = (1 + y^2)^{-1} = \frac{1}{1 + y^2}.$$

Wie Sie aus der Schule wissen, liefern die Nullstellen der Ableitung Kandidaten für lokale Extrema.

### 7.14 Definition. Lokale Extrema

Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall. Wir sagen, dass  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  bei  $x_0 \in I$  ein

- **lokales Maximum** hat, falls

$$\exists \delta > 0 \forall x \in B_\delta(x_0) \cap I : f(x) \leq f(x_0)$$

## 7 Eindimensionale Differentialrechnung

- **lokales Minimum** hat, falls

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in B_\delta(x_0) \cap I : f(x) \geq f(x_0)$$

### 7.15 Satz. Notwendiges Kriterium für lokales Extremum

Sei  $I$  ein offenes Intervall. Hat  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  bei  $x_0 \in I$  ein lokales Extremum (Maximum oder Minimum) und ist  $f$  bei  $x_0$  differenzierbar, so ist  $f'(x_0) = 0$ .

*Beweis.* Sei  $x_0$  lokales Maximum, dann gilt

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

und

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

also  $f'(x_0) = 0$ . Für ein Minimum verfähre man analog. □

## 7.2 Der Mittelwertsatz

### 7.16 Satz. Satz von Rolle

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und in  $(a, b)$  differenzierbar und  $f(a) = f(b)$ . Dann existiert ein  $x_0 \in (a, b)$  mit  $f'(x_0) = 0$ .

*Beweis.* Ist  $f(x) = f(a)$  für alle  $x \in (a, b)$ , so ist  $f'(x) = 0$  für alle  $x \in (a, b)$ . Andernfalls ist  $\sup f > f(a)$  oder  $\inf f < f(a)$ . Nach Satz 6.16 nimmt  $f$  sein Maximum (oder Minimum) in einem Punkt  $x_0 \in (a, b)$  an, wo nach Satz 7.15  $f'(x_0) = 0$  gilt. □

### 7.17 Satz. Mittelwertsatz

Ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und in  $(a, b)$  differenzierbar, so gibt es (mindestens) ein  $x_0 \in (a, b)$  mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Steigung der Tangente bei  $x_0$  = Steigung der Sekante durch die Punkte  $(a, f(a))$  und  $(b, f(b))$ .

*Beweis.* Satz von Rolle "gekippt": Betrachte die Funktion

$$h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) := f(x) - (x - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Es ist  $g$  in  $(a, b)$  differenzierbar, in  $[a, b]$  stetig und es gilt  $h(a) = f(a) = h(b)$ . Also liefert der Satz von Rolle die Existenz eines  $x_0 \in (a, b)$  mit

$$0 = h'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

**7.18 Korollar.** Sei  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann gilt

$$f \text{ ist differenzierbar mit } f'(x) = 0 \text{ für alle } x \in (a, b) \iff f \text{ ist konstant.}$$

*Beweis.* Übung. □

**7.19 Bemerkung.** Dieses Korollar scheint offensichtlich, spielt aber eine wichtige Rolle, da es die Eindeutigkeit von Lösungen von Differentialgleichungen liefert: haben zwei Funktionen die gleiche Ableitung, also  $f'(x) = g'(x)$  und stimmen sie für ein  $x_0$  überein, also  $f(x_0) = g(x_0)$ , so muss schon  $f(x) = g(x)$  für alle  $x$  gelten.

*Beweis.* Nach dem Korollar impliziert  $f'(x) - g'(x) = 0$ , dass  $f(x) - g(x)$  konstant ist. Die Konstante kann aber wegen  $f(x_0) = g(x_0)$  nur Null sein.  $\square$

**7.20 Korollar.** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und differenzierbar auf  $(a, b)$ . Dann gilt:

- (a) Es ist  $f$  genau dann monoton wachsend (bzw. fallend), wenn für alle  $x \in (a, b)$  gilt, dass  $f'(x) \geq 0$  (bzw.  $f'(x) \leq 0$ ).
- (b) Ist  $f'(x) > 0$  (bzw.  $f'(x) < 0$ ) für alle  $x \in (a, b)$ , so ist  $f$  streng monoton wachsend (bzw. fallend).

*Beweis.* (a) „ $\Rightarrow$ “ liest man aus dem Differenzquotienten ab.

„ $\Leftarrow$ “ Für  $a \leq x < y \leq b$  existiert nach dem Mittelwertsatz ein  $\xi \in (x, y)$  mit  $f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x)$ . Ist  $f'(\xi) \geq 0$  so folgt  $f(y) \geq f(x)$ , ist  $f'(\xi) \leq 0$  so folgt  $f(y) \leq f(x)$ .

- (b) Wie (a) „ $\Leftarrow$ “, nur mit strikter Ungleichung.

$\square$

**7.21 Bemerkung.** Es gibt aber streng monotone Funktionen deren Ableitung in einem Punkt verschwindet, z.B.  $x \mapsto x^3$ .

### 7.22 Satz. Verallgemeinerter Mittelwertsatz

Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und in  $(a, b)$  differenzierbar. Sei weiterhin  $g'(x) \neq 0$  für alle  $x \in (a, b)$ . Dann gibt es ein  $x_0 \in (a, b)$  mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

(Für  $g(x) = x$  ist das der obige Mittelwertsatz.)

*Beweis.* Zunächst ein Hinweis: Man kann nicht einfach die Aussagen des Mittelwertsatzes

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(x_0), \quad g(b) - g(a) = (b - a)f'(\tilde{x}_0)$$

durcheinander teilen, da ja im Allgemeinen  $x_0 \neq \tilde{x}_0$  gilt. Allerdings kann man den Beweis des Mittelwertsatzes eins zu eins auf die allgemeinere Situation übertragen: Wegen  $g'(x) \neq 0$  ist mit dem Mittelwertsatz

$$g(b) - g(a) = (b - a)g'(x_0) \neq 0.$$

Wir können also

$$h(x) := f(x) - (g(x) - g(a)) \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

betrachten. Wieder ist  $h$  in  $(a, b)$  differenzierbar und  $h(a) = f(a) = h(b)$ . Also gibt es nach Rolle ein  $x_0 \in (a, b)$  mit

$$0 = h'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x_0).$$

$\square$

## 7.3 Der Satz von Taylor und Taylorreihen

### 7.23 Definition. Ableitungen höherer Ordnung

Ist  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar, so ist  $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$  wieder eine Funktion. Falls  $f'$  ebenfalls differenzierbar ist, so nennt man  $f'' := (f')' =: f^{(2)}$  die zweite Ableitung von  $f$ . Entsprechend definiert man die  $n$ -te Ableitung  $f^{(n)}$ ,

$$f^{(n+1)} := (f^{(n)})' \text{ für } n \geq 1.$$

Man schreibt auch

$$f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n} = \frac{d^n}{dx^n} f = \left( \frac{d}{dx} \right)^n f.$$

### 7.24 Satz. Leibniz-Regel

Sind  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  und  $g : I \rightarrow \mathbb{C}$  je  $n$ -mal differenzierbar, so ist auch das Produkt  $fg$  der Funktionen  $n$ -mal differenzierbar und es gilt

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)},$$

wobei  $f^{(0)} := f$  ist.

*Beweis. durch Induktion:  $n=0$   $(f \cdot g)^{(0)} = f \cdot g = \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} f^{(k)} g^{(0-k)}$   
 $n \Rightarrow n+1$*

$$\begin{aligned} (f \cdot g)^{(n+1)} &= \frac{d}{dx} (f \cdot g)^{(n)} = \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n-k+1)}) \\ &= \binom{n}{0} f^{(0)} g^{(n+1)} + \left[ \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \right] f^{(1)} g^{(n)} \\ &\quad + \cdots + \left[ \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} \right] f^{(n)} g^{(1)} + \binom{n}{n} f^{(n+1)} g^{(0)} \\ &= \binom{n+1}{0} f^{(0)} g^{(n+1)} + \binom{n+1}{1} f^{(1)} g^{(n)} + \cdots + \binom{n+1}{n} f^{(n)} g^{(1)} \\ &\quad + \binom{n+1}{n+1} f^{(n+1)} g^{(0)} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}. \end{aligned}$$

□

### 7.25 Definition. Stetig differenzierbare Funktionen

Eine Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  heißt **stetig differenzierbar**, falls  $f$  differenzierbar ist und  $f' : I \rightarrow \mathbb{C}$  stetig ist.

Eine Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  heißt  **$n$ -mal stetig differenzierbar**, falls  $f$   $n$ -mal differenzierbar ist und  $f^{(n)} : I \rightarrow \mathbb{C}$  stetig ist. Die Funktionen  $f^{(k)}$ ,  $k = 0, \dots, n-1$  sind dann offenbar auch stetig, da sie differenzierbar sind.

Mit  $C^n(I)$  bezeichnet man den Raum der  $n$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen auf  $I$ .

Wir kommen nun zu einem der wichtigsten Sätze der Analysis, dem Satz von Taylor. Wir haben in Satz 7.4 gesehen, dass Differenzierbarkeit äquivalent zu linearer Approximierbarkeit ist. Der Satz von Taylor sagt nun, dass sich Funktionen in  $C^{n+1}(I)$  durch Polynome vom Grade  $n$  lokal bis auf Fehler der Ordnung  $(x - x_0)^{n+1}$  approximieren lassen.

**7.26 Satz. Satz von Taylor**

Sei  $f \in C^{n+1}(I)$  und  $x_0 \in I$ . Dann läßt sich  $f(x)$  für  $x \in I$  wie folgt näherungsweise durch ein Polynom (das Taylorpolynom vom Grad  $n$  bei  $x_0$ ) in  $(x - x_0)$  darstellen:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x, x_0) \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k}_{\text{Taylorpolynom vom Grad } n \text{ bei } x_0} + R_n(x, x_0). \end{aligned}$$

Das Restglied hat die Form

$$R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

wobei  $\xi = \xi(x)$  zwischen  $x_0$  und  $x$  liegt, also  $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$  mit  $0 < \theta < 1$ .

**7.27 Bemerkung.** (a) Für  $n = 1$  ist sowohl die Annahme,  $f \in C^2$ , als auch die Aussage,  $R_2 = C(x - x_0)^2$ , stärker als in Satz 7.4. Dort haben wir lediglich  $f$  differenzierbar angenommen und vom Restglied wissen wir dann nur, dass

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_2(x, x_0)}{x - x_0} = 0.$$

(b) Die Form des sog. Lagrangeschen Restglieds merkt man sich wie folgt:  $R_n(x)$  sieht so aus, wie das  $(n+1)$ -te Glied aussehen würde, nur wird  $f^{(n+1)}$  an der Stelle  $\xi$  statt bei  $x_0$  ausgewertet. Dabei hängt  $\xi$  nun von  $x$  ab und wir kennen  $\xi(x)$  im Allgemeinen nicht. Sobald wir integrieren können, werden wir noch eine andere Form des Restglieds kennenlernen.

*Beweis. des Satzes von Taylor:* Für festes  $x \in I$  seien

$$F(t) := f(x) - \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(t)}{j!}(x - t)^j \quad \text{und} \quad G(t) := \frac{(x - t)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Nun ist

$$F'(t) := \frac{d}{dt}F(t) = - \sum_{j=0}^n \left( \frac{f^{(j+1)}(t)}{j!}(x - t)^j - \frac{f^{(j)}(t)}{(j-1)!}(x - t)^{j-1} \right) = - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n$$

und

$$G'(t) = - \frac{(x - t)^n}{n!}.$$

Setzen wir nun  $t = x_0$  bzw.  $x$ , so liefert der verallgemeinerte Mittelwertsatz, Satz 7.22, ein  $\xi$  zwischen  $x_0$  und  $x$  mit

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = f^{(n+1)}(\xi).$$

Da

$$F(x) = G(x) = 0, \quad \text{folgt} \quad F(x_0) = G(x_0) f^{(n+1)}(\xi),$$

also die Behauptung. □

## 7 Eindimensionale Differentialrechnung

Ist eine Funktion  $f$  beliebig oft differenzierbar, man schreibt dann  $f \in C^\infty(I)$ , so heißt die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

die Taylorreihe von  $f$  an der Stelle  $x_0$ .

Es stellt sich die Frage, ob die Taylorreihe konvergiert, und wenn ja, ob ihre Summe dann gleich  $f(x)$  ist. Letzteres gilt offenbar genau dann, wenn das Restglied  $R_n(x)$  für  $n \rightarrow \infty$  gegen Null geht.

### 7.28 Korollar. Reihendarstellung der Exponentialfunktion

Für  $x \in \mathbb{R}$  gilt

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

*Beweis.* Wegen  $\exp^{(n)} = \exp$  gilt mit dem Satz von Taylor bei  $x_0 = 0$

$$\exp(x) = \sum_{j=0}^n \frac{\exp^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j + R_n(x) = \sum_{j=0}^n \frac{x^j}{j!} + \frac{\exp(\xi_n)x^{n+1}}{(n+1)!}$$

für ein  $\xi_n$  mit  $|\xi_n| < |x|$ . Damit ist auch  $\exp(\xi_n) \leq \exp(|x|)$  und es folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\exp(\xi_n)x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq \exp(|x|) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

□

### 7.29 Beispiel. Taylorreihen von Kosinus und Sinus

Es gilt

$$\cos^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^k \cos x & \text{für } n = 2k \\ (-1)^{k+1} \sin x & \text{für } n = 2k + 1 \end{cases}$$

Also fallen in der Entwicklung um  $x_0 = 0$  die ungeraden Terme weg und es bleibt

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \underbrace{(-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \sin \xi}_{R_{2n+1}}$$

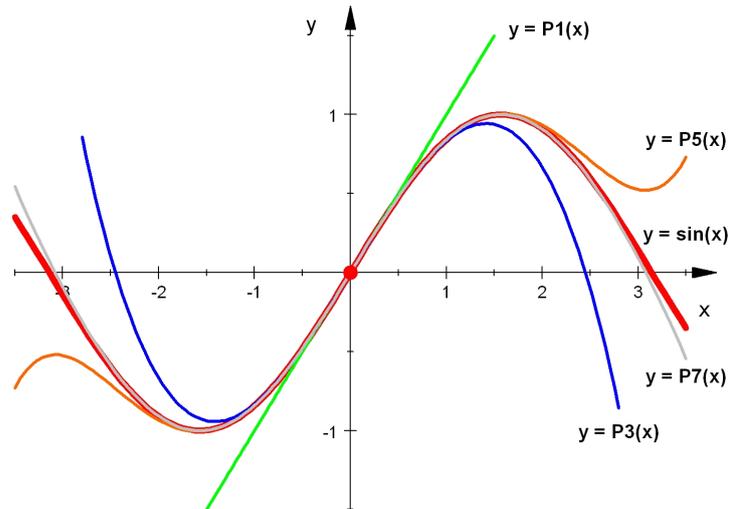
Offenbar gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{2n+1} = 0$ , also

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Analog findet man

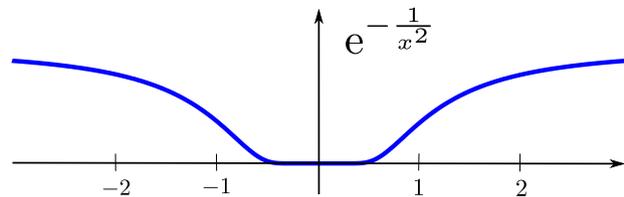
$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Im Bild sind die Taylorpolynome zu  $\sin(x)$  um den Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$  vom Grade 1, 3, 5 und 7 geplottet. Die dicke rote Kurve ist die Sinusfunktion selbst.



**7.30 Beispiel.** Es gibt aber auch Funktionen  $f$ , deren Taylorreihe auf ganz  $\mathbb{R}$  konvergiert, aber nur bei  $x = x_0$  gegen  $f(x)$ . Sei beispielsweise  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{falls } x \neq 0. \end{cases}$$



Außerhalb von 0 ist  $f$  beliebig oft differenzierbar, und die  $n$ -te Ableitung hat die Form

$$f^{(n)}(x) = p_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$$

mit einem geeigneten Polynom  $p_n$ . Somit gilt  $\lim_{x \rightarrow 0} f^{(n)}(x) = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ . Es ist also  $f$  stetig bei 0 und  $f^{(n)}$  stetig fortsetzbar bei 0 durch  $f^{(n)}(0) := 0$ . Wegen

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left( f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} p_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

ist  $f^{(n)}$  dann auch bei 0 differenzierbar und

$$f^{(n)'}(0) = 0 = f^{(n+1)}(0).$$

Somit ist die Taylorreihe von  $f$  bei  $x_0 = 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \equiv 0 \neq f(x) \quad \text{für } x \neq x_0.$$

**7.31 Beispiel.** Die Funktion  $f(x) = \frac{1}{1-x}$  für  $x \neq 1$  hat die Ableitungen

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}, \quad \dots, \quad f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

Die Taylorreihe um  $x_0 = 0$  ist also die geometrische Reihe,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Obwohl die Funktion auf ganz  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  definiert ist, konvergiert die Taylorreihe nur auf dem Intervall  $(-1, 1)$ . Wir erinnern uns, dass das Konvergenzgebiet einer Potenzreihe immer ein Kreis

## 7 Eindimensionale Differentialrechnung

in  $\mathbb{C}$  um den Entwicklungspunkt ist. Wegen der Singularität bei  $x = 1$  kann die Taylorreihe daher auch nicht für  $x \leq -1$  konvergieren!

Als Übung bestimme man den Konvergenzradius der Taylorreihe von

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \text{ um den Entwicklungspunkt } x_0 = -1.$$

Es stellt sich die Frage, ob man Funktionen differenzieren kann, indem man ihre Taylorreihe gliedweise ableitet. Probieren wir das für den Sinus,

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

so finden wir tatsächlich

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x.$$

### 7.32 Satz. Differentiation von Potenzreihen

Die Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  habe Konvergenzradius  $\varrho \in (0, \infty]$ .

- (a) Die Reihe konvergiert gleichmäßig und absolut für  $|z - z_0| \leq \tau$  mit  $0 \leq \tau < \varrho$  und divergiert für  $|z - z_0| > \varrho$ .
- (b) Die Reihe die durch gliedweise Ableitung aus ihr hervorgeht,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}(z - z_0)^n,$$

hat den gleichen Konvergenzradius  $\varrho' = \varrho$ .

- (c) Für  $z = x, z_0 = x_0 \in \mathbb{R}$  ist die Funktion

$$f : (x_0 - \varrho, x_0 + \varrho) \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

differenzierbar und die Ableitung ergibt sich durch gliedweise Differentiation,

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}(x - x_0)^n.$$

Insbesondere ist  $f \in C^\infty(x_0 - \varrho, x_0 + \varrho)$  und

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0,$$

d.h.  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$  ist die Taylorreihe von  $f$  in  $x_0$ .

*Beweis.* (a) Das ist einfach Korollar 6.22.

- (b) Sei  $\tilde{z} \neq z_0$ . Die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}(\tilde{z} - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{na_n}{\tilde{z} - z_0} (\tilde{z} - z_0)^n$$

konvergiert nach Satz 5.24, falls

$$\frac{1}{|\tilde{z} - z_0|} > \frac{1}{\varrho'} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sqrt[n]{|\tilde{z} - z_0|}}_{\rightarrow 1} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\varrho},$$

und divergiert entsprechend, falls  $|\tilde{z} - z_0| > \varrho$ .

(c) Es ist  $f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} P_N(x) := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N a_n(x-x_0)^n$  und die Frage ist, ob

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left( \lim_{N \rightarrow \infty} P_N(x) \right) \stackrel{?}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} P_N(x).$$

Der folgende Satz sagt, dass Ableitung und Limes vertauscht werden können, wenn die Konvergenz von  $(P'_N)$  gleichmäßig ist. □

### 7.33 Satz. Vertauschen von Ableitung und Limes

Es seien  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  stetig differenzierbare Funktionen. Die Folge  $(f_n)$  konvergiere punktweise gegen eine stetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  und die Folge  $(f'_n)$  konvergiere gleichmäßig gegen eine Funktion  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ . Dann ist  $f$  auf  $[a, b]$  stetig differenzierbar und es gilt  $f' = g$ .

*Beweis.* Nach Satz 6.21 ist  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  stetig. Für  $x < y \in [a, b]$  und  $n \in \mathbb{N}$  existiert nach dem Mittelwertsatz ein  $\xi_n \in (x, y)$  mit

$$\frac{f_n(y) - f_n(x)}{y - x} = f'_n(\xi_n). \quad (*)$$

Für eine Teilfolge konvergiert  $\xi_n \rightarrow \xi \in [x, y]$  und somit liefert  $\lim_{n \rightarrow \infty}$  in  $(*)$ , dass

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = g(\xi). \quad (**)$$

Hier haben wir die gleichmäßige Konvergenz von  $f' \rightarrow g$  verwendet:

$$|f'_n(\xi_n) - g(\xi)| \leq \underbrace{|f'_n(\xi_n) - g(\xi_n)|}_{< \varepsilon \text{ für } n \text{ groß genug unabh. von } \xi_n} + \underbrace{|g(\xi_n) - g(\xi)|}_{< \varepsilon \text{ für } n \text{ groß genug da } g \text{ stetig}}$$

Aus  $(**)$  folgt nun

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x} g(\underbrace{\xi(x, y)}_{\rightarrow x}) = g(x), \quad \text{da } g \text{ stetig ist.}$$

Also ist  $f$  stetig differenzierbar und  $f' = g$ . □

### 7.34 Beispiel. Taylorreihe des Logarithmus

Wie wir wissen ist  $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$  für  $|x| < 1$ . Setzen wir

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad \text{für } |x| < 1,$$

so ist

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} \quad \text{für } |x| < 1.$$

Da auch  $\ln(1+x)' = \frac{1}{1+x}$  und  $\ln(1) = f(0) = 0$  ist, folgt mit Korollar 7.18, dass  $\ln(1+x) = f(x)$  und somit

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad \text{für } |x| < 1.$$

Wieder ist das Konvergenzgebiet durch die Singularität bei  $x = -1$  beschränkt.

**7.35 Satz. Hinreichendes Kriterium für lokales Extremum**

Sei  $I$  ein offenes Intervall und  $f \in C^2(I)$ .

- (a) Hat  $f$  bei  $x_0 \in I$  ein lokales Maximum (bzw. Minimum), so gilt notwendigerweise

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f''(x_0) \leq 0 \quad (\text{bzw. } f''(x_0) \geq 0).$$

- (b) Gilt bei  $x_0 \in I$

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f''(x_0) < 0 \quad (\text{bzw. } f''(x_0) > 0),$$

so hat  $f$  bei  $x_0$  ein lokales Maximum (bzw. Minimum).

*Beweis.* Das folgt sofort aus der Taylorentwicklung um den Punkt  $x_0$  (Übungsaufgabe).  $\square$

**7.36 Satz. Regel von de l'Hospital**

Es seien  $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar, wobei  $-\infty \leq a < b \leq \infty$  und  $g'(x) \neq 0$  für alle  $x \in (a, b)$ . Weiter gelte

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

oder

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty.$$

Dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

falls der rechtsstehende Grenzwert existiert. Die analogen Aussagen gelten für  $x \rightarrow b$ .

*Beweis.* Wir betrachten den Fall  $a \in \mathbb{R}$  und  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ , können also mittels der Setzung  $f(a) = g(a) = 0$  die Funktionen  $f$  und  $g$  stetig auf das Intervall  $[a, b)$  fortsetzen. Der verallgemeinerte Mittelwertsatz liefert dann für  $x \in (a, b)$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \quad \text{für ein } a < x_0 < x.$$

Daraus folgt die Behauptung dann für  $x \rightarrow a$ . Für die anderen Fälle siehe W. Walter, Analysis I, Satz 10.11.  $\square$

**7.37 Beispiele.** (a) Für  $\alpha > 0$  gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x^{-\alpha}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{-1}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^\alpha}{-\alpha} = 0.$$

- (b) Ebenfalls für  $\alpha > 0$  gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{-1}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0.$$

- (c) Wie wir bereits wissen ist

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

- (d) Oft muss man de l'Hospital auch mehrfach anwenden:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\cos^2 x - \sin^2 x)}{6x} = \infty.$$

In solchen Fällen ist es meist einfacher, die führenden Glieder der Taylorreihe zu betrachten

$$\frac{(\sin x)^2}{x^3} = \frac{x^2 + \mathcal{O}(x^3)}{x^3} = \frac{1}{x} + \mathcal{O}(1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \infty.$$

- (e) Schließlich zeigen wir noch, dass sich der Arcustangens wie  $x^{-1}$  an seine Asymptote bei Unendlich annähert:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{x^{-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1.$$



# 8 Eindimensionale Integration

## 8.1 Das Integral für Regelfunktionen

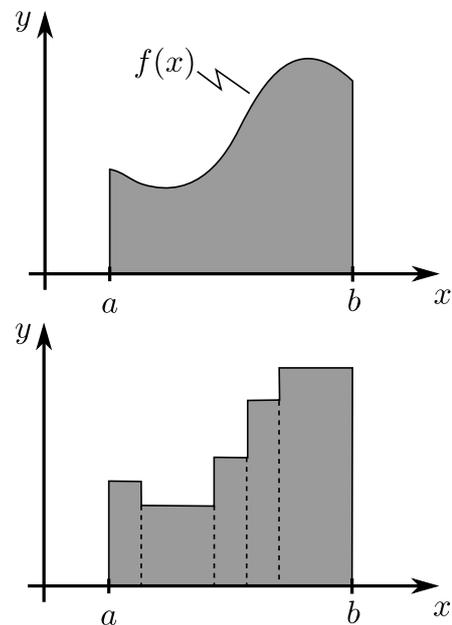
**8.1 Bemerkung.** Wir werden in diesem Kapitel das sogenannte Regelintegral einführen, da es mit dem geringsten technischen Aufwand präzise formuliert werden kann. Wenn wir später die allgemeine Integrationstheorie im Sinne von Lebesgue besprechen, werden viele der folgenden Begriffe und Sätze deutlich verallgemeinert.

### 8.2 Motivation. Das Flächenproblem

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Kann man dem Gebiet

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \text{ und } 0 \leq y \leq f(x)\}$$

unter dem Graphen von  $f$  einen Flächeninhalt zuordnen?



Für **Treppenfunktionen** ist das einfach, da die Flächenberechnung für Rechtecke elementar ist.

**Idee:** Approximiere allgemeine Funktionen durch Treppenfunktionen.

### 8.3 Definition. Treppenfunktion

Eine Funktion  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  heißt **Treppenfunktion** auf  $[a, b]$ , wenn Punkte  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_K = b$  existieren so, dass  $\varphi$  auf  $I_k = (x_{k-1}, x_k)$  für  $k = 1, \dots, K$  jeweils konstant gleich  $\varphi_k$  ist. Die Werte an den endlich vielen Punkten  $x_k$  spielen im Folgenden keine Rolle.

**8.4 Proposition.** (a) Mit  $\varphi$  sind auch  $|\varphi|$  und  $c \cdot \varphi$  für  $c \in \mathbb{C}$  Treppenfunktionen.

(b) Mit  $\varphi$  und  $\psi$  sind auch  $\varphi + \psi$  und  $\varphi \cdot \psi$  Treppenfunktionen.

*Beweis.* (a) Klar, denn auf  $I_k$  gilt  $|\varphi(x)| = |\varphi_k|$  und  $|c\varphi(x)| = |c\varphi_k|$ .

(b) Sei  $\varphi(x) = \varphi_k$  auf  $I_k = (x_{k-1}, x_k)$ ,  $k = 1, \dots, K$ , und  $\psi(x) = \psi_\ell$  auf  $\tilde{I}_\ell = (y_{\ell-1}, y_\ell)$ ,  $\ell = 1, \dots, L$ . Sei nun

$$\{a = w_0 < w_1 < \dots < w_M = b\} := \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_K = b\} \cup \{a = y_0 < \dots < y_L = b\}$$

die Vereinigung der Zwischenpunkte. Dann ist  $\varphi(x) + \psi(x) = \varphi_{k^{(m)}} + \psi_{\ell^{(m)}}$  auf  $(w_{m-1}, w_m)$ , wobei  $k^{(m)}$  und  $\ell^{(m)}$  so gewählt sind, dass

$$I_{k^{(m)}} \supset (w_{m-1}, w_m) \text{ und } \tilde{I}_{\ell^{(m)}} \supset (w_{m-1}, w_m).$$

Also ist  $\varphi + \psi$  wieder Treppenfunktion und  $\varphi \cdot \psi$  ebenfalls. □

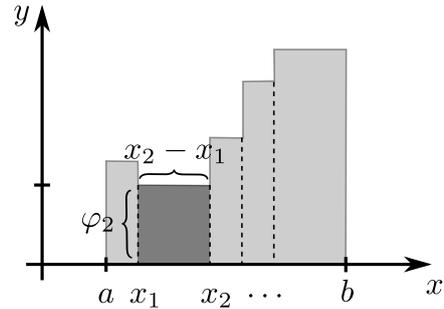
**8.5 Definition. Äquivalente Treppenfunktionen**

Zwei Treppenfunktionen  $\varphi, \psi$  auf  $[a, b]$  heißen **äquivalent**, falls  $\varphi(x) \neq \psi(x)$  für höchstens endlich viele  $x \in [a, b]$  gilt.

**8.6 Definition. Das Integral für Treppenfunktionen**

Für eine Treppenfunktion  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  definieren wir das Integral von  $\varphi$  über  $[a, b]$  durch

$$\int_a^b \varphi := \int_a^b \varphi(x) dx := \sum_{k=1}^K (x_k - x_{k-1}) \cdot \varphi_k$$



**8.7 Proposition. Äquivalente Treppenfunktionen haben das gleiche Integral.**

*Beweis.* Seien  $\varphi, \psi$  äquivalent und  $\{a = w_1 < \dots < w_M = b\}$  wie im Beweis von Proposition 8.4. Dann gilt  $\varphi(x) = \psi(x)$  für  $x \in J_m = (w_{m-1}, w_m)$ , da  $\varphi$  und  $\psi$  dort ja beide konstant sind. Es ist somit

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi(x) dx &= \sum_{k=1}^K (x_k - x_{k-1}) \cdot \varphi_k = \sum_{m=1}^M (w_m - w_{m-1}) \cdot \varphi_{k(m)} \\ &= \sum_{m=1}^M (w_m - w_{m-1}) \cdot \psi_{\ell(m)} = \sum_{\ell=1}^L (y_\ell - y_{\ell-1}) \cdot \psi_\ell = \int_a^b \psi(x) dx. \end{aligned}$$

□

**8.8 Proposition. Eigenschaften des Integrals für Treppenfunktionen**

Es seien  $\varphi, \psi$  Treppenfunktionen auf  $[a, b]$  und  $c \in \mathbb{C}$ . Dann gilt

(a)  $\int(\varphi + \psi) = \int \varphi + \int \psi$  und  $\int c\varphi = c \int \varphi$  (Linearität)

(b) Für  $\varphi \leq \psi$  reellwertig gilt

$$\int \varphi \leq \int \psi \quad (\text{Monotonie})$$

(c)  $\left| \int_a^b \varphi \right| \leq \int_a^b |\varphi| \leq \|\varphi\|_\infty \cdot (b - a)$

*Beweis.* (a) Mit gewohnter Notation ist

$$\begin{aligned} \int(\varphi + \psi) &= \sum_{m=1}^M (\varphi_{k(m)} + \psi_{\ell(m)}) \cdot (w_m - w_{m-1}) \\ &= \sum_{m=1}^M \varphi_{k(m)} \cdot (w_m - w_{m-1}) + \sum_{m=1}^M \psi_{\ell(m)} \cdot (w_m - w_{m-1}) \\ &= \sum_{k=1}^K \varphi_k \cdot (x_k - x_{k-1}) + \sum_{\ell=1}^L \psi_\ell \cdot (y_\ell - y_{\ell-1}) = \int \varphi + \int \psi. \end{aligned}$$

$$(b) \quad \int \varphi = \sum_{m=1}^M \varphi_{k(m)} \cdot (w_m - w_{m-1}) \leq \sum_{m=1}^M \psi_{\ell(m)} \cdot (w_m - w_{m-1}) = \int \psi$$

$$(c) \quad \left| \int \varphi \right| = \left| \sum_{k=1}^K \varphi_k(x_k - x_{k-1}) \right| \leq \underbrace{\sum_{k=1}^K |\varphi_k| (x_k - x_{k-1})}_{= \int |\varphi|}$$

$$\leq \max\{|\varphi_k|\} \sum_{k=1}^K (x_k - x_{k-1}) \leq \|\varphi\|_{\infty} (b - a).$$

□

### 8.9 Definition. Regelfunktionen und ihr Integral

Eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  heißt **Regelfunktion**, wenn es eine Folge  $(\varphi_n)$  von Treppenfunktionen gibt, die gleichmäßig auf  $[a, b]$  gegen  $f$  konvergiert.

Für eine Regelfunktion  $f$  definieren wir das Integral über  $[a, b]$  durch

$$\int_a^b f := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n.$$

Weiterhin setzen wir  $\int_a^a f := 0$  und  $\int_b^a f := -\int_a^b f$ .

*Beweis. der Wohldefiniertheit.* Damit die Definition Sinn macht, müssen wir zunächst zeigen, dass der Limes immer existiert und nicht von der Wahl der Folge  $(\varphi_n)$  abhängt. Zunächst sehen wir, dass

$$\left| \int \varphi_n - \int \varphi_m \right| = \left| \int (\varphi_n - \varphi_m) \right| \leq \|\varphi_n - \varphi_m\|_{\infty} (b - a) \leq (\|\varphi_n - f\|_{\infty} + \|f - \varphi_m\|_{\infty}) (b - a).$$

Da  $\varphi_n \rightarrow f$  gleichmäßig, also  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n - f\|_{\infty} = 0$ , ist  $\left( \int \varphi_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge in  $\mathbb{C}$  und somit konvergent. Sei nun  $(\psi_n)$  eine weitere Folge von Treppenfunktionen, die ebenfalls gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert. Dann ist wie oben

$$\left| \int \varphi_n - \int \psi_n \right| \leq \int |\varphi_n - \psi_n| \leq (\|\varphi_n - f\|_{\infty} + \|f - \psi_n\|_{\infty}) (b - a) \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Also ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n$ . □

### 8.10 Bemerkung. Der Begriff der Orientierung

Das Integral hat kein festes Vorzeichen. Dass wir "Flächen oberhalb der  $x$ -Achse" einen positiven Flächeninhalt zuordnen ist reine Konvention, man hätte das Vorzeichen auch umkehren können. Mathematisch nennt man diese Konvention "Orientierung" des Integrationsgebiets. Das Intervall  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  wird mit einer "Richtung" versehen, nämlich mit der Richtung "von  $a$  nach  $b$ ". Wenn wir über höherdimensionale Gebilde integrieren, werden wir den Begriff der Orientierung präzisieren.

**8.11 Proposition.** Mit  $f$  und  $g$  sind auch  $f + g$  und  $f \cdot g$  Regelfunktionen.

*Beweis.* Übung. □

### 8.12 Proposition. Eigenschaften des Integrals für Regelfunktionen

Es seien  $f, g$  Regelfunktionen auf  $[a, b]$  und  $c \in \mathbb{C}$ . Dann gilt

$$(a) \quad \int (f + g) = \int f + \int g \quad \text{und} \quad \int cf = c \int f \quad (\text{Linearität})$$

(b) Für  $f \leq g$  reellwertig gilt

$$\int f \leq \int g \quad (\text{Monotonie})$$

(c)  $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f| \leq \|f\|_\infty \cdot (b - a)$

*Beweis.* Die Aussagen folgen sofort aus Proposition 8.8 und Grenzübergang: seien  $\varphi_n \rightarrow f$  und  $\psi_n \rightarrow g$  gleichmäßige Approximationen durch Treppenfunktionen, dann gilt z.B.

$$\int (f + g) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int (\varphi_n + \psi_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n = \int f + \int g.$$

□

**8.13 Definition.** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  eine Regelfunktion und  $[c, d] \subset [a, b]$  ein Teilintervall. Dann setzen wir

$$\int_c^d f(x) dx := \int_a^b f(x) \chi_{[c,d]}(x) dx,$$

wobei

$$\chi_{[c,d]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in [c, d] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die charakteristische Funktion der Menge  $[c, d]$  heißt. Offenbar ist mit  $f$  auch  $f\chi_{[c,d]}$  eine Regelfunktion, da aus  $\varphi_n \rightarrow f$  auch  $\varphi_n \chi_{[c,d]} \rightarrow f\chi_{[c,d]}$  folgt.

Es stellt sich nun die Frage, welche Klassen von Funktionen tatsächlich Regelfunktionen und somit in obigem Sinne integrierbar sind?

**8.14 Satz. Monotone Funktionen sind Regelfunktionen**

Ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  monoton (wachsend oder fallend), so ist  $f$  eine Regelfunktion.

*Beweis.* Sei  $f$  monoton wachsend und  $h_K := \frac{1}{K}(f(b) - f(a))$ . Setze  $\varphi_k := f(a) + (k - 1) \cdot h_K$  für  $k = 1, \dots, K + 1$ , und  $x_k := \sup\{x \in [a, b] \mid f(x) \leq \varphi_{k+1}\}$  für  $k = 1, \dots, K$  und  $x_0 := a$ . Dann ist  $\varphi_K(x) = \varphi_k$  auf  $(x_{k-1}, x_k)$  eine Treppenfunktion auf  $[a, b]$  und

$$\|f - \varphi_K\|_\infty \leq h_K = \frac{f(b) - f(a)}{K} \xrightarrow{K \rightarrow \infty} 0.$$

□

**8.15 Bemerkung.** Eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt von beschränkter Variation, wenn sie als Differenz zweier monoton wachsender Funktionen geschrieben werden kann. Funktionen beschränkter Variationen sind also Regelfunktionen.

**8.16 Satz. Stetige Funktionen sind Regelfunktionen**

Ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  stetig, so ist  $f$  eine Regelfunktion.

*Beweis.* Nach Aufgabe 39 b) ist  $f$  gleichmäßig stetig, also

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in [a, b] : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Also gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  mit

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \text{falls} \quad |x - y| < \frac{b - a}{K(\varepsilon)}.$$

Mit  $x_k := a + \frac{b-a}{K(\varepsilon)} k$  für  $k = 0, \dots, K(\varepsilon)$  und  $\varphi_{K(\varepsilon)}(x) := f(x_k)$  für  $x \in (x_{k-1}, x_k)$  ist dann

$$\|\varphi_{K(\varepsilon)} - f\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Somit ist  $f$  eine Regelfunktion. □

**8.17 Bemerkung.** Offenbar sind auch stückweise stetige Funktionen Regelfunktionen.

### 8.18 Bemerkung. Riemannintegrierbarkeit

Eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Riemann-integrierbar, wenn zu jedem  $\varepsilon > 0$  Treppenfunktionen  $\varphi$  und  $\psi$  existieren so, dass  $\varphi \leq f \leq \psi$  und

$$\int_a^b \psi - \int_a^b \varphi < \varepsilon. \quad (*)$$

Die Klasse der Riemann-integrierbaren Funktionen ist etwas größer als die der Regelfunktionen. Beispielsweise ist die Funktion

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \\ \sin \frac{1}{x} & \text{sonst} \end{cases}$$

Riemannintegrierbar aber keine Regelfunktion. Letzteres liegt daran, dass die unendlich vielen Oszillationen der Funktion  $f$  nicht gleichmäßig durch Treppenfunktionen mit endlich vielen Stützstellen approximiert werden können. Außerhalb jeder noch so kleinen Umgebung um die Null ist die Funktion aber stetig und es gibt kein Problem mehr. Im Riemannintegral spielen solche kleinen Umgebungen aber keine Rolle, da in (\*) die Differenz der eingeschlossenen Flächen relevant ist.

### 8.19 Satz. Zweiter Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Für eine stetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  und jedes  $x \in [a, b]$  sei

$$F(x) := \int_a^x f.$$

Dann ist  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  stetig differenzierbar und

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in [a, b].$$

*Beweis.* Seien  $x, x+h \in [a, b]$  mit  $h > 0$ . Dann gilt aufgrund der Stetigkeit von  $f$ , dass

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| &= \left| \frac{1}{h} \left( \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right) - f(x) \right| \\ &= \left| \frac{1}{h} \int_a^b f(t) \left( \underbrace{\chi_{[a, x+h]}(t) - \chi_{[a, x]}(t)}_{\chi_{[x, x+h]}(t)} \right) dt - \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x) dt \right| \\ &= \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x)) dt \right| \\ &\leq (x+h-x) \cdot \sup_{t \in [x, x+h]} \frac{1}{h} |f(t) - f(x)| \\ &= \sup_{t \in [x, x+h]} |f(t) - f(x)| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

## 8 Eindimensionale Integration

Analog folgert man für  $x, x+h \in [a, b]$  mit  $h < 0$ , dass

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| \rightarrow 0$$

und schließt, dass

$$F'(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x).$$

□

### 8.20 Definition. Stammfunktion

Eine Funktion  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  heißt **Stammfunktion** von  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , wenn  $F$  differenzierbar ist und

$$F' = f$$

gilt. Wir schreiben dann auch  $F(x) = \int^x f$ .

**8.21 Bemerkung.** Der zweite Hauptsatz besagt also, dass jedes stetige  $f$  eine Stammfunktion hat, nämlich

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Offenbar ist mit  $F(x)$  auch  $F(x) + c$ ,  $c \in \mathbb{C}$  eine Stammfunktion von  $f$ . Das sind dann aber auch schon alle Stammfunktionen. Denn seien  $F$  und  $\tilde{F}$  Stammfunktionen von  $f$ , so gilt  $(F - \tilde{F})' = f - f = 0$ , also  $F - \tilde{F} = \text{konstant}$ .

### 8.22 Korollar. Erster Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ . Dann gilt

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) =: [F(x)]_a^b.$$

*Beweis.* Für  $F(x) := \int_a^x f(t) dt$  gilt offenbar

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) = F(b) - F(a).$$

Mit der vorangegangenen Bemerkung ist jede Stammfunktion  $\tilde{F}$  von  $f$  von der Form  $\tilde{F} = F + c$ , also

$$\tilde{F}(b) - \tilde{F}(a) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx.$$

□

**8.23 Bemerkung.** Äquivalent zu Korollar 8.22 formuliert man den ersten Hauptsatz auch oft so: Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  stetig differenzierbar, so ist  $f(b) = f(a) + \int_a^b f'(x) dx$ .

**8.24 Beispiele.** (a) Für  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$  und  $0 < a < b$  ist

$$\int_a^b x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \Big|_a^b = \frac{1}{\alpha+1} (b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}).$$

(b) Im Fall  $\alpha = -1$  ergibt sich

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_a^b = \ln b - \ln a = \ln \frac{b}{a}.$$

(c) Schließlich ist

$$\int_0^x e^t dt = e^t \Big|_0^x = e^x - 1.$$

Sucht man nur irgendeine Stammfunktion, so schreibt man auch

$$\int e^t dt = e^t.$$

### 8.25 Korollar. Integralrestglied der Taylorformel

Es sei  $f \in C^{n+1}([a, b])$  für ein  $n \in \mathbb{N}_0$ . Dann gilt für  $x, x_0 \in [a, b]$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x - t)^n dt.$$

*Beweis.* Wir setzen für  $t \in [a, b]$

$$F(t) := f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x - t)^k.$$

Es ist  $F(t)$  stetig differenzierbar und  $F(x) = 0$ , also gilt mit dem Hauptsatz, Satz 8.22,

$$F(x_0) = F(x) - \int_{x_0}^x F'(t) dt = - \int_{x_0}^x F'(t) dt.$$

Mit

$$F'(t) = - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} (x - t)^k + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!} (x - t)^{k-1} = - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x - t)^n$$

folgt die Behauptung. □

## 8.2 Integrationsmethoden

### 8.26 Satz. Partielle Integration

Es seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ . Es sei  $f$  stetig,  $g$  stetig differenzierbar und  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ . Dann gilt

$$\int_a^b fg = [Fg]_a^b - \int_a^b Fg',$$

wobei  $[Fg]_a^b := (Fg)(b) - (Fg)(a)$ .

*Beweis.* Das ist einfach der erste Hauptsatz, denn

$$[Fg]_a^b = \int_a^b (Fg)' = \int_a^b (fg + Fg') = \int_a^b fg + \int_a^b Fg'.$$

□

**8.27 Bemerkung.** In Form von Stammfunktionen schreibt sich die partielle Integration so:

$$\int^x fg = Fg(x) - \int^x Fg'$$

**8.28 Beispiele.** (a)

$$\int^x \ln(y) dy = \int^x 1 \cdot \ln(y) dy = x \ln(x) - \int^x y \cdot \frac{1}{y} dy = x \ln(x) - x.$$

(b)

$$\int_a^b x e^x dx = x e^x \Big|_a^b - \int_a^b e^x dx = [x e^x - e^x]_a^b$$

und analog

$$\int_a^b x^2 e^x dx = x^2 e^x \Big|_a^b - \int_a^b 2x e^x dx = [(x^2 - 2x + 2)e^x]_a^b.$$

Auf diese Weise kann für jedes Polynom  $p$  das Integral

$$\int_a^b p(x) e^x dx$$

berechnet werden.

(c) Manchmal reproduziert sich der Integrand nach mehrfacher partieller Integration,

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = [h(x)]_a^b + c \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Falls  $c \neq 1$ , so ist man fertig, denn dann ist

$$\int_a^b fg = \frac{1}{1-c} [h]_a^b.$$

Beispielsweise ist

$$\begin{aligned} \int^x \cos^2 y dy &= \int^x \cos y \cdot \cos y dy = \sin x \cdot \cos x + \int^x \sin y \cdot \sin y dy \\ &= \sin x \cdot \cos x + \int^x (1 - \cos^2 y) dy \\ &= \sin x \cdot \cos x + x - \int^x \cos^2 y dy. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\int^x \cos^2 x dx = \frac{1}{2}(\sin x \cos x + x).$$

**8.29 Satz. Substitutionsregel**Es sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und  $g : [c, d] \rightarrow [a, b]$  stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f = \int_c^d (f \circ g) g'.$$

*Beweis.* Sei  $F$  Stammfunktion von  $f$ . Dann folgt aus der Kettenregel und dem Hauptsatz

$$\begin{aligned} \int_{g(c)}^{g(d)} f(x) dx &= F(g(d)) - F(g(c)) = (F \circ g)(d) - (F \circ g)(c) \\ &= \int_c^d (F \circ g)'(y) dy = \int_c^d (F' \circ g)(y) g'(t) dy \\ &= \int_c^d (f \circ g)(y) g'(y) dy. \end{aligned}$$

□

**8.30 Beispiel.** Um das Integral

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{x \ln x} dx = ?$$

mit Hilfe der Substitutionsregel zu bestimmen, gibt es zwei Möglichkeiten:

(a) Wir fassen das Integral als

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{x \ln x} dx = \int_{g(c)}^{g(d)} f$$

auf und wählen  $g$  so, dass  $(f \circ g)'$  möglichst einfach ist. Das entspricht der „Substitution“ im eigentlichen Sinne.

(b) Oder wir finden  $f$  und  $g$  so, dass

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{x \ln x} dx = \int_c^d (f \circ g)g',$$

und hoffen, dass  $f$  leichter zu integrieren ist. Hier muss man „sehen“, dass  $\frac{1}{x \ln x}$  schon die Struktur  $(f \circ g)g'$  hat.

Zu (a) Wähle  $g : [c, d] \rightarrow [x_1, x_2]$ ,  $y \mapsto e^y$ , mit  $c = \ln x_1$  und  $d = \ln x_2$ . Dann ist

$$\int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\frac{1}{x \ln x}}_f dx = \int_c^d \underbrace{\frac{1}{e^y \ln e^y}}_{f \circ g} \underbrace{e^y}_{g'} dy = \int_{\ln x_1}^{\ln x_2} \frac{1}{y} dy.$$

In der Praxis würde man eher so vorgehen: Man setzt  $\ln x := y$ , gibt also  $y = g^{-1}(x)$  vor. Dann ist

$$g'(y) = \frac{d}{dy} g(y) = \frac{1}{g^{-1\prime}(g(y))} = \frac{1}{g^{-1\prime}(x)} = x$$

und es ergibt sich

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{x \ln x} dx = \int_{\ln x_1}^{\ln x_2} \frac{1}{xy} x dy = \int_{\ln x_1}^{\ln x_2} \frac{1}{y} dy.$$

Man beachte aber, dass im allgemeinen  $g$  nicht umkehrbar sein muss.

Noch einfacher merkt man sich die Substitutionsregel in dieser Form durch folgende symbolische Schreibweise (den Leibnizschen Differentialkalkül): In

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x}$$

löst man nach  $dx$  auf und findet

$$dx = x dy.$$

Das setzt man im Integral einfach ein und kürzt,

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{x \ln x} \underbrace{dx}_{=x dy} = \int_{\ln x_1}^{\ln x_2} \frac{1}{xy} x dy = \int_{\ln x_1}^{\ln x_2} \frac{1}{y} dy.$$

Zu (b) Es ist  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ , also

$$\frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} = (f \circ g)(x)g'(x)$$

mit  $g : [x_1, x_2] \rightarrow [\ln(x_1), \ln x_2]$ ,  $x \mapsto \ln x$  und  $f : [\ln x_1, \ln x_2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y \mapsto \frac{1}{y}$ . Wieder liefert die Substitutionsregel

$$\int_c^d \frac{1}{x \ln x} dx = \int_c^d \underbrace{f(g(x))}_{\frac{1}{\ln x}} \underbrace{g'(x)}_{\frac{1}{x}} dx = \int_{g(c)}^{g(d)} f(y) dy = \int_{\ln x_1}^{\ln x_2} \frac{1}{y} dy.$$

Beide Ansätze führen zum Ziel und wir haben

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{x \ln x} dx = \int_{\ln x_1}^{\ln x_2} \frac{1}{y} dy = \ln \frac{\ln x_2}{\ln x_1}$$

gezeigt.

Das Argument in (b) können wir aber leicht auf beliebige  $g$  mit  $g(x) \neq 0$  in  $[c, d]$  verallgemeinern. Es gilt nämlich (wieder mit  $f(y) = \frac{1}{y}$ ), dass

$$\int_c^d \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \int_c^d f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(c)}^{g(d)} f(y) dy = \ln \left( \frac{g(d)}{g(c)} \right)$$

Beispielsweise folgt so für  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{\cos' x}{\cos x}$ , dass

$$\int_c^d \tan x dx = \ln \left( \frac{\cos c}{\cos d} \right).$$

### 8.31 Bemerkung. Merkhilfe zur Substitutionsregel

Eine gute Merkhilfe ist folgende Notation,

$$\int_c^d f(g(x)) g'(x) dx = \int_c^d f(g(x)) d(g(x)) = \int_{g(c)}^{g(d)} f(y) dy$$

da  $\frac{dg}{dx} = g'(x)$ , also  $g'(x)dx = dg$ . Wenn wir Differentialformen einführen, wird diese Schreibweise einen präzisen Sinn bekommen.

Formal hilft sie einem aber schon jetzt bei der Anwendung der Substitutionsregel. Beispielsweise ist

$$\int_c^d \frac{f(\ln x)}{x} dx = \int_c^d f(\ln x) d(\ln x) = \int_{\ln c}^{\ln d} f(y) dy,$$

oder

$$\int_c^d f(\sin x) \cos x dx = \int_c^d f(\sin x) d(\sin x) = \int_{\sin c}^{\sin d} f(y) dy$$

oder

$$\int_a^b \frac{x^3}{(x^4 + 1)^2} dx = \int_a^b \frac{1}{(x^4 + 1)^2} \frac{d(x^4)}{4} = \frac{1}{4} \int_{a^4}^{b^4} \frac{1}{(y + 1)^2} dy = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{a^4 + 1} - \frac{1}{b^4 + 1} \right).$$

### 8.32 Beispiel. Die Kreisfläche

Um die Fläche  $F$  des Kreises mit Radius  $r$  zu bestimmen, berechnen wir die Fläche des halben Kreises als Integral über die Funktion  $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$  von  $-r$  bis  $r$ ,

$$\frac{F}{2} = \int_{-r}^r f(x) dx = \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx.$$

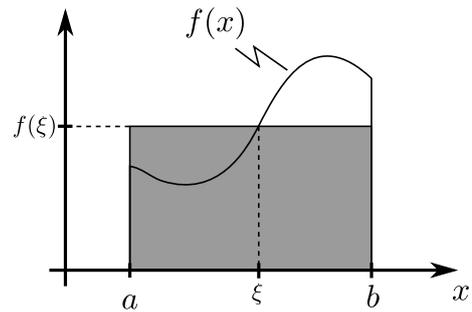
Geometrisch liegt es nahe, das Integral durch den Winkel statt durch den Achsenabschnitt zu parametrisieren, also  $g : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-r, r]$ ,  $x = g(\varphi) = r \sin \varphi$ , zu substituieren. Das liefert dann

$$\begin{aligned} \frac{F}{2} &= \int_{g(-\frac{\pi}{2})}^{g(\frac{\pi}{2})} f(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(g(\varphi)) dg(\varphi) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - g(\varphi)^2} g'(\varphi) d\varphi \\ &= r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} \cos \varphi d\varphi = r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{\pi}{2} r^2. \end{aligned}$$

**8.33 Satz. Der Mittelwertsatz der Integralrechnung**

- (a) Ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so existiert ein  $\xi \in (a, b)$  mit

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi) \cdot (b - a).$$



- (b) Ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine positive Regelfunktion, so existiert ein  $\xi \in (a, b)$  mit

$$\int_a^b f(x)\varphi(x) dx = f(\xi) \int_a^b \varphi(x) dx.$$

*Beweis.* (a) folgt aus (b) für  $\varphi(x) = 1$ .

- (b) Ist  $\min f = \max f$ , so ist  $f$  konstant und die Behauptung gilt für jedes  $\xi \in [a, b]$ . Ist  $\min f < \max f$ , so gilt

$$\min f \cdot \int_a^b \varphi(x) dx < \int_a^b f(x)\varphi(x) dx < \max f \cdot \int_a^b \varphi(x) dx$$

also

$$\min f < \frac{\int_a^b f(x)\varphi(x) dx}{\int_a^b \varphi(x) dx} < \max f.$$

Mit dem Zwischenwertsatz für die stetige Funktion  $f$  folgt die Behauptung. □

**8.34 Bemerkung.** Mit Hilfe des Mittelwertsatzes erhält man aus dem Integralrestglied das Lagrangsche Restglied der Taylorformel: Es gilt

$$\begin{aligned} R_n(x, x_0) &= \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n dt \\ &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}, \end{aligned}$$

da  $(x-t)^n$  im Integranden immer ein festes Vorzeichen hat.

**8.35 Satz. Vertauschung von Integration und Grenzübergang**

Sei  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  eine Folge von Regelfunktionen, die gleichmäßig gegen eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  konvergiert, also  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$ . Dann ist  $f$  eine Regelfunktion und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

*Beweis.* Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann existiert ein  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  mit

$$\|f - f_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für } n \geq n_\varepsilon.$$

Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  sei  $(\varphi_{n,m})_{m \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Treppenfunktionen mit  $\lim_{m \rightarrow \infty} \|f_n - \varphi_{n,m}\|_\infty = 0$ . Zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  existiert also ein  $m(n)$  so, dass

$$\|f_n - \varphi_{n,m(n)}\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}.$$

## 8 Eindimensionale Integration

Also ist  $\|f - \varphi_{n,m(n)}\|_\infty \leq \|f - f_n\|_\infty + \|f_n + \varphi_{n,m(n)}\|_\infty < \varepsilon$  für  $n \geq n_\varepsilon$ . Somit ist  $f$  eine Regelfunktion und es gilt

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f_n(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)| dx \leq \|f - f_n\|_\infty (b - a) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

□

**8.36 Korollar.** Sind  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  Regelfunktionen und konvergiert die Reihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

gleichmäßig auf  $[a, b]$ , so ist  $f$  eine Regelfunktion und

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

Insbesondere können also Potenzreihen im Inneren des Konvergenzgebiets gliedweise integriert werden,

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1} \Big|_a^b$$

für  $a, b$  mit  $|a - x_0| < \rho$  und  $|b - x_0| < \rho$ .

*Beweis.* Man wende Satz 8.35 auf die Partialsummenfolge

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^N f_n(x)$$

an.

□

### 8.37 Definition. Riemann-Summen

Es ist oft nützlich zu wissen, dass das Integral durch Riemann-Summen approximiert werden kann. Eine Zerlegung  $Z$  des Intervalls  $[a, b]$  mit Stützstellen ist gegeben durch

$$\{a = x_0 < x_1^* < x_1 < x_2^* < \dots < x_K^* < x_K = b\}$$

also durch Intervalle  $I_k = (x_{k-1}, x_k)$  mit Stützstellen  $x_k^* \in I_k$ . Die Feinheit der Zerlegung ist  $\zeta(Z) := \max_{k=1, \dots, K} |I_k| := \max\{x_k - x_{k-1} \mid k = 1, \dots, K\}$ . Die durch die Zerlegung definierte Riemann-Summe für das Integral  $\int_a^b f(x) dx$  ist

$$S_Z(f) = \sum_{k=1}^K f(x_k^*) (x_k - x_{k-1}),$$

also genau das Integral über die durch  $Z$  definierte Treppenfunktion  $\varphi_k = f(x_k^*)$  auf  $I_k$ .

### 8.38 Satz. Riemann-Summen

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  eine Regelfunktion,  $(Z_n)$  eine Folge von Zerlegungen des Intervalls  $[a, b]$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta(Z_n) = 0$ . Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{Z_n}(f) = \int_a^b f(x) dx.$$

*Beweis.* Warnung: Im Allgemeinen wird die durch die Zerlegungen  $Z_n$  definierte Folge von Treppenfunktionen **nicht** gleichmäßig gegen  $f$  konvergieren.

Sei  $\varepsilon > 0$  und  $\varphi$  eine Treppenfunktion mit

$$\|f - \varphi\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3(b-a)},$$

also

$$\int_a^b |f(x) - \varphi(x)| dx < \frac{\varepsilon}{3}$$

und

$$|S_{Z_n}(f) - S_{Z_n}(\varphi)| = \sum_{k=1}^N |f(x_k^*) - \varphi(x_k^*)|(x_k - x_{k-1}) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Für eine Treppenfunktion  $\varphi$  mit  $K$  Stufen gilt aber

$$\left| S_{Z_n}(\varphi) - \int_a^b \varphi(x) dx \right| \leq K \zeta(Z_n) \|\varphi\|_\infty$$

also

$$|S_{Z_n}(\varphi) - \int_a^b \varphi(x) dx| < \frac{\varepsilon}{3}$$

für  $n$  groß genug. Insgesamt ergibt sich also

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S_{Z_n}(f) \right| \leq \left| \int_a^b f - \int_a^b \varphi \right| + \left| \int_a^b \varphi - S_{Z_n}(\varphi) \right| + \left| S_{Z_n}(\varphi) - S_{Z_n}(f) \right| < \varepsilon$$

für  $n$  groß genug. □

## 8.3 Uneigentliche Integrale

Integrale der Form  $\int_0^\infty e^{-x} dx$  oder  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$  sind zunächst nicht definiert, da das Intervall bzw. der Integrand am Rand unbeschränkt ist. Aber es liegt nahe, z.B. folgende Setzungen zu machen:

$$\int_0^\infty e^{-x} dx := \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -e^{-x} \right]_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (-e^{-b} + e^{-0}) = 1,$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx := \lim_{a \searrow 0} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \searrow 0} \left[ 2\sqrt{x} \right]_a^1 = \lim_{a \searrow 0} (2 - 2\sqrt{a}) = 2.$$

### 8.39 Definition. Uneigentliches Integral

Sei  $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $-\infty < a < b \leq \infty$ , über jedem Intervall  $[a, c]$  mit  $c \in [a, b)$  eine Regelfunktion. Dann definieren wir das uneigentliche Integral durch

$$\int_a^b f := \lim_{c \nearrow b} \int_a^c f,$$

falls dieser Grenzwert existiert.

Das uneigentliche Integral heißt konvergent, falls  $\int_a^b f \in \mathbb{C}$  und absolut konvergent, wenn  $\int_a^b |f| < \infty$ .

**8.40 Beispiel. Die  $\Gamma$ -Funktion**

Die Gamma-Funktion  $\Gamma : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  ist durch

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

definiert. Wir werden zeigen, dass  $\Gamma(n + 1) = n!$  für  $n \in \mathbb{N}$  gilt, also, dass  $\Gamma$  die Fakultät interpoliert.

Das Integral ist uneigentlich bei  $\infty$  und falls  $\alpha < 1$  auch bei 0. Die Grenzwerte existieren jeweils wegen Monotonie und der folgenden Schranken:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_a^1 x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \lim_{a \rightarrow 0} \int_a^1 |x^{\alpha-1} e^{-x}| dx \leq \lim_{a \rightarrow 0} \int_a^1 x^{\alpha-1} dx = \lim_{a \rightarrow 0} \left[ \frac{x^\alpha}{\alpha} \right]_a^1 = \frac{1}{\alpha}$$

bzw.

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^0 \underbrace{(x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{2}})}_{\leq c} e^{-\frac{x}{2}} dx \leq \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b c e^{-\frac{x}{2}} dx = 2c e^{-\frac{1}{2}}.$$

Weiterhin gilt mit partieller Integration

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha + 1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{n}}^n x^\alpha e^{-x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left[ -x^\alpha e^{-x} \right]_{\frac{1}{n}}^n + \int_{\frac{1}{n}}^n \alpha x^{\alpha-1} e^{-x} dx \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( -n^\alpha e^{-n} + \left( \frac{1}{n} \right)^\alpha e^{-\frac{1}{n}} \right) + \alpha \Gamma(\alpha) = \alpha \Gamma(\alpha). \end{aligned}$$

Außerdem ist  $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1 = 0!$ . Daraus folgt induktiv

$$\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n) = n(n - 1)! = n!.$$

Tatsächlich ist die  $\Gamma$ -Funktion auch glatt,  $\Gamma \in C^\infty(0, \infty)$ , was wir aber später zeigen werden.

**8.41 Satz. Integralkriterium für Reihen**

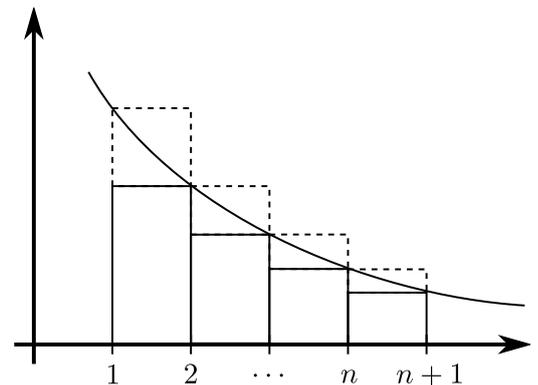
Sei  $f : [1, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$  positiv und monoton fallend. Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^\infty f(n)$$

genau dann, wenn das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty f(x) dx$$

existiert.



*Beweis.* Da  $f$  monoton fällt, gilt  $f(n + 1) \leq f(x) \leq f(n)$  für alle  $n \leq x \leq n + 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Also ist

$$f(n + 1) = \int_n^{n+1} f(n + 1) dx \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq \int_n^{n+1} f(n) dx = f(n),$$

und Summation liefert

$$\sum_{n=1}^N f(n + 1) \leq \int_1^{N+1} f(x) dx \leq \sum_{n=1}^N f(n).$$

Somit implizieren sich die Konvergenzen gegenseitig. □

**8.42 Beispiel.** Die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  konvergiert genau dann, wenn  $\alpha > 1$  ist: für das Integral über  $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$  gilt.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \lim_{a \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_1^a & \text{falls } \alpha \neq 1 \\ \lim_{a \rightarrow \infty} [\ln x]_1^a & \text{falls } \alpha = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{falls } \alpha > 1 \\ \infty & \text{falls } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Da für  $\alpha > 0$  die Funktion  $f$  positiv und monoton fallend ist, kann man das Integralkriterium anwenden. Für  $\alpha \leq 0$  ist  $\frac{1}{n^\alpha}$  keine Nullfolge, die Reihe ist dann sowieso divergent.

## 8.4 Integration rationaler Funktionen

Sind  $p, q$  reelle Polynome mit  $p(x) \neq 0$  in  $[a, b]$ , so lässt sich das Integral

$$\int_a^b \frac{q(x)}{p(x)} dx$$

explizit angeben. Das Verfahren beruht auf der sogenannten Partialbruchzerlegung, d.h. der Zerlegung der rationalen Funktion in eine Summe einfacher Bausteine, die explizit integriert werden können.

### 8.43 Satz. Komplexe Partialbruchzerlegung

Es seien  $q, p$  Polynome und es habe  $p$  den Grad  $n$  und die Nullstellen  $\{z_1, \dots, z_k\}$  mit Vielfachheiten  $\{l_1, \dots, l_k\}$ , also  $p(z) = a_n \prod_{j=1}^k (z - z_j)^{l_j}$  (Fundamentalsatz der Algebra).

Dann gibt es eindeutig bestimmte Zahlen  $A_{ij} \in \mathbb{C}$  und ein Polynom  $h(z)$  mit

$$\begin{aligned} \frac{q(z)}{p(z)} &= h(z) + \sum_{j=1}^k \sum_{m=1}^{l_j} \frac{A_{jm}}{(z - z_j)^m} \\ &= h(z) + \frac{A_{11}}{(z - z_1)} + \frac{A_{12}}{(z - z_1)^2} + \dots + \frac{A_{1l_1}}{(z - z_1)^{l_1}} \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \frac{A_{k1}}{(z - z_k)} + \dots + \frac{A_{kl_k}}{(z - z_k)^{l_k}}. \end{aligned}$$

*Beweis.* Das Polynom  $h$  ergibt sich eindeutig aus Polynomdivision mit Rest,  $q = h \cdot p + r$ , also

$$\frac{q(z)}{p(z)} = h(z) + \frac{r(z)}{p(z)} \quad \text{mit Grad } r < \text{Grad } p.$$

Es reicht also  $\frac{q}{p}$  mit Grad  $q < \text{Grad } p$  zu betrachten. Induktion nach  $n = \text{Grad } p$  liefert für  $n = 1$

$$\frac{q(z)}{p(z)} = \frac{c}{z - z_1}.$$

$n - 1 \Rightarrow n$ : Sei  $z_0$  Nullstelle von  $p$  der Ordnung  $l \geq 1$ , also

$$p(z) = (z - z_0)^l \tilde{p}(z)$$

mit Grad  $\tilde{p} \leq n - 1$ ,  $\tilde{p}(z_0) \neq 0$ . Daraus folgt für alle  $z$  mit  $p(z) \neq 0$ , dass

$$\frac{q(z)}{\tilde{p}(z)} - \frac{q(z_0)}{\tilde{p}(z_0)} = \frac{1}{\tilde{p}(z)} \frac{q(z)\tilde{p}(z_0) - q(z_0)\tilde{p}(z)}{\tilde{p}(z_0)} = \frac{(z - z_0)\tilde{q}(z)}{\tilde{p}(z)}$$

## 8 Eindimensionale Integration

mit einem Polynom  $\tilde{q}$  vom Grad  $\tilde{q} \leq n - 2$ . Also ist

$$\frac{q(z)}{p(z)} = \frac{q(z)}{(z - z_0)^l \tilde{p}(z)} = \frac{q(z_0)}{\tilde{p}(z_0)} \frac{1}{(z - z_0)^l} + \frac{\tilde{q}(z)}{\tilde{p}(z)} \frac{1}{(z - z_0)^{l-1}}$$

Auf den letzten Term kann man die Induktionsvoraussetzung anwenden, da der Grad des Nenners  $n - 1$  ist.

Die Eindeutigkeit folgt, wenn wir

$$\sum_{j=1}^k \sum_{m=1}^{l_j} \frac{A_{jm}}{(z - z_j)^m} = 0 \quad \Rightarrow \quad A_{jm} = 0 \quad \text{für alle } j, m$$

zeigen können. Das sieht man aber leicht: Multiplikation der linken Seite mit  $(z - z_j)^{l_j}$  und Auswertung bei  $z = z_j$  liefert  $A_{jl_j} = 0$ . Multiplikation der linken Seite mit  $(z - z_j)^{l_j-1}$  und Auswertung bei  $z = z_j$  liefert  $A_{j,l_j-1} = 0$  usw.  $\square$

### 8.44 Satz. Reelle Partialbruchzerlegung

Seien  $q, p$  reelle Polynome,  $p$  vom Grad  $n$  und

$$p(x) = a_n \prod_{j=1}^k (x - x_j)^{l_j} \prod_{j=1}^r (x^2 + 2b_j x + c_j)^{m_j}$$

mit  $b_j^2 < c_j$ . Dann gibt es eindeutig bestimmte Zahlen  $A_{jl}, B_{jm}, C_{jm}$  so, dass

$$\frac{q(x)}{p(x)} = h(x) + \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^{l_j} \frac{A_{jl}}{(x - x_j)^l} + \sum_{j=1}^r \sum_{m=1}^{m_j} \frac{B_{jm}x + C_{jm}}{(x^2 + 2b_j x + c_j)^m}.$$

*Beweis.* Man fasse die Terme mit komplex konjugierten Nullstellen aus Satz 8.43 zusammen.  $\square$

### 8.45 Beispiel. Betrachte

$$\frac{x^4 + 2}{x^3 - x} = \frac{x^4 + 2}{x(x^2 - 1)} = \frac{x^4 + 2}{x(x+1)(x-1)},$$

wobei die Nullstellen  $0, 1, -1$  des Nenners alle einfach sind. Polynomdivision mit Rest liefert zunächst

$$\left( \begin{array}{r} x^4 \\ -x^4 + x^2 \\ \hline x^2 \end{array} + 2 \right) : (x^3 - x) = x + \frac{x^2 + 2}{x^3 - x}$$

Es ist also

$$\frac{x^2 + 2}{x^3 - x} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x - 1} + \frac{A_3}{x + 1}$$

und Multiplikation mit  $x^3 - x$  ergibt

$$x^2 + 2 = (x^2 - 1)A_1 + x(x + 1)A_2 + x(x - 1)A_3.$$

Einsetzen von

$$\begin{array}{lll} x = 1 & \text{liefert} & 3 = 2A_2 \Rightarrow A_2 = \frac{3}{2} \\ x = 0 & \text{liefert} & 2 = -A_1 \Rightarrow A_1 = -2 \\ x = -1 & \text{liefert} & 3 = 2A_3 \Rightarrow A_3 = \frac{3}{2}. \end{array}$$

Insgesamt ist also

$$\frac{x^4 + 2}{x^3 - x} = x - \frac{2}{x} + \frac{3}{2} \frac{1}{x - 1} + \frac{3}{2} \frac{1}{x + 1}.$$

## 9 Fourierreihen

Ziel der Fourierreihenentwicklung ist es, Funktionen als Summen trigonometrischer Funktionen darzustellen,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

Man möchte also in Anteile verschiedener Frequenzen zerlegen.

### 9.1 Motivation. Die Wärmeleitungsgleichung in einer Dimension

Wir betrachten die folgende physikalische Situation: Ein dünner Metalldraht der Länge  $\ell$  sei außen isoliert und an den Enden in thermischem Kontakt mit einem Wärmebad der festen Temperatur  $T_0$ . Ohne Einschränkung können wir  $T_0 = 0$  wählen.

Sei  $u(x, t)$  die Temperatur des Drahtes an der Stelle  $x \in [0, \ell]$  zum Zeitpunkt  $T \in [0, \infty)$ , also

$$u : \underbrace{[0, \ell]}_{\text{Ort}} \times \underbrace{[0, \infty)}_{\text{Zeit}} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Die Funktion  $u(x, t)$  erfüllt die **Wärmeleitungsgleichung**

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = k \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t),$$

wobei  $k$  eine materialabhängige Konstante ist. Die Wärmeleitungsgleichung ist eine lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Da die Temperatur an den Enden fixiert ist, gelten die **Randbedingungen**

$$u(0, t) = u(\ell, t) = T_0 = 0 \quad \text{für alle } t \in [0, \infty).$$

Wir interessieren uns für Lösungen der Wärmeleitungsgleichung für  $t > 0$ , wobei wir  $u(x, 0) = u_0(x)$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  als vorgegeben betrachten. Das sind die sogenannten Anfangsdaten oder Anfangsbedingungen.

In Kurzform lautet unser Problem also

$$(AWP) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u = K \frac{\partial^2}{\partial x^2} u, & u(0, t) = u(\ell, t) = T_0 = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

So schreibt man üblicherweise ein Anfangswertproblem (auch Cauchyproblem oder initial value problem genannt).

**Lösungsansatz:** „Trennung der Variablen“.

Der Ansatz

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

eingesetzt in (AWP) liefert

$$X(x)T'(t) = kX''(x)T(t) \quad \text{und} \quad X(0) = X(\ell) = 0.$$

## 9 Fourierreihen

Teilt man beide Seiten durch  $kX(x)T(t)$  erhält man

$$\frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Da die linke Seite nur von  $t$  und die rechte Seite nur von  $x$  abhängt, kann die Gleichheit für alle  $x$  und  $t$  nur gelten kann, wenn beide Seiten konstant sind. Also gilt

$$\frac{T'(x)}{kT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} =: -A \in \mathbb{R}$$

und wir erhalten zwei gewöhnliche Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} T'(t) &= -kAT(t) \\ X''(x) &= -AX(x). \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung kann man jeweils direkt hinschreiben,

$$\begin{aligned} T(t) &= C_0 e^{-kAt} \\ X(x) &= C_1 \cos(\sqrt{A}x) + C_2 \sin(\sqrt{A}x). \end{aligned}$$

Die Randbedingung  $X(0) = 0$  impliziert  $C_1 = 0$  und die Randbedingung  $X(\ell) = 0$  impliziert  $\sin(\sqrt{A}\ell) = 0$  also  $\sqrt{A}\ell = n\pi$  bzw.  $A = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$  für ein  $n \in \mathbb{Z}$ . Wir erhalten so eine Familie von Lösungen,

$$u_n(x, t) = T_n(t)X_n(t) := e^{-\frac{n^2\pi^2 kt}{\ell^2}} \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Wir haben  $C_0 = C_2 = 1$  gesetzt, da jedes skalare Vielfache einer Lösung des Anfangwertproblems wieder eine Lösung ist. Außerdem liefert  $n = 0$  nur die triviale Lösung und  $n$  statt  $-n$  ändert nur das Vorzeichen.

Aufgrund der Linearität der Ableitung sind Summen von Lösungen wieder Lösungen. Also ist für jede Folge  $(a_n)$  in  $\mathbb{R}$  auch

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\frac{n^2\pi^2 kt}{\ell^2}} \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

zumindst formal wieder eine Lösung. Falls wir nun die  $a_n$  so wählen können, dass

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right) \stackrel{!}{=} u_0(x)$$

gilt, so haben wir das Anfangswertproblem gelöst.

Es stellen sich also die folgenden Fragen:

- Welche Funktionen  $u_0(x)$  können wir in einer Sinus-Reihe entwickeln?
- In welchem Sinne konvergiert die Reihe?
- Können wir die Reihe gliedweise differenzieren, um eine „echte“ Lösung des Anfangswertproblems zu erhalten?

Dazu betrachten wir im Folgenden periodische Funktionen auf  $\mathbb{R}$ , bzw. Funktionen auf einem Intervall, die man ja einfach periodisch fortsetzen kann. Sei also zunächst immer

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad f(x + 2\pi) = f(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Unser Ziel ist es, solche Funktionen in der Form

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

darzustellen, oder analog, mit  $\cos(nx) = \frac{1}{2}(e^{inx} + e^{-inx})$  und  $\sin(nx) = \frac{1}{2i}(e^{inx} - e^{-inx})$

$$(*) \quad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}.$$

Es gilt dann

$$c_0 = \frac{1}{2} a_0, \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \quad \text{und} \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n).$$

Nun nehmen wir einfach mal an, dass  $f$  in der Form  $(*)$  gegeben ist. Wie sehen dann die Koeffizienten  $c_n$  aus? Die erstaunlich simple Antwort erhält man durch Multiplikation von  $(*)$  mit  $e^{-imx}$  und Integration:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx = 2\pi c_m$$

also

$$c_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx} dx.$$

Wir haben hier verwendet, dass

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx e^{i(n-m)x} = \begin{cases} \frac{e^{i(n-m)x}}{i(n-m)} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 & \text{falls } n \neq m \\ 2\pi & \text{falls } n = m \end{cases} = 2\pi \delta_{n,m}.$$

## 9.2 Definition. Fourierkoeffizienten und Fourierreihe

Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  periodisch mit Periode  $2\pi$  und eine Regelfunktion auf  $[-\pi, \pi]$ . Dann heißen die Zahlen

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x) dx, \quad n \in \mathbb{Z},$$

die **Fourierkoeffizienten** von  $f$  und

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}$$

heißt die **Fourierreihe** von  $f$ .

**9.3 Bemerkung.** Für die Koeffizienten  $a_n, b_n$  findet man

$$\begin{aligned} a_n &= c_n + c_{-n} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \\ b_n &= i(c_n - c_{-n}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx. \end{aligned}$$

**9.4 Lemma.** Falls  $f$  periodisch ist mit Periode  $P$ , dann ist

$$\int_a^{a+P} f(x) dx$$

unabhängig von  $a$ .

*Beweis.* Übungsaufgabe. □

**9.5 Lemma.** Falls  $f$  gerade ist, also  $f(x) = f(-x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ , so gilt

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(nx) \, dx \quad \text{und} \quad b_n = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Falls  $f$  ungerade ist, also  $f(x) = -f(-x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ , so gilt

$$a_n = 0 \quad \text{und} \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(nx) \, dx \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

**9.6 Bemerkung.** Der konstante Term der Fourierreihe  $c_0 = \frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x) dx$  ist einfach der Mittelwert der Funktion auf einem Intervall der Länge  $2\pi$ .

**9.7 Beispiel.** Sei  $f$  die  $2\pi$ -periodische Funktion mit

$$f(x) = |x| \quad \text{für } x \in [-\pi, \pi].$$

Da  $f$  gerade ist, gilt nach Lemma 9.5, dass  $b_n = 0$  und

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(nx) \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos(nx) \, dx.$$

Also ist

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \, dx = \frac{2}{\pi} \frac{\pi^2}{2} = \pi$$

und für  $n > 0$  ist mit partieller Integration

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos(nx) \, dx = \frac{2}{\pi} \frac{x \sin(nx)}{n} \Big|_0^\pi - \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{n} \, dx \\ &= + \frac{2}{\pi} \frac{\cos(nx)}{n^2} \Big|_0^\pi = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} = \begin{cases} -\frac{4}{\pi n^2} & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases} \end{aligned}$$

Also ist die Fourierreihe von  $f$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{\cos(nx)}{n^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k-1)n)}{(2k-1)^2}.$$

Die Reihe konvergiert absolut für alle  $x \in \mathbb{R}$ , da

$$\sum_{n=1,3,5,\dots} \left| \frac{\cos(nx)}{n^2} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

**9.8 Beispiel.** Sei  $g$  die  $2\pi$ -periodische Funktion mit

$$g(x) = x \quad \text{für } x \in (-\pi, \pi].$$

Zur Abwechslung bestimmen wir diesmal die Koeffizienten  $c_n$ . Für  $n = 0$  ist  $c_0 = \int_{-\pi}^\pi x \, dx = 0$ . Für  $n > 0$  ist

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi x e^{-inx} \, dx = \left[ \frac{x}{2\pi} \frac{e^{-inx}}{-in} \right]_{-\pi}^\pi - \underbrace{\int_{-\pi}^\pi \frac{e^{-inx}}{-in} \, dx}_{=0} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\pi e^{-in\pi}}{-in} - \frac{(-\pi) e^{in\pi}}{-in} \right] = -\frac{1}{2in} (e^{-in\pi} + e^{in\pi}) = -\frac{1}{in} \cos(n\pi) \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{in}. \end{aligned}$$

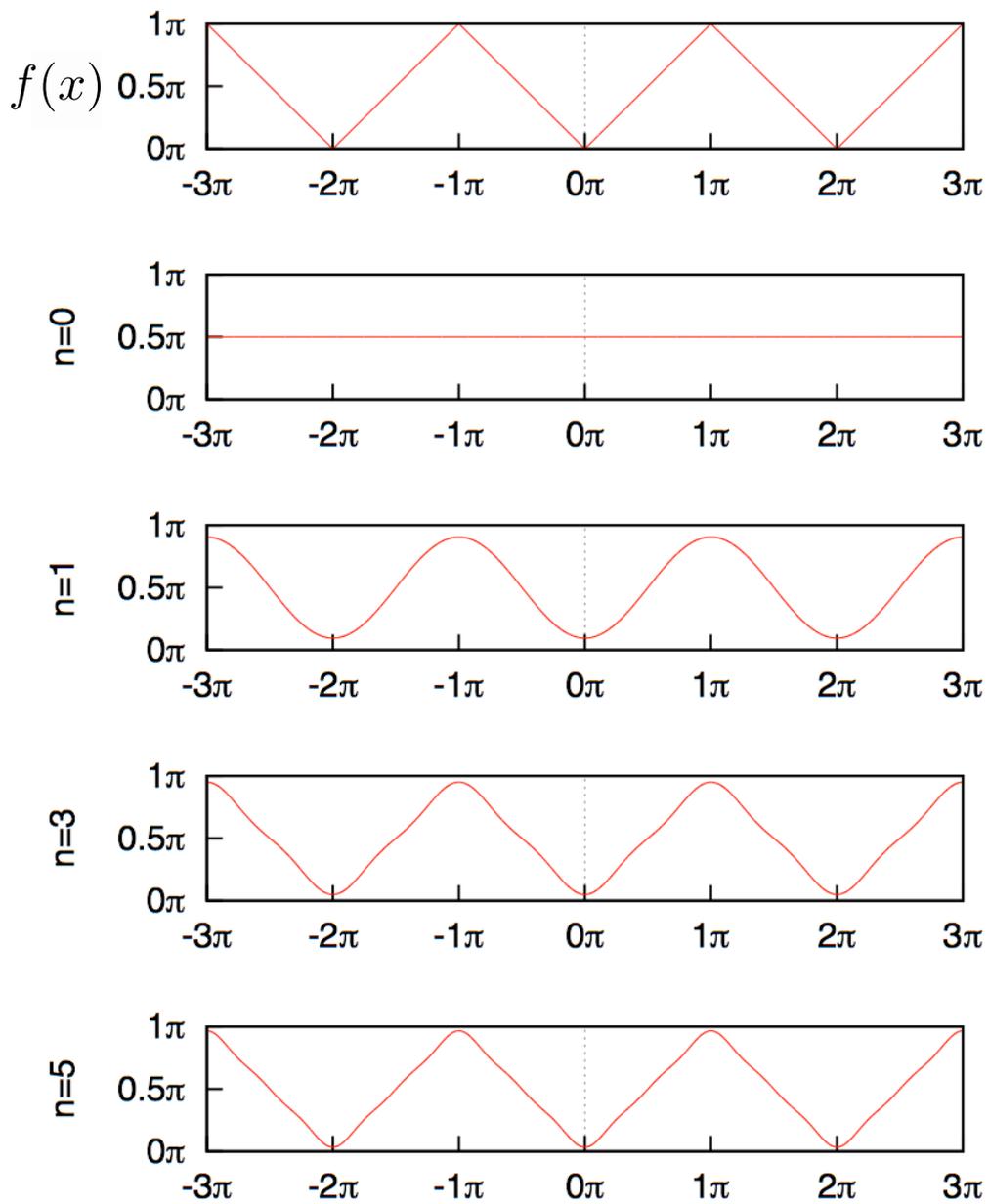


Abbildung 9.1: Einige Partialsummen  $S_n^f(x)$  der Fourierreihe zu der in Beispiel 9.7 betrachteten Funktion  $f(x) = |x|$ .

## 9 Fourierreihen

Die Fourierreihe von  $g$  ist also

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} e^{inx}}{in}.$$

Diese Reihe konvergiert nirgends absolut, denn

$$\sum_{n \neq 0} \left| \frac{(-1)^{n+1} e^{inx}}{in} \right| = \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} = \infty.$$

Kombiniert man den  $n$ -ten und den  $-n$ -ten Term

$$(-1)^{n+1} \left( \frac{e^{inx}}{in} + \frac{e^{-inx}}{-in} \right) = \frac{2(-1)^{n-1}}{n} \sin(nx),$$

erhält man die Sinusreihe

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sin(nx)}{n}.$$

Wir wollen nun das Konvergenzverhalten von Fourierreihen verstehen.

### 9.9 Lemma. Besselsche Ungleichung

Sei  $f$  eine  $2\pi$ -periodische Regelfunktion und seien  $c_n$  die Fourierkoeffizienten von  $f$ . Dann gilt

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx.$$

Wir zeigen später, dass hier tatsächlich Gleichheit gilt.

*Beweis.*

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} \right|^2 &= \left( f(x) - \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} \right) \left( \bar{f}(x) - \sum_{n=-N}^N \bar{c}_n e^{-inx} \right) \\ &= |f(x)|^2 - \sum_{n=-N}^N (c_n \bar{f}(x) e^{inx} + \bar{c}_n f(x) e^{-inx}) + \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-N}^N c_n \bar{c}_m e^{i(n-m)x}. \end{aligned}$$

Teilen wir beide Seiten durch  $2\pi$  und integrieren über  $[-\pi, \pi]$ , so ergibt sich

$$\frac{1}{2\pi} \int \left| f(x) - \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} \right|^2 = \frac{1}{2\pi} \int |f(x)|^2 - \sum_{n=-N}^N (c_n \bar{c}_n + \bar{c}_n c_n) + \sum |c_n|^2$$

Also ist

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx - \sum_{n=-N}^N |c_n|^2 \geq 0 \quad \text{für alle } N \in \mathbb{N}$$

und die Behauptung folgt im Limes  $N \rightarrow \infty$ . □

**9.10 Bemerkung.** Man rechnet leicht nach, dass

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{4} |a_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2).$$

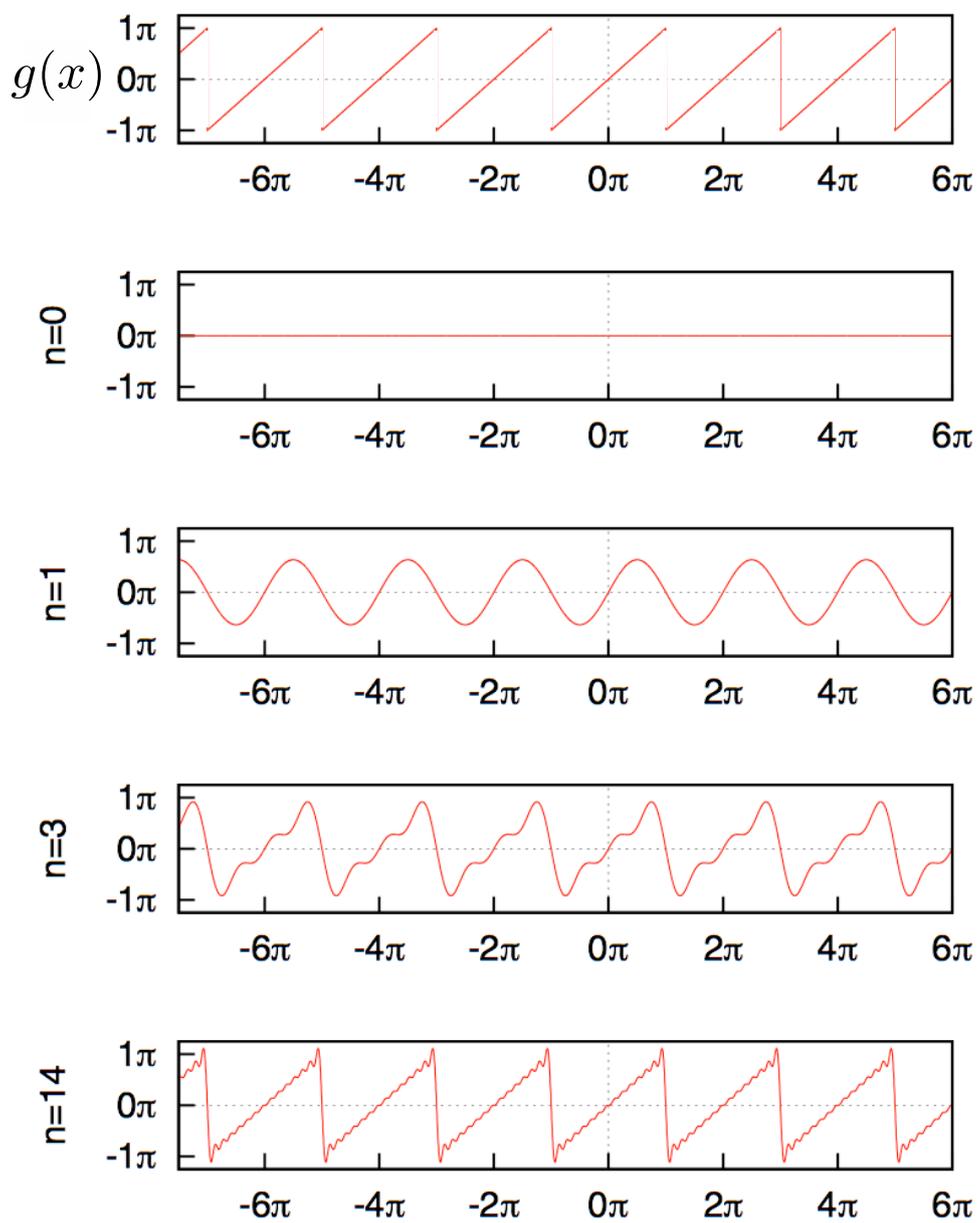


Abbildung 9.2: Einige Partialsummen  $S_n^g(x)$  der Fourierreihe zu der in Beispiel 9.8 betrachteten Funktion  $g(x) = x$ .

**9.11 Korollar. Spezialfall des Riemann-Lebesgue-Lemmas**

Die Fourierkoeffizienten einer (Regel-)integrierbaren Funktion bilden eine Nullfolge, also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0.$$

*Beweis.*  $\sum |c_n|^2 < \infty \Rightarrow |c_n|^2 \rightarrow 0 \Leftrightarrow c_n \rightarrow 0.$  □

**9.12 Definition. Stückweise Stetigkeit**

Eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  heißt **stückweise stetig**, falls

- (i)  $f$  ist stetig auf  $[a, b]$  außer an endlich vielen Stellen  $x_1, \dots, x_k$
- (ii) an jeder Unstetigkeitsstelle  $x_j, j = 1, \dots, k$ , existieren die rechts- und linksseitigen Limes

$$f(x_j^+) = \lim_{x \searrow x_j} f(x) \quad \text{und} \quad f(x_j^-) = \lim_{x \nearrow x_j} f(x)$$

und sind endlich.

Wir schreiben dann  $f \in PC([a, b])$  (piecewise continuous).

**9.13 Definition. Stückweise Differenzierbarkeit**

Eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  heißt **stückweise differenzierbar**, falls

- (i)  $f \in PC([a, b])$
- (ii)  $f'$  existiert als stückweise stetige Funktion auf  $(a, b)$ .

Wir schreiben dann  $f \in PS([a, b])$  (piecewise smooth).

Kurz gesagt:

- $f \in PC([a, b])$  falls  $f$  bis endlich viele Sprünge stetig ist
- $f \in PS([a, b])$  falls  $f$  außer an endlich vielen Sprüngen und Knicken stetig differenzierbar ist.

Insbesondere sind Singularitäten und Spitzen nicht erlaubt.

Wir sagen  $f \in PC(\mathbb{R})$  oder  $f \in PS(\mathbb{R})$ , falls  $f \in PC([a, b])$  bzw.  $f \in PS([a, b])$  für jedes endliche Intervall  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ .

Da die Fourierreihe im Allgemeinen nicht absolut konvergent ist, müssen wir auf die Summationsreihenfolge achten. Wir definieren deshalb die Partialsummen

$$S_N^f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}.$$

Die Frage ist also, ob und in welchem Sinne

$$S_N^f(x) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} f(x)$$

gilt? Dazu rechnen wir

$$\begin{aligned} S_N^f(x) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^N \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{in(x-y)} dy \\ &\stackrel{n \rightarrow -n}{=} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^N \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{in(y-x)} dy \\ &\stackrel{z=y-x}{=} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^N \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(z+x) e^{inz} dz \end{aligned}$$

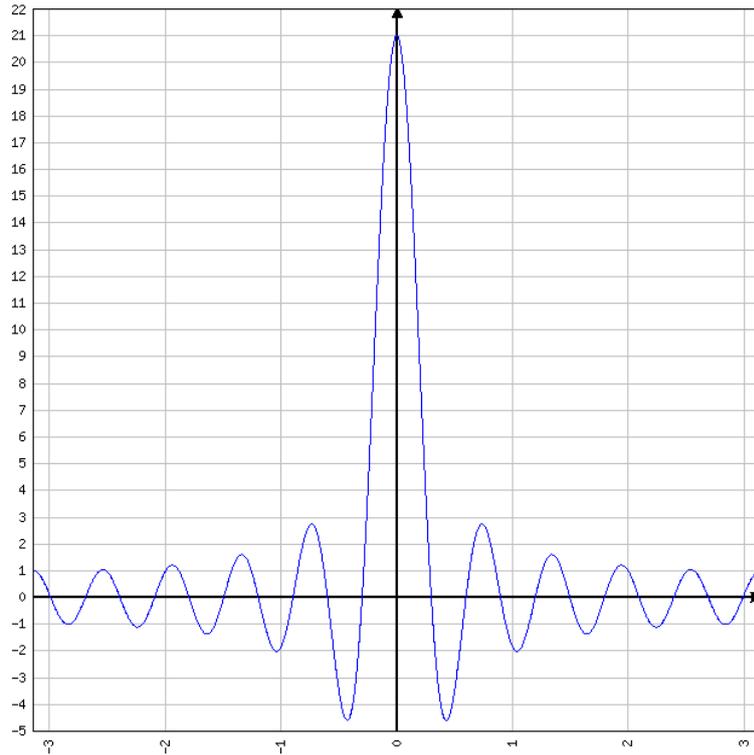


Abbildung 9.3: Der Dirichlet Kern für  $N = 10$ . Es ist  $D_N(0) = 2N + 1$ .

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^N \int_{-\pi}^{\pi} f(z+x) e^{inz} dz \\
 &=: \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z+x) D_N(z) dz,
 \end{aligned}$$

wobei

$$D_N(x) := \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^N e^{inx}$$

der Dirichlet Kern heißt.

Da es sich bei  $D_N(x)$  um eine geometrische Summe handelt,

$$D_N(x) = \frac{1}{2\pi} e^{-iNx} (1 + e^{ix} + e^{2ix} + \dots + e^{2Nix}) = \frac{1}{2\pi} e^{-iNx} \sum_{n=0}^{2N} e^{inx},$$

ergibt die Summenformel  $\sum_{n=0}^k q^n = \frac{q^{k+1}-1}{q-1}$ , dass für  $x \neq 0$

$$\begin{aligned}
 D_N(x) &= \frac{1}{2\pi} e^{-iNx} \frac{e^{i(2N+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i(N+1)x} - e^{-iNx}}{e^{ix} - 1} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i(N+\frac{1}{2})x} - e^{-i(N+\frac{1}{2})x}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{\sin(x/2)}.
 \end{aligned}$$

## 9 Fourierreihen

Man kann nun zunächst heuristisch argumentieren, dass  $D_N(x)$  für  $N \rightarrow \infty$  immer schärfer bei  $x = 0$  konzentriert ist und somit gegen die  $\delta$ -Distribution konvergiert. Man schreibt das dann so:

$$S_N^f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} dy f(x+y) D_N(y) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} dy f(x+y) \delta(y) = f(x).$$

### 9.14 Satz. Konvergenz der Fourierreihe

Sei  $f \in PS(\mathbb{R})$  eine  $2\pi$ -periodische Funktion. Dann gilt für jedes  $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N^f(x) = \frac{1}{2} (f(x^-) + f(x^+)).$$

Insbesondere gilt für jeden Punkt  $x$  an dem  $f$  stetig ist

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N^f(x) = f(x).$$

*Beweis.* Wegen

$$\begin{aligned} D_N(x) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^N e^{inx} = \frac{1}{2\pi} \left( 1 + \sum_{n=1}^N \underbrace{(e^{inx} + e^{-inx})}_{2 \cos nx} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^N \cos(nx) \end{aligned}$$

gilt

$$\int_{-\pi}^0 D_N(x) dx = \int_0^{\pi} D_N(x) dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^N \underbrace{\int_0^{\pi} \cos(nx) dx}_{=0 \forall n} = \frac{1}{2}$$

also

$$\frac{1}{2} f(x^-) = f(x^-) \int_{-\pi}^0 D_N(y) dx, \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} f(x^+) = f(x^+) \int_0^{\pi} D_N(y) dy.$$

Betrachte nun

$$\begin{aligned} S_N^f(x) - \frac{1}{2} (f(x^-) + f(x^+)) &= \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x+y) D_N(y) dy - \int_{-\pi}^{\pi} f(x^-) D_N(y) dy - \int_0^{\pi} f(x^+) D_N(y) dy \\ &= \int_{-\pi}^0 (f(x+y) - f(x^-)) D_N(y) dy + \int_0^{\pi} (f(x+y) - f(x^+)) D_N(y) dy. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} (f(x+y) - f(x^+)) D_N(y) dy &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x+y) - f(x^+)}{e^{iy} - 1} (e^{i(N+1)y} - e^{-iNy}) dy \\ &=: C_{-N-1}(g) - C_N(g) \end{aligned}$$

wobei  $C_n(g)$  der  $n$ -te Fourierkoeffizient von

$$g(y) = \begin{cases} \frac{f(x+y) - f(x^+)}{e^{iy} - 1} & \text{falls } y \geq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es ist  $g \in PC(\mathbb{R})$  und somit eine Regelfunktion. Gemäß dem Riemann-Lebesgue Lemma gilt also  $C_N(g) \rightarrow 0$  für  $N \rightarrow \infty$ .  $\square$

**9.15 Beispiel.** Nach Satz 9.14 konvergiert also im Beispiel 9.7 die Fourierreihe für jedes  $x$  gegen  $f(x) = |x|$  und es gilt für  $x \in [-\pi, \pi]$

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}.$$

Für  $x = 0$  ergibt sich

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2},$$

also

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots$$

Im Beispiel 9.8 konvergiert die Fourierreihe außer bei  $x = (2n-1)\pi$  gegen  $g(x) = x$  und für  $x = (2n-1)\pi$  gegen 0. Für  $x \in (-\pi, \pi)$  gilt also

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)$$

Für  $x = \frac{\pi}{2}$  ergibt sich

$$\frac{\pi}{2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1},$$

also

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \dots$$

Ohne Beweis geben wir noch folgenden Satz an:

**9.16 Satz. Gleichmäßige Konvergenz von Fourierreihen**

Sei  $f$  eine  $2\pi$ -periodische, stetige und stückweise differenzierbare Funktion. Dann konvergiert die Fourierreihe von  $f$  absolut und gleichmäßig gegen  $f$ .